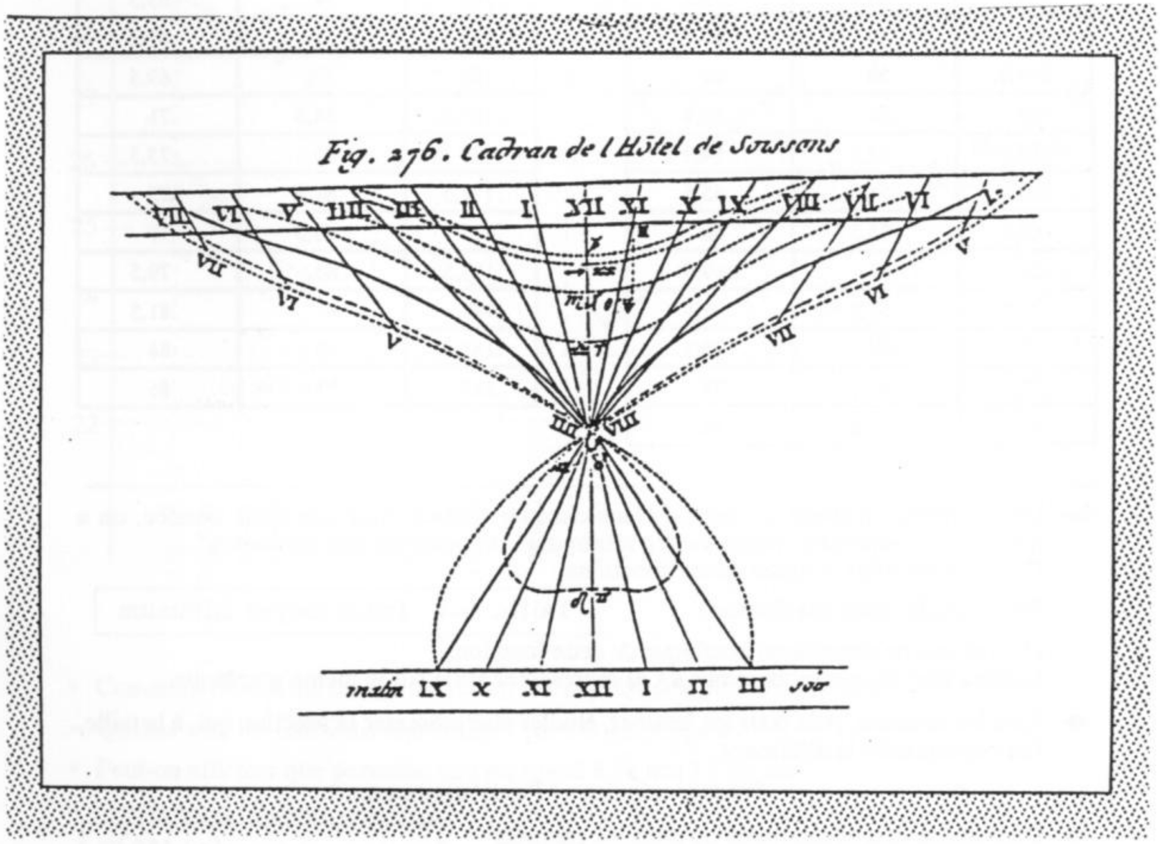
GALION THÈMES

Vers les fonctions



Cadran de l'Hôtel de Soissons

15, quai André Lassagne – 69001 LYON
1995

ISBN : 2-912209-07-2

f

1 La taille ... le poids

Voici des tableaux, trouvés dans un calendrier des Postes (mais on peut les trouver ailleurs ...) donnant, pour les hommes et les femmes de poids moyen en fonction de la taille.

Femmes

Taille (cm)	Poids moyen minimum	Poids moyen maximum
150	47	58
152,5	47,5	58,5
155	49	59,5
157,5	50	61
160	51	62,5
162,5	52,5	64,5
165	54	65,5
167,5	55,5	68
170	57	69,5
172,5	58,5	71,5
175	60	73,5
177,5	61,5	75
180	62,5	76

Hommes

Taille (cm)	Poids moyen minimum	Poids moyen maximum
157,7	52,5	64,5
160	54	65,5
162,5	55	67,5
165	57	69,5
167,5	58,5	71
170	60	73,5
172,5	61,5	75
175	63,5	77
177,5	65	79,5
180	67	81,5
182,5	69	84
185	71	86

➡ Observez bien d'abord les unités. Dans chaque tableau, pour une taille donnée, on a deux poids : expliquer "poids moyen minimum" et "poids moyen maximum".
Ces tableaux vous donnent quatre fonctions.
Par exemple, pour une femme : $\boxed{\text{Taille} \mapsto \text{Poids moyen minimum}}$
Donner une représentation graphique de cette fonction.
Quelles sont les autres fonctions ? Les représenter aussi sur le même graphique.

➡ Pour les hommes, puis pour les femmes, étudier et représenter la fonction qui, à la taille, fait correspondre la différence :

Poids maximum – Poids minimum.

➡ Dans des revues spécialisées ou dans les cabinets médicaux on trouve la formule ci-contre, appelée "Formule de Lorentz" qui permet de calculer le poids p en kg en fonction de la taille t en cm, en prenant S = 4 pour un homme et S = 2 pour une femme.

$$\boxed{p = t - 100 - \left(\frac{t-150}{S}\right)}$$

Comparer les résultats obtenus à partir de cette formule aux indications du calendrier des postes.

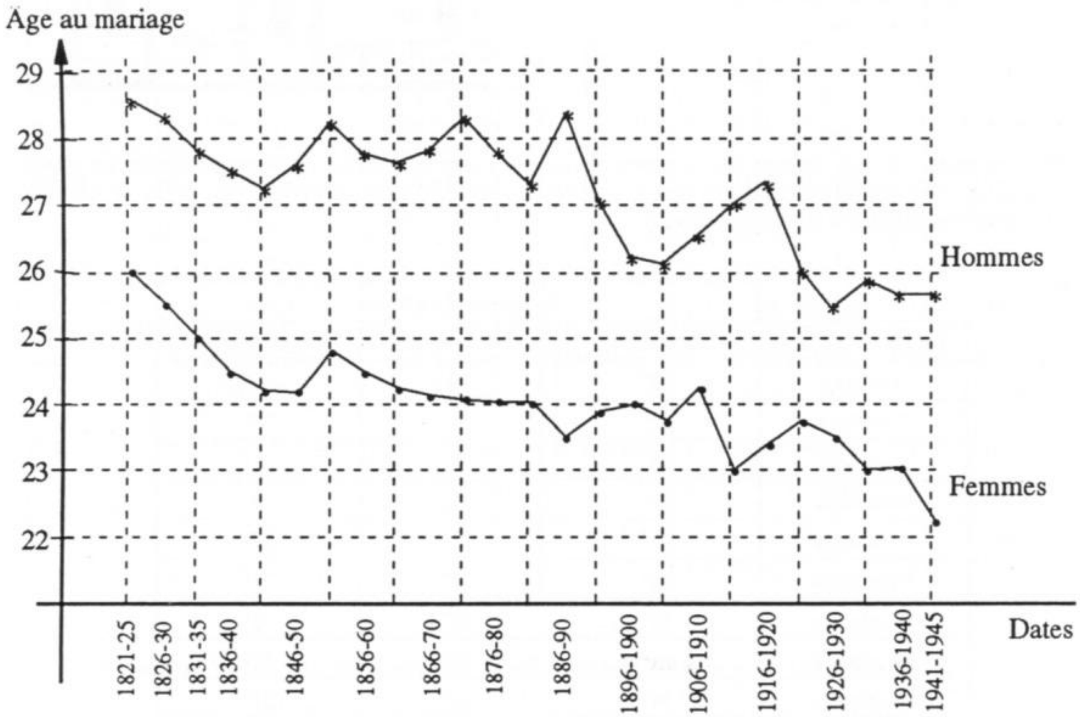
➡ Représenter graphiquement les deux fonctions pour S = 4 et pour S = 2. $t \mapsto p$.

En 1934, un habitant des Vosges pesait 311 kg pour une taille de 1,75 m.
En 1988, aux USA, une femme pesait 388 kg et une homme mesurait 2,72 m pour 199 kg.
Curieux records comparés à nos formules ...

2 Mariez-vous !

L'Institut National d'Études Démographiques (INED) s'intéresse à toutes sortes de choses, entre autres à **l'âge moyen,** au premier **mariage**, pour les hommes et les femmes. Cet âge a été calculé sur des périodes de cinq ans depuis 1821 : [1821 ; 1825], [1826 ; 1830] et ... jusqu'à la période [1941 ; 1945]. Voici le graphique obtenu.

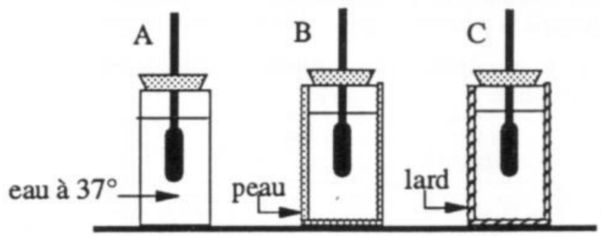
Sur le graphique, deux points successifs ont été reliés par un segment pour visualiser les variations.



- Comment est calculé un âge moyen au mariage sur une période de 5 ans ?
- Quelles sont les fonctions représentées par ces graphiques ?
- Peut-on affirmer que personne ne s'est marié à 21 ans ? à 30 ans ?
- Quelle est la tendance globale d'évolution de ces âges ?
- Construire un autre graphique donnant en fonction de la période, l'écart des âges moyens au mariage entre les hommes et les femmes.
  Quelles remarques vous inspire ce nouveau graphique ?

3 Une histoire d'eau

Dans trois flacons, on met de l'eau à la température de 37°. Le flacon A est nu ; le flacon B est entouré de peau de mouton et le flacon C est entouré de lard gras.



Le tableau suivant donne les températures de l'eau des trois flacons de deux en deux minutes. On admettra qu'entre deux relevés consécutifs de température, celle-ci décroît proportionnellement au temps écoulé.

	Température en degrés		
Temps en minutes	flacon nu	flacon avec peau	flacon avec lard
0 minute	37°	37°	37°
2 minutes	32°	35°	34°
4 minutes	28°	33°	31°
6 minutes	24°	31°	29°
8 minutes	21°	29°	27°
10 minutes	19°	27°	25°
12 minutes	17°	26°	23°
14 minutes	15°	25°	22°
16 minutes	14°	24°	21°
18 minutes	13°	23°	20°
20 minutes	12°	22°	19°

- Ce tableau vous donne trois fonctions : la première fait correspondre au temps t (en minutes) la température n (en degrés Celsius) du flacon nu : $t \longmapsto n$.
- Quelles sont les deux autres fonctions ?
- En donner une représentation graphique, sur un même dessin.
- Que signifie : *la température décroît proportionnellement au temps écoulé* ?
  Est-il judicieux de joindre deux points consécutifs du graphique ?
- Entre quels flacons, et à quel moment, l'écart des températures est-il le plus grand ?
- Représenter les écarts de température entre deux flacons ; on obtient trois graphiques.

4 Le jour et la nuit !

Le 1er et le 15 de chaque mois, pour un an, on a noté l'heure de lever L et l'heure de coucher C du soleil. Ces heures sont données en Temps Universel (T.U. : heure du méridien de Greenwich).

		L	C				
janvier	1	07h 46min	16h 02min	juillet	1	03h 53min	19h.56min
	15	07h 41min	16h 19min		15	04h 05min	19h 48min
février	1	07h 23min	16h 46min	août	1	04h 26min	19h.27min
	15	07h 02min	17h 09min		15	04h 45min	19h 04min
mars	1	06h 34min	17h 33min	septembre	1	05h 09min	18h.31min
	15	06h 05min	17h 55min		15	05h 29min	18h 57min
avril	1	05h 29min	18h 20min	octobre	1	05h 52min	17h.28min
	15	05h 01min	18h 41min		15	06h 13min	16h 59min
mai	1	04h 32min	19h 05min	novembre	1	06h 39min	16h.29min
	15	04h 10min	18h 37min		15	07h 01min	16h 09min
juin	1	03h 53min	19h 44min	décembre	1	07h 24min	15h.55min
	15	03h 48min	19h 54min		15	07h 39min	15h 53min

◆ Pour chacun de ces 24 jours (noté J), ce tableau vous donne déjà deux fonctions :

Jour $\mapsto$ heure de Lever Jour $\mapsto$ heure de Coucher

J $\mapsto$ L J $\mapsto$ C

En donner une représentation graphique sur le même repère avec des couleurs différentes. Est-il judicieux de joindre deux points par un trait continu ?

◆ Pour chacun des 24 jours, calculer la différence D = C – L.

Que représente-t-elle ? Où apparaît D sur votre graphique ?

En utilisant un second repère, donner une représentation de la fonction : J $\mapsto$ D.

◆ Que représente la durée 24 – D ? Où apparaît-elle sur votre second graphique ?

◆ À quelles dates avez-vous D = 24 – D ?

◆ Qu'est-ce qu'une saison ? Quelle est la date de début et de fin de chacune des quatre saisons ?

Qu'est-ce qu'une équinoxe ? un solstice ?

5 Les mues du criquet

(en liaison avec le professeur de biologie)

Le criquet est enfermé dans une cuticule inextensible. La taille d'un criquet, c'est-à-dire celle de sa cuticule, s'accroît donc brusquement par paliers chaque fois qu'il se débarrasse de son enveloppe rigide, c'est-à-dire chaque fois qu'il mue.

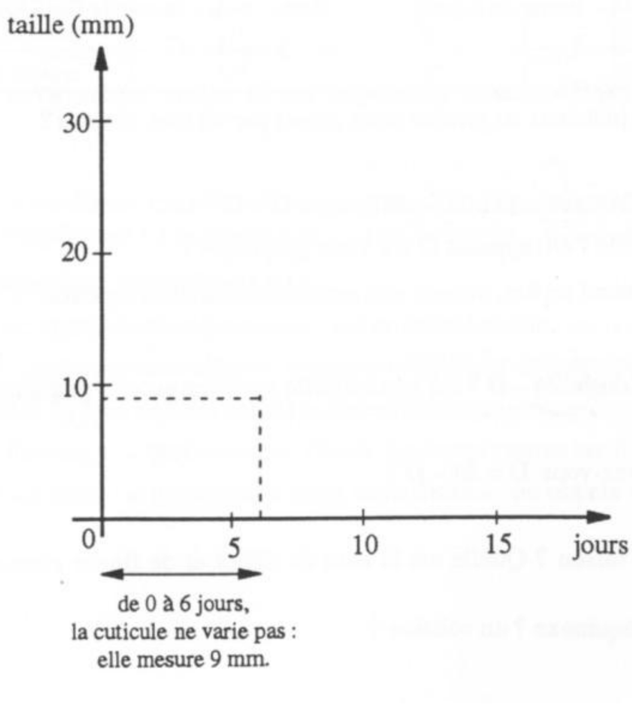
Les biologistes disent que le criquet a une croissante discontinue. D'autres arthropodes, tels que la langouste, ont le même type de croissance.

de 0 à 6 jours exclu, un criquet mesure 9 mm
de 6 à 8 jours exclu, un criquet mesure 12 mm
de 8 à 10 jours exclu, un criquet mesure 16 mm
de 10 à 13 jours exclu, un criquet mesure 21 mm
de 13 à 16 jours exclu, un criquet mesure 27 mm

Après le seizième jour, le criquet est adulte et sa taille ne change plus : elle est de 40 mm. Il a donc subi cinq mues.

- Représenter graphiquement la taille du criquet de 0 à 20 jours en négligeant la durée des mues.
  Vous obtenez la représentation d'une fonction en escaliers.

- Comment apparaissent les mues du criquet sur le graphique ?



6 Passez la monnaie !

Matériel : Des pièces de monnaie de 0,20 F, toutes identiques. Le diamètre d'une pièce de 20 centimes est 23 mm environ.

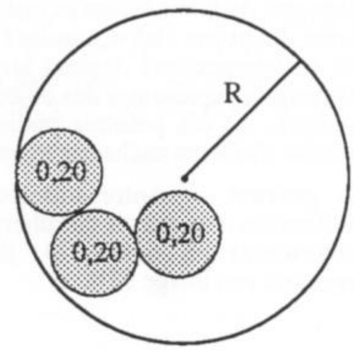
♦ Tracer avec précision un cercle de rayon R. Le but est de placer à l'intérieur du disque le plus grand nombre possible de pièces de 20 centimes, sans chevaucher et sans déborder.

Vérifier que l'on peut en placer 5, et pas plus, si R = 32 mm

On a la correspondance :

(rayon de 32 mm) → (5 pièces)

Et pour un disque de rayon 33 mm ? pour un disque de rayon 34 mm ?



Combien de pièces ?

Dans un disque de rayon 35 mm, combien pouvez-vous placer de pièces au maximum ?

♦ Examiner ce qui se passe lorsque le rayon R du disque varie, avec des valeurs inférieures à 32 mm. Que se passe-t-il si R = 10 mm ? et si R = 12 mm ?

♦ Remplir le tableau ci-contre pour R variant de 10 à 50 mm, tous les deux millimètres.

R en mm	Nombre maximum de pièces
10	
12	
14	
16	
…	
32	5
34	
…	…
50	

♦ Dessiner une représentation graphique de cette "fonction en escaliers".

♦ Et pour finir, munissez-vous d'une centaine de pièces de 0,20 F. Combien pouvez-vous en mettre, au maximum, dans un disque de rayon 115 mm ?

Ces pièces n'occupent qu'une partie de la surface du disque : quel est le pourcentage de l'aire de la surface occupée par les pièces par rapport à celle du disque entier ?

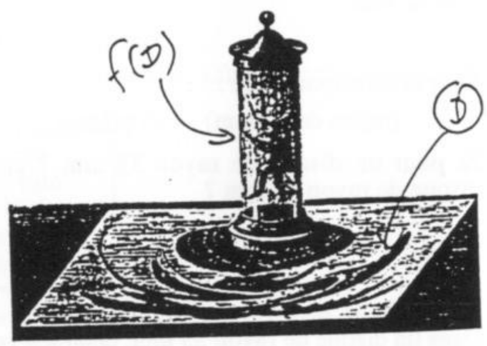
Calculer ce pourcentage pour d'autres valeurs de R.

7 L'anamorphose circulaire

Anamorphose : image déformée et grotesque

À l'occasion de l'étude de la perspective, les peintres du XV^{è} et du XVI^{è} siècle avaient rencontré de nombreuses et intéressantes transformations ne conservant pas exactement la forme des objets : les distances étant d'autant plus rétrécies que les objets sont loin, un carré (vu en perspective) devient ainsi un trapèze ou même un quadrilatère quelconque. En essayant de représenter des objets vus dans des miroirs de formes diverses (plan, circulaire, conique, ...) ces peintres réalisèrent des curieux dessins, appelés anamorphoses (dont certains d'ailleurs cachaient leurs vrais sujets sous les déformations).

La gravure ci-contre montre comment l'utilisation d'un miroir circulaire permet de reconnaître un dessin D, illisible, en regardant son image f(D).

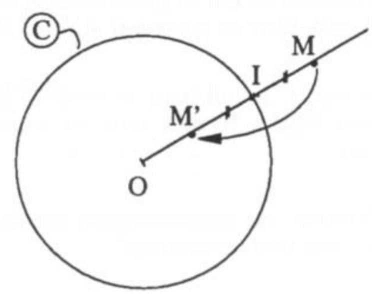


Il s'agit de la transformation qui étant donné un cercle C de centre O transforme M en M' tels que :

- la demi-droite [OM) coupe le cercle en I ;
- M' est le symétrique de M par rapport à I.

Il s'agit ici d'une fonction f qui, à un ***point***, associe un ***point***.

$$\boxed{f : M \mapsto M'}$$



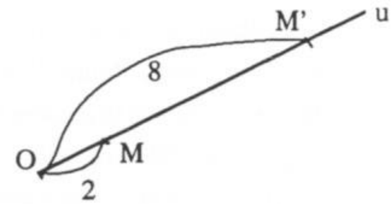
Tracer un cercle C de centre O, de 5 cm de rayon par exemple. Soit A un point de ce cercle.

- Comment se transforment les points du cercle de centre O, de rayon 6 cm ?
- Comment se transforment les points du cercle C ?
- Et les points du cercle de centre O, de rayon 2 cm ?
- Et ceux du cercle de centre O et de rayon 10 ?
- Et les points du segment [OA].
- Tracer la droite d tangente en A au cercle C. Construire des images des points de d.
- Tracer m, la médiatrice de [OA] : même question pour des points de cette droite.

Pour imaginer comment cette "fonction de points" transforme une figure, il faut s'armer de patience et construire, de manière précise, un maximum de points et leurs images ... à moins qu'une propriété lumineuse vous conduise à une conclusion intéressante.

8 Où un cercle devient une droite

Voici une nouvelle “fonction de point” originale.



O est un point fixe. L'unité de longueur est le centimètre. M est un point différent de O. On mesure OM en centimètres. Sur ***la demi-droite*** [Ou) d'origine O, qui contient M, on place le point M' tel que

$$\boxed{OM \times OM' = 16}$$

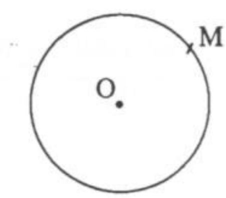
On a la fonction : M $\mapsto$ M'.

Ainsi, si OM = 2, on place M' sur [Ou) tel que OM' = 8.

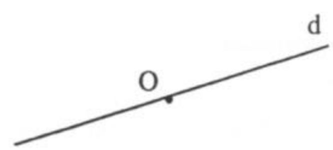
- Construire des images de points pris au hasard, sauf en O.

- M décrit un cercle de centre O, de rayon R.
  Où sont les images de M si R = 2 cm ?
  Où sont les images de M si R = 8 cm ?
  Où sont les images de M si R = 4 cm ?
  Où sont les images de M si R = 100 cm ?

  Quelle est votre conclusion ?



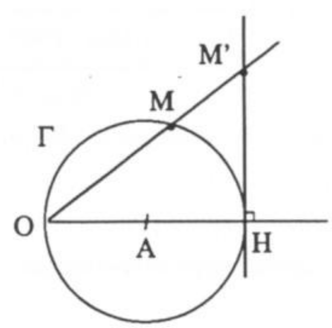
- M décrit la droite d passant par O. Où sont les images de ces points M ?



- M décrit le cercle Γ passant par O de centre A, de 4 cm de diamètre.
  [OH] est un diamètre donc OH = 4.
  Quelle est l'image H' du point H ?

  La tangente en H au cercle Γ coupe (OM) en M'.
  Démontrer que OM x OM' = 16.
  Quelle est donc l'image de M ?

  Où sont toutes les images des points M de Γ, à l'exception bien sûr du point O ?



9 Les quatre chiffres mystérieux !

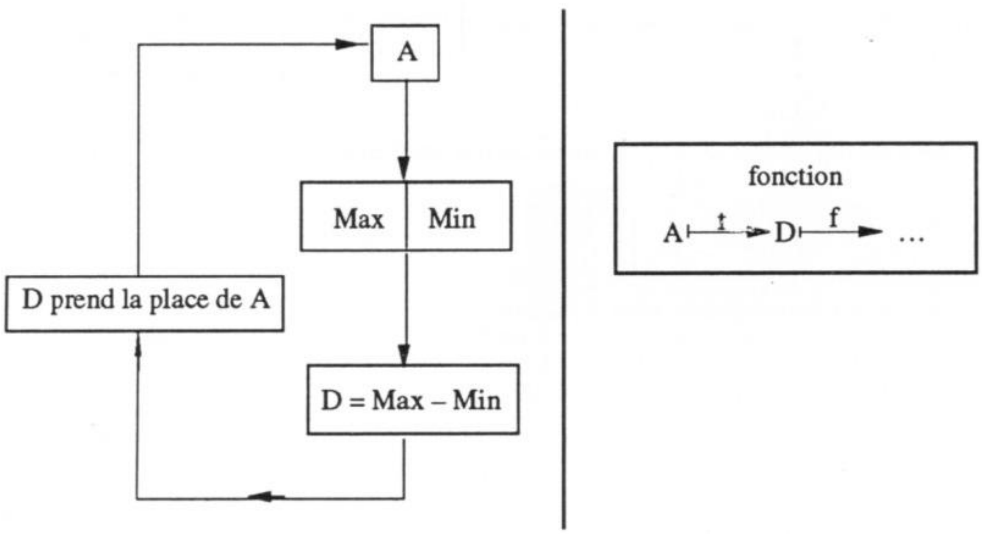
(1) • Vous choisissez un nombre A de quatre chiffres (ils ne sont pas tous identiques).

(2) • Avec ses chiffres, formez le nombre le plus grand possible : Max.

(3) • De même, formez le nombre le plus petit possible : Min.

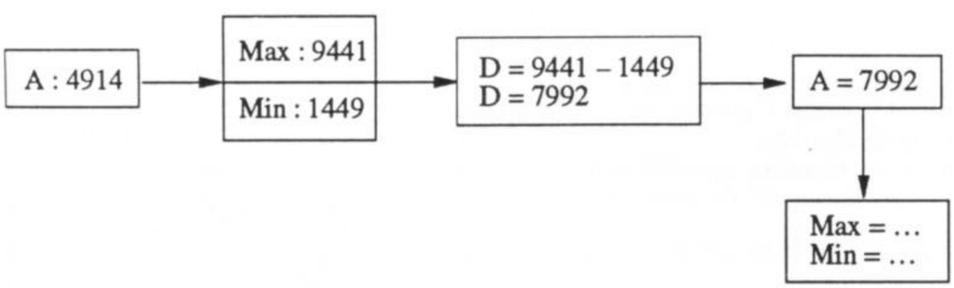
(4) • Calculez la différence (Max – Min) notée D.

(5) • Recommencez en (1) en remplaçant A par D.



et continuer …

* *Exemple*



• Recommencez en choisissant au départ un autre nombre A de quatre chiffres.

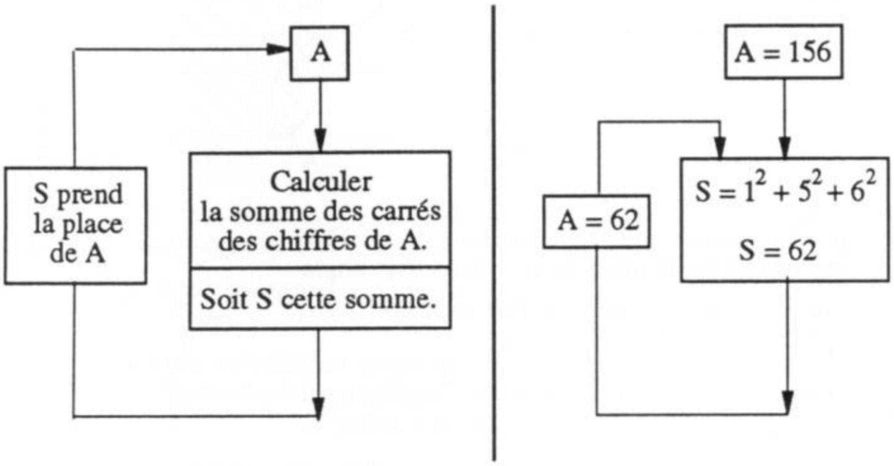
C'est curieux, non ?

10 En cascade

(1) Vous choisissez un nombre entier A, autre que 0.

(2) Vous calculez la somme S des carrés de ses chiffres.

(3) Remplacez A par S et recommencez en (1).



Continuer !

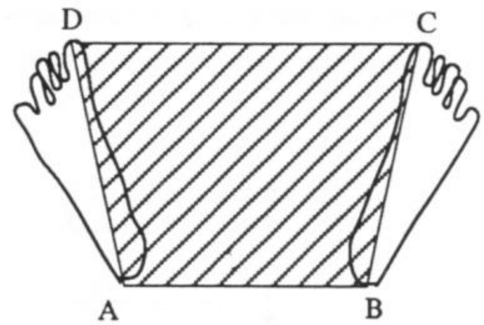
$$\underset{A}{156} \xrightarrow{F} \underset{S}{62} \xrightarrow{F} 40 \xrightarrow{F} 16 \xrightarrow{F} 37 \xrightarrow{F} \dots$$

- Que se passe-t-il si on part de A = 1 ?
- Partir de A = 1995 et appliquer cinq fois la fonction F. Que se passe-t-il ?
- Trouver deux nombres différents A et B tels que F(A) = F(B).
- Partir de A = 89. Combien de fois faut-il appliquer F pour revenir à 89 ?
- Même question pour A = 16 au départ.
- Évariste affirme que, quel que soit le nombre de départ A, en répétant F, on tombe toujours sur 1 ou sur 4 ; pouvez-vous trouver un contre-exemple ?
- Reprendre une étude similaire avec la fonction G qui à A, fait correspondre la somme des *cubes* de ses chiffres.

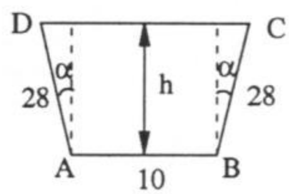
11 Berthe aux grands pieds

Lorsque vos deux pieds reposent sur le sol, la surface comprise entre les deux pieds est appelée ***polygone de sustentation***. Plus l'aire de ce polygone est grande, plus la stabilité est bonne.

Berthe a une pointure 42, ce qui donne en multipliant par $\frac{2}{3}$, une longueur de pied de 28 cm.



Supposons que ses talons sont distants de 10 cm. Elle écarte symétriquement les pointes de ses pieds d'un angle α. Le polygone de sustentation peut être assimilé à un trapèze isocèle ABCD.



Berthe se demande pour quelle mesure de l'angle α, en degrés, l'aire du trapèze est maximum et donc la stabilité la meilleure.

- Calculer en fonction de l'angle α, la hauteur h du trapèze et la distance DC séparant les pointes des pieds.
- Montrer que l'aire, en cm^2, du trapèze est : $S(\alpha) = 28 \cos \alpha \, (10 + 28 \sin \alpha)$.

❖ À vos calculatrices !

Calculer l'aire du trapèze $S(\alpha)$ en faisant varier α de 0° à 90°, de 10° en 10°. Présenter les résultats dans un tableau.

Sur du papier millimétré, représenter graphiquement la fonction $\alpha \longmapsto S$.

En vous aidant de ce graphique et de votre calculatrice, trouver l'angle α, à 1° près, pour que Berthe ait la meilleure stabilité possible.

12 Permuter deux chiffres

✤ On prend d'abord les nombres décimaux, compris au sens strict entre 0 et 1, comportant au plus deux décimales : par exemple 0,68 ; 0,6 ; 0,08.

À chacun de ces nombres a, on associe le nombre b obtenu en permutant les deux chiffres décimaux :

$0{,}68 \longmapsto 0{,}86$
$a \overset{f}{\longmapsto} b$

$0{,}68 \mapsto 0{,}86 \qquad 0{,}60 \mapsto 0{,}06 \qquad 0{,}08 \mapsto 0{,}80$

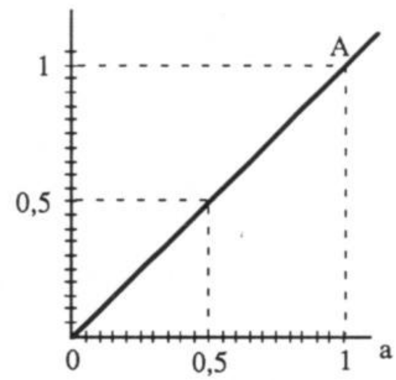
– Dessiner un repère orthonormal sur du papier millimétré en prenant 10 cm comme unité sur les deux axes.

Marquer des points de coordonnées (a, b) par exemple (0,68 ; 0,86), (0,60 ; 0,06), …

– Quels sont les points marqués sur le segment [OA] ? les points au-dessus de [OA] ? au-dessous ?

Combien y aurait-il de points si on les marquait tous ?

– Si vous disposez d'une calculatrice graphique, peut-elle vous donner la représentation graphique de cette fonction f ?



– Combien y a-t-il de points d'ordonnée 0,75 ? et pour 0,08 ?

– Trouver des exemples pour lesquels $a < b$ entraîne $f(a) < f(b)$?
Trouver des exemples pour lesquels $a < b$ entraîne $f(a) > f(b)$?

✤ On considère maintenant les décimaux compris entre 0 et 1, ayant au plus quatre chiffres décimaux. Exemples : 0,6825 ; 0,0132.

À chacun de ces nombres a, la fonction f fait correspondre le nombre b obtenu en permutant les chiffres dans chaque tranche de deux chiffres à partir de la virgule.

$0{,}\underline{68}\,\underline{25} \overset{f}{\longmapsto} 0{,}8652$
$0{,}015 \longmapsto 0{,}1005$

Posez-vous des questions comme ci-dessus.

✤ Prenons maintenant des rationnels compris entre 0 et 1.

Prenez $a = \frac{3}{4}$. Quelle est son écriture décimale ? Que vaut f(a) ?

Prenez $a = \frac{3}{5}$. Mêmes questions.

$\frac{1}{3}$ est un rationnel mais n'est pas un décimal : 0,3 ; 0,33 ; 0,333 … en sont des valeurs décimales approchées.

Peut-on trouver $f\left(\frac{1}{3}\right)$?

Mêmes questions en prenant $a = \frac{1}{7}$.

13

Qui va avec qui ?

Les récipients numérotés (1) à (7) ont tous 1 mètre de haut.

Les dimensions sont choisies pour qu'ils aient tout le ***même volume***.

Chacun d'entre eux est rempli par le haut.

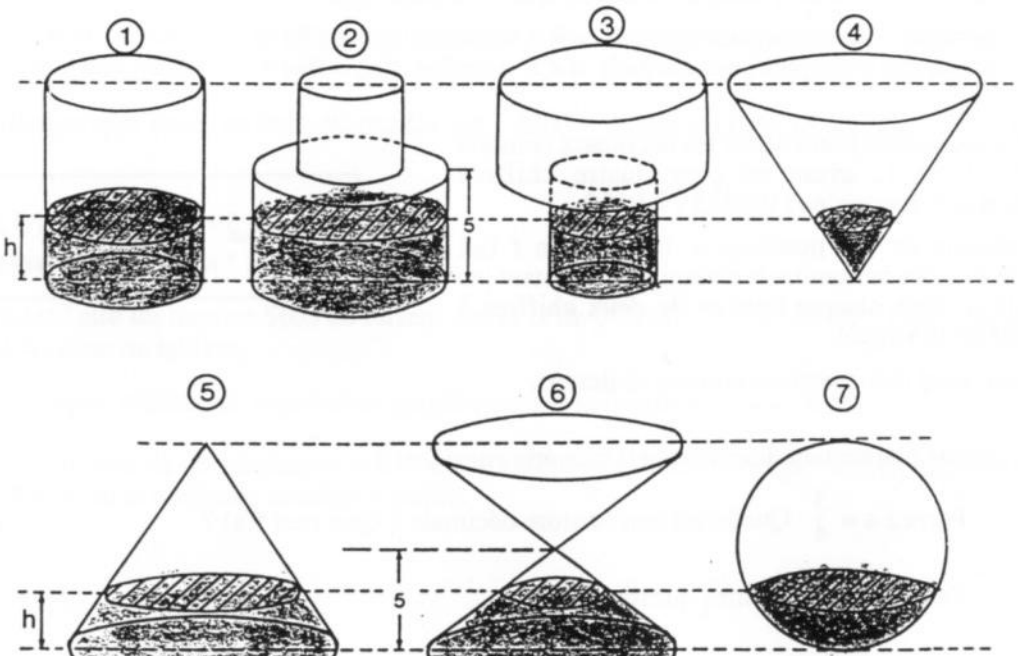
Si h est la hauteur du liquide dans un récipient, le volume V(h) du liquide contenu est fonction de cette hauteur.

Unités : h en décimètres ; V(h) en dm^3 ou litres.

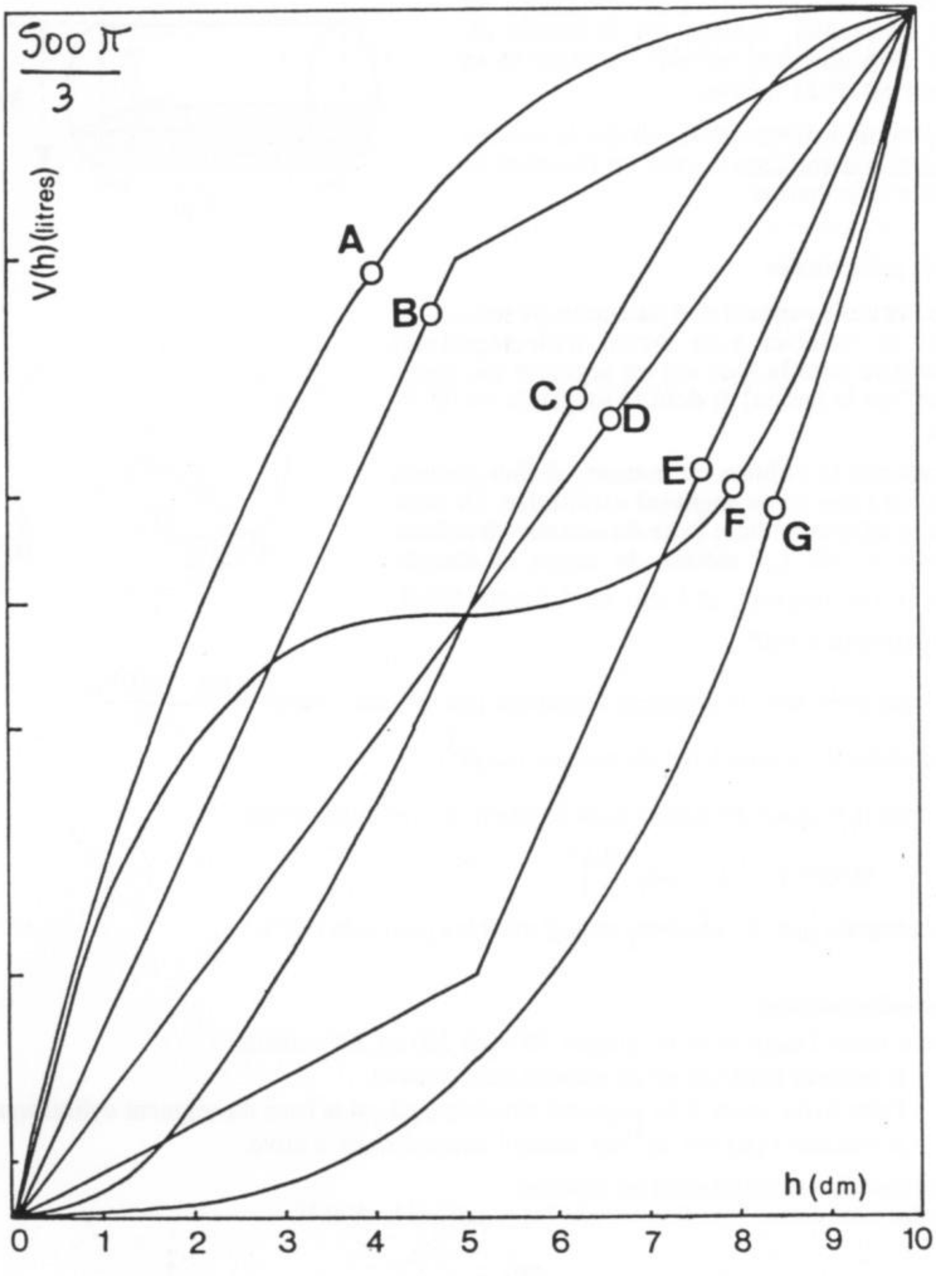
On vous donne : les dessins de ces récipients,
les courbes de V en fonction de la hauteur h de liquide.

Pour (2) et (3), le rayon du grand cylindre est le double de celui du petit.

■ On vous demande de dire quel graphique va avec quel récipient et pour quelles raisons … ?



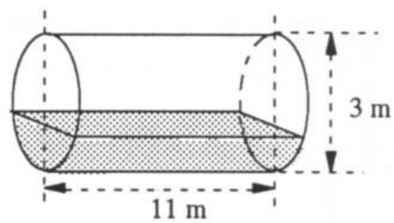
■ C'est aussi l'occasion de réviser vos formules de calcul de volumes et, pour cela, il vous faut préciser des dimensions.



14 La cuve à mazout

Une cuve à mazout cylindrique est posée sur un sol horizontal, comme sur le dessin ci-contre. Son diamètre est de 3 mètres et sa longueur est de 11 mètres.

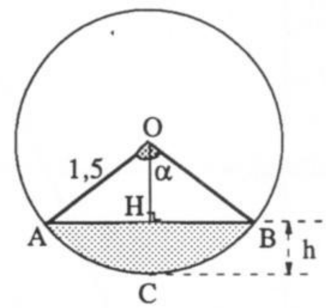
On se propose maintenant de calculer le volume de mazout contenu dans la cuve **en fonction de** la hauteur h de mazout.



❖ Étude préliminaire

Lorsque la cuve contient une hauteur h de mazout, le volume de celui-ci a la forme d'un **segment cylindrique** dont la base est un segment circulaire (hachuré sur le dessin) et dont la longueur est de 11 mètres.

Pour calculer le volume de mazout, il faut d'abord déterminer l'aire de ce **segment circulaire**. Or cette aire est la différence entre l'aire du **secteur circulaire** de centre O, de 1,5 mètres de rayon et d'angle $\widehat{AOB} = \alpha$ (en degrés), et l'aire du triangle OAB, pour α inférieur à 180°.



❀ Montrer que l'aire du segment circulaire (en m^2) est $A(\alpha) = \dfrac{\pi\alpha - 180 \sin \alpha}{160}$.

En déduire le volume $V(\alpha)$ du mazout (en m^3).

❀ Calculer la hauteur de mazout h en fonction de α et montrer que :

$$h(\alpha) = 1{,}5\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

(On admettra que ces résultats restent valables pour $\alpha \geq 180°$).

❖ À vos calculatrices

En faisant varier l'angle α de 0° jusqu'à 360°, de 30° en 30°, calculer :

- la hauteur $h(\alpha)$ (en m) de mazout dans la cuve,
- l'aire $A(\alpha)$ (en m^2) du segment circulaire qui est la base du segment cylindrique,
- le volume $V(\alpha)$ (en m^3) de mazout contenu dans la cuve.

On présentera les résultats dans un tableau.
On représentera ensuite graphiquement les fonctions h, A et V.

❖ La jauge

Jacky veut fabriquer une jauge pour évaluer le volume restant dans la cuve. Il va étalonner en litres (tous les 5000 litres) une tige rectiligne de plus de 3 mètres de long.

Aidez-le en vous servant des graphiques et des fonctions

$h \mapsto \alpha \mapsto V$.