GALION THÈMES

Le nombre π

π = 3.14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912
98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798
60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132
00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17872
14684	40901	22495	34301	46549	58537	10507	92279	68925	89235
42019	95611	21290	21960	86403	44181	59813	62977	47713	09960
51870	72113	49999	99837	29780	49951	05973	17328	16096	31859
50244	59455	34690	83026	42522	30825	33446	85035	26193	11881
71010	00313	78387	52886	58753	32083	81420	61717	76691	47303
59825	34904	28755	46873	11595	62863	88235	37875	93751	95778
18577	80532	17122	68066	13001	92787	66111	95909	21642	01989

15, quai André Lassagne – 69001 LYON
1994

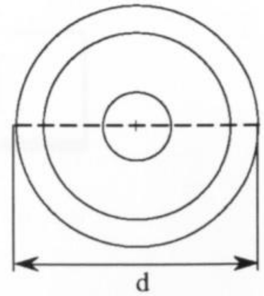
ISBN : 2-912209-01-3

Le nombre π

On conçoit sans peine que si le diamètre d'un cercle augmente alors la longueur L de ce cercle augmente aussi …

Mais cette longueur L reste-t-elle proportionnelle au diamètre d, autrement dit, le quotient $\frac{L}{d}$ reste-t-il constant ?

Depuis l'école élémentaire vous connaissez la réponse : $\frac{L}{d} = \pi$ pour tous les cercles.



π est la première lettre du mot grec περιμετρε (*périmètre*). C'est depuis 1700, en Angleterre, que l'habitude est prise d'utiliser cette lettre grecque pour le quotient L/d.

Il y a 4000 ans, les géomètres utilisaient déjà le fait que ce quotient est constant et, depuis, en calculèrent des valeurs approchées de plus en plus précises.

Dans les activités de ce fascicule, vous allez rencontrer divers procédés utilisés au cours des âges pour trouver une valeur approchée de π : par les Babyloniens (2000 ans av. J.-C.), les Égyptiens, les Grecs, les Chinois, etc.

Il n'est pas question de citer tous ceux qui se sont intéressés à ce problème. Les méthodes de calcul contemporaines reposent sur des démarches mathématiques utilisant des notions que vous ne pouvez pas encore comprendre et que vous étudierez peut-être plus tard.

Le nombre π n'est pas un nombre **"comme les autres"**, c'est-à-dire comme ceux que vous avez l'habitude de fréquenter.

D'abord, π **n'est pas rationnel** : on ne peut pas l'écrire a/b, a et b étant des entiers. Ce fut prouvé seulement en 1761 par Lambert.

De plus, ce **nombre irrationnel** est encore autre chose que les irrationnels que vous connaissez, comme $\sqrt{2}$ par exemple, solution de l'équation $x^2 = 2$.

π est un nombre **transcendant** et il fallut attendre 1882 pour que Lindemann démontre cette propriété.

On ne peut donc pas donner une **écriture décimale exacte de** π : on ne peut qu'en donner des valeurs approchées de plus en plus précises.

Au cours des siècles, depuis la valeur approchée $\pi \approx 3$ des Babyloniens, on est parvenu à écrire ce nombre avec 1 milliard de décimales en 1989 au moyen d'ordinateurs.

Il faut bien dire que la valeur 3,1416 (ou même 3,14) est amplement suffisante pour les calculs courants.

Sur la page de couverture, vous trouvez les 1000 premières décimales de π.

> *Le but de ce fascicule n'est pas de "courir après" les décimales de π. Il se propose de vous expliquer certains procédés utilisés depuis 4000 ans et de vous faire comprendre les démarches mathématiques employées.*
>
> *Ne soyez pas surpris si, dans certaines activités vous trouvez une mauvaise approximation de π.*

D'autres activités « Autour de π » vous seront proposées dans un second fascicule.

Dans ce fascicule, vous déterminez diverses approximations de π par différents procédés. Dressez-en une liste, comparez-les à π.

π 1 À travers les âges ...

◆ De nombreux documents : tablettes d'argile, papyrus, écrits divers, ont été dépouillés par les mathématiciens. C'est ainsi qu'ils ont retrouvé des procédés permettant de calculer la longueur ou l'aire d'un cercle connaissant son diamètre.

Voici quelques-uns de ces procédés, que nous avons traduits en langage moderne.

Pour chacun d'eux, trouver la valeur utilisée par le calculateur pour ce que nous désignons de nos jours par le "le nombre π".

> On pourra désigner par D le diamètre du cercle, par L son périmètre et par A l'aire du disque.

(1)	2000 ans av. J.-C.	Babylone et Mésopotamie	• Pour l'aire d'un cercle, on élève au carré le triple du diamètre et on multiplie par $\frac{1}{12}$
(2)			• Pour l'aire d'un cercle, on divise par 12 le carré de sa longueur.
(3)	250 ans av. J.-C.	Archimède	• Le rapport de l'aire du cercle à l'aire du carré circonscrit est proche de celui de 11 à 14.
(4)	200 ans av. J.-C.	Inde	• La longueur du cercle est la racine carrée de 10 fois le carré du diamètre.
(5)	Ier siècle	Chine	• L'aire d'un cercle est les $\frac{3}{4}$ du carré de son diamètre.
(6)	VIème siècle	Inde	• Pour un diamètre de 20 000 le périmètre du cercle est 62 832.

◆ Ces documents nous apprennent aussi que, dans l'Antiquité, les mathématiciens ont su établir un lien entre le périmètre L d'un cercle et l'aire A du disque, et cela sans connaître le nombre π.

Voici deux textes que vous expliquerez.

(7)	230 ans av. J.-C.	Archimède	• (Première proposition) – La surface d'un cercle est celle d'un triangle dont la hauteur est le demi-diamètre et dont la base est la circonférence du cercle.
(8)	Ier siècle	Chine	• La surface du cercle est le produit de la demi-circonférence et du demi-diamètre.

2 Un travail d'équipe

Répartissez-vous en équipes de deux ou trois élèves. Chaque équipe se munira de deux ou trois boîtes cylindriques, de tube, de roues de vélo et de ficelle.

◆ Avec une ficelle

a) Mesurer en millimètres le diamètre (d) du fond circulaire de la boite, éventuellement au moyen d'un pied à coulisse.

b) Enrouler une ficelle assez longue, fine, non extensible, les spires successives ne se chevauchant pas. Faire un nombre entier (n) de tours.

c) Mesurer la ficelle qui a servi à faire les n tours, à 1 mm près (ℓ).

d) Diviser ℓ par n : on obtient la longueur (P) de un tour. Donner P à 0,1 mm près.

e) Diviser P par le diamètre d : donner le résultat avec trois chiffres après la virgule.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
	Diamètre d (en mm)	Nombre de tours (n)	Longueur totale (ℓ)	longueur pour un tour (P)	$\frac{P}{d}$
boîte (1)					
boîte (2)					
boîte (3)					
...					

• Les résultats de la dernière colonne sont voisins de π ; pourquoi ?

• Calculez la valeur moyenne des quotients $\frac{P}{d}$ obtenus par la classe.

◆ Avec une bande de papier

Une bande de papier peut avantageusement remplacer la ficelle ; un tour suffit.

◆ En faisant rouler

Si l'on dispose d'une roue de vélo ou une boîte cylindrique de grand diamètre, on peut mesurer son périmètre en la faisant rouler ...

3 Avec du papier millimétré

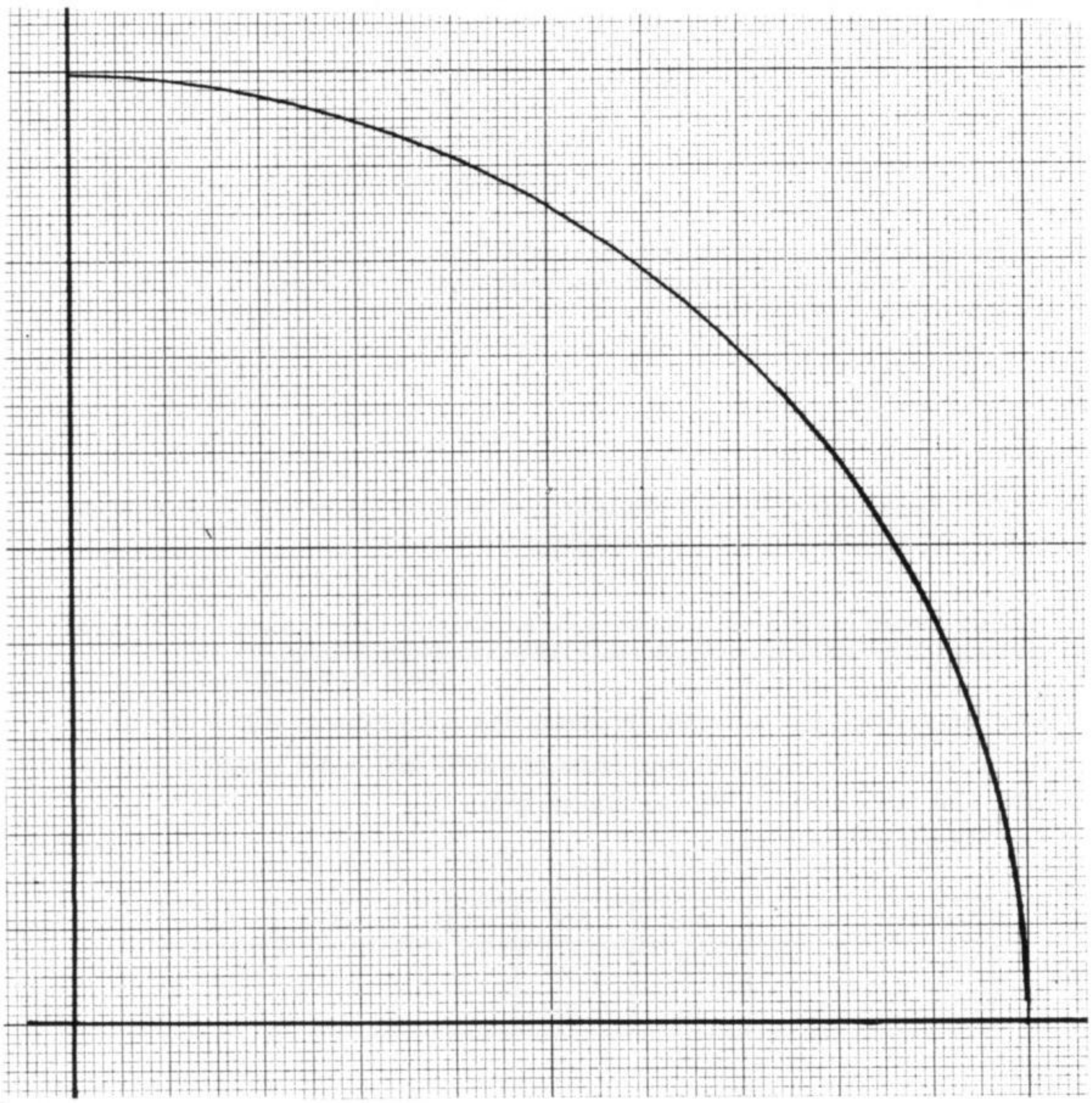
Dessinez sur du papier millimétré un quart de cercle de 10 cm de rayon.

En décomptant astucieusement les carreaux intérieurs, donnez une valeur approchée, en millimètres carrés, de l'aire de ce quart de disque, puis déduisez-en l'aire du disque.

Vous pouvez ainsi déterminer une valeur approchée de π.

C'est une question de patience et d'organisation.

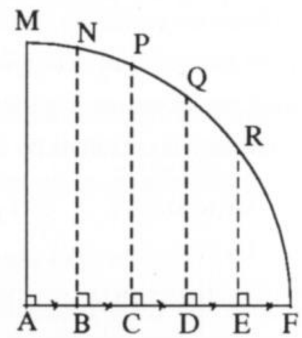
Comparez les résultats de la classe. Faites une moyenne de vos résultats.



4 Avec des aires

On veut trouver une approximation de π grâce à des calculs d'aire.

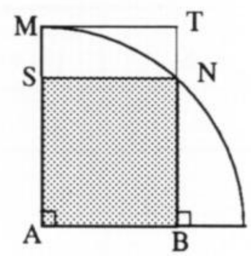
Construisez un quart de cercle de rayon 10 cm : AF = AM = 10 cm.
Partagez [AF] en 5 segments de même longueur.
M, N, P, Q, R sont les points indiqués sur le dessin.



dessin n° 1

✦ **Avec des rectangles**

Le rectangle ABNS est tout entier à l'intérieur du quart de cercle. On l'appelle rectangle **intérieur** au cercle et on le note I_1.
Le rectangle ABTM est appelé rectangle extérieur au quart de cercle, on le note E_1.



dessin n° 2

Sur votre dessin, coloriez en bleu les cinq rectangles intérieurs (le rectangle I_5 est réduit au segment [EF]) ; coloriez en rouge les cinq rectangles extérieurs.

➪ **Calculs.** On sait que l'aire du quart de cercle est comprise entre la somme des aires des rectangles intérieurs et la somme des aires des rectangles extérieurs.

• ***Calculs des côtés des rectangles.*** On connaît déjà AB = BC = … = 2
Sur le dessin n° 2 : dans le triangle rectangle ABN, $BN^2 = AN^2 - AB^2 = 100 - 4$.
$BN^2 = 96$. $BN = \sqrt{96} \approx 9{,}798$ (au millième près).
Complétez le tableau suivant :

Segment	AM	BN	CP	DQ	ER
Valeur exacte	10	$\sqrt{96}$			
Valeur approchée	10	9,798			

• ***Calculs des aires***

Aire de	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
Valeur exacte	$2\sqrt{96}$				0
Valeur approchée					0

Aire de	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Valeur exacte					
Valeur approchée					

• **Calculs des aires**

On a donc $I_1 + I_2 + \ldots + I_5 <$ aire du quart de cercle $< E_1 + E_2 + \ldots + E_5$.

Or l'aire du cercle est $25\,\pi$.

Déduisez-en un encadrement de π.

……

Cet encadrement est très mauvais.

Partagez [AF] en 10 et reprenez les calculs.

L'encadrement est déjà un peu moins mauvais.

> Les moyens modernes, calculatrices programmables, ordinateurs permettant de faire des calculs plus longs et au lieu de partager [AF] en 5, on peut le partager en 1000, 1 000 000, … et on obtient une meilleure approximation de π.

✦ **Avec des trapèzes**

Dans la figure 2, ABNM est un trapèze noté T_1 : on sait calculer l'aire de T_1. On obtient cinq trapèzes "intérieurs", le dernier "trapèze" étant le triangle ERF. Tous ces trapèzes ont la même hauteur 2.

• Utilisez les calculs précédents pour calculer les cinq aires et en déduire une approximation de π par défaut.

Améliorons les calculs :

Démontrez que : $\mathcal{A}(T_1) = AM + BN$

$\mathcal{A}(T_2) = BN + CP$ etc.

d'où $\mathcal{A}(T_1) + \mathcal{A}(T_2) + \ldots + \mathcal{A}(T_5) = AM + 2BN + 2CP + 2DQ + 2ER$

• Utilisez cette simplification pour donner une meilleure approximation de π en partageant [AF] en 10 segments.

Attention : la hauteur n'est plus 2 cm …

5 Vers le nombre π

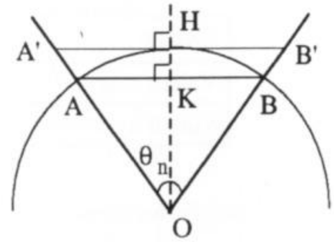
On utilise ici un cercle de **rayon 1.**

On a construit un polygone régulier convexe de n côtés : [AB] est l'un de ses côtés.

Son périmètre est p_n . $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre.

(A'B') est tangente au cercle en H, milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$: [A'B'] est un côté du polygone régulier circonscrit au cercle ayant n côtés.

Son périmètre est désigné par p'_n .



✣ Justifiez chacune des égalités suivantes :

$$\theta_n = \widehat{AOB} = \frac{360°}{n} \qquad \widehat{AOK} = \widehat{A'OH} = \frac{180°}{n}$$

$$c_n = AB = 2 \sin \frac{180°}{n} \qquad c'_n = A'B' = 2 \tan \frac{180°}{n}$$

$$p_n = 2n \sin \frac{180°}{n} \qquad p'_n = 2n \tan \frac{180°}{n}$$

Demi-périmètre du polygone inscrit de n côtés : $\frac{1}{2} p_n = n \sin \frac{180°}{n}$

Demi-périmètre du polygone circonscrit de n côtés : $\frac{1}{2} p'_n = n \tan \frac{180°}{n}$

✣ **À vos calculatrices !**

En prenant au départ n = 6 et en doublant chaque fois le nombre des côtés, donnez une valeur approchée à 10^{-5} de chacun des demi-périmètres $\frac{1}{2} p_n$ et $\frac{1}{2} p'_n$ .Notez vos résultats dans le tableau ci-contre.

Il se passe une chose curieuse que vous essayerez d'expliquer.

n	$\frac{1}{2} p_n$	$\frac{1}{2} p'_n$
6		
12		
24		
48		
96		
192		
…		

Ce que l'on vient de faire avec les périmètres de polygones réguliers pourrait être fait avec les aires de ces polygones.

C'est en utilisant une méthode de ce type et beaucoup de patience que Archimède (287-212 av. J.-C.) obtint l'encadrement de π : $3 + \frac{10}{75} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

Au 16ème siècle, Viète a trouvé 9 décimales exactes avec un polygone de 393 216 côtés.

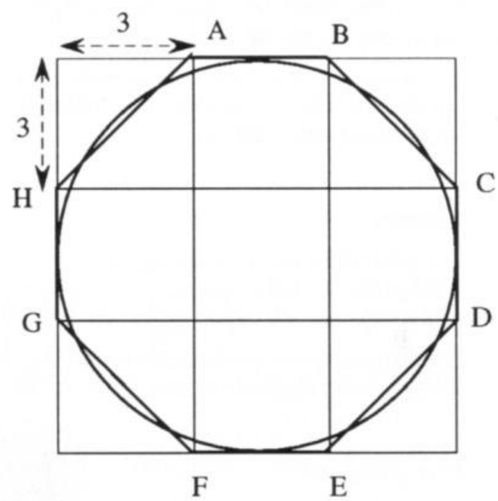
6 2 000 ans avant J.-C. …

♦ Le papyrus Rhind (2000 av. J.-C.) affirme « *L'aire du cercle de diamètre 9 coudées est celle du carré de 8 coudées de côté* ».

Voyons comment on a pu parvenir à ce résultat.

Un cercle de diamètre 9 est inscrit dans un carré de côté 9. On a tracé l'octogone ABCDEFGH : on considère que l'aire de cet octogone est très voisine de l'aire du disque.

Cet octogone contient 5 carrés de côté 3 et 4 demi-carrés.



• Vérifier que cette aire est : S = 63.

Il n'y a pas d'entier dont le carré est 63. Par contre 63 est très voisin de 64 qui est le carré de 8.

Écrire l'aire S_1 du carré de côté 8 :

$S_1 = \ldots$

Écrire l'aire S_2 du disque de diamètre 9 : $S_2 = \ldots$

• En utilisant le texte du papyrus Rhind, vérifier que cela revient à prendre pour π l'approximation $\left(\frac{4}{3}\right)^4$. En donner une valeur décimale approchée à 0,001 près.

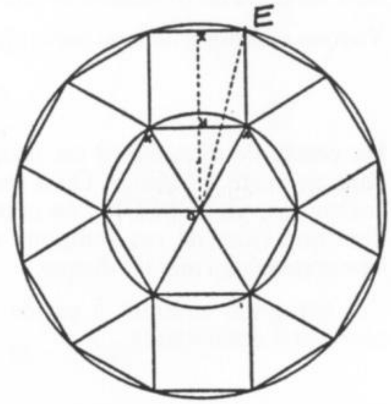
♦ Dans ce même papyrus, on affirme que l'aire du disque est obtenue en retranchant $\frac{1}{9}$ du diamètre d, et en prenant le carré du résultat : $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$.

Cette démarche conduit à la même approximation de π. Vérifiez-le.

Le carré de côté $\left(d - \frac{d}{9}\right)$, c'est-à-dire $\frac{8d}{9}$, a une aire voisine de celle du disque de diamètre d : c'est une solution approchée du problème de la quadrature du cercle, qui n'a pas de solution.

7 Le temple de Diane

Dans les jardins de la Fontaine à Nîmes, on trouve dans les thermes romains, une pierre sculptée dont nous allons étudier les motifs.



* Construire

Tracer un cercle de centre O et de rayon 1. Construire un hexagone régulier inscrit dans ce cercle. Construire à l'extérieur comme indiqué sur la figure six carrés de même côté 1.

En joignant les douze sommets des carrés extérieurs au cercle, vous obtenez un dodécagone régulier.

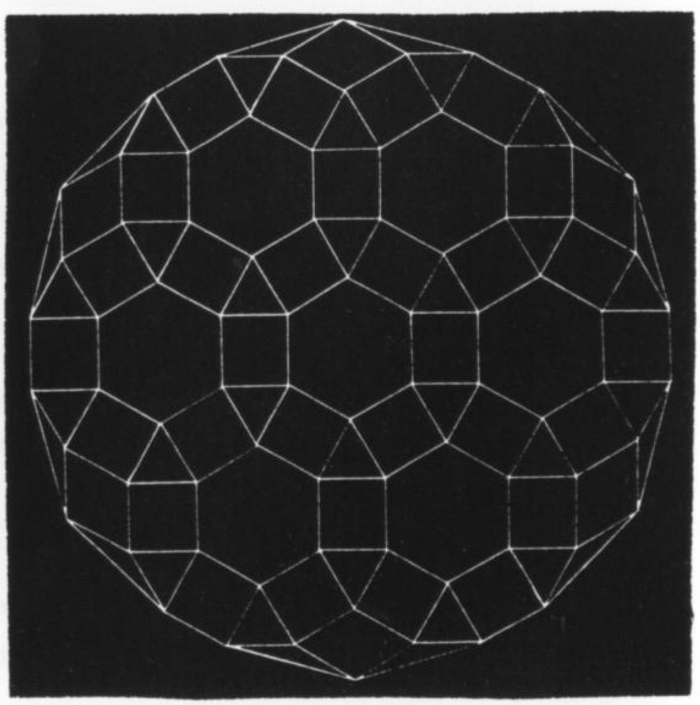
* Calculez

- le périmètre de ce dodécagone,
- l'aire de ce dodécagone,
- la longueur OE, rayon du cercle circonscrit à ce dodécagone.

En prenant pour périmètre du cercle, le périmètre du dodécagone, et pour aire du disque, celle du dodécagone, trouver deux approximations de π.

* Plus difficile

En répétant ce motif à l'extérieur du motif, on obtient la très belle figure ci-contre que vous pourrez reproduire.



Calculer le périmètre et l'aire du polygone extérieur à 18 côtés.

Les six sommets extérieurs des carrés extérieurs sont sur un cercle ; calculer son rayon r.

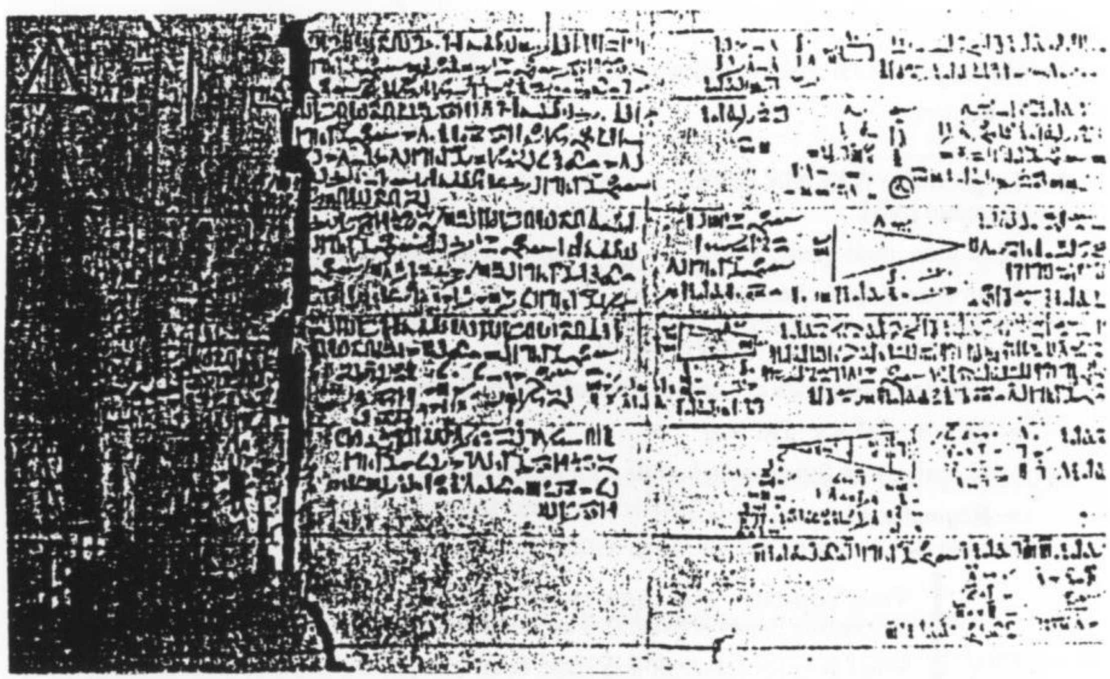
De même les douze sommets extérieurs des carrés extérieurs sont sur un cercle ; calculer son rayon r'.

En utilisant le cercle de rayon $\frac{r+r'}{2}$ et le polygone à 18 côtés, trouvez deux autres approximations de π.

- On pourrait aussi – mais les Égyptiens ne l'ont pas fait – considérer que le périmètre de l'octogone ABCDEFGH peut être assimilé au périmètre du cercle de diamètre 9.

  Quelle est alors l'approximation de π que l'on obtient ?

▲ *Le papyrus Rhind, d'après un traité égyptien de la XIIe dynastie. On y reconnaît des problèmes de fractions et des calculs de volumes et de surfaces (British Museum).*



8 Où l'on retrouve $\left(\dfrac{4}{3}\right)^4$

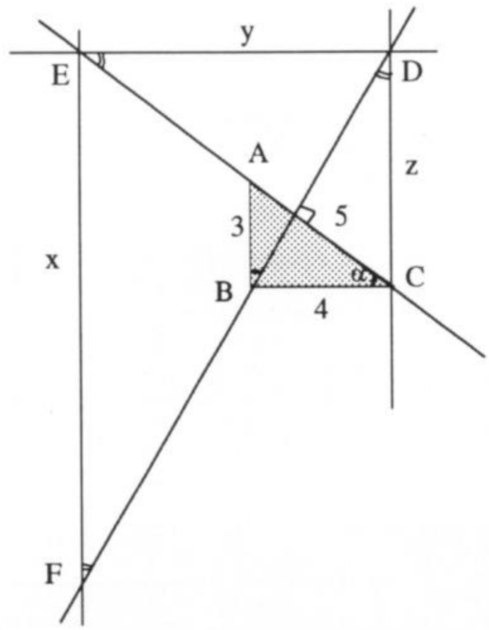
On a tracé un triangle ABC de côtés 3 - 4 - 5. Il est rectangle en B.

Refaites vous-même le dessin :

– la perpendiculaire en B à (AC) coupe en D la perpendiculaire en C à (BC) ;

– la perpendiculaire en D à (CD) coupe (AC) en E.

– la perpendiculaire en E à (ED) coupe (BD) en F.



✣ Le géomètre GALION affirme que la longueur EF est égale au périmètre du cercle de diamètre [AB].

C'est faux, mais quelle valeur prend-il pour π en affirmant cela ?

Pour vous aider à chercher :

- On pose $\alpha = \widehat{ACB}$. Calculez $\tan \alpha$.
- Vérifiez les égalités des angles marqués sur la figure.
- EF = x ; ED = y ; DC = z.

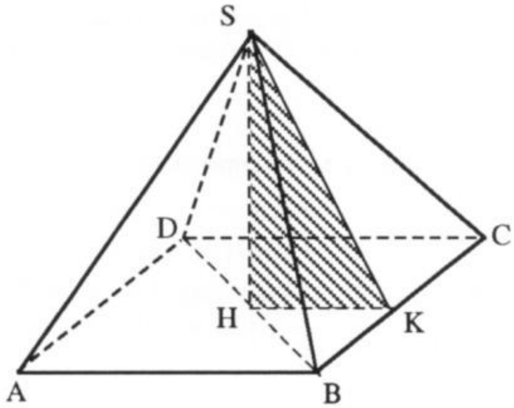
  Calculez x en fonction de y, puis y en fonction de z. En déduire x.
- Répondez à la question posée.

> Vous constatez que cette approximation de π est celle que vous avez rencontrée dans l'activité 6 (Papyrus Rhind).
>
> Vous avez ici construit à la règle et au compas un segment dont la longueur est voisine de celle d'un cercle de diamètre donné.

9 Où l'on retrouve la pyramide de Khéops

♦ Considérons une pyramide régulière à base carrée, de hauteur SH. La base carrée a pour côté 2. Les quatre faces latérales sont des triangles isocèles.

On suppose de plus que l'aire de chacune des faces latérales est égale à l'aire du carré ayant pour côté SH, hauteur de la pyramide.



* Dans ces conditions, montrer que

$$SH^2 = SK$$

et que $SK^2 - SK - 1 = 0$.

* Vérifier que la nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que l'on appelle **nombre d'OR**, est solution de cette équation.

On pose $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$. Montrer que : $\frac{2\,BC}{SH} = \frac{4}{\sqrt{\varphi}} = 2\sqrt{2\sqrt{5}-2}$.

* En donner une valeur approchée et comparer à π.

* En déduire que le périmètre de la base est voisin du périmètre du cercle dont le rayon est la hauteur de la pyramide.

♦ Si on en croit Hérodote (484-425 av. J.-C.), la grande pyramide de Khéops (2500 av. J.-C.) a été construite en respectant ces proportions.

Il est intéressant de retrouver dans cet édifice des nombres voisins du nombre d'OR et du nombre π.

Prenons pour côté de la base carrée : BC = 440 coudées soit 230 m environ.

En déduire en mètres et en coudées, la hauteur initiale SH de cette grande pyramide.

Il fallut attendre 4 000 ans pour que l'on construise un édifice plus élevé : ce n'est que vers la fin du Moyen Âge que la flèche de certaines cathédrale la dépassèrent de peu.

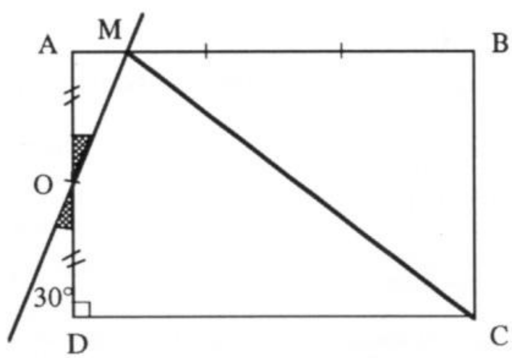
10 À la règle et au compas

Depuis toujours, les géomètres tentent en vain de construire à la règle et au compas un segment de droite de longueur égale à celle du périmètre d'un cercle ou d'un demi-cercle donné.

Voici certaines de ces constructions.

- Analyser et reproduire avec soin chacune des figures suivantes.
- Pour chaque situation, donner la valeur exacte de la longueur demandée puis une valeur approchée avec 8 décimales.

1



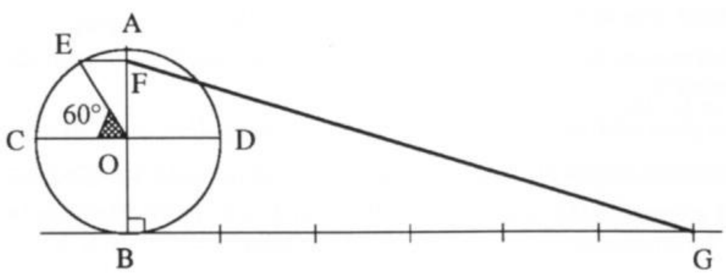
Dans le rectangle ABCD : AB = 3 et AD = 2.

Calculez MC.

« MC est égale au demi-périmètre du cercle de diamètre [AD] ».

À quelle valeur de π conduirait cette affirmation ?

2

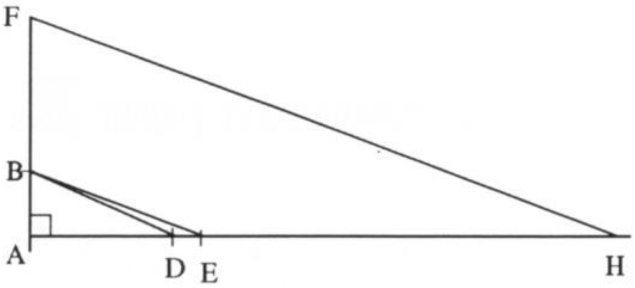


Le rayon du cercle est 1 et BG = 6 . Calculer FG.

« FG est la longueur du cercle de diamètre [AB] ».

À quelle valeur de π conduirait cette approximation ?

3

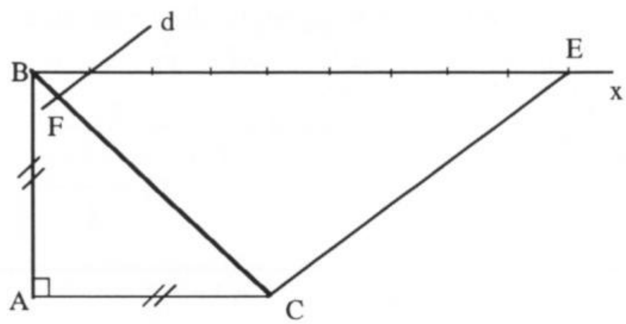


$AD = 1{,}1$
$AE = 1{,}3$
$AB = 0{,}5$
$AF = BD$.

Calculer AH.

« AH est la longueur du cercle de rayon AB ».
À quelle valeur de π conduirait cette approximation ?

4



Sur ce dessin, on a :

$AB = AC = 20.$

On a marqué neuf segments de même longueur sur [Bx).

$d \parallel (CE).$

Calculer BF.

Si BF était la longueur du demi-cercle de rayon 1, quelle serait la valeur de π ?

5

On a :

$AC = 15$; $AB = 2$

$CD = \frac{1}{8} CB$

et $CE = 1{,}25$

Calculer DE.

Si DE était la longueur du demi-cercle de rayon 1, quelle valeur prendrait-on pour π ?

Les réponses :

1 $\pi \approx \sqrt{\dfrac{40 - 6\sqrt{3}}{3}}$

2 $\dfrac{\sqrt{151 + 4\sqrt{3}}}{4}$

3 $\dfrac{13}{50}\sqrt{146}$

4 $\dfrac{20\sqrt{2}}{9}$

5 $\dfrac{5}{4} + \dfrac{\sqrt{229}}{8}$

11 Des fractions pour π

On a longtemps cherché à remplacer π par une fraction. On sait – mais seulement depuis 1761 – que ce n'est pas possible. Cependant, on connaît des fractions donnant une bonne valeur approchée de ce nombre mystérieux.

♦ Voici quatre fractions a, b, c, d. Écrire chacune d'elles sous forme d'une fraction irréductible. En donner une valeur décimale approchée et comparer à π.

$$a = \mathbf{3} + \frac{1}{7} \qquad b = \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{7} + \cfrac{1}{15}}$$

$$c = \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{7} + \cfrac{1}{\mathbf{15} + \cfrac{1}{1}}} \qquad d = \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{7} + \cfrac{1}{\mathbf{15} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{292}}}}$$

La fraction c, qui donne une très bonne approximation, fut découverte par Adrien Métius (1571-1635) au moyen de polygones réguliers.

Elle est d'ailleurs très facile à retenir !

$$\boxed{1\ 1\ 3\ 3\ 5\ 5}$$

L'écriture décimale de $\frac{15}{11}$ est 1,363636 … que l'on note $1{,}\overline{36}$: cette écriture est **périodique** ; la partie périodique comporte deux chiffres.

Pour $\frac{22}{7}$, la partie périodique comporte six chiffres : déterminez-la.

Quant à la fraction $\frac{355}{113}$, son écriture décimale comporte une partie périodique de 112 chiffres !

♦ On peut de même calculer des approximations de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{2}$ au moyen des écritures suivantes trouvées par Lord Brouncker (1620-1687).

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2}}}}} \qquad \frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{3} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{4} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{5}}}}}}$$

Déduisez-en d'autres approximations de π par des fractions.