GALION THÈMES

Autour de π

Tête imaginaire d'Archimède.

15, quai André Lassagne – 69001 LYON
1994

Pour retenir les décimales de π

♦ ***En français :***

Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages !
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Immortel Archimède, artiste ingénieur,
8 9 7 9

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6

Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

♦ ***En langue allemande :***

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesen-Genie !
3 1 4 1 5 9 2 6 5

Wie viele Tausende bewundern Geister
3 5 8 9 7

Himmlisch wie du und göttlich !
9 3 2 3 8

♦ ***En langue anglaise :***

How I wish I could recollect of circle round
3 1 4 1 5 9 2 6 5

The exact relation Archimede unwound
3 5 8 9 7

1 Un peu de statistiques : Répartition des décimales de π

Reportez-vous à la page ci-contre : un poème en français, datant de 1879, permet de retrouver les 30 premières décimales de π en comptant le nombre de lettres de chaque mot ; il se trouve qu'il n'y a pas de zéro avant la 30ème décimale, et c'est pourquoi on a pu écrire un texte de 31 mots.

$\boxed{1}$ Écrivez les 30 premières décimales de π. Parmi ces trente décimales, comptez les chiffres 1, les chiffres 2, et ainsi de suite jusqu'à 9, puis calculez le pourcentage d'apparition de chaque chiffre dans les 30 premières décimales.

$\boxed{2}$ Voici les cent premières décimales de π :

3,	14159	26535	89793	23846	26433
	83279	50288	41971	69399	37510
	58209	74944	59230	78164	06286
	20899	86280	34825	34211	70679

Comptez chacun des chiffres de 0 à 9 et dressez un tableau avec le pourcentage d'apparition de chaque chiffre. Comparez aux résultats de $\boxed{1}$.

$\boxed{3}$ Pour les 707 premières décimales de π, on a trouvé les résultats donnés par le tableau ci-dessous.

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre	74	78	74	72	71	64	70	53	72	79

Calculez le pourcentage d'apparition pour chaque chiffre de 0 à 9.

Comparez aux résultats du $\boxed{1}$ et du $\boxed{2}$.

$\boxed{4}$ Dans les 10 000 premiers chiffres de l'écriture décimale du nombre π, on relève les chiffres de 0 à 9 avec les résultats suivants, de 0 à 9 :

968 ; 1026 ; 1021 ; 974 ; 1014 ; 1046 ; 1021 ; 970 ; 948 ; 1014

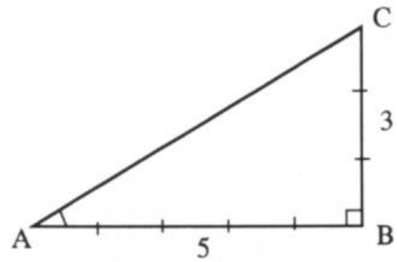
Calculez les nouveaux pourcentages pour chaque chiffre.

- En 1873, le mathématicien Shanks calcule 707 décimales de π, qui furent inscrites sous la coupole de la salle π du Palais de la découverte à Paris. En 1947, Fergusson qui en trouva 808 prouva qu'elles étaient fausses à partir de la 528ème.
- En 1958, on obtint 10 000 décimales et 500 000 en 1967 au moyen d'ordinateurs.
- 1987 : 134 millions de décimales
  1989 : plus d'un milliard de décimales obtenues par David et Gregory Chudnovsky.

π2 Avec « arc tangente »

✦ Dans le triangle ABC, rectangle en B vous savez que :

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$



$\hat{A}$ est l'angle dont la tangente est 0,6.

On écrit : $\hat{A} = \text{Arc tan } 0{,}6$

(qui se lit "arc tangente 0,6").

À l'aide de votre calculatrice, vous pouvez trouver une valeur approchée de l'angle $\hat{A}$; vous utilisez pour cela une fonction notée **tan^{-1}** ou **INV TAN** … selon les calculatrices.

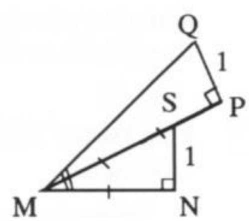
Vérifiez que $\text{Arc tan } 0{,}6 \approx 30{,}96°$

✦ Sur le dessin ci-contre : MN = 2 ; NS = 1 ; MP = 3 ; PQ = 1.

Reproduisez ce dessin sur un papier quadrillé.

Expliquez pourquoi :

$$\widehat{NMQ} = \text{Arc tan}\frac{1}{2} + \text{Arc tan}\frac{1}{3}.$$



Calculez cet angle, d'abord en degrés puis en radians (mode RADIAN sur votre calculatrice).

✦ C'est en 1776 que l'écossais James Hutton, surnommé "le grec du Nord", a découvert la formule :

$$\pi = 4 \times \left(\text{Arc tan } \frac{1}{2} + \text{Arc tang } \frac{1}{3}\right)$$

Mais attention, il faut calculer en radians …

✦ Voici une autre formule : celle de Strassnitzky (1840) :

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arc tan}\frac{1}{2} + \text{Arc tan}\frac{1}{5} + \text{Arc tan}\frac{1}{8}$$

Comme précédemment faites un dessin mettant en évidence cette somme de trois angles et vérifiez ce résultat à la calculatrice.

✦ Enfin, voici la formule proposée par John Machin (1706), qui a permis pour la première fois de déterminer les 100 premières décimales de π, et … sans calculatrice.

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ Arc tan}\frac{1}{5} - \text{Arc tan}\frac{1}{239}$$

À vérifier …

> C'est en utilisant la fonction *arc tangente* que les ordinateurs actuels permettent de déterminer un très grand nombre de décimales de π.

3 Au temps des calculs à la main …

De nombreux mathématiciens ont proposé des formules pour calculer π.

En voici quelques-unes …

✣ **Formule de Leibniz (1646-1716)**

$$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ \dots\right) \quad \text{(et c'est sans fin … !)}$$

Vous prolongerez sans peine cette suite de fractions, dont les dénominateurs sont les nombres impairs consécutifs, avec alternance de signe (–) et (+). Trouvez un valeur approchée de π en prenant les dix premières fractions, puis les vingt premières … Vous constatez que ces approximations sont mauvaises : sachez que pour obtenir deux décimales exactes, il faut utiliser 200 fractions, et pour trois décimales, il faut 5000 fractions …

Si vous savez programmer, un ordinateur vous permettra d'aller plus loin !

✣ **Formule de Wallis (1616-1703)**

$$\pi = 2\left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \cdots\right) \quad \text{(et c'est sans fin … !)}$$

Cette formule est déjà plus difficile à analyser et à "prolonger". Trouvez une valeur approchée de π en prenant les dix premières fractions, puis les vingt premières … Sachez que, pour obtenir deux décimales, il faut 20 fractions, et 5000 pour trois décimales exactes …

✣ **Formule de Viète (1540-1603)**

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdots \quad \text{(et c'est sans fin !)}$$

Remarquez que, si à un certain rang le dénominateur est $\square$, au rang suivant il est

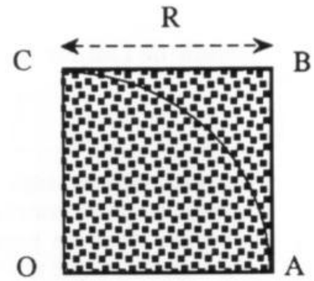
$\sqrt{2 + \square}$ …

Calculez une valeur approchée de π avec les cinq premiers facteurs. Avec les dix premiers, on obtient cinq décimales exactes. Les calculs sont plus compliqués, mais ça va plus vite …

4 Méthode de Monte Carlo

- **Avec des pointillés**

Un quart de cercle de rayon R a été tracé dans un carré de côté R.



Montrer que l'on a

$$K = \frac{\text{aire du quart de disque}}{\text{aire du carré}} = \frac{\pi}{4}$$

Dans le carré, sont régulièrement parsemés des pointillés.

Comptez les pointillés intérieurs au disque et les pointillés intérieurs au carré.

$$K \approx \frac{\text{Nombre de points dans le quart de disque}}{\text{Nombre de points dans le carré}}$$

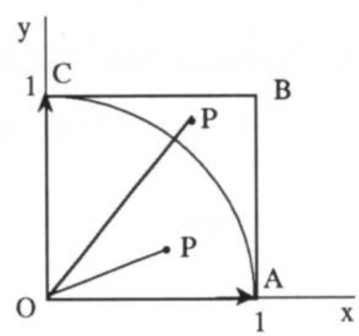
Avec beaucoup de points et un peu de patience, vous pourrez déterminez ce quotient K d'où

$$K \approx \frac{\pi}{4} \quad \text{donc} \quad \pi \approx 4\,K$$

C'est un procédé (très approximatif ...) pour trouver une valeur approchée de π.

- **À vos calculatrices !**

Choisissons un repère orthonormal (O, A, C).



Le carré OABC a pour côté 1 et le quart de cercle a pour rayon 1.

Pour un point P intérieur au carré OABC, ses coordonnées (a, b) sont des nombres compris entre 0 et 1 : P(a, b) avec $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$.

On a : $OP^2 = a^2 + b^2$

Si $a^2 + b^2 > 1$, le point P est dans le carré mais en dehors du quart de cercle.

Si $a^2 + b^2 < 1$, le point P est à l'intérieur du quart de cercle.

On peut faire ces calculs pour plusieurs dizaines de points P, on aura

$$\frac{\text{Nombre de points dans le quart de cercle}}{\text{Nombre total des points dans le carré}} \approx K$$

C'est une autre façon de retrouver une approximation de π.

♦ **Organisez-vous !**

- Chaque élève choisit **au hasard** dix couples (a, b) avec $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$.
- Remplir le tableau ci-dessous en calculant $a^2 + b^2$.
- Observer si le point P correspondant est, ou non, à l'intérieur du quart de cercle.
- Mettre en commun tous les résultats de la classe.

	a	b	$a^2 + b^2$	dans le quart de cercle	hors du quart de cercle
1	0,151	0,623	0,410	oui	
2	0,918	0,410	1,01		oui
3	...	...			
⋮					

$\downarrow$ $\boxed{N}$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ $\boxed{n}$

N est le nombre total des expériences de la classe (tous les points du carré)

n est le nombre total des points intérieurs au quart de cercle.

On a : $K \approx \frac{n}{N}$ d'où $\pi \approx 4 \times \frac{n}{N}$

À vous de jouer !

Cette méthode qui consiste à simuler la recherche de points répartis au hasard à l'intérieur d'un carré s'appelle méthode de Monte Carlo.

Cette méthode a été mise au point par J. von Neumann et S. Ulam dans des recherches sur l'énergie thermonucléaire.

Cette simulation peut être faite à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur en utilisant des nombres au hasard (instruction RND ou Random).

Les résultats sont d'autant meilleurs que le nombre des essais est plus grand ...

Ici, les résultats que vous obtenez avec quelques centaines de points ne sont, bien sûr, pas très bons.

Cependant, cette activité a pour but de vous initier à la méthode.

5 L'aiguille de Buffon

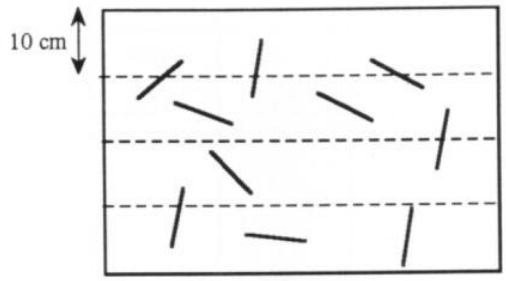
✳ Matériel et activité

Tracer sur une feuille cartonnée des lignes parallèles espacées de 10 cm.

Préparer 10 tiges rigides de 10 cm de long : tiges métalliques, aiguilles, allumettes …

Jeter les 10 tiges sur la feuille posée à plat.

Compter les tiges qui rencontrent une ligne. Sur le dessin, 6 tiges sur 10 rencontrent une ligne.



Additionner tous les résultats pour la classe entière.

Nombre de tiges lancées	10	10	10	…
Nombre de tiges qui rencontrent une ligne	6	…	…	…

Vous obtenez : N : le nombre total de tiges lancées
n : le nombre des tiges qui rencontrent une ligne

Calculez le quotient $\frac{2N}{n}$.

✳ Un résultat remarquable

Georges BUFFON, naturaliste, philosophe et écrivain (1707-1788) a démontré que si on lance un très grand nombre de fois ces tiges, le quotient $\frac{2N}{n}$ prend des valeurs de plus en plus voisines de π.

✳ Une approche avec des fonctions

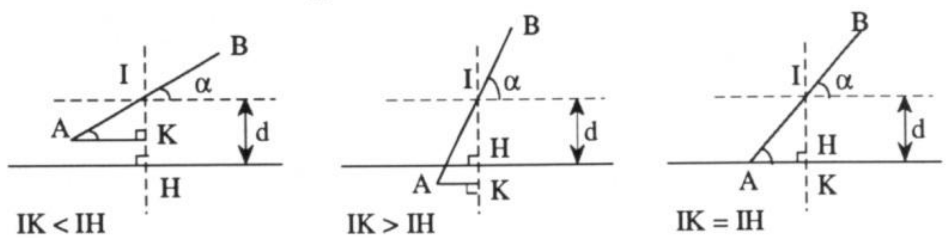
Désignons par I le milieu de la tige [AB] : $IA = IB = 5$ cm.

Désignons par α l'angle de (AB) avec la direction des lignes.

Dans le triangle rectangle IAK on a : $IK = IA \sin \alpha = 5 \sin \alpha$

Soit d la distance de I à la ligne la plus proche : $d = IH$

Examinons les trois cas de figure ci-dessous :



L'aiguille ne coupe aucune ligne. | L'aiguille coupe une ligne. | Une extrémité de l'aiguille est sur une ligne.

En conclusion, l'aiguille rencontre une ligne si $IH \leq IK$: $d \leq 5 \sin \alpha$.

∗ **Choisir au hasard**

– un nombre d compris entre 0 et 5

– un angle α, en degrés, compris entre 0° et 90°

– calculer 5 sin α et comparez d et 5 sin α.

$$\begin{cases} \text{si } d \leq 5 \sin \alpha \rightarrow \text{l'aiguille rencontre une ligne} \\ \text{si non} \qquad \rightarrow \text{l'aiguille ne rencontre pas une ligne} \end{cases}$$

Remplissez le tableau avec 10 autres choix par élève.

Choix de d	Choix de α	Calcul de 5 sin α	A-t-on $d \leq 5 \sin \alpha$?
2,13 1,09 ...	10°,51 30°,27 ...	0,912 2,520 ...	non oui ...

Additionnez les résultats de tous les élèves de la classe.

Calculez : N : nombre total de choix
n : nombre total de "oui" dans le tableau.

Calculez le quotient $\frac{2N}{n}$.

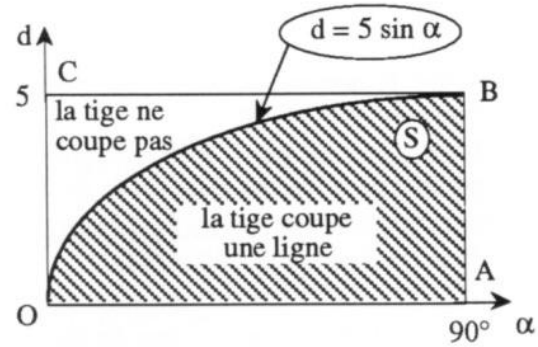
∗ **Illustration graphique**

Tracez point par point, la courbe de la fonction : $\alpha \longmapsto 5 \sin \alpha$ pour $0 \leq \alpha \leq 90°$.

Elle est inscrite dans le rectangle OABC.

Un choix (d, α) correspond à un point du rectangle OABC.

Si l'aiguille rencontre une ligne, le point (d, α) est dans la surface hachurée S.



Le quotient

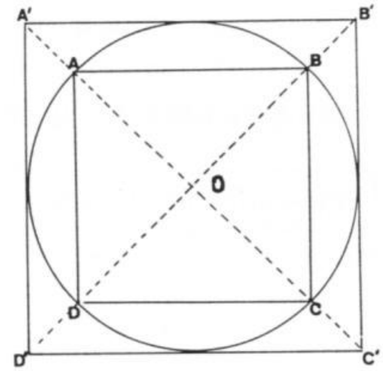
$$\frac{N}{n} = \frac{\text{nombre total de choix}}{\text{nombre de choix où l'aiguille rencontre une ligne}}$$

peut être considéré comme égal au quotient :

$$\frac{\text{aire du rectangle (OABC)}}{\text{aire de la surface S}} .$$

En Terminale, vous saurez calculer l'aire de la surface S, et vous démontrerez que le quotient de ces aires est $\frac{\pi}{2}$.

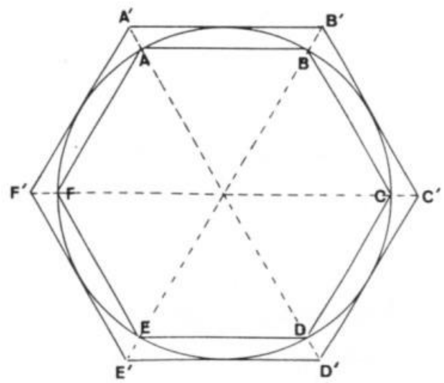
6 Avec des polygones réguliers



✤ Principe

• π est le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1.

Le demi-périmètre d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle donne une valeur approchée de π *par défaut* : montrer que l'on obtient $2\sqrt{2}$ avec un carré et 3 avec un hexagone.



Le demi-périmètre d'un polygone régulier circonscrit à ce cercle donne une valeur approchée de π *par excès*: montrer que l'on obtient 4 avec un carré et $2\sqrt{3}$ avec un hexagone.

D'où deux encadrements de π :
$2\sqrt{2} < \pi < 4$ et $2\sqrt{3} < \pi < 3$.

• Plus le nombre de côtés des polygones, inscrits et circonscrits, est grand, plus l'encadrement est fin.

D'où l'idée de partir d'un polygone connu, carré ou hexagone et d'augmenter le nombre de côtés, par exemple en doublant ce nombre.

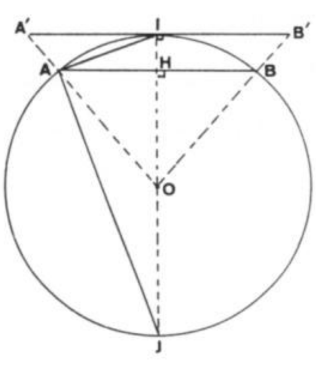
Pour pouvoir utiliser une calculatrice programmable ou un ordinateur il est bon de disposer de formules permettant :

– de calculer le côté c'_n du polygone circonscrit en fonction du côté c_n du polygone inscrit ayant le même nombre de côtés n ;

– de calculer le côté c_{2n} du polygone régulier inscrit ayant 2n côtés en fonction du côté c_n du polygone régulier inscrit ayant n côtés.

C'est le but du paragraphe suivant.

✤ Un peu de calcul



Le cercle ci-contre a pour rayon 1.

AB est le côté d'un polygone régulier inscrit ayant n côtés : $AB = c_n$.

A'B' est le côté du polygone régulier circonscrit ayant aussi n côtés :
$$A'B' = c'_n.$$

I et J sont les milieux des deux arcs $\widehat{AB}$.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OI}{OH} \qquad\qquad A'B' = AB \times \frac{OI}{OH}$$

Or $AB = c_n$, $A'B' = c'_n$, $OI = 1$ et $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}$

Montrez que l'on a : $\boxed{c'_n = \frac{2c_n}{\sqrt{4 - c_n^2}}}$ (1)

• AH est la hauteur du triangle IAJ rectangle en A.

$$AI^2 = IH \times IJ \quad \text{(relation dans un triangle rectangle)}$$

Or, $AI = c_{2n}$, $IH = OI - OH = 1 - \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}$ et $IJ = 2$

Déduisez-en que : $\boxed{c_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}}$ (2)

✣ Des encadrement de π de plus en plus fins

• On sait que, en partant du carré (n = 4) on a : $c_4 = \sqrt{2}$.

La formule (2) permet de calculer successivement c_8 , c_{16} , c_{32} , c_{64}, etc.

La formule (1) permet d'en déduire : c'_4 , c'_8 , c'_{16} , c'_{32} , c'_{64}, etc.

De même, sachant que pour un hexagone régulier, on a : $c_6 = 1$, on pourra calculer c_{12} , c_{24} , c_{48} , c_{96} , etc. puis c'_6 , c'_{12} , c'_{24} , c'_{48} , c'_{96} , etc.

À l'aide de votre calculatrice, complétez le tableau suivant (six décimales).

$\frac{1}{2} n\, c_n$ est le demi-périmètre du polygone régulier de n côtés.

n	Polygone inscrit		Polygone circonscrit		Encadrement de π
	côté c_n	$\frac{1}{2} n \times c_n$	côté c'_n	$\frac{1}{2} n \times c'_n$	
4	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2	4	$2{,}8284 < \pi < 4$
8					
16					
32					
64					
128					
256					

• Refaites le même tableau en prenant successivement pour n les valeurs 6, 12, 24, 48, 96, 192 et 384.

Attention !

En poursuivant le premier tableau au-delà de 256, on pourrait espérer de meilleurs encadrements de π.

Voici les résultats donnés par un ordinateur.

n	Encadrement de π		
256	3,141518831253052	$< \pi <$	3,141755344688913
512	3,141207933425903	$< \pi <$	3,141267099404538
1024	3,142451286315918	$< \pi <$	3,142466083456313
2048	3,142451286315918	$< \pi <$	3,142455032414237
4096	3,162277698516846	$< \pi <$	3,162278640949321
8192	3,162277698516846	$< \pi <$	3,162278075489768
16384	4	$< \pi <$	4,000000238418593
32768	5,656854152679443	$< \pi <$	5,656854152679443
65536	0	$< \pi <$	0

Pour 256, l'encadrement est satisfaisant ; que pensez-vous des encadrements suivants ? Pourquoi ces résultats faux ?

La formule (2) qui permet de calculer c_{2n} en fonction de c_n contient deux radicaux ; or calculatrices et ordinateurs ne donnent que des valeurs approchées de $\sqrt{a}$.

De plus lorsque n est grand, c_n est petit et la formule (2) finit par donner $c_{2n} = 0$ ce qui explique le dernier résultat ci-dessus.

Moralité

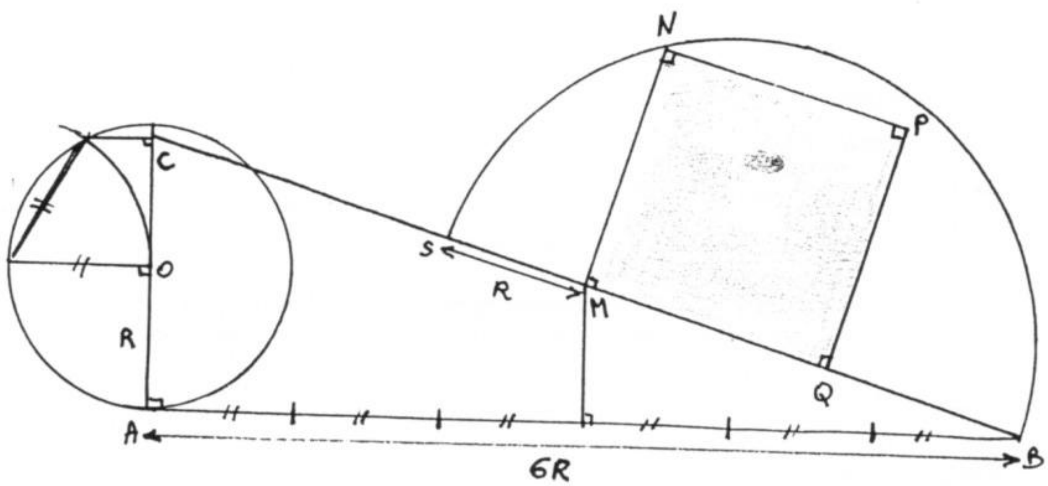
Il ne faut pas attendre des calculatrices et des ordinateurs une précision absolue. Pensez toujours aux erreurs dues aux valeurs approchées fournies par les machines : leurs répétitions peuvent conduire à des résultats faux.

7 La quadrature du cercle ... ?

Depuis l'époque grecque, les mathématiciens se sont intéressés à la quadrature du cercle : est-il possible de construire à **la règle et au compas** un carré qui aurait la même aire qu'un cercle donné ?

Ce n'est qu'au XVIIIème, puis au XIXème siècle qu'on a réussi à démontrer que la quadrature du cercle était impossible.

Il est toutefois possible de construire, à la règle et au compas, un carré qui a approximativement la même aire que celle d'un cercle. Pour cela, on trace d'abord le cercle de centre O et de rayon R ; en vous aidant du dessin, construire le carré MNPQ qui a sensiblement la même aire que le cercle de centre O et de rayon R.



Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 0,1 près de l'aire du carré MNPQ en fonction de R.

Pour vous aider, on vous rappelle que $MN^2 = MS \times MB$.

8 Des curiosités ...

♦ **Une curieuse formule** due à Ramanujan, mathématicien hindou (1887 - 1920), collaborateur de l'anglais Hardy.

$$\pi \approx \frac{9{,}801}{\sqrt{8}\left(1{,}103 + \dfrac{24 \times 27{,}493}{396^4}\right)}$$

Combien y a-t-il de décimales exactes ... ?

♦ A est un cercle de rayon $\dfrac{1}{\pi}$

B est un cercle de rayon $\sqrt{\pi}$

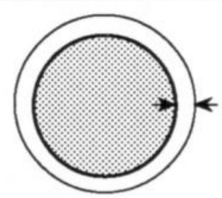
C est un carré de côté π

D est un rectangle de dimensions 1 et $\dfrac{1}{\pi}$

E est un trapèze isocèle de bases π et 2π et de hauteur $\dfrac{2\pi}{3}$

Parmi ces cinq figures, y a-t-il des aires égales ? des périmètres égaux ?

♦ Une ficelle entoure la Terre au niveau de l'équateur. On allonge cette ficelle de 63 cm et on la dispose régulièrement éloignée autour de l'équateur.



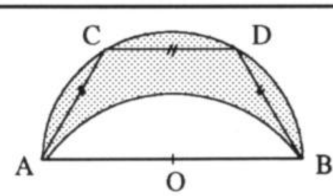
Jules : "Une souris pourrait se glisser sous la ficelle".

Jacky : "Tu n'y penses pas ! même une mouche ne pourrait passer dessous !"

Qui a raison ?

Et si l'on remplace la Terre par une mappemonde de 80 cm de diamètre ?

♦ ACDB est un demi-hexagone régulier inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB].



Le petit arc $\widehat{AB}$ est tangent en A à (AC) et en B à (BD).

L'aire du trapèze ACDB est égale à l'aire de la lunule grisée.

Vrai ou faux ?

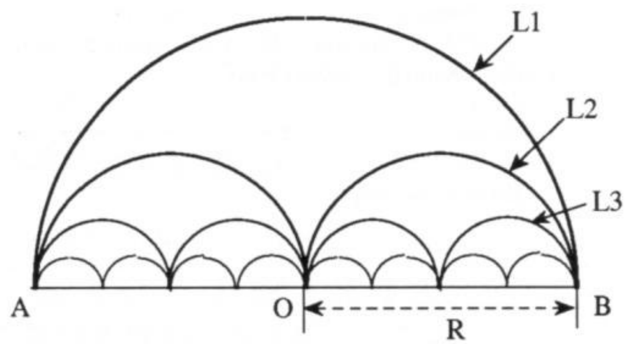
9 Où l'on trouve que $\pi = 2$!

- Le grand demi-cercle L_1 de rayon R a pour longueur πR.

  – La ligne L_2 est constituée de deux demi-cercles de rayon $\frac{R}{2}$

  La longueur de L_2 est :

  $$2 \times \left(\pi \times \frac{R}{2}\right) = \pi R$$



– Et la ligne L_3 ? Elle est composée de quatre demi-cercles de rayon $\frac{R}{4}$.

Calculez sa longueur L_3.

– Et pour L_4 ?

Ainsi, en divisant chaque fois le rayon par 2, la nombre des demi-cercles double, la longueur totale de la ligne ne change pas … ; démontrez-le.

L_1	$\rightarrow$	πR
L_2	$\rightarrow$	πR
L_3	$\rightarrow$	?
L_4	$\rightarrow$	?
	…	
L_{100}	$\rightarrow$	?

Au bout du compte, cette ligne semble se confondre avec le segment [AB] de longueur 2R.

S'il en était ainsi, on aurait $\pi R = 2R$; ce qui voudrait dire que : $\pi = 2$ …

Ce qui est évidemment faux !

Surprenant résultat, qui constitue un paradoxe des mathématiques …

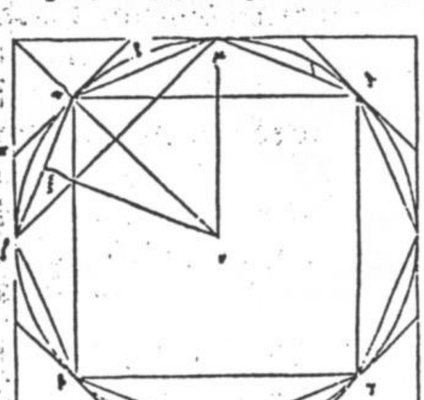
> Il n'est d'ailleurs pas possible d'en donner une explication avant d'avoir étudié des notions plus difficiles de "***limite***" que vous aborderez plus tard.

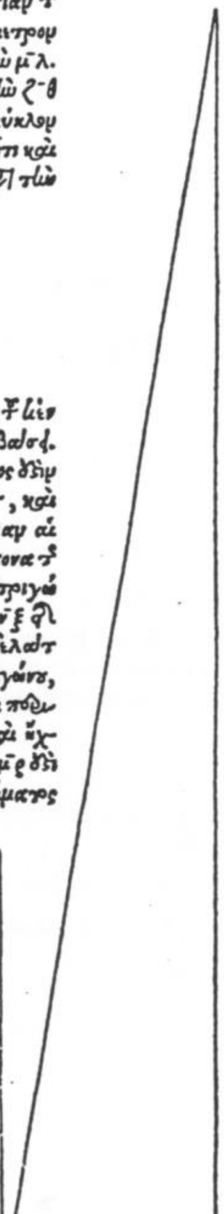
- Examinez comment varie la somme des aires des demi-cercles à chaque étape.

αργ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακγ. διότι τῇ ἐλάσσονα πλευρὰν τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αρ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αβ. μείζων οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν γ αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ξ κα. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξ κα, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μ κγ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν γ αρ, τοῦ ὑπὸ τῶν μ κγ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γα πρὸς τὴν κγ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς τὴν γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ. δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζθ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἢ ἡ μκ πρὸς τὴν μλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν βδ, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

α Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ αβγδ κύκλος, ὡς ὑπόκειται. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ αγ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ νξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ νξ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάττων τοῦ ε τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ οαρ. ἡ ορ ἄρα τῆς μρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρμ τῇ ρα ἴση ἐστί. καὶ τὸ ροπ τρίγωνον ἄρα τοῦ οζαμ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ πζα τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ αβγδ κύκλου. ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν να ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.





β Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ. ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ αβ.

Extrait de « De la mesure du cercle ». Archimède (édité en 1544).