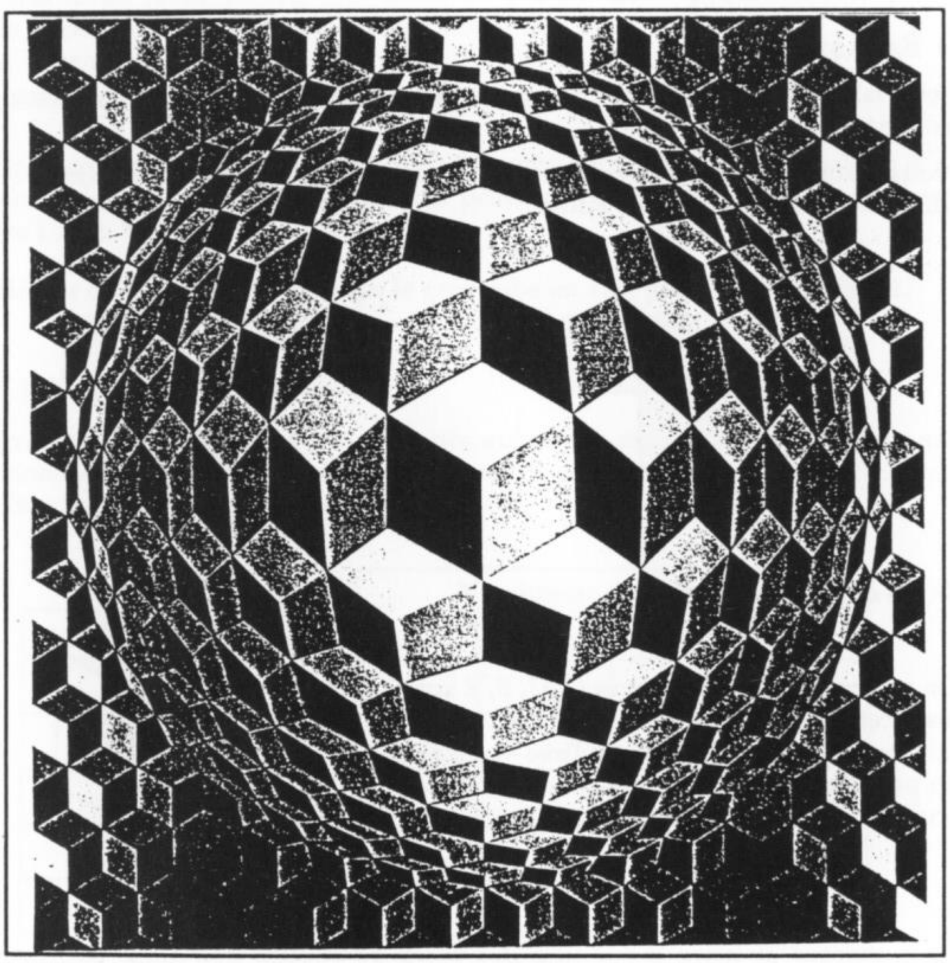
GALION THÈMES

Histoire de Cubes



d'après Vasarely

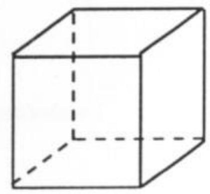
15, quai André Lassagne - 69001 LYON
1992

ISBN 2-912209-10-2

Vive les patrons !

Vous connaissez bien le cube !

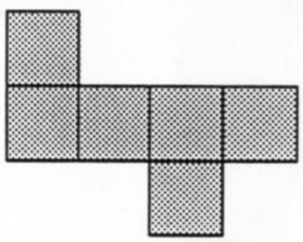
Le cube est un polyèdre régulier dont les six faces sont des carrés. Certains l'appellent "hexaèdre régulier". Expliquez pourquoi.

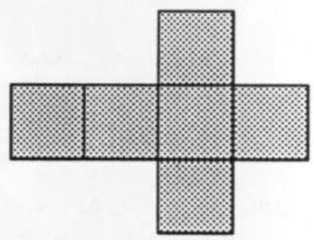


➪ Fabriquer un cube

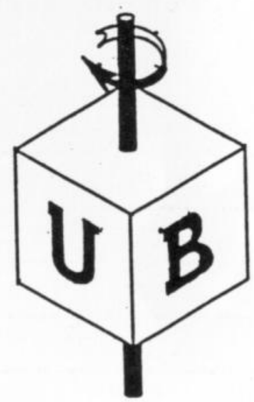
Pour fabriquer un cube en carton, on peut d'abord en dessiner un *développement* ou un *patron*.

Nous avons dessiné ci-dessous deux patrons de cube. Il en existe onze différents : trouver les neuf autres.



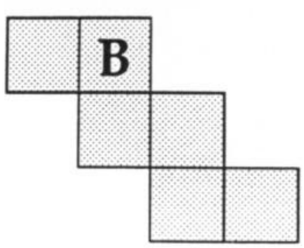


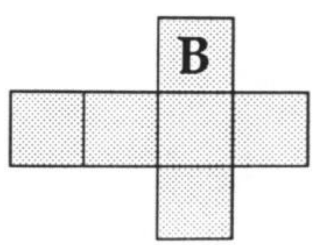
➪ Le cube tournant



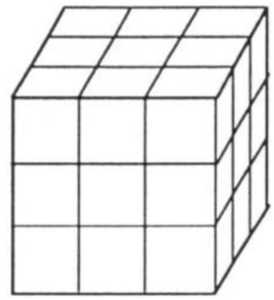
On a marqué les quatre lettres C, U, B, E sur les faces d'un cube de telle sorte que, si on fait tourner le cube autour de l'axe vertical, on peut lire, dans l'ordre, les lettres du mot "cube".

On a marqué la lettre B sur une des faces de chacun des deux patrons ci-dessous. Retrouver, sur chaque patron, la disposition et l'orientation de chacune des lettres C, U, E.





2 Vive la peinture !



➪ Les six faces d'un cube en bois sont peintes en bleu. On découpe à la scie ce gros cube en 27 petits cubes de même arête comme sur le dessin ci-contre.

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

Certains de ces petits cubes ont trois faces bleues, d'autres deux faces bleues, etc. Combien y a-t-il de petits cubes qui sont peints sur trois faces ? sur deux faces ? sur une face ?

Combien y en a-t-il qui n'ont aucune face peinte ?

➪ On découpe cette fois le gros cube en 64 petits cubes de même arête ($64 = 4^3$). Combien de petits cubes ont trois faces peintes ? deux faces peintes ? une face peinte ? zéro face peinte ?

➪ Mêmes questions si on découpe le gros cube en 125, puis 216 petits cubes.

➪ Et pour généraliser ...

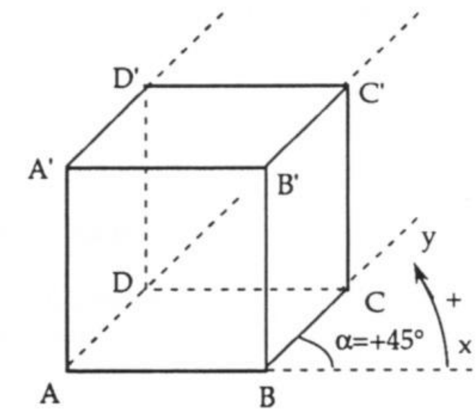
Le gros cube est découpé en n^3 petits cubes de même arête. Trouver en fonction de n, le nombre de cubes ayant trois faces peintes, deux faces peintes, une face peinte ou zéro face peinte ...

	Nombre de faces peintes			
nombre de petits cubes	3	2	1	0
$27 = 3^3$				
$64 = \ldots^3$				
$125 = \ldots^3$				
$216 = \ldots^3$				
n^3				

- Peut-on trouver n de telle sorte qu'il y ait autant de petits cubes ayant deux faces bleues que de cubes ayant une face bleue ?
- Et si l'on veut autant de petits cubes ayant une face bleue que de petits cubes non peints ?
- Est-il possible qu'il y ait autant de petits cubes à trois faces bleues que de cubes à deux faces bleues ?

3 La perspective cavalière

La perspective cavalière est un mode de représentation d'un solide de l'espace. Elle est basée sur des ***conventions de dessin***. En voici quelques-unes utiles pour représenter un cube.

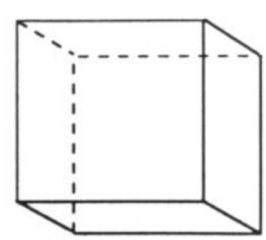


- On choisit la face **avant** : ABB'A' par exemple. Elle est représentée en vraie grandeur.
- Le côté [BC] est porté par une demi-droite [By) qui fait, avec la demi-droite [Bx), prolongement de [AB], un angle α, appelé **angle de fuite** : cet angle est noté avec un signe (+) si le sens "Bx vers By" est le sens contraire des aiguilles d'une montre et avec le signe (–) dans le cas contraire.
- Le côté [BC] n'est pas représenté en vraie grandeur : sa longueur sur le dessin s'obtient en multipliant sa **longueur réelle** par un coefficient k appelé **rapport de réduction** : $k < 1$.

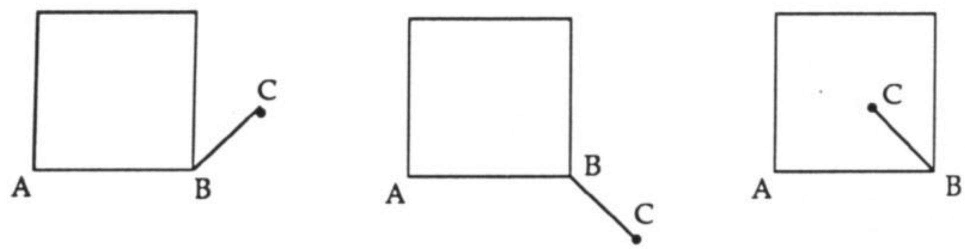
  Sur notre dessin, nous avons : $\alpha = +45°$ et $k = \dfrac{2}{3}$; $BC = \dfrac{2}{3} AB$.

  On dit que l'on utilise la perspective $P\left(\dfrac{2}{3}, +45°\right)$.
- Les côtés parallèles sont représentés par des côtés parallèles : (B'C') // (BC) ; (AD) // (BC) ; (DC) // (AB) ; ...
- Les segments "cachés" par certaines faces visibles sont tracés en pointillés.

⇨ Activités



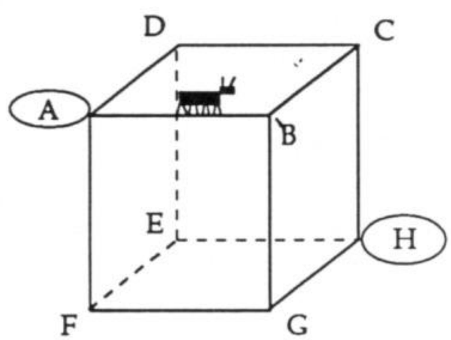
- Sur la figure ci-contre, vérifier que l'on a utilisé une perspective avec un angle de fuite $\alpha = -30°$ et un rapport de réduction $k = \dfrac{1}{3}$; c'est-à-dire $P\left(\dfrac{1}{3}, -30°\right)$.
- Sur chacune des figures ci-dessous, on a représenté la face avant et le segment [BC]. Achevez le tracé et pour chaque cas trouver α et k.



- L'Association Française de Normalisation (AFNOR) recommande de prendre $\alpha = +45°$ et $k = 0{,}5$. Sur une feuille de dessin, dessinez une face avant de 12 cm de côté puis une perspective cavalière du cube avec ces normes. Quel est l'inconvénient de cette perspective ?

Une fourmi sur un cube ...

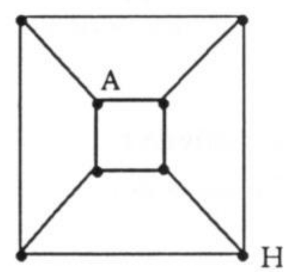
Une fourmi se promène en suivant les arêtes du cube ci-contre.



- Elle part de A pour aller en H.

  Combien y a-t-il de chemins empruntant trois arêtes ? quatre arêtes ? cinq arêtes ? six arêtes ? ... Que remarquez-vous ?

  Pour suivre ce déplacement, on peut représenter le cube par le schéma ci-contre que l'on appelle un *graphe* : le nombre des "segments" du graphe est égal au nombre des arêtes du cube. Le nombre de "nœuds" est égal au nombre des sommets du cube. Marquez sur le graphe chacune des lettres qui manquent.



- Elle part de A et revient en A

  Pouvez-vous trouver un chemin qui permet, en partant de A, de passer une fois et une seule par chacun des sommets et de revenir au point de départ ? Combien y a-t-il de tels chemins ?

- Est-il possible que, partant de A, elle revienne en ce point en parcourant chacune des arêtes exactement une fois ?

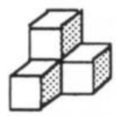
5 Empilement de cubes

Vous utiliserez une boîte de cubes ou ... un peu d'imagination !

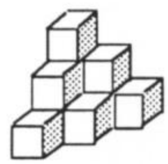
➪ Activité n° 1

Fabriquer des assemblages de cubes comme il est indiqué ci-dessous.

(1) : un étage



(2) : deux étages



(3) : trois étages

Pour les assemblages (1) et (2) vous avez utilisé respectivement un et quatre cubes. Combien en faut-il pour le (3) ?
Si on continuait à empiler des cubes sur le même modèle, combien en faudrait-il pour un assemblage (4) de 4 étages ? et de 5 étages ?
Les nombres obtenus : 1 ; 4 ; 10 ; ... sont des nombres ***pyramidaux***.

→ **Un truc pour les trouver !**

Vérifier que la formule générale donnée pour n étages est bien valable pour les cinq premiers assemblages.

Combien de cubes pour un assemblage de 50 étages ?

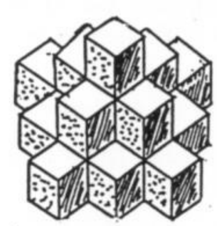
Nombre d'étages	nombre de cubes
1	1
2	1 + 3
3	1 + 3 + 6
4	...
5	...
n	$T_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

➪ Activité n° 2

Fabriquer de nouveaux assemblages de cubes sur le modèle ci-dessous.

(1) : un étage

(2) : deux étages

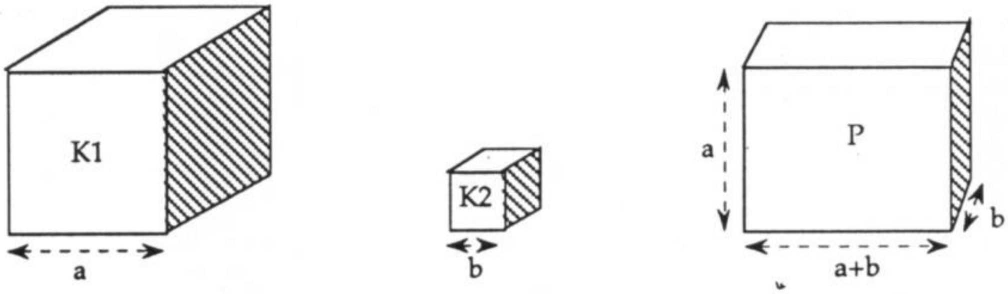


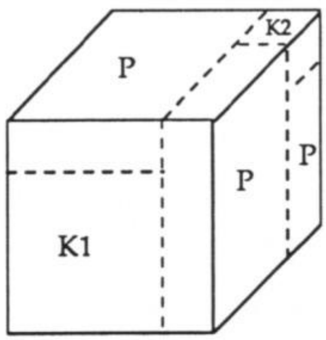
(3) : trois étages

Pour les assemblages (1) et (2) vous avez utilisé respectivement 1 et 6 cubes. Combien en faut-il pour le (3) ?
Si on continuait à empiler des cubes sur le même modèle, combien en faudrait-il pour un assemblage (4) de quatre étages ? et de cinq étages ? ...

Le puzzle de Cardan

(Cardan, *Mathématicien italien* 1501-1576)





- K1 est un cube de côté a.

  K2 est un cube de côté b.

  P est un parallélépipède rectangle de côtés a, b, a+b.

  À l'aide des deux cubes et de trois parallélépipèdes P, reconstituer un gros cube. Quel est son côté ? Quel est son volume ?

- Montrer que $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)}$ (1)

  À l'aide de cette formule écrire $(a+1)^3$ puis $(a+2)^3$.

  Calculer $D = (a+2)^3 - (a+1)^3$ et vérifier que $D = 7 + 3a\,(a+3)$

  Démontrer la propriété : **"Si a est multiple de 7, alors D est multiple de 7".**

  Voici des nombres :

  $$c = 29^3 - 28^3;\ d = 79^3 - 76^3;\ e = 141^3 - 140^3;\ f = 1\,402^3 - 1401^3$$

  Parmi ces nombres, dire ceux dont vous êtes sûrs qu'ils sont multiples de 7 en utilisant la propriété qui précède.

  La réciproque s'énoncerait : **"Si D est multiple de 7, alors a est multiple de 7".**

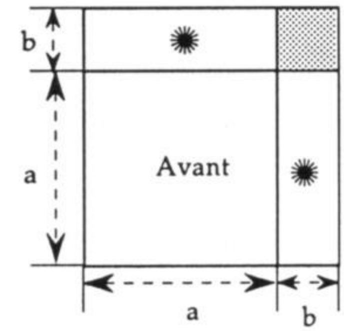
  Montrez que cette réciproque est fausse en utilisant les nombres : $6^3 - 5^3$ et $13^3 - 12^3$.

- En utilisant (1) montrer que $a^3 + b^3 = (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$.

  Sachant que $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$, montrez, sans calculatrice, que 1729 est divisible par 19 et par 13. Trouver d'autres exemples.

Huit morceaux ...

On a dessiné la face "avant" d'un cube C en bois, d'arête (a + b) cm, puis le cube complet en perspective cavalière, avec des tracés de découpage.



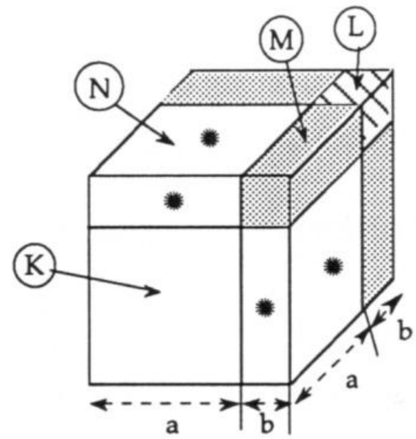
On scie en suivant ces traits de sorte que l'on obtient en définitive huit solides :

- un cube K
- un cube L
- trois parallélépipèdes tels que M
- trois parallélépipèdes tels que N.

- On prend d'abord

  $a = 5$ cm; $b = 2$ cm

  - Préciser les dimensions de chaque morceau.
  - Calculer le volume de chacun d'eux.
  - Vérifier que le volume du cube initial est égal à la somme des huit volumes.



	Dimension	Volume
K		
L		
M		
N		
C		

K + L + 3M + 3N = C

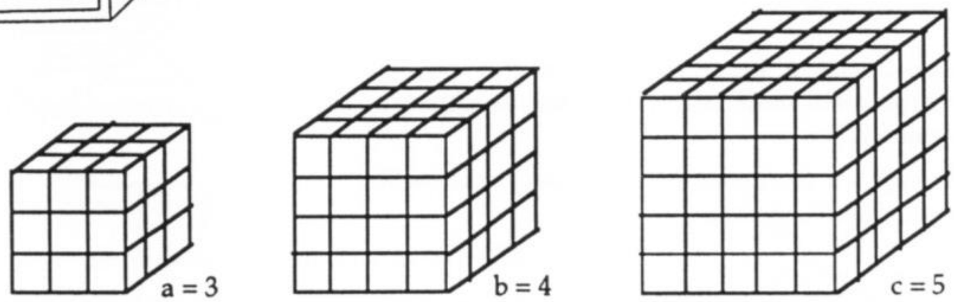
- On prend a et b quelconques

  Refaire les calculs des volumes **en fonction de a et de b.**

Volume de K =
Volume de L =
Volume de M =
Volume de N =
Volume de C =

Contrôler que
$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2$.

8 On ajoute trois cubes $\boxed{a^3 + b^3 + c^3 = ?}$



- Ces trois cubes sont des assemblages de petits cubes de même arête.

  Le premier contient 27 petits cubes : $27 = 3^3$. Le second en contient 64 : $64 = 4^3$; le troisième en contient 125 : $125 = 5^3$. Combien de petits cubes au total ?

  Vérifier que, avec tous ces petits cubes, on peut former un cube unique de côté 6. Autrement dit, $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

- $\boxed{\text{Somme de trois cubes = Un cube}}$

- Vérifier qu'on a aussi cette propriété avec : $6^3 + 8^3 + 10^3$ (remarquer que $6 = 2 \times 3$; $8 = 2 \times 4$; $10 = 2 \times 5$) et avec $1^3 + 6^3 + 8^3$.

- En utilisant ce qui précède, trouvez deux façons d'écrire :

  $$36^3 = a^3 + b^3 + c^3$$ (a, b, c sont évidemment des entiers).

- Et avec 41^3 , trouver ce qui manque :

  $41^3 = 2^3 + 17^3 + \boxed{A}^3$ $41^3 = 6^3 + 32^3 + \boxed{B}^3$

- Et avec 90^3 , on trouve quatre décompositions qu'il vous reste à compléter :

  $10^3 + X^3 + 80^3$; $25^3 + 38^3 + Y^3$; $45^3 + 60^3 + Z^3$; $58^3 + 59^3 + T^3$.

  Vous pouviez en prévoir deux, lesquels ?

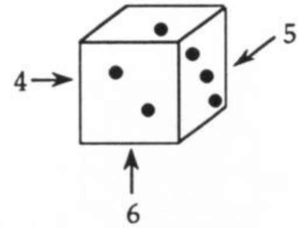
> a, b, c, d étant des entiers, vous venez de trouver des solutions de l'équation : $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$. Un ordinateur peut vous aider à en trouver d'autres !
>
> Il est intéressant de savoir que l'équation $a^3 + b^3 = c^3$ n'a pas de solution.
>
> (Théorème de Fermat)

9

Avec un dé à jouer

Sur un dé à jouer, la somme des points marqués sur deux faces opposées est toujours égale à 7.

Prenez, ou fabriquez, un dé à jouer comme il est indiqué ci-contre.



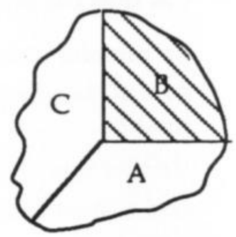
Fabriquez, dans du carton fort, une sorte de "coin" comme il est indiqué sur la figure ci-dessous, par exemple en assemblant trois "équerres" cartonnées : A, B et C.

Il y a plusieurs façons de placer le dé dans ce coin (ABC).

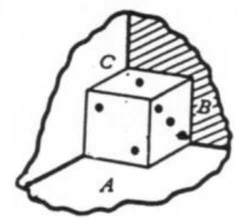
Par exemple : face marquée 6 contre A, sur le "sol"
face marquée 5 contre B
on a alors la face marquée 4 contre C.

$6 \rightarrow A$; $5 \rightarrow B$; $4 \rightarrow C$.

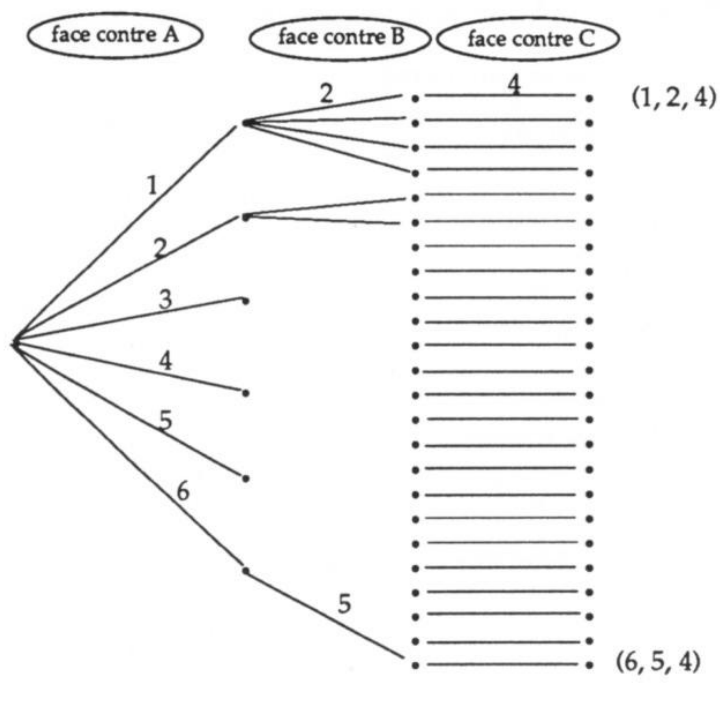
Cette position du dé à jouer sera codée par le **triplet** : **(6, 5, 4).**



Trouver toutes les positions possibles de ce dé dans ce "coin", c'est-à-dire tous les triplets (X, Y, Z) correspondant à ces positions.



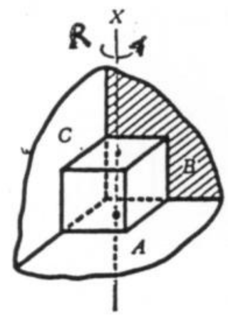
Pour cela, vous pouvez vous aider d'un arbre, chaque branche correspond au choix d'une face (numéro 1 à 6).
Il y a 24 positions différentes possibles : donnez les 24 triplets :



Faire tourner le dé à jouer

Pour cette activité, utilisez le dé construit à l'activité précédente.

Première rotation



Plaçons le dé dans le position (1, 4, 5) sur ABC.

En laissant la face 1 sur A, faire tourner le dé d'un quart de tour comme il est indiqué : la face 4 qui était contre B vient contre C, et c'est alors la face 2 qui vient contre B.

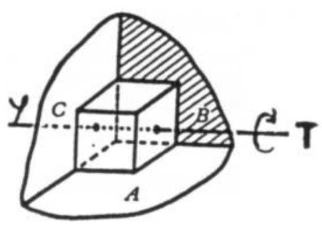
On a la transformation R : $(1, 4, 5) \longmapsto (1, 2, 4)$.

Pour cette même rotation désignée par R, on a

$$(1, 2, 4) \xmapsto{R} (1, 3, 2)$$
$$(6, 2, 3) \xmapsto{R} (6, 4, 2)$$

Reprendre les 24 positions trouvées plus haut : à chacune d'elles associer la nouvelle position obtenue par la rotation R.

Seconde rotation



Voici une seconde rotation : cette fois la face contre C ne change pas mais on fait tourner le dé d'un quart de tour autour de la droite Y de telle sorte que la face contre B vienne en A.

Par exemple, pour cette rotation T on a :

$$(1, 4, 5) \xmapsto{T} (4, 6, 5)$$

Compléter :

$$(4, 6, 5) \xmapsto{T} (\ldots, \ldots, \ldots)$$
$$(5, 4, 6) \xmapsto{T} (\ldots, \ldots, \ldots)$$

Comme ci-dessus, reprendre les 24 positions et appliquer à chacune d'elles cette nouvelle rotation T.

L'une puis l'autre

Appliquer R puis T : $(1, 4, 5) \xmapsto{R} (\ldots, \ldots, \ldots) \xmapsto{T} (\ldots, \ldots, \ldots)$

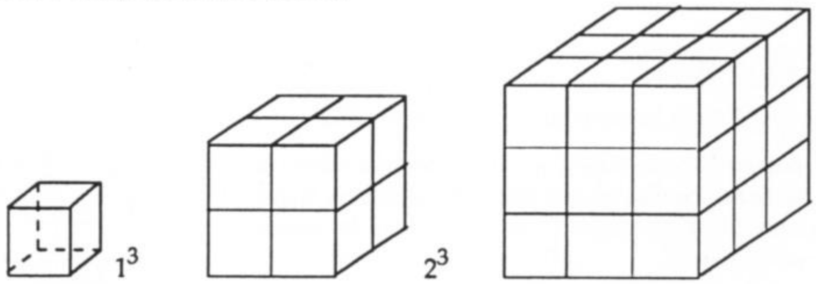
$(1, 2, 4) \xmapsto{R} (\ldots, \ldots, \ldots) \xmapsto{T} (\ldots, \ldots, \ldots)$

Appliquer T puis R : $(1, 4, 5) \xmapsto{T} (\ldots, \ldots, \ldots) \xmapsto{R} (\ldots, \ldots, \ldots)$

$(1, 2, 4) \xmapsto{T} (\ldots, \ldots, \ldots) \xmapsto{R} (\ldots, \ldots, \ldots)$

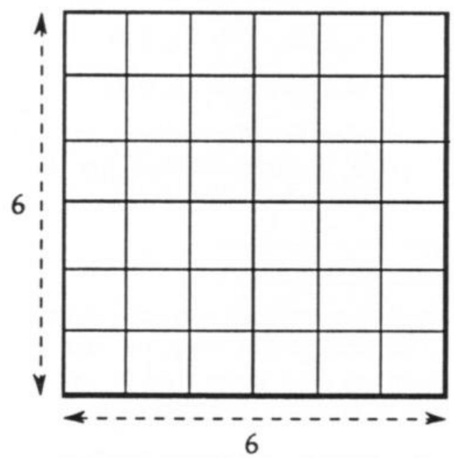
11 Somme de cubes = Carré d'une somme

➠ a) Martin dispose de trois empilements de cubes, formés de mêmes petits cubes : 1 cube, 8 cubes, 27 cubes.



1^3 2^3 3^3

Il démonte les empilements et veut paver un carré de 6 x 6 en posant un petit cube par case. Est-ce possible ? Aidez-le !



b) Vérifiez que :

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2}$$

c) Vérifiez que :

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = (1+2+3\ 4+5)^2}$$

Et cette propriété est générale : $\boxed{1^3 + 2^3 + \ldots + p^3 = (1 + 2 + \ldots + p)^2}$

➠ Essayons de calculer plus simplement la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + p$.

On démontre que : $1 + 2 + 3 + \ldots + p = \dfrac{p\,(p + 1)}{2}$

Vérifiez cette formule pour $p = 3$, $p = 5$, $p = 10$.

Calculer la somme des 100 premiers entiers.

➠ En utilisant les formules précédentes, calculez le plus simplement possible :

A $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 12^3$ B $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 13^3$

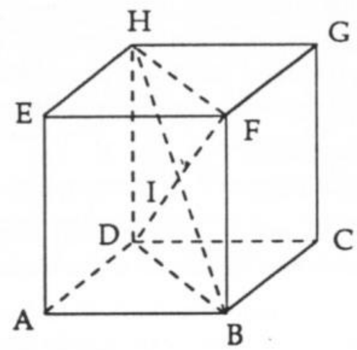
C $= 2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 72^3$ D $= 3^3 + 6^3 + 9^3 + \ldots + 36^3$

E $= 48^3 + 49^3 + 50^3 + \ldots + 100^3$

12 Pour calculer

L'arête d'un cube est désignée par a.

Voici des résultats que vous connaissez.



Volume du cube :	$V = a^3$
Aire totale :	$S = 6\ a^2$

- En isolant le rectangle HDBF, calculer en fonction de a la diagonale HB et la diagonale DF. Trouver deux autres diagonales du cube. Montrer que les quatre diagonales ont même longueur et se coupent au milieu I de chacune d'elles, qui est le centre du cube.

- On peut construire une sphère de centre I passant par les huit sommets du cube et une sphère de centre I tangente aux six faces : calculer en fonction de a, le rayon, le volume et l'aire de chacune de ces deux sphères.

- Calculer l'angle formé par deux diagonales du cube.

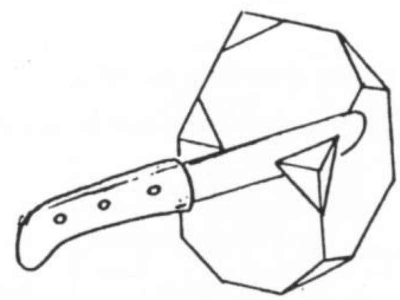
- Calculer l'angle de la diagonale (DF) et de l'arête (FB).

  Calculer l'angle de (DF) diagonale du cube, avec (FH) diagonale d'une face.

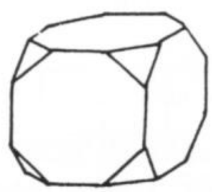
- Isoler le triangle HAC. Montrer qu'il et équilatéral et calculer son aire en fonction de a.

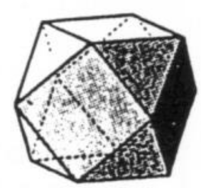
Le cube tronqué

Découpons les coins d'un cube en enlevant à chaque sommet une pyramide dont la base est un **triangle équilatéral**. On obtient alors un **cube tronqué** dont les faces sont des **triangles équilatéraux** et des **octogones**.



- Combien y a-t-il de triangles équilatéraux ? d'octogones ?
- Quel est le nombre de sommets, de faces et d'arêtes du cube tronqué ?
- Comment faudrait-il découper les coins du cube pour que le cube tronqué obtenu ait ses faces constituées de triangles équilatéraux et de carrés ? Quel serait alors le nombre de faces, de sommets et d'arêtes ?





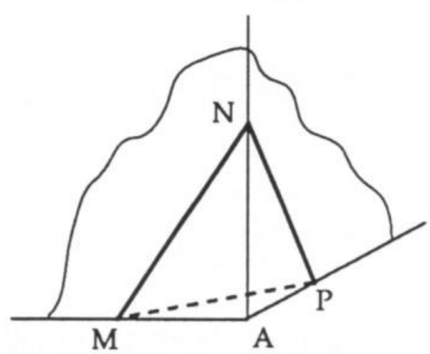
CALCULONS

Le cube initial a 10 cm d'arête.

Soit MNP la section du coin de cube de sommet A.

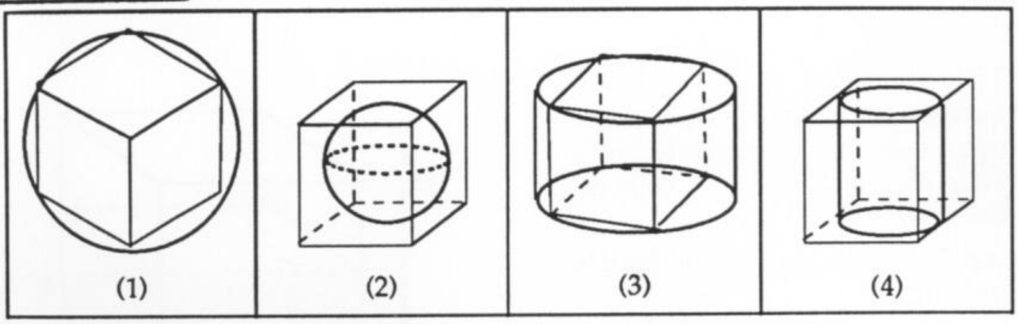
C'est un triangle équilatéral. On pose : AM = AN = AP = x .

- Calculer en fonction de x :
  - Le volume de la pyramide AMNP.
  - V(x) : le volume du cube tronqué.
  - L'aire du triangle MNP.
  - A(x) : l'aire du cube tronqué.
  - L(x) : la somme des longueurs des arêtes du cube tronqué.



- Calculer V(x), A(x), L(x) pour les valeurs suivantes de x : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 puis donner une représentation graphique de chacune de ces trois fonctions.
- Si on veut que les octogones qui constituent certaines faces du cube tronqué soient réguliers, quelle valeur faut-il donner à x ?

14 Cubes, sphères et cylindres



On dispose d'un cube d'arête a.

Dans la figure (1), le cube est inscrit dans une sphère.

Dans la figure (2), la sphère est inscrite dans le cube.

Dans la figure (3), le cube est inscrit dans un cylindre.

Dans la figure (4), le cylindre est inscrit dans le cube.

Pour chacun des cas, on va calculer le volume de la "place perdue", c'est-à-dire l'espace libre entre le cube et la sphère, ou encore le cube et le cylindre.

Calculer en fonction de a :

le volume V_1 compris entre la sphère et le cube (figure 1),

le volume V_2 compris entre le cube et la sphère (figure 2),

le volume V_3 compris entre le cylindre et le cube (figure 3),

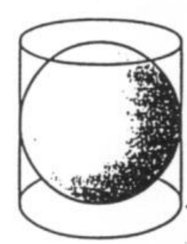
le volume V_4 compris entre le cube et le cylindre (figure 4).

Ranger V_1, V_2, V_3 et V_4 dans l'ordre croissant.

Si l'on "superpose" les figures (2) et (4), le cylindre est dit circonscrit à la sphère.

Archimède établit que le volume de la sphère remplit les deux-tiers du volume du cylindre circonscrit. Il exprima le vœu que sa tombe portât la représentation géométrique correspondante, vœu que combla le général Marcellus. Cicéron prétendit avoir retrouvé, grâce à cette figure, la tombe d'Archimède laissée à l'abandon.

(Le matin des mathématiciens)

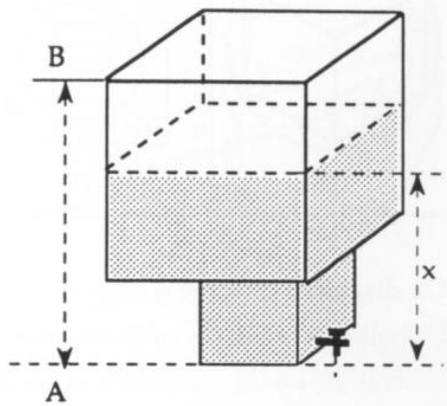


15 Histoire de cuve

Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent : l'arête du grand est 80 cm, celle du petit est 60 cm.

x est la hauteur du liquide dans la cuve.

V(x) est le volume, en litres, du liquide, lorsque la hauteur est x.



- Exprimer V en fonction de x.

- Donner une représentation graphique de V.

- Soit W(x) le volume restant au-dessus du liquide. Donner une représentation graphique de W.

- Sur le segment [AB] on veut marquer une graduation indiquant, en litres, le volume qui reste dans la cuve.

  Représenter cette graduation à l'échelle $\frac{1}{10}$.