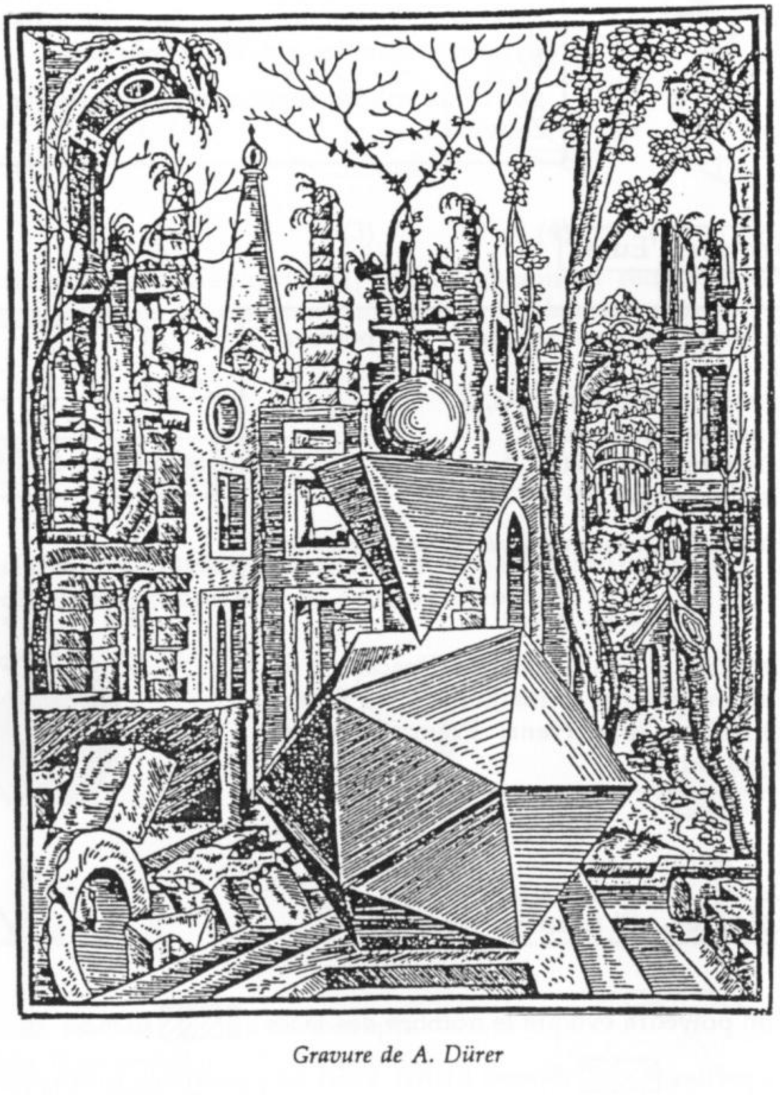
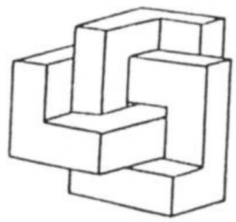
GALION THÈMES

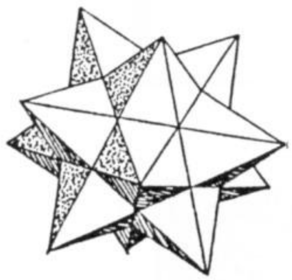
Avec des Polyèdres



Gravure de A. Dürer

15, quai André Lassagne – 69001 LYON
1992





Un polyèdre est un solide délimité par des faces qui sont toutes des polygones, c'est-à-dire des portions de plans.
(*poly* : plusieurs – *èdres* : face).

Vous connaissez déjà un certain nombre de polyèdres : cube, parallélépipède rectangle ou non, prisme, pyramide, tétraèdre, etc.

Par contre, le cylindre et le cône ne sont pas des polyèdres.

On dit qu'un polyèdre est **convexe** si une droite ne peut percer le solide en plus de deux points, autrement dit, si le solide est situé tout entier d'un même côté du plan contenant une face, quelle qu'elle soit. Ainsi un cube, un prisme, une pyramide sont des polyèdres convexes.

Les deux solides représentés ci-contre ne sont pas convexes.

⇨ La formule d'Euler

Pour un polyèdre quelconque, vous pouvez compter :

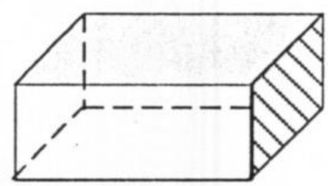
- le nombre des sommets, S
- le nombre des faces, F
- le nombre des arêtes, A

et calculer le nombre : $S + F - A$.

On a démontré que si un **polyèdre** est **convexe** alors :

$$S + F - A = 2$$

Cette formule , déjà utilisée par Descartes, a été établie en 1752 par le mathématicien Euler puis généralisée par Henri Poincaré pour d'autres polyèdres.



$S + F - A = 2$

$8 + 6 - 12 = 2$

⇨ Étymologie ... et nombre de faces

Le nom d'un polyèdre évoque le nombre des faces : ▨ EDRE.

On place le préfixe ▨ devant EDRE. Voici les principaux préfixes utilisés :

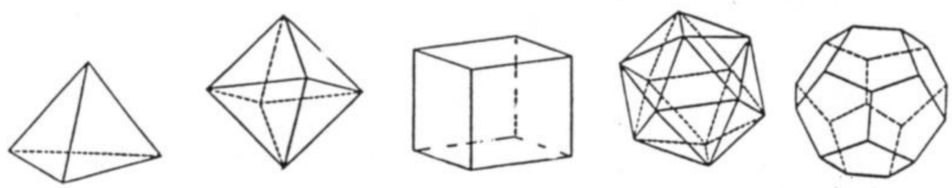
Nombre de faces	4	5	6	7	8	10	12	20
▨ =	tétra	penta	hexa	hepta	octa	déca	dodéca	icosa

⇨ Les solides de Platon

Ces sont cinq polyèdres **réguliers convexes** : toutes les faces sont des polygones réguliers (convexes) identiques. À chaque sommet se raccorde le même nombre d'arêtes.

Ces cinq solides remarquables furent utilisés par le philosophe Platon, (400 avant J.-C.) pour symboliser le Feu, la Terre, l'Air, l'Eau et l'Univers.

On a découvert que dix siècles avant notre ère les étrusques jouaient aux dés avec des dodécaèdres réguliers (5). 600 ans avant J.-C., les Pythagoriciens connaissent le tétraèdre (1) et le cube (3). C'est vers 400 avant J.-C. qu'un disciple de Platon découvre l'octaèdre (2) et l'icosaèdre (4).

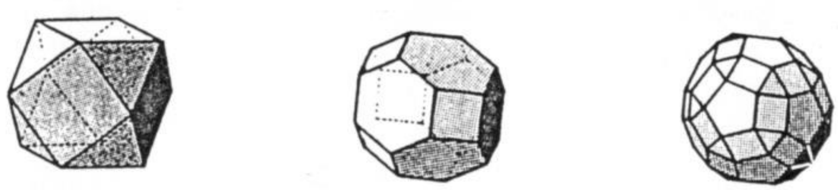


(1) (2) (3) (4) (5)

Vingt siècles plus tard,Képler (1571) utilise ces solides remarquables et les sphères circonscrites en les associant aux orbites de planètes connues.

⇨ Polyèdres semi-réguliers

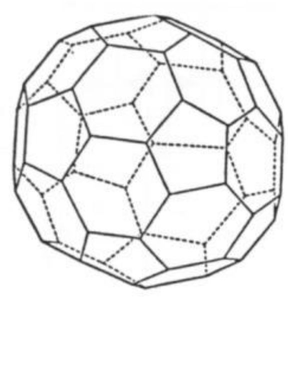
Il y a aussi d'autres polyèdres intéressants, appelés **semi-réguliers**; les faces sont des polygones réguliers de 2 ou 3 types différents.



(5) $8\,\triangle + 6\,\square$

(6) $6\,\square + 6\,\hexagon$

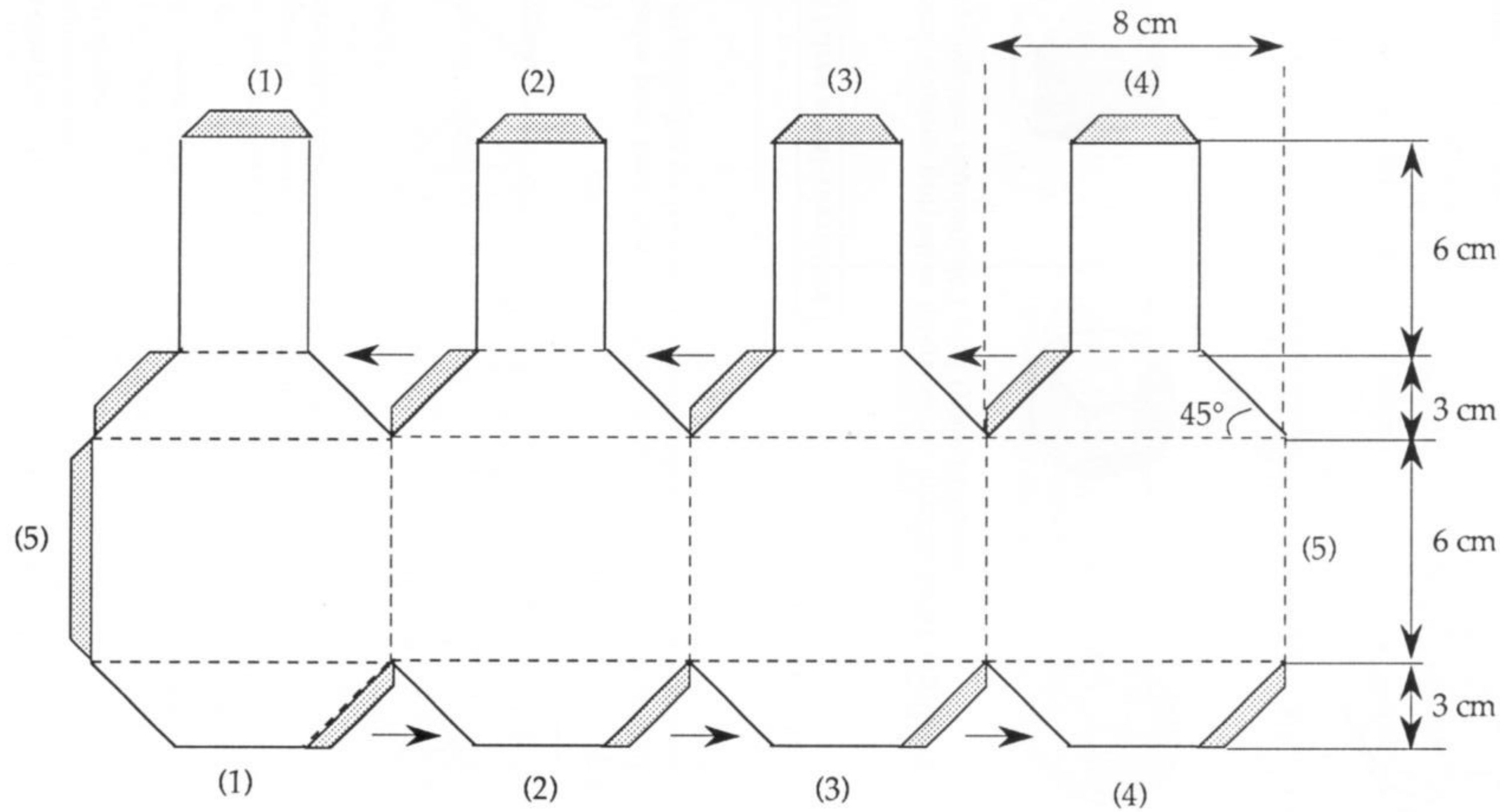
(7) $20\,\triangle + 30\,\square + 12\,\hexagon$



Le ballon de football en est un exemple remarquable. Il est formé de 12 pentagones réguliers, 20 hexagones réguliers.

Il a 90 arêtes et 60 sommets …

C'est un icosaèdre tronqué.

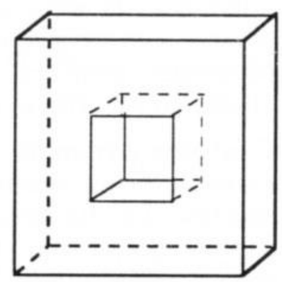


8 cm
(1)
(2)
(3)
(4)
6 cm
3 cm
45°
(5)
(5)
6 cm
3 cm
(1)
(2)
(3)
(4)

1 Un polyèdre bizarre...

Construire

Observez le "patron" donné (en réduction) sur la page ci-contre. Dessinez ce patron sur une feuille cartonnée en agrandissant ce dessin à votre guise, avec les languettes de collage. Découpez et pliez. Assemblez en utilisant les languettes de collage grisées : (1) collé sur (1), (2) sur (2), ... Vous obtenez une sorte de boîte qui a la forme d'un parallélépipède avec un trou au milieu.



Activités

1- Calculer l'aire de la surface totale du solide que vous obtenez. Calculer son volume.

2- Trouver le nombre de ses sommets (S), le nombre de ses faces (F) et le nombre de ses arêtes (A).

La formule d'Euler est-elle vérifiée ?

Et pourtant, ce polyèdre n'est pas convexe : imaginer une droite coupant les faces en plus de deux points ...

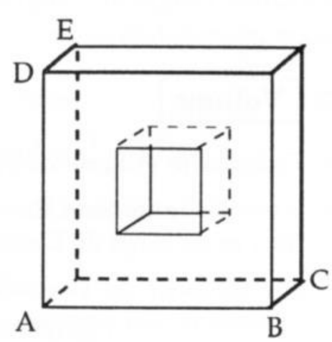
Sections

1- Couper ce solide par un plan P perpendiculaire à (AB) : dessiner la section obtenue. Que se passe-t-il si P est le plan médiateur de [AB] ?

2- Quelle est la section de ce solide par le plan médiateur de [BC] ?

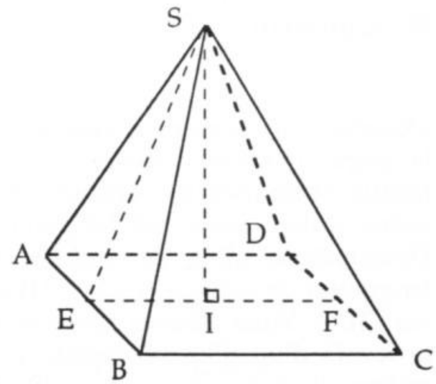
3- ... et par le plan (BCED) ?

Dessiner chaque fois la section obtenue et calculer son aire.



2 La pyramide de Chéops

La grande pyramide de Chéops est située à Gizeh, à quelques kilomètres du centre du Caire. Elle fut construite environ 2 000 ans avant notre ère. Ce n'est qu'en 820 que le Kalife Al Mamoun pénétra le premier à l'intérieur de cette pyramide.



C'est une pyramide régulière à base carrée, de côté mesurant environ 230 mètres. La hauteur, distance du sommet S à la base carrée, est de 137 mètres environ (SI = 137 m).

Elle pèse environ 8 millions de tonnes. La construction dura près de 20 ans et occupa 100 000 hommes. Elle est composée de 2 300 000 blocs environ.

➩ Description et maquette

Vous pouvez en fabriquer une maquette à une certaine échelle : le patron comporte un carré (la base) et quatre triangles isocèles égaux. Mais il vous faut d'abord calculer les dimensions de ces faces triangulaires.

➩ Calculer

La hauteur issue de S coupe la base carrée en I, centre du carré ABCD. Soit E et F les milieux respectifs de [AB] et [CD] : I est le milieu de [EF]. En utilisant le triangle isocèle SEF et les deux triangles rectangles SIE et SEA, connaissant AB et SI, vous pouvez calculer la longueur SE, puis SA et SB ...

Choisissez votre échelle et construisez alors votre maquette. Vérifiez la formule d'Euler sur la pyramide obtenue.

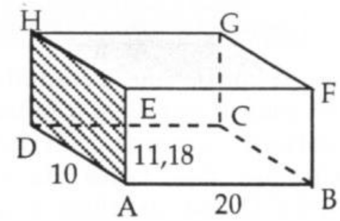
Calculez l'angle $\widehat{SEI}$, **angle dièdre** de la face (SAB) avec le plan de base.

➩ Volume

- Calculer le volume de cette pyramide en mètres-cubes.
- Avec les matériaux de cette pyramide, on veut construire un mur rectiligne de 1 m de large de Dunkerque à Perpignan : quelle serait sa hauteur ?
- Au moment de l'expédition d'Égypte, Bonaparte prétendait que, avec les matériaux, on pouvait construire autour de la France un mur de 30 cm de large et de plus de 1 mètre de haut. Qu'en pensez-vous ?

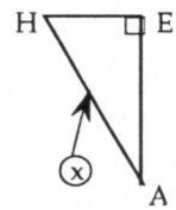
3 La chambre du Roi

Dans la pyramide de Chéops, on a découvert une chambre sépulcrale appelée "chambre du Roi". Elle a la forme d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions, mesurées en **coudées** sont : 20 ; 10 et 11,180.
Pendant longtemps, le fait que la hauteur AE ne soit pas un nombre entier a constitué une énigme pour les égyptologues. Une solution a été proposée par J.-P. Lauer. La voici.

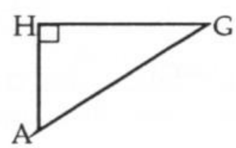


⇨ Découverte curieuse

- À l'aide de votre calculatrice, trouvez une valeur approchée de $5\sqrt{5}$ à 0,001 près. Le triangle AEH étant rectangle en E, calculez AH en prenant $AE = 5\sqrt{5}$. Vous trouvez encore un nombre entier de coudées.
  Isolons dans la figure le triangle AHG. Il est rectangle en H, car la droite (HG) est perpendiculaire au plan (AEHD).



- Calculez alors la longueur AG : c'est encore un nombre entier !
  Vous obtenez les dimensions : 15 - 20 - 25 pour les trois côtés de AHG qui sont les nombres 3 - 4 - 5 multipliés par 5.
  On a : $15^2 + 20^2 = 25^2$ de même que $3^2 + 4^2 = 5^2$.
  Les triplets (15, 20, 25) et (3, 4, 5) sont des triplets de Pythagore.



⇨ Calculs d'angles

En isolant dans la figure les triangles rectangles qui conviennent, calculez une valeur approchée à 0,1° près de chacun des angles $\widehat{AHE}$; $\widehat{AHD}$; $\widehat{AGH}$; $\widehat{GAH}$.

⇨ Dans notre système métrique

Une coudée vaut environ 52, 425 cm. C'est sensiblement la distance du coude au bout des doigts d'un homme adulte.
Trouvez les dimensions de la chambre du Roi en mètres.

Quel est le quotient $k = \dfrac{1 \text{ mètre}}{1 \text{ coudée}}$ à 0,001 près ? Calculer k^2 et k^3.

Calculez le volume de la chambre en m^3 (V) et en coudées-cubes (V').

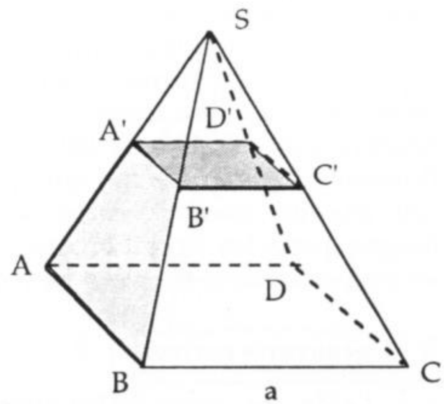
Quel est le quotient $\dfrac{V}{V'}$?

Quel est le quotient : $\dfrac{\text{Aire totale de la chambre en } m^2}{\text{Aire totale de la chambre en coudées-carrés}}$?

4 Tronc de Pyramide

➪ Section d'une pyramide

Si on coupe une pyramide SABCD par un plan P parallèle à la base ABCD, on obtient comme section A'B'C'D'. Chacun des côtés de cette section A'B'C'D' est parallèle à un côté de la base. Par exemple : (BC) // (B'C').

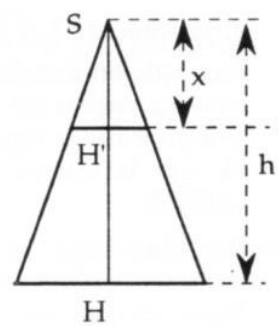


Soit (SH) la perpendiculaire à la base en H. Elle est perpendiculaire en H' à A'B'C'D'. Posons SH = h et SH' = x.

On démontrerait, en utilisant la propriété de Thalès dans l'espace, que :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{SH'}{SH} = \frac{x}{h}$$

Le solide ABCDA'B'C'D' est un tronc de pyramide de hauteur HH' = h – x.



➪ Des calculs avec une pyramide régulière à base carrée

La base est un carrée de côté BC = a. Le point H est le centre de ce carré et SA = SB = SC = SD.

• Calculer en fonction de a, de h et de x :

f(x) : longueur du côté [B'C']
s(x) : aire du carré A'B'C'D'
v(x) : volume de la pyramide SA'B'C'D'
t(x) : volume du tronc de pyramide.

Donnez une représentation graphique de ces quatre fonctions.

• Voici une formule générale donnant le volume V d'un tronc de pyramide :

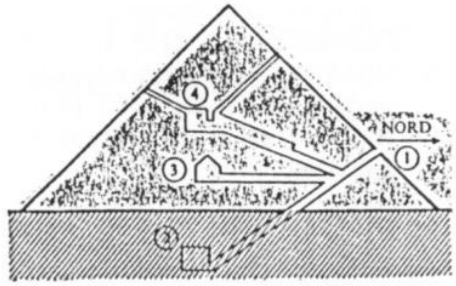
$$V = \frac{H}{3}\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} + \mathcal{B}' \right)$$

H : hauteur du tronc; $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$: aires des deux bases.
Vérifier cette formule sur l'exemple qui précède.

Place de la chambre du Roi

Dans la pyramide de Chéops, la chambre du Roi (4) est située à une hauteur telle que, à ce niveau, l'aire de la section carrée de la pyramide soit la moitié de l'aire de la base.

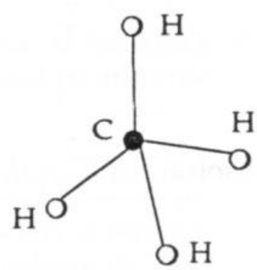
À quelle distance du sommet se trouve-t-elle ?



5 Le tétraèdre régulier

Le tétraèdre régulier est le solide régulier le plus simple. Il était connu des géomètres Égyptiens et Grecs.

Les Pythagoriciens pensaient que le feu était constitué de minuscules particules ayant la forme de tétraèdres réguliers : ils le considéraient comme plus "pénétrant" que l'air, l'eau et la terre en raison de ses "petits" angles et de sa solidité. Les chimistes l'utilisent comme modèle de la molécule de méthane CH_4 : l'atome de carbone (C) occupe le centre de gravité du tétraèdre et les quatre atomes d'hydrogène (H) occupent les sommets.

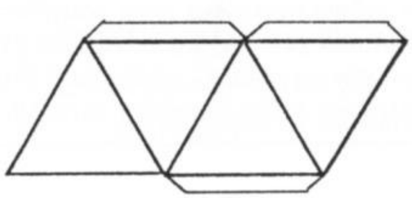


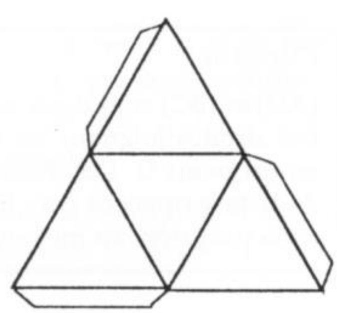
Construire

La construction du tétraèdre régulier est extrêmement simple :quatre triangles équilatéraux identiques suffisent, à condition de les accoler correctement, sans oublier les languettes de collages ...

Choisissez l'un des patrons ci-dessous

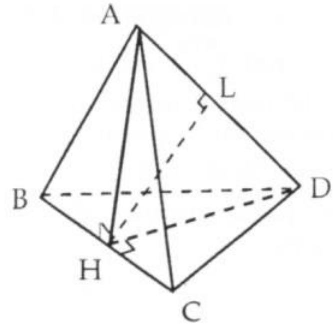
et à vos ciseaux !...





➪ **Calculer** On désigne par a la longueur d'une arête.

A- Chaque face est un triangle équilatéral : en isolant une face, vous pouvez calculer, en fonction de a, la hauteur h de chacune de ces faces.

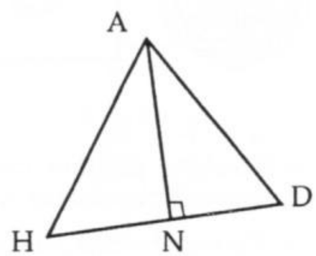


B- [AH] et [DH] sont les hauteurs des deux faces (ABC) et (CBD). Isolez le triangle AHD : c'est un triangle isocèle de sommet H. Tracez sa hauteur [HL] : elle le partage en deux triangles rectangles. Calculez, toujours en fonction de a, leurs côtés, puis déterminez leurs angles à 0,01° près.

En particulier déterminez l'angle $\widehat{AHD}$ à 0,01° près : c'est l'angle des deux faces (ABC) et (DBC).

C- Dans le triangle AHD, soit [AN] la hauteur issue de A. On démontre que (AN) est perpendiculaire au plan (BDC) : AN est la hauteur du tétraèdre.

En exprimant de deux façons l'aire de AHD, trouvez la hauteur AN en fonction de a.



D- Calculez le volume, puis l'aire totale du tétraèdre en fonction de son arête a.

➪ **Peut-on remplir l'espace ?**

Les géomètres grecs, et Pythagore le premier, pensaient que l'on peut "remplir l'espace" en accolant des tétraèdres réguliers de même arête, en superposant deux faces.

Essayez donc, à condition d'avoir fabriqué plusieurs de ces solides. Un calcul d'angle que vous venez de faire vous permet de conclure ...

Curiosité

[AD] et [BC] sont deux arêtes opposées : il y a trois couples d'arêtes opposées. Les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées sont concourantes en un point G. Les droites joignant un sommet (ex : A) au centre de gravité de la face opposée (ex : BCD) passent aussi par ce point G : essayez d'illustrer cette propriété au moyen de fils de couleurs sur votre tétraèdre cartonné.

6

Patron d'un tétraèdre non régulier

SABC est un tétraèdre posé sur la base ABC (fig. 1).

En découpant selon les arêtes [SA], [SB], [SC] et en rabattant trois faces sur le plan (ABC), on obtient un patron de ce tétraèdre (fig. 2). Repérer sur cette figure les longueurs égales.

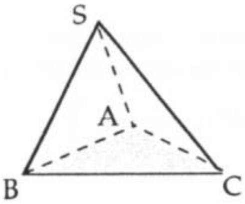


fig. 1

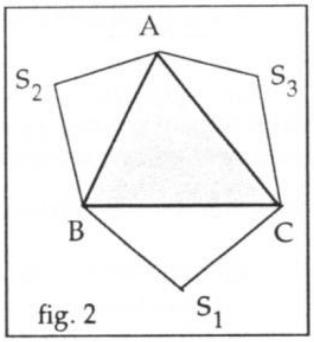


fig. 2

Apprenons à construire un patron

- Dessinez un agrandissement de la figure (3) en respectant rigoureusement les dimensions qui seront multipliées par 4. Sur votre dessin, construire le point S_3 pour compléter le patron. Découper et construire le tétraèdre.

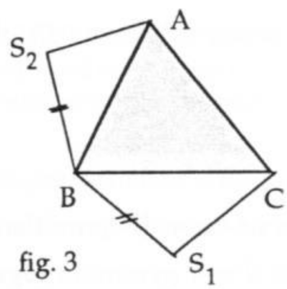


fig. 3

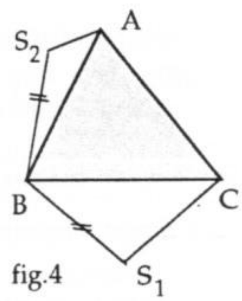


fig.4

- Recommencer avec le dessin de la figure (4) qui ne diffère du précédent que par la taille du triangle ABS_2. Obtenez-vous encore un tétraèdre ?

Pourquoi ?

Refaire le dessin de la figure (3) agrandie en respectant bien les dimensions. Construire le point T, symétrique de S_1 par rapport à (BC).

Tracer le cercle de centre A, de rayon AS_1 et le cercle de centre A et de rayon AT. Entre ces deux cercles, vous obtenez une couronne que vous coloriez en rouge ...

Il se trouve que S_2 est dans cette zone rouge ... et ça marche !

Recommencer avec la figure (4) ... S_2 n'est plus dans la couronne. C'est une constatation qui explique ce mystère, mais ce n'est pas une preuve.

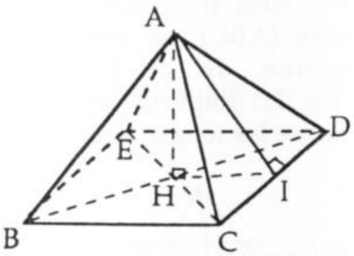
Avec deux tétraèdres

En accolant deux tétraèdres construits à partir de la figure (3) par une arête seulement - (SA) par exemple - vous obtenez un polyèdre. Pour ce polyèdre, la formule d'Euler est-elle vérifiée ?

7 Le nid d'abeilles

➪ Étude préalable d'une pyramide à base carrée

ABCDE est une pyramide régulière de sommet A dont la base est un carré BCDE de côté a et dont la hauteur [AH] mesure $\frac{a}{2}$.



Calculer en fonction de a :
- la hauteur [AI] de la face ACD puis l'arête AC
- l'aire du triangle ACD,
- l'aire latérale de la pyramide,
- le volume de cette pyramide,
- des valeurs exactes ou approchées à 0,01° près des angles $\widehat{AIH}$, $\widehat{ACD}$, $\widehat{CDA}$ et enfin $\widehat{BAD}$

➪ Travail manuel

- Construire en carton un cube de 6 cm d'arête.
- Construire le patron d'une pyramide régulière dont la base est un carré de 6 cm de côté et dont la hauteur est de 3 cm. Pour cela, il faut utiliser le résultat de l'étude préalable pour trouver une valeur approchée à 1 mm près de la hauteur d'une face.
- Utiliser le gabarit du patron de la pyramide pour construire 6 pyramides identiques.

Première activité

Disposez les six pyramides comme l'indique la figure 1. Vous obtenez un cube de 6 cm d'arêtes. Expliquez pourquoi !

6 pyramides ⟶ 1 cube

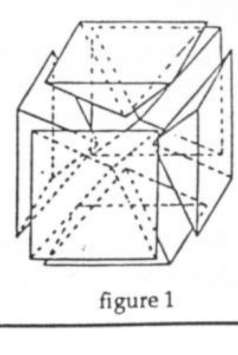


figure 1

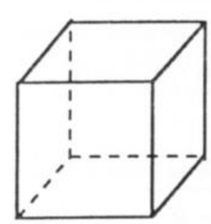
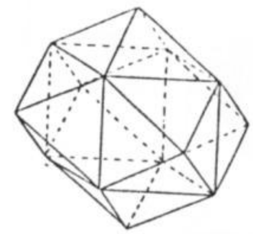


figure 2

Seconde activité

Reprenez vos six pyramides et votre cube. Collez la base de chacune des six pyramides sur une face du cube : vous venez de confectionner un polyèdre.



Ce polyèdre est constitué apparemment de 24 triangles isocèles de mêmes dimensions. Démontrer que deux triangles isocèles qui ont une base commune sont dans un même plan et qu'ils forment ainsi un losange.

Il en résulte que ce polyèdre n'a en fait que 12 faces qui sont des losanges de mêmes dimensions.

On l'appelle ***dodécaèdre rhombique.***

un cube + six pyramides ⟶ un dodécaèdre rhombique

➪ **Le nid d'abeilles**

Les cellules à miel dans une ruche d'abeilles ont la forme de dodécaèdres rhombiques. Essayons de comprendre pourquoi. Pour cela nous allons comparer l'aire d'un cube et celle d'un dodécaèdre rhombique qui ont le même volume.

a) Étudions le dodécaèdre rhombique qui vient d'être fabriqué.

- Calculer son volume (ne pas oublier qu'il est en fait constitué de deux cubes identiques).
- Calculer son aire totale (utiliser l'un des résultats de l'étude préalable) et en donner une valeur approchée à 1mm^2 près.

b) Calculons maintenant l'aire d'une cube qui aurait le même volume que ce dodécaèdre rhombique, c'est-à-dire 432 cm^3 .

Pour cela, calculer la mesure de l'arête de ce cube et en déduire une valeur approchée à 1 mm^2 près de l'aire de ce cube.

c) En comparant les aires respectives de ces deux polyèdres, vous pourrez constater que pour un même volume, l'aire du dodécaèdre rhombique est inférieure à celle du cube.

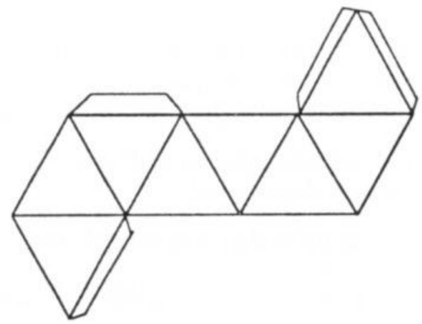
De quel pourcentage (à 1 % près) l'aire du dodécaèdre est-elle inférieure à celle du cube ?

Une cellule à miel ayant la forme d'un dodécaèdre rhombique nécessite donc moins de cire pour sa fabrication que si elle avait une forme cubique. Pas folle … l'abeille !

8 Octaèdre régulier

Construire

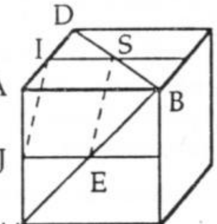
Dans une feuille cartonnée, dessiner huit triangles équilatéraux comme il est indiqué sur le patron ci-contre puis les assembler pour obtenir un octaèdre régulier.



Vérifier la formule d'Euler.

Cube et octaèdre

Sur le cube ci-contre,



– I et J sont les milieux des arêtes [AD] et [A'A];

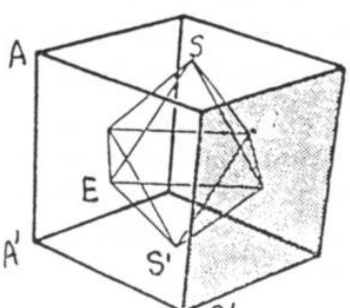
– E et S sont les centres des faces ABB'A' et ABCD.

Montrer que SEJI est un parallélogramme.

Si a désigne l'arête du cube, calculer SE en fonction de a.

Si l'on joint S à chacun des centres des faces "verticales" du cube, ainsi que S', centre de la face A'B'C'D' avec chacune des mêmes faces, on obtient les arêtes d'un solide à huit faces : quelle est la nature de ces faces ? Quel est le nom du solide ?

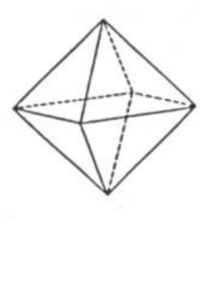
Calculer



On pose SE = b et AA' = BB' = a. Vous avez trouvé un relation entre a et b.
Calculer le volume du cube en fonction de a, puis en fonction de b.
Calculer le volume de l'octaèdre, en fonction de a puis en fonction de b.
Si l'on "enlève" l'octaèdre du cube qui a servi à le fabriquer, quel est le volume restant ?

Dualité

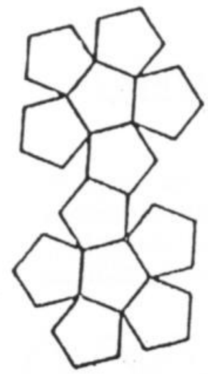
Qu'obtient-on si l'on joint deux à deux les centres des faces d'un octaèdre régulier ?



9

Le dodécaèdre et le voyageur de Hamilton

➪ Construire

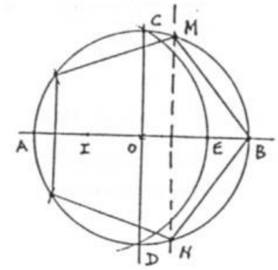


Vous allez construire un dodécaèdre régulier : ce solide de Platon est obtenu en assemblant douze pentagones réguliers convexes.
Vous pouvez vous inspirer du patron donné ci-contre à condition, au préalable, de savoir construire un pentagone régulier convexe.

Voici un programme de cette construction :

Tracer un cercle de centre O et deux diamètres perpendiculaires [AB] et [CD]. Le cercle de centre I, milieu de [OA] et de rayon [IC], coupe [OB] en E. La médiatrice du segment [OE] coupe le cercle initial en M et N. BM et BN sont deux côtés du pentagone régulier convexe inscrit dans le cercle.

Reporter cinq cordes de longueur BM.

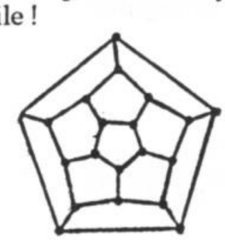


➪ **Compter** les arêtes, les sommets, les faces et vérifier la formule d'Euler.

➪ Le voyageur de Hamilton

Ce mathématicien irlandais (1805-1865) avait imaginé un voyageur de commerce qui devait visiter 20 villes à la surface du globe. Ces vingt villes occupent les sommets d'un dodécaèdre régulier inscrit sur la sphère terrestre. Et il impose à son voyageur d'emprunter les arêtes du dodécaèdre et de passer une fois et une seule par chacune des vingt villes ! Vous pouvez essayer sur votre solide construit en carton... mais ce n'est pas facile !

C'est pourquoi Hamilton a imaginé de représenter les sommets et les arêtes au moyen de ce que l'on appelle un **graphe** : chaque "**nœud**" représente un sommet (une ville !), chaque trait représente une arête du solide.



Le déplacement sur le dodécaèdre est alors remplacé par un déplacement sur ce graphe : passer par chaque nœud une fois et une seule et revenir au point de départ.

Essayer... Tracer plusieurs graphes et utiliser un crayon de couleur, ou mieux, des jetons avec des numéros pour les poser sur les villes successives traversées.

10

Icosaèdre

Construire

Observez les vingt triangles équilatéraux ci-dessous (fig. 1) : dessinez-les sur une feuille cartonnée assez grande, découpez en ayant soin de laisser des languettes de collage et assemblez, afin d'obtenir un icosaèdre régulier représenté sur la figure 2.

fig. 1

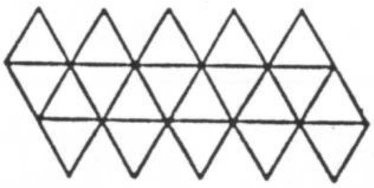
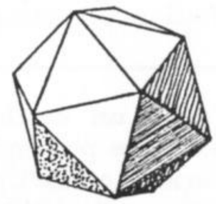


fig. 2

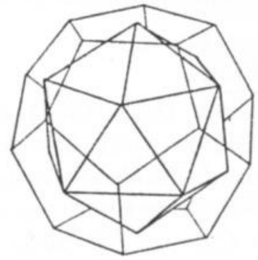


Trouvez S, F et A et vérifiez la formule d'Euler.

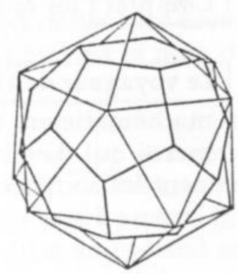
Comparez les nombres S, F et A pour l'icosaèdre et pour le dodécaèdre régulier : que remarquez-vous ?

Curiosité

Les milieux des douze arêtes d'un octaèdre régulier sont les sommets d'un icosaèdre régulier. Les centres des faces d'un dodécaèdre régulier sont aussi les sommets d'un icosaèdre régulier !



l'icosaèdre
dans le dodécaèdre



dodécaèdre
dans l'icosaèdre

Des calculs

• Si l'on désigne par a l'arête de l'icosaèdre, calculez en fonction de a sa surface totale.

• Voici la formule pour calculer son volume : $V = \frac{5}{6}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) a^3$.

Entraînez-vous !!