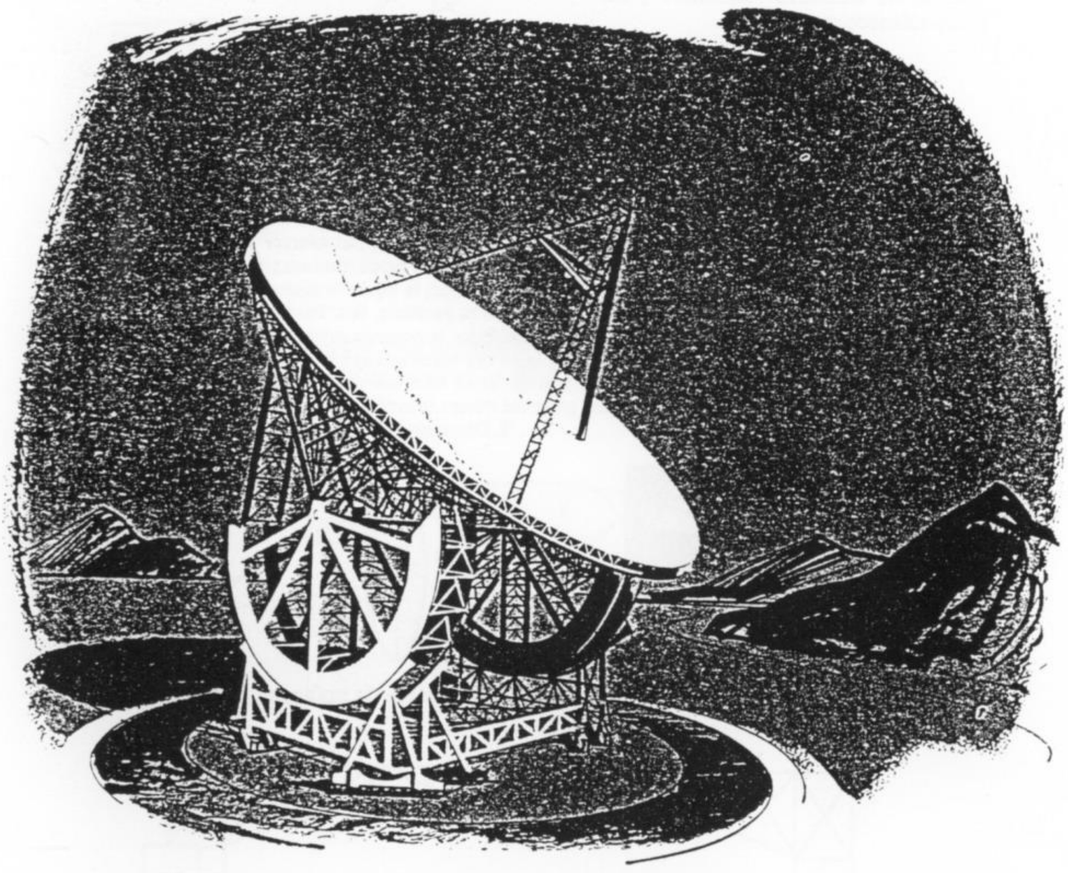
GALION THÈMES

Paraboles

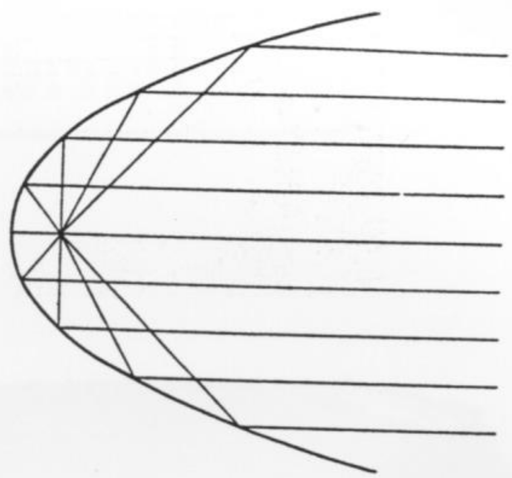


Radio-télescope parabolique

© GALION
15, quai André Lassagne – 69001 LYON
1995
ISBN 2-912209-09-9

Des paraboles autour de nous !

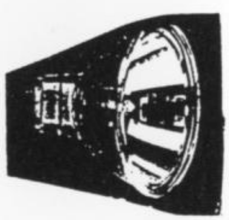
Autour de vous, en observant bien, vous découvrirez des objets de forme "parabolique" utilisant une propriété de la parabole ; cette propriété était connue d'Archimède (280 av J.-C.).

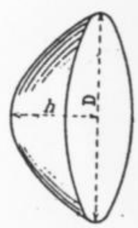


✤ Elle est utilisée dans les fours solaires, les phares de voiture, les radars, les antennes "satellites", les radio-télescopes ...

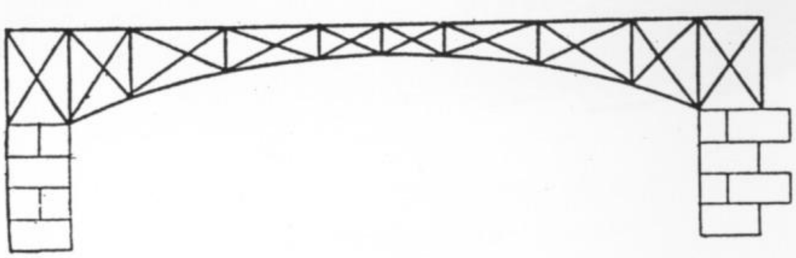
Archimède peut être considéré comme un vulgarisateur et un vulgarisateur de la mathématique la plus élaborée de son temps, celle d'Euclide. Le bel exemple est celui des miroirs paraboliques. Qu'est-ce que c'est qu'un miroir parabolique ? Eh bien, c'est tout simplement un miroir dont la surface est un paraboloïde de révolution, c'est-à-dire une surface obtenue par une parabole que l'on fait tourner autour de son axe. La propriété remarquable de la parabole c'est que si l'on fait arriver un rayon lumineux parallèle au diamètre de la parabole, en se réfléchissant sur le miroir, sur la parabole donc, le rayon lumineux passe par un point fixe qui est le foyer. L'étymologie du mot est claire : foyer de la parabole, feu. Par conséquent, en utilisant la lumière du Soleil, si j'ai suffisamment de miroirs paraboliques, je pourrais orienter ces miroirs et concentrer leurs actions en un certain lieu, par exemple les cordages des vaisseaux qui attaquent la ville de Syracuse et ainsi les brûler. Du moins c'est ce que retient la légende. Voici donc une application et une vulgarisation des propriétés du foyer d'une parabole, ce qui est une propriété d'ordre théorique de la parabole.

J. Dhombres "*Le matin des mathématiciens*" – Belin



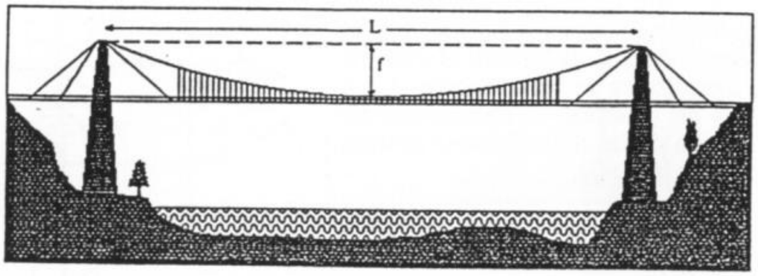


✤ On utilise aussi la forme parabolique dans la construction de voûtes et de certains ponts.



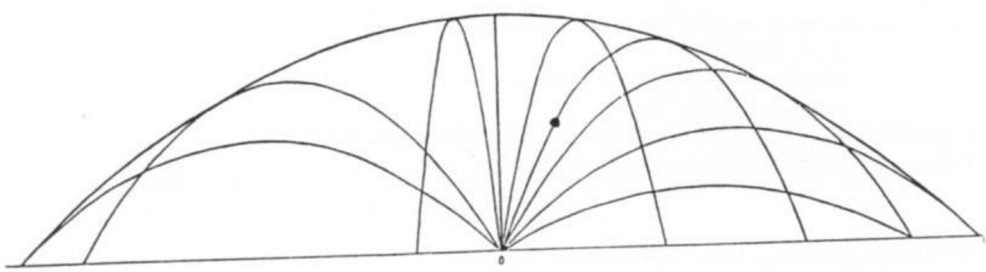
Le filin qui soutient le tablier d'un pont suspendu épouse la forme d'une parabole d'axe vertical.

La distance f s'appelle la "flèche".



✤ Un radio télescope, qui permet d'explorer l'espace, a lui aussi la forme parabolique.

✤ En *balistique*, la trajectoire d'un projectile lancé d'un point O est une parabole. Et les artilleurs parlent de "parabole de sécurité" pour désigner la grande parabole qui est tangente à toutes les trajectoires possibles.



Parabole : de grec "parabolé" (παραβολε) : action d'égaler – comparaison.

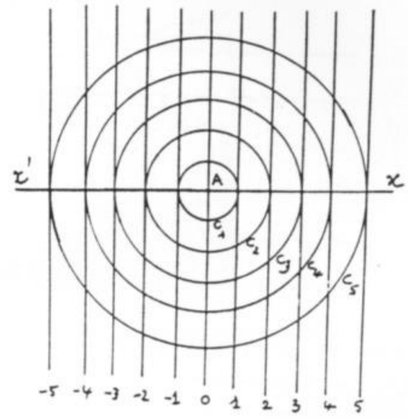
❀ ❀ ❀

❀

1 Des cercles et des droites

Utiliser une feuille de papier quadrillé. Tracer x'Ax, axe de symétrie de la feuille. L'unité est le carreau. Les droites perpendiculaires à x'x sont distantes de 1 carreau et numérotées de (-14) à (+14), la droite de numéro 0 passant par le centre A de la feuille.

Tracer 14 cercles, tous de centre A, de rayon allant de 1 à 14 carreaux …



Numérotation des droites : d(–14), d(–13), … d(0), d(1), … d(13), d(14).

Numérotation des cercles : C(1), C(2), …, C(14) (le numéro est le rayon du cercle).

◆ **Des points rouges**

Marquer en rouge les points d'intersection :
de d(0) et C(1)
de d(1) et C(2)
de d(2) et C(3), etc.
c'est-à-dire de la droite de numéro n avec le cercle de numéro n+1.
Reliez ces points rouges par une courbe rouge.

◆ **Des points bleus**

De même, marquer en bleu les points d'intersection :
de d(–1) et C(1)
de d(0) et C(2)
de d(1) et C(3), etc.
c'est-à-dire de la droite de numéro n avec le cercle de numéro n+2.
Reliez ces points bleus par une courbe bleue.

◆ **Des points verts**

Recommencez , en vert, avec l'intersection de d(–2) et C(1), d(–1) et C(2), … c'est-à-dire de la droite de numéro n avec le cercle de numéro n+3.

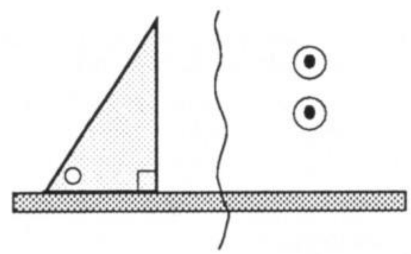
◆ … et même avec une autre couleur,

Marquez les points communs à la droite d(n) et au cercle C(n+4).

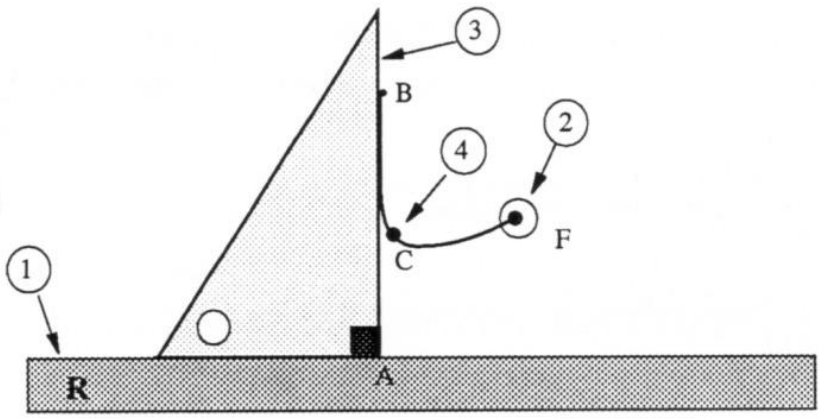
… et vous pouvez continuer si vous avez du courage, en changeant encore de couleur.

2 Avec une règle, une équerre et des punaises

Il vous faut disposer d'une règle plate, d'une équerre en bois, d'un fil souple mais solide, de deux punaises et, bien sûr, d'un crayon.



Un bon dessin pourra être exécuté sur une feuille blanche fixée sur une planche à dessin.



1 Poser et fixer la règle R et fixer une punaise au point F.

2 Une extrémité du fil est attachée solidement en F, l'autre extrémité est fixée en un point B du bord de l'équerre 3 de telle sorte que la longueur du fil entre B et F soit égale à BA.

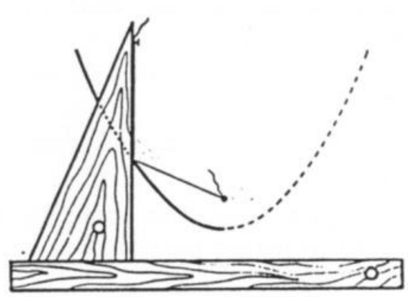
4 Le crayon C maintient le fil tendu contre BA alors que l'équerre coulisse sur la règle.

L'équerre suit le bord de la règle R, en partant d'une position proche de F.

Le crayon suit le bord de l'équerre en maintenant le fil tendu et dessine une courbe sur le papier.

Déplacer l'équerre vers la gauche, puis recommencez à droite de F en retournant l'équerre

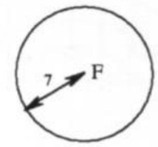
Expliquez pourquoi on a CA = CF.



3 Où il est question de distances

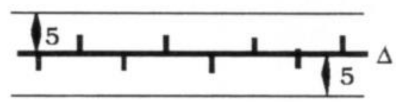
- Pierre habite à 7 km à vol d'oiseau du centre F de la ville de Feurs.

  Où peut se trouver sa maison M ? Expliquez-vous !



- Lise habite à 5 km de la voie ferrée rectiligne Δ.

  Où peut se trouver sa maison M ? Expliquez-vous !

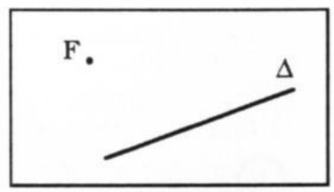


- Hélène affirme que sa maison est à 3 km de Feurs et à 2 km de la voie ferrée rectiligne Δ. Pouvez-vous trouver sa maison ?

  Expliquez-vous et envisagez différentes possibilités.

- Marie invite Monique chez elle pour la première fois :

  "Tu trouveras facilement, je suis *à la même distance* du village F *et* de la voie ferrée Δ".



  • Le futé Daniel, prétend qui' "il y a un endroit évident". Pouvez-vous dire lequel, et pourquoi ?

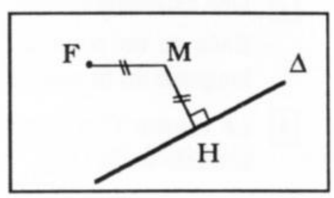
  • Sa sœur Cécile, qui se souvient que les côtés d'un carré sont égaux, affirme qu'il y a un autre endroit, tout aussi évident.

  "En fait, dit-elle, il y en a même deux, symétriques !"

  Trouvez-les et expliquez-vous. De quelle symétrie s'agit-il ?

  "Alors, dit Monique, chaque fois qu'on va en trouver un, il y en aura forcément un autre ?" Qu'en pensez-vous ?

- Le point F et la droite Δ étant donnés, on s'intéresse à tous les points M équidistants de F et Δ, c'est-à-dire tels que MF = MH avec bien sûr $(MH) \perp \Delta$.

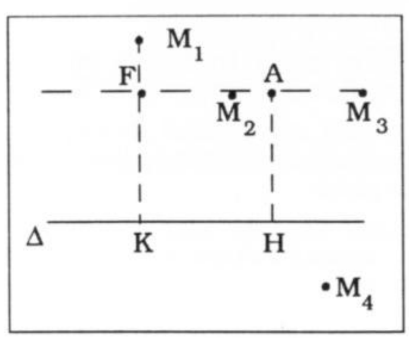


  Sur le dessin ci-contre, FKHA est un carré.

  • Le point A est un point M cherché. Pourquoi ?

  • Le point M_1 ne convient pas. Pourquoi ?

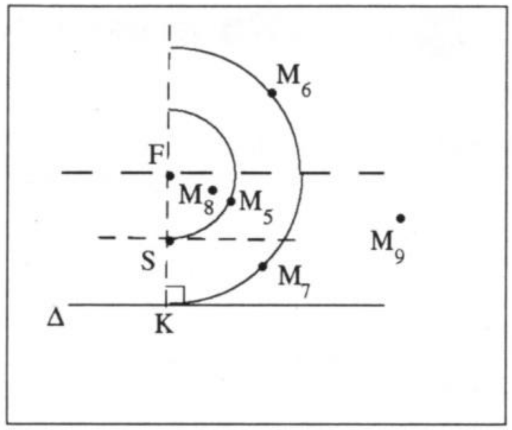
  • Expliquez pourquoi les points M_2, M_3, M_4 ne conviennent pas non plus !



* Sur le second dessin ci-contre, S est le milieu de [FK].

  • Le point S est un point M cherché. Pourquoi ?

  • Expliquez pourquoi les points M_5, M_6, M_7, M_8, M_9 ne conviennent pas.



* Sur une feuille de papier non quadrillée, marquez un point F à 6 cm d'une droite Δ.
  - Dessinez sur la feuille l'ensemble des points M situés à 8 cm de F.
  - De même, dessinez l'ensemble des points M situés à 8 cm de Δ.
  - Où sont les points M situés à la fois à 8 cm de F et de Δ ?
    Pourquoi n'y en a-t-il pas quatre ?
  - Y a-t-il des points M distants de 10 cm à la fois de F et de Δ ?
    Comment les obtenir ? Placez-les sur la feuille.
  - Pouvez-vous imaginer des points M situés à 30 cm de F et de Δ ?
    Comment les obtiendriez-vous si votre feuille était plus grande ?
  - Y a-t-il des point M situés à 1 m de F et Δ ? à 1 km de F et de Δ ?
  - Y a-t-il des points situés à 2 cm de F et de Δ ?
  - À votre avis, combien peut-on imaginer de points M équidistants de F et de Δ ?

> L'ensemble des points équidistants d'une droite Δ et d'un point F non situé sur Δ est appelé **parabole** de **foyer** F et de **directrice** Δ.
>
> Le point S milieu de [FK] est le **sommet** de la parabole.

* Et si F est sur la droite Δ … ?

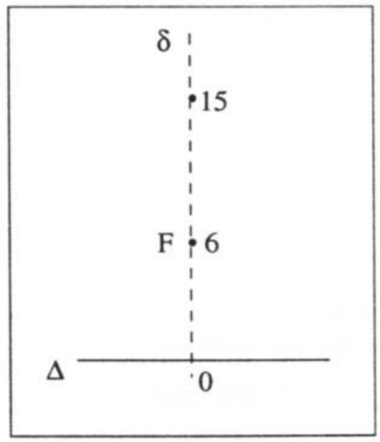
4 Des points d'une parabole

❖ **Matériel :** une feuille de papier millimétré (format A4 : 21 × 29,7), compas, double décimètre, crayon.

– Tracer l'axe δ de la feuille et la droite Δ en bas de la feuille.

– Graduer δ de 0 à 29, tous les centimètres, le 0 étant sur Δ.

– Placer F sur δ à 6 cm de Δ.



❖ **Programme de construction d'un point M équidistant de F et Δ.**

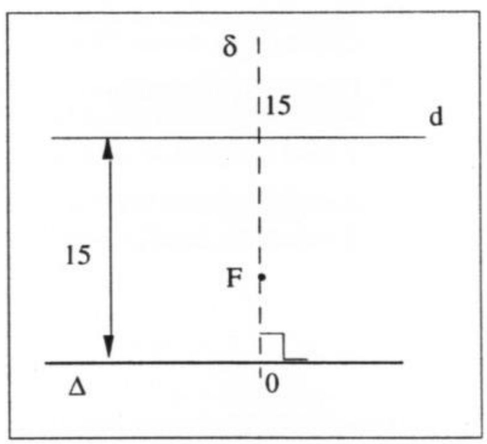
a) Choisir un nombre. Par exemple : 15.

b) Chercher la droite d horizontale de graduation 15.

c) Prendre avec le compas un écart de 15 cm.

d) Piquer le compas en F, tracer un arc de cercle qui coupe d aux points M et M'.

Il est inutile de tracer tout l'arc de cercle.



❖ Recommencez ce programme avec un nombre autre que 15.

– en commençant par 3 puis 4, puis 5, puis 6, puis 7, …etc.

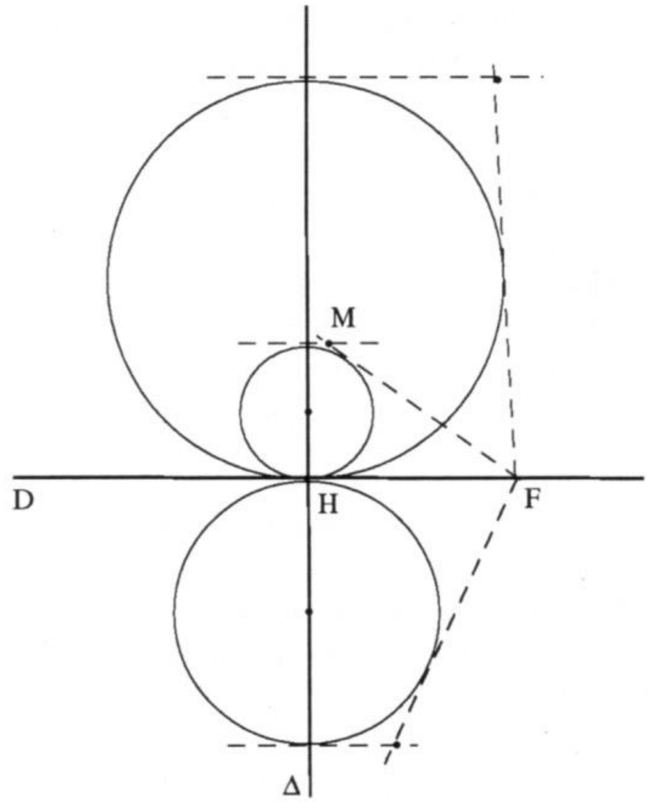
– continuez avec 3,5 puis 4,5 ; puis 5,5 ; puis 6,5 … etc.

– et enfin avec les distances intermédiaires 3,1 ; 3,2 ; 3,3 ; 3,4 ; 3,6 ; … etc.

❖ En joignant les points ainsi trouvés, qu'obtenez-vous ?

5 Avec des cercles et des tangentes

Ce dessin est à exécuter sur une feuille blanche non quadrillée.



1- Tracer d'abord bien au centre de la feuille, deux droites D et Δ perpendiculaires, sécantes en H et marquer un point F sur D.

   D, Δ et F sont fixes.

2- Le point O est un point variable de Δ, à votre choix.

   Tracer le cercle C de centre O, passant par H.

3- Tracer la tangente à C passant par F, autre que (FH).

4- Tracer la tangente à C parallèle à D.

5- Ces deux tangentes se coupent au point M : le marquer en rouge.

Pour chaque point O de Δ, vous avez ainsi un point M.

Il s'agit de tracer la courbe à laquelle le point M appartient.

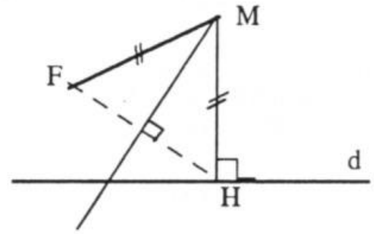
Pour cela, choisir plusieurs points O, d'abord proches de H sur Δ, puis s'éloignant de H, et de chaque côté de la droite D.

Et plus il y aura de points M, plus la courbe cherchée sera précise ...

Et si O se rapproche de H ?

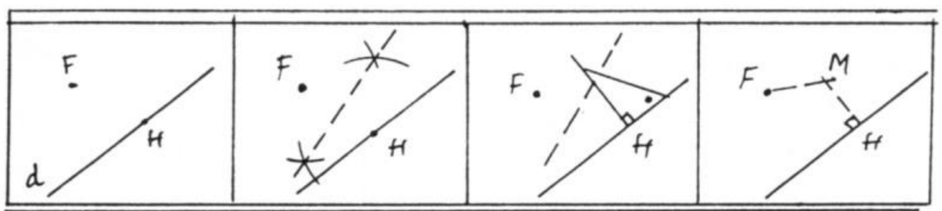
6 D'autres façons de faire

Une première observation géométrique :



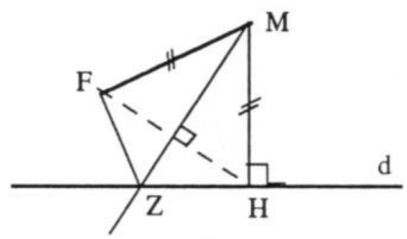
Si MF = MH, alors M est sur la médiatrice de [FH].

Commentez chaque étape du film ci-dessous permettant de construire M à partir de H situé sur d.



Réalisez cette construction à partir de plusieurs positions différentes de H sur d.

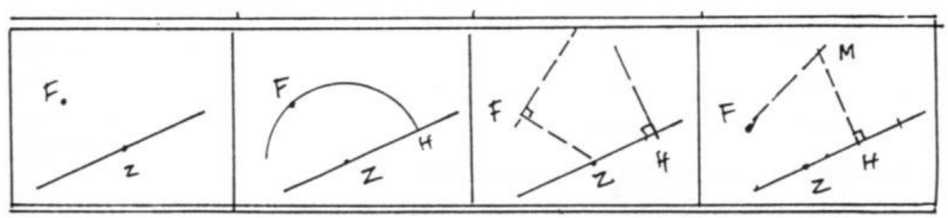
Une seconde observation géométrique :



La médiatrice de [FH] coupe d en Z (sauf dans quel cas ?)

Expliquez pourquoi ZF = ZH et $(ZF) \perp (MF)$.

Commentez chaque étape du film ci-dessous permettant de construire M à partir de Z choisi sur d.



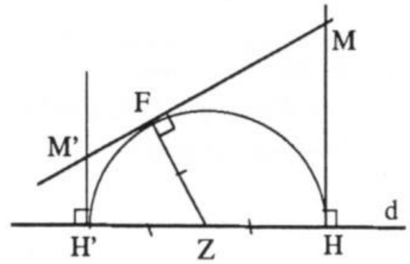
Réalisez cette construction à partir de plusieurs positions différentes de Z sur d.

Que pouvez-vous dire de (FM) et (MH) pour le cercle de centre Z ?

Une troisième observation géométrique :

Le cercle (Z, ZF) coupe d en H, mais aussi en H'.
La perpendiculaire à d en H' coupe (FM) en M'.

Démontrez que FM' = M'H'
M' est équidistant de F et d
le triangle MZM' est rectangle en Z
le triangle HFH' est rectangle en F
MM' = MH + M'H'



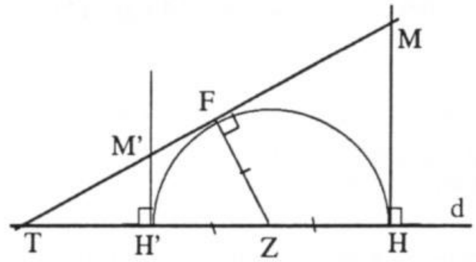
Imaginez et commentez le film de construction de deux points équidistants de F et d à partir d'un point quelconque Z de d par ce procédé !

Une quatrième observation géométrique :

La droite (MM') coupe en général d au point T (sauf dans quel cas ?)

Expliquez pourquoi le triangle TFZ est rectangle en F.

Imaginez et commentez le film de construction de M et M' lorsqu'on choisit un point quelconque T de d.

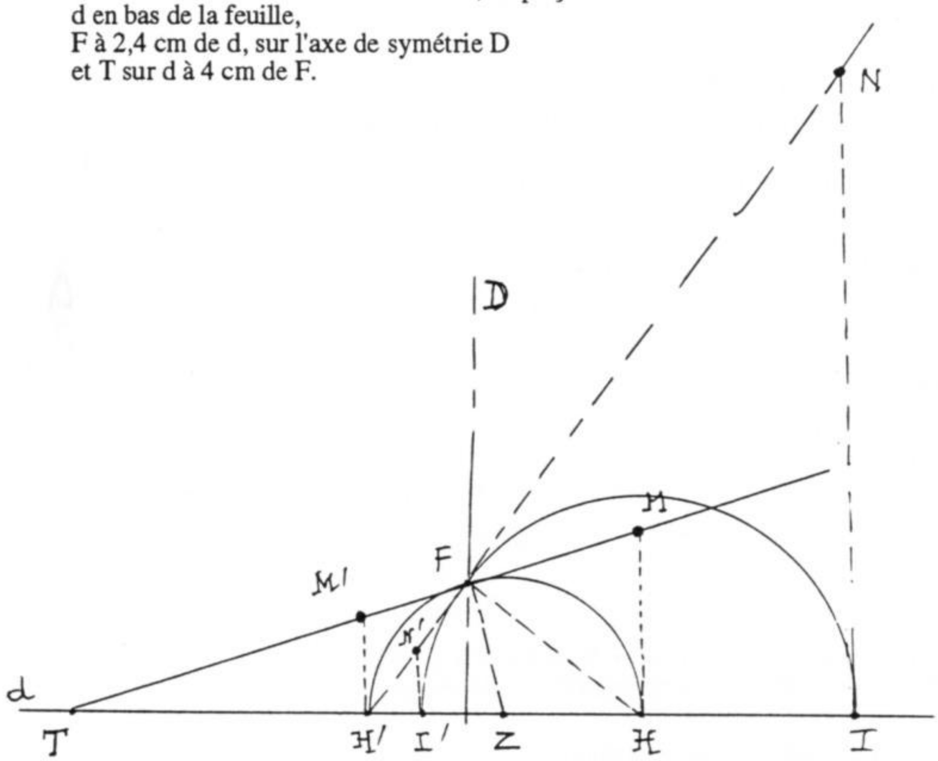


Réalisez cette construction à partir de plusieurs positions différentes de T sur d.

Construction réitérée de 2, 4, 6, 8, … points :

Réalisez ces constructions sur une feuille A4, en plaçant :

d en bas de la feuille,
F à 2,4 cm de d, sur l'axe de symétrie D
et T sur d à 4 cm de F.



a) On construit d'abord M et M' à partir du point T sur d, comme indiqué ci-dessus.

b) On choisit alors comme deuxième position de T … le point H'.

Expliquez pourquoi la nouvelle position de Z … est le point H, d'où la construction des points N et N'.

c) On choisit ensuite comme troisième position de T … le point H.

Expliquez pourquoi la nouvelle position de Z est … le point H' qui permet d'obtenir deux autres points.

d) On choisit ensuite comme nouvelle position de T … le point Z.

Expliquez pourquoi la nouvelle position de Z … est le point T, d'où la construction de deux autres points.

e) En fin de compte, pour chaque position de T, vous construisez deux points de la parabole, et par symétrie vous en construisez deux autres.

7 Une représentation graphique

◆ Dessiner un repère sur un papier millimétré assez grand.

L'axe des abscisses est gradué en centimètres, de –9 à +9.

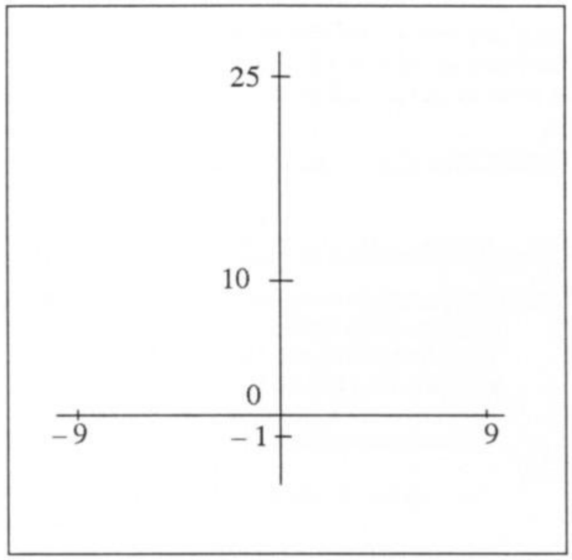
L'axe des ordonnées est gradué en centimètres de (–1) à 25.

Marquer le point F (0 ; 1) et tracer la droite D d'équation y = –1.

On considère la fonction :

$$f : x \mapsto 0{,}25\ x^2.$$

Calculer les images par f des entiers successifs de –9 à +9; ce qui fait 19 calculs.



Dresser un tableau des valeurs (x, f(x)).

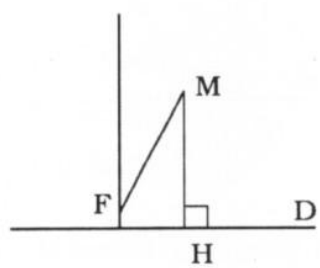
x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	20,25																		

Construire sur votre repère les 19 points correspondants de coordonnées (x, f(x)).

Les relier par une courbe continue.

◆ Choisir un point de cette courbe. Il se projette en H sur la droite D. Comparer la longueur MF et la longueur MH avec un compas.

Vérifier par le calcul. Que constatez-vous ? Cette propriété est-elle vraie pour tout point de la courbe ?



Cette courbe est donc la parabole de foyer F et de directrice D.

8 Paraboles, Tables et Maçonnerie

◆

a	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$b = a^2$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,15	16	20,25

Voici une table de carrés : pour des valeurs positives de a, elle donne son carré b. Vous pourriez d'ailleurs la prolonger aussi loin que vous le voulez. Dans un repère assez grand, placez les points de coordonnées (a, b) et joignez-les par une courbe.

SI vous lisez la table "à l'envers", b d'abord, le nombre a est sa racine carrée : $a = \sqrt{b}$.

Sur le même dessin, placez d'une autre couleur, les points (b, a) (cette fois, c'est b l'abscisse) et joignez ces points d'un trait de couleur.

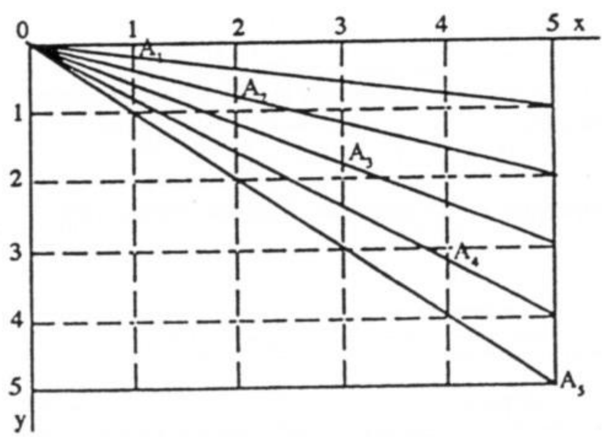
Alors que pensez-vous des deux courbes ?

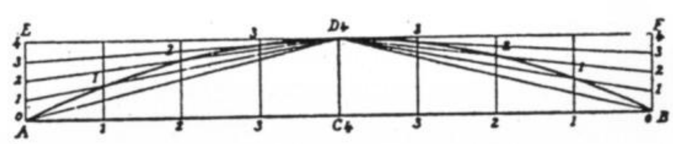
◆ Voici un procédé utilisé pour construire une voûte parabolique en maçonnerie.

L'axe Oy étant orienté vers le bas, montrez que les points O, A_1, A_2, ..., A_5 sont sur la parabole d'équation

$$y = 0{,}2\ x^2.$$

Prolongez le quadrillage jusqu'à x = 10 et y = 10 et tracez la demi-parabole en joignant les points obtenus.

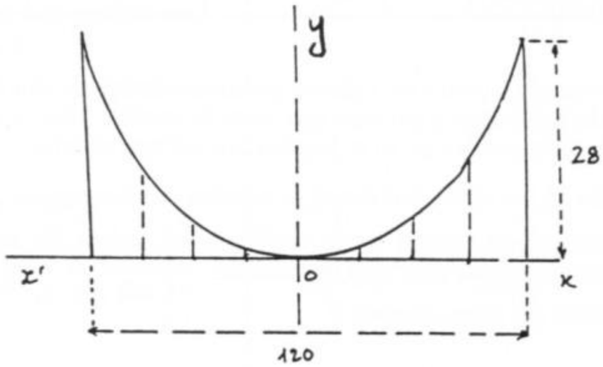




On trouve cette méthode dans "*Mathématiques pour l'ouvrier moderne*", de L. VEZO (Dunod, 1928).

9 Pont suspendu

■ Le poids d'une partie d'un pont suspendu est uniformément réparti entre deux pylônes identiques qui s'élèvent à 28 mètres au-dessus du niveau du tablier du pont, et éloignés l'un de l'autre de 120 mètres. Un câble, suspendu aux extrémités des pylônes, présente la forme d'une parabole.



Dans le repère d'origine O, milieu du point, et d'axe x'x et y'y, l'équation de cette parabole est

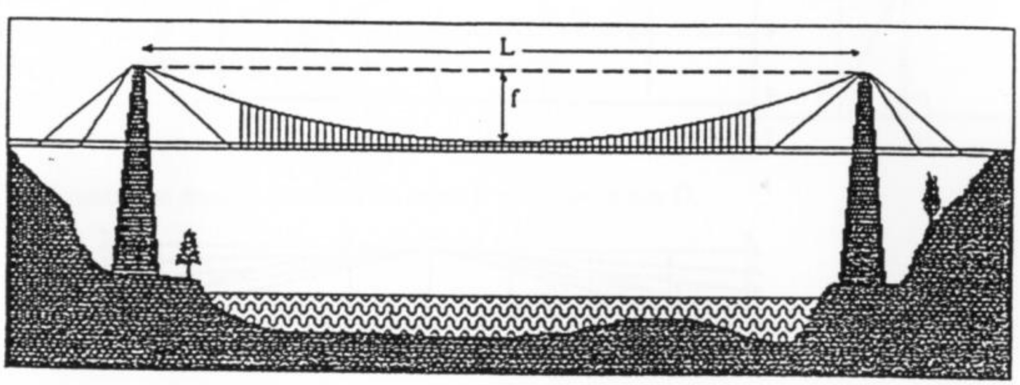
$$y = ax^2.$$

Trouver a.

Calculer ensuite la longueur de chacun des six câbles, tracés en pointillés, qui soutiennent le tablier du pont.

■ Dans un manuel de technologie, on lit que la flèche f est généralement égale au neuvième de la longueur L du pont.

Déterminer une équation de la parabole dans un repère convenablement choisi pour L = 360 m.



10 La propriété d'Apollonius de Perga

Sur une feuille de papier millimétré assez grande, en prenant 1 cm comme unité sur les deux axes, tracez le plus de points possibles de la représentation de la fonction

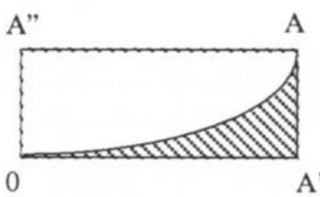
$$f : x \longmapsto 0{,}2\, x^2 \text{ avec } x \geq 0.$$

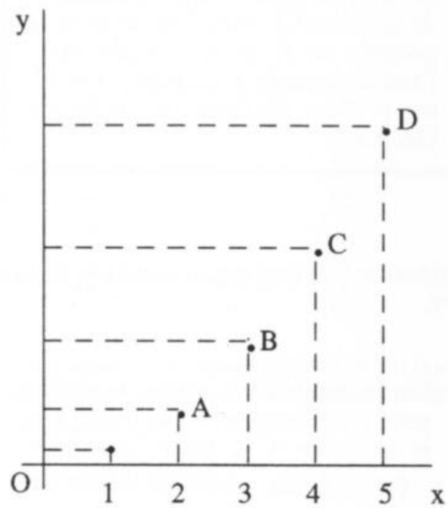
Marquez les points d'abscisses entières A ($x = 2$), B($x = 3$), C ($x = 4$), etc.

• Tracez le rectangle OA'AA", A' et A" étant les projetés de A sur les deux axes.

• Calculez l'aire du rectangle OA'AA" en mm^2.

• Évaluez en mm^2, l'aire hachurée située dans ce rectangle et au-dessous de la courbe, en comptant les mm^2 !





• Recommencez avec chacun des rectangles OB'BB", OC'CC", etc.

Complétez ce tableau … c'est une question de patience.

Point	A	B	C	D	E	F
R = aire du rectangle en mm^2						
H = aire hachurée en mm^2						
quotient $\frac{R}{H}$						

Les quotients $\frac{R}{H}$ sont tous voisins de 3.

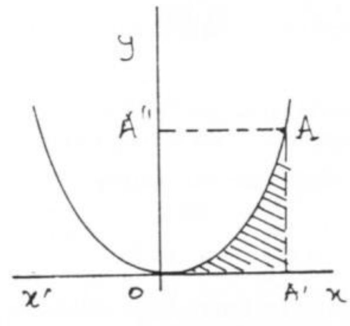
Apollonius de Perga (262-190 av. J.-C.) utilisa une méthode d'Archimède pour démontrer que ce quotient est égal à 3. Cette propriété vous sera démontrée en Terminale.

Apollonius, appelé "grand géomètre" est resté célèbre pour un traité sur les coniques.

11 Calculer des Aires

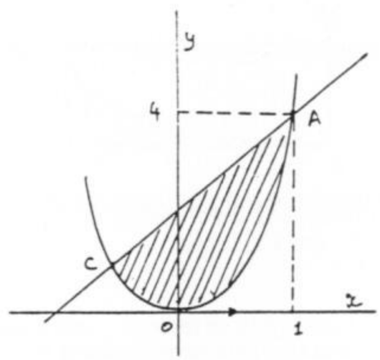
Considérons comme démontrée la propriété d'Apollonius qui peut s'énoncer de la manière suivante :

> Si on a un point A sur un parabole de sommet O, d'axe Oy, et si A se projette en A' et A" sur les axes, l'aire de la surface hachurée (OAA') est le tiers de l'aire du rectangle OA'AA".

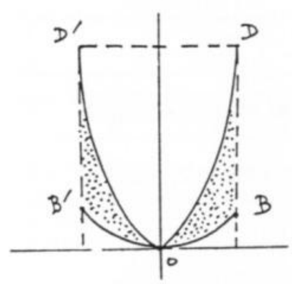


Attention ! il faut tracer l'axe Oy de la parabole, ainsi que x'x perpendiculaire en O à l'axe Oy.

- Sur la parabole ci-contre, le point A a pour coordonnées (2 ; 4) (unité le cm) et le point C a pour coordonnées (-1 ; 1). On a tracé la droite (AC). Calculer, en cm^2, l'aire de la surface hachurée, en utilisant, bien sûr, la propriété d'Apollonius.

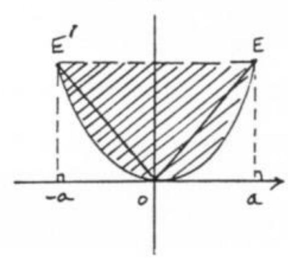


- Sur cet autre dessin, on a une première parabole qui passe pas D (3 ; 9) et D' (–3 ; 9) et une seconde par B (3 ; 1) et B' (–3 ; 1), de même sommet O. Calculez l'aire de la surface hachurée.

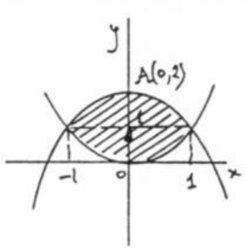


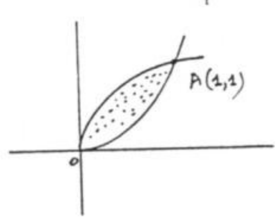
- Sur une parabole P de sommet O, on a les points E $(a ; a^2)$ et E' $(–a ; a^2)$.

  Montrer que l'aire du triangle EOE' est les trois quarts de l'aire du secteur hachuré.



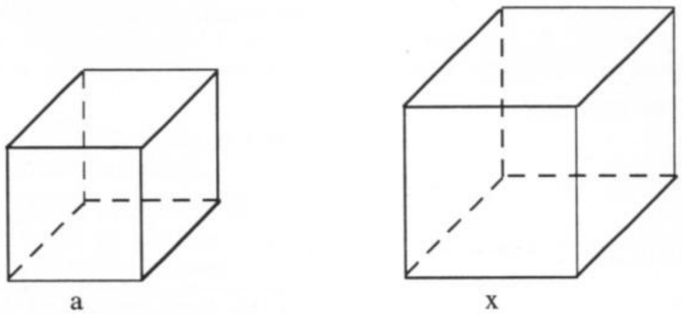
- Calculer les aires hachurées.





12 La duplication du cube

■ Le volume d'un cube d'arête a est a^3. Le problème d'obtenir l'arête x d'un cube dont le volume soit le double du premier a été étudié par des mathématiciens grecs, Hippocrate, Menechme et Dioclès entre autres.



arête a – volume a^3 volume $2a^3$ – Quelle est l'arête x ?

Ce problème est appelé "problème de la duplication du cube". On sait aujourd'hui qu'il est impossible de construire, à la règle et au compas, une telle longueur x.. On peut cependant essayer, a étant donné, d'approcher le nombre x tel que $x^3 = 2a^3$.

Voici une méthode graphique pour résoudre cette équation d'inconnue x.

En vue d'abaisser le degré de cette équation, posons $x^2 = ay$ (1).

Pour que $x^3 = 2a^3$ il faut et il suffit alors que $y = \frac{2a^2}{x}$ (2) .

■ Traitons le cas où $a = 1$ On obtient : $y = x^2$ et $y = \frac{2}{x}$.

Le nombre x cherché étant positif, on peut tracer, point par point, les parties des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \frac{2}{x}$ avec $x > 0$.

Le nombre x cherché est l'abscisse de leur point commun I.

Tracer ces courbes sur un repère assez grand en prenant 5 cm comme unité, x variant de 0 à 2 unités.

■ Pour aller plus loin

L'équation (1) $x^2 = ay$ s'écrit $\frac{x}{a} = \frac{y}{x}$.

L'équation (2) $y = \frac{2a^2}{x}$ s'écrit $\frac{x}{a} = \frac{2a}{y}$ d'où $\frac{y}{x} = \frac{2a}{y}$ soit $y^2 = 2ax$.

Si on revient au cas $a = 1$ on a : $y^2 = 2x$ et puisque y est positif : $y = \sqrt{2x}$.

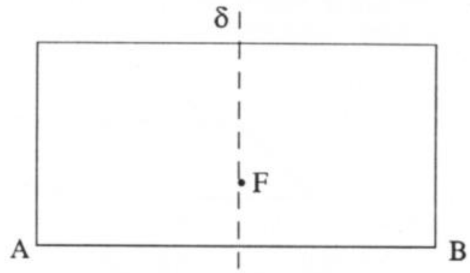
On obtient une troisième fonction : $x \longmapsto \sqrt{2x}$, dont la courbe représentative passe aussi par I.

Tracer cette courbe sur le graphique précédent.

13 Pliages*

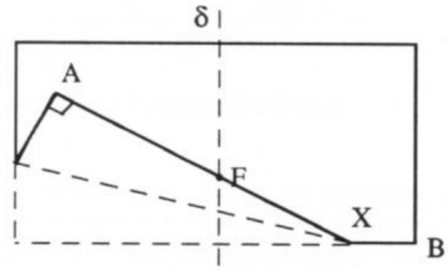
✡ Choisir une feuille blanche non quadrillée.

• Marquer le point F à quelques centimètres du grand côté [AB], sur l'axe de symétrie δ obtenu par pliage.

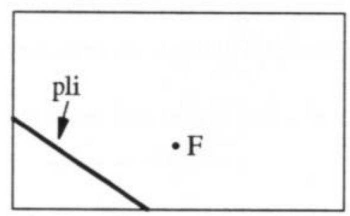


• Plier la feuille (coin A ou B) de telle sorte que le bord plié AX passe exactement par le point F.

Déplier, puis marquer le pli par un trait fin.

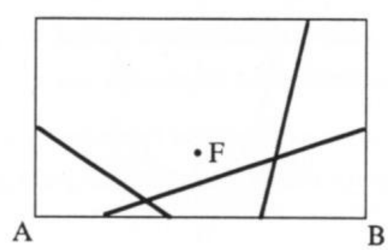


• Recommencer ce pliage, puis le tracé du pli, un bon nombre de fois en changeant le point X, des deux côtés de F.



Au bout du compte, vous obtenez, au moyen de ces plis, un grand nombre de traits.

Coloriez la feuille au-dessous de tous les traits … et vous verrez apparaître … une parabole.



• Pourquoi le symétrique de F par rapport à chacun des plis tracés est-il sur (AB) ?

✡ Recommencez avec une autre feuille, en plaçant un autre point F, plus ou moins éloigné du bord [AB] de votre feuille.

* D'après une idée de Martin Gardner.

14 Encore une équerre baladeuse !

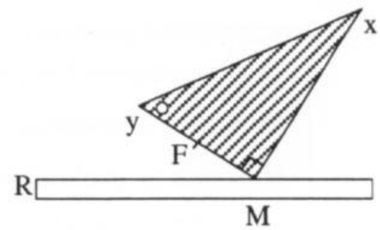
Une règle, une équerre, des feuilles blanches, un crayon.

Poser et fixer la règle R sur une feuille blanche non quadrillée et assez grande. C'est facile à faire si la feuille est placée sur une planche à dessin.

Marquer un point F sur la feuille et plantez une épingle ou une pointe au point F.

Posez alors l'équerre, le sommet M de l'angle droit contre la règle, un côté de l'angle droit [My) passant par F, contre l'épingle.

Tracez d'un trait fin la demi-droite [Mx).

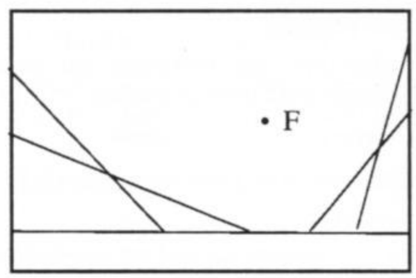


Recommencez une vingtaine de fois en changeant chaque fois la position de l'équerre, de part et d'autre de F.

Retirez la règle, l'équerre et l'épingle …

Vous pouvez colorier la surface qui est au-dessous de toutes les demi-droites tracées …

Encore une parabole …

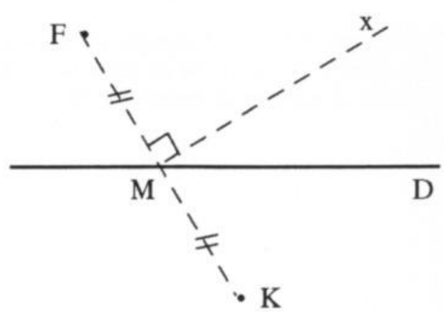


Recommencez avec une autre feuille en changeant la position de F, plus ou moins proche de la règle.

Remarque géométrique.

Sur le dessin, tracez D (bord de la règle). Ayant tracé [Mx), marquez K, symétrique de F par rapport à [Mx). Comment se déplace K lorsque l'équerre se déplace ?

Quel rapport avec l'activité 13 ?



15 Parabole et cissoïde

❖ Sur une feuille de papier millimétré, dessiner une droite D et un point F situé à 5 cm de D.

D est le directrice d'une parabole et F son foyer. F se projette en K sur D ; le milieu S de [FK] est le sommet de la parabole.

Vous savez construire des points de cette parabole :

- On place un point P sur la directrice D.
- On dessine la médiatrice δ du segment [FP].
- δ coupe la perpendiculaire en P à D au point M.

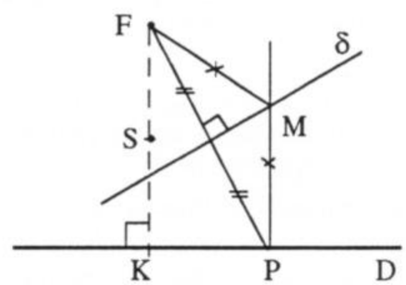
M est un point de la parabole.

La médiatrice de [FP] est la **tangente** en M à cette parabole.

Construire une douzaine de points de la parabole avec leurs tangentes.

Dessiner ensuite la parabole.

Quelle est la tangente au sommet S ?



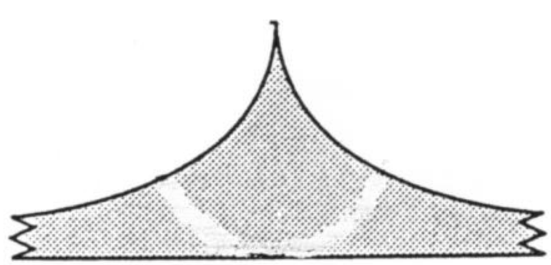
❖ Reprendre le dessin précédent.

Construire le projeté orthogonal du sommet S sur chacune des tangentes.

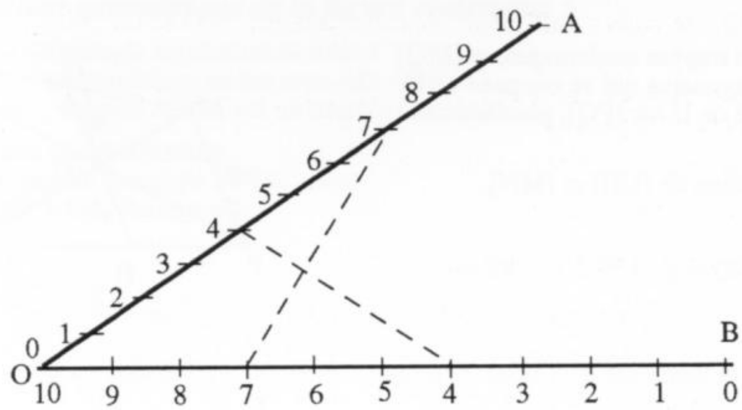
Marquer ces points en rouge.

Joindre les points rouges par une courbe. Vous obtenez une ***cissoïde*** (du grec "kissos" : lierre ; "eidos" : aspect).

On l'appelle souvent *Cissoïde de Dioclès,* du nom du géomètre grec qui l'avait imaginée. Cette courbe se compose de deux branches symétriques qui se rejoignent au sommet S de la parabole. S est appelé *point de rebroussement* de la cissoïde.



16 Enveloppons !



• Tracer un angle $\widehat{AOB}$ tel que les segments [OA] et [OB] n'aient pas même longueur.

• Les deux segments [OA] et [OB] sont partagés en segments tous de même longueur, par exemple en dix segments. Les points sont numérotés de 0 à 10, à partir du point O sur [OA] et à partir du point B sur [BO].

• Joindre par un segment de droite les points portant le même numéro.

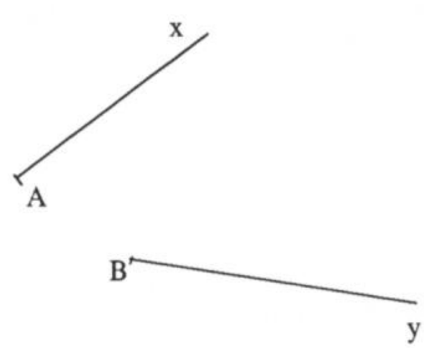
On peut aussi tendre des fils entre deux points portant le même numéro. Les droites (OA) et (OB) et les droites tracées sont toutes tangentes à une parabole qui est leur **enveloppe**.

• On peut recommencer en divisant chaque segment en 15, en 20, en 30 parties égales.

On peut aussi prendre un autre angle et recommencer.

Une application :

Une société d'autoroute veut raccorder les deux tronçons rectilignes [Ax) et [By) par un arc de parabole $\overset{\frown}{AB}$ tangent à ces deux tronçons, en A et en B. Comment faire ?



17 Une propriété de la parabole

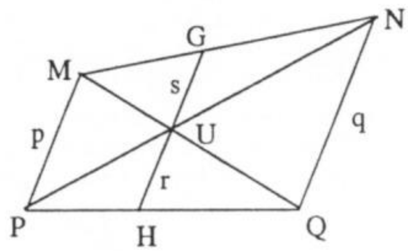
✦ Une observation géométrique dans un trapèze

Soit MPQN un trapèze quelconque, et [MQ] et [PN] ses diagonales qui se coupent en U. H est le projeté de U sur (PQ), parallèlement à (MP).

G est l'intersection de (UH) et [MN].

On pose :

MP = p , NQ = q , UH = r , UG = s.



- En utilisant le théorème de Thalès, exprimer : $\frac{r}{p}$ et $\frac{r}{q}$, en utilisant les points P, Q et H.

  En déduire la relation : $\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$

- Démontrer de même que $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.
- Déduire de ce qui précède que U est le milieu de [GH].

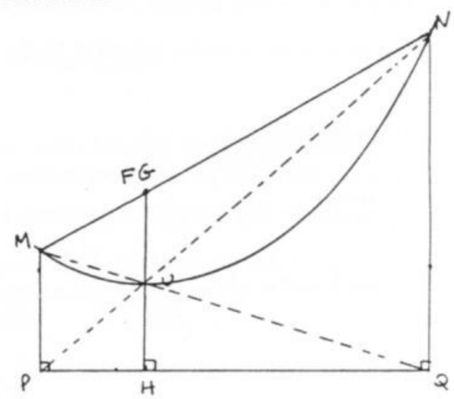
  La longueur GH est appelée moyenne harmonique entre MP et NQ.

✦ Application à la parabole de foyer F, de directrice D

Soit (MN) une droite passant par le foyer F : on l'appelle sécante focale à la parabole ; et P et Q les projetés orthogonaux sur D de M et N.

Puisque M est sur la parabole, on a MF = MP
Puisque N est sur la parabole, on a NF = NQ .

Nous allons démontrer que les diagonales (MQ) et (NP) du trapèze se coupent en U, sommet de la parabole.
Soit H le projeté de U sur D et G le point où (HU) coupe (MN). On utilisera les longueurs p, q, r et s comme dans la première activité.



Justifier que $\frac{NG}{NM} = \frac{s}{p}$ puis $\frac{NG}{p+q} = \frac{q}{p+q}$ et enfin NG = q = NQ. Or NQ = NF donc …

– Que dire des points F et G ?

– Que dire de la droite (GH) puis du point U ?

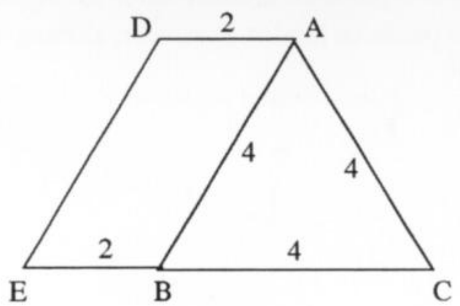
D'où la propriété suivante :

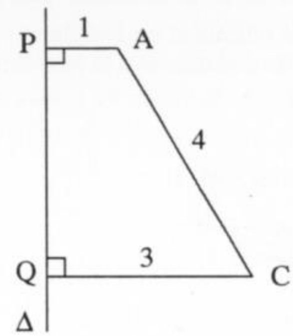
> Quelle que soit la sécante focale [MN] d'une parabole de foyer F, de directrice D, et P et Q désignant les projetés de M et N sur D, les diagonales [MQ] et [PN] du trapèze rectangle MPQN se coupent au sommet de la parabole.

18 Des trapèzes rectangles particuliers

▲ ***Construction géométrique de la figure ci-dessous :***

- ABC est un triangle équilatéral de côté 4
  ADEB est un parallélogramme avec AD = BE = 2.
  Expliquer pourquoi ADEC est un trapèze isocèle.
- Soit Δ son axe de symétrie
  Dans le trapèze rectangle APQC, on a
  AC = AP + CA. Pourquoi ?





▲ ***On s'intéresse aux trapèzes rectangles ayant la propriété suivante :***

$\boxed{\text{côté oblique = somme des côtés parallèles}}$

c'est-à-dire MN = MP + NQ

Démontrer que M et N sont sur une parabole de directrice (PQ) : préciser son foyer F et son sommet S.

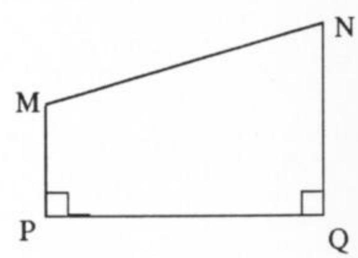
Les tangentes en M et N sont sécantes en Z :

Démontrer que :

Z est le milieu de [PQ]

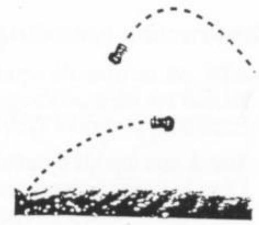
(FZ) est perpendiculaire à (MN)

PFQ est un triangle rectangle.

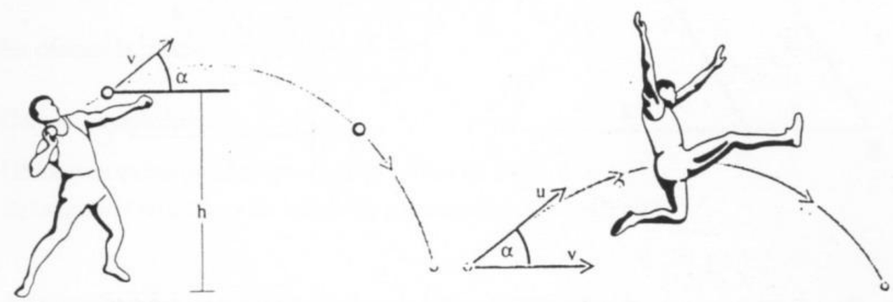


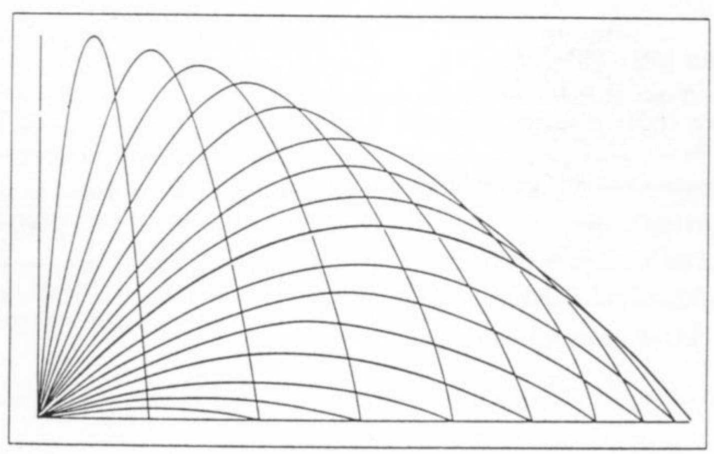
19 Sauts et lancers ...

Lorsqu'on lance un projectile : javelot, poids, boulet de canon, bouchon de champagne ou lorsqu'un sportif saute, la trajectoire est une parabole dont la "forme" dépend de l'angle α que fait la **vitesse initiale** avec l'horizontale. Si cet angle est de 90° le projectile monte exactement à la verticale et retombe à la verticale.



Évidemment, la distance horizontale atteinte lorsque le projectile retombe sur le sol dépend de la vitesse initiale et de l'angle α ; le lanceur de poids, de javelot, le sauteur, s'arrangent pour que cette distance soit la plus longue possible.





Distance atteinte en fonction de l'angle du lancer.

Mais cette distance dépend aussi de la gravitation : c'est ainsi que, si le record de lancer du poids est de 22,50 m sur la Terre, (gravitation 9,81 m.s^{-2}), il serait de 125 m sur la Lune (gravitation 1,62 m.s^{-2}) pour le même lanceur. Et pour les Jeux Olympiques de 2092, qui auront lieu sur la Lune, le champion de saut en hauteur pourra sauter 9,36 mètres ...

07200 Aubenas