GALION THÈMES

Calculus

«Petits cailloux»

Cette illustration datée de 1504, montre Pythagore, assis péniblement au-dessus de ses calculs tandis qu'à gauche, Boethius, reconnu comme l'inventeur du calcul avec les chiffres arabes, a déjà terminé. En arrière-plan, la déesse Arithmétique arbitre la compétition.

15, quai André Lassagne – 69001 LYON
ISBN : 2-912209-22-06

Faire le point sur ...

◆ Écriture d'un nombre entier

$857 = (8 \times 100) + (5 \times 10) + 7$

$\overline{cdu} = c \times 100 + d \times 10 + u$

◆ La division euclidienne

La division de 67 par 5 donne le quotient 13 et le reste 2.

$$67 = (5 \times 13) + 2$$

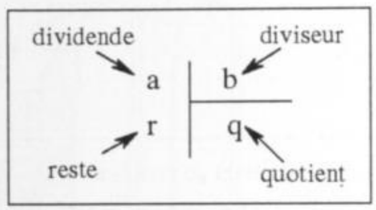
$$\begin{array}{r|l} 67 & 5 \\ \cline{2-2} 17 & 13 \\ 2 & \end{array}$$

On n'utilise que des entiers.

C'est ce que l'on appelle la division euclidienne.

Quel que soit l'entier positif a et l'entier positif b ($b \neq 0$) on a :

$a = bq + r$ avec r et q entiers et $r < b$.



◆ Les diviseurs d'un entier

a, b, c étant trois nombres entiers, si on a l'égalité : $a = b \times c$ on dit que

a est **divisible** par b, ou que b est un **diviseur** de a,

a est **divisible** par c, ou que c est un **diviseur** de a,

a est un **multiple** de b et de c.

Quelque soit le nombre entier a, on a : $a = a \times 1$, donc tout nombre entier est divisible par 1 et par lui-même.

Quelque soit a ($a \neq 0$), 1 est un diviseur de a

a est un diviseur de a.

Critères de divisibilité

Un nombre entier n'est divisible par 2 que s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre entier n'est divisible par 5 que s'il se termine par 0 ou 5.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples

• $28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$

Les diviseurs de 28 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 .

• a = 2 505

Sans faire de division, on peut dire que :

– a n'est pas divisible par 2

– a est divisible par 3 $(2 + 5 + 5 = 12$, divisible par 3)

– a est divisible par 5 (a se termine par 5)

– a n'est pas divisible par 9 $(2 + 5 + 5 = 12$ n'est pas divisible par 9)

$2\,505 = 3 \times 5 \times 167$.

Les diviseurs de 2 505 sont 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 167 ; 501 ; 835 ; 2 505.

◆ **Les diviseurs propres d'un entier**

Un diviseur propre de A et un diviseur de A autre que A lui-même.

Les diviseurs propres de 28 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 .

Les diviseurs propres de 2 505 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 167 ; 501 et 835 .

1 est le seul diviseur propre de 3.

◆ **Les nombres premiers**

Un nombre premier est un nombre dont les deux seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

1 n'est pas premier.

Voici la liste des nombres premiers de 1 à 499 :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	109	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499			

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des naturels, ou entiers positifs : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; …

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : … ; –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; …

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels $\frac{a}{b}$, a et b étant des entiers relatifs avec $b \neq 0$.

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux. Un décimal est un rationnel qui peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$.

$\frac{a}{b}$ est un décimal si la division de a par b se “termine”.

Des calculs simples ...

1. Calculer : $8 \times 1 + 1$; $8 \times 12 + 2$;

$8 \times 123 + 3$ $8 \times 1\,234 + 4$.

Imaginer les cinq opérations suivantes fabriquées sur le même modèle.

Prévoir les résultats … et vérifier avec une calculatrice !

C'est curieux, non ?

2. **a)** Calculer : 7×6 ; 67×6 ;

667×6 ; 6667×6 .

Écrire les produits suivants sur le même modèle, jusqu'à $666\,666\,667 \times 6$ et les calculer !

b) Calculer : 42×1 ; 402×11 ;

4002×111 ; $4\,0002 \times 1111$.

Écrire et calculer les quatre suivants sur le même modèle

c) Calculer : 67×66 ; 667×666 ;

6667×6666 .

Imaginer les produits suivants sur le même modèle et prévoir le résultat.

3. Calculer : $9 \times 9 + 7$; $9 \times 98 + 6$;

$9 \times 987 + 5$; $9 \times 9876 + 4$.

Pouvez-vous prévoir le résultat de $9 \times 98\,765 + 3$?

Et pour $9 \times 98\,765\,432 + 0$?

4. **a)** Calculer les carrés de : 11 ; 111 ; 1 111 ; 11 111 .

Prévoir le carré suivant. Pouvez-vous vérifier sur une calculatrice ?

b) Calculer 6×9 66×99

666×999 666×9999

Y a-t-il un lien avec la question a) ?

5. Soit A le nombre 12 345 679 .

Multiplier A par 9.

Sans calculatrice, trouver les produits de A par tous les multiples de 9 jusqu'à 81. Contrôler à la calculatrice.

Calculer : 99 A 108 A 117 A et 126 A .

6. Des méthodes de calcul étonnantes !

a) Le carré d'un nombre se terminant par 5

$$65^2 = 65 \times 65 = \underbrace{4\,2}_{6\times 7}\,\underbrace{2\,5}_{5\times 5} \qquad \left(\boxed{a}\boxed{5}\right)^2 = \boxed{a\times(a+1)}\boxed{25}$$

Vérifier avec 75^2 ; 85^2 ; 95^2 ; 135^2

Est-ce vrai aussi pour $1\,995^2$? 3295^2 ?

b) Produit de nombres ayant même chiffre des dizaines et des unités dont la somme vaut 10.

Exemple 1 : $62 \times 68 = 4216$ $(6 \times 7 = 42)$

Exemple 2 : $81 \times 89 = 7209$

En imaginer d'autres et vérifier !

7. Le nombre entier B est un nombre de 3 chiffres.

Par exemple B = 278.

D est le nombre de six chiffres obtenu en répétant les trois chiffres de A : D = 278 278.

Diviser D par 7, puis le quotient par 11, et enfin ce nouveau quotient par 13.

D est donc divisible par 1 001 ; expliquer pourquoi .

Recommencer avec au départ un autre nombre B, puis un autre etc.

B = ♦ ♣ ♠

D = ♦ ♣ ♠ ♦ ♣ ♠

D : 7 = E

E : 11 = F

F : 13 = ?

8. M est un entier de deux chiffres et P est le nombre obtenu en répétant trois fois ces deux chiffres :

Exemple : si M = 18 alors P = 181 818.

Diviser P par 3, puis le quotient par 7, le nouveau quotient par 13 et enfin ce dernier résultat par 37.

P est donc divisible par 10 101 : expliquer pourquoi.

Recommencer avec un autre nombre M.

M = ✦ ✧

P = ✦ ✧ ✦ ✧ ✦ ✧

(((P : 3) : 7) : 13) : 37

9. Écrire un nombre A de trois chiffres tous différents.

Calculer la somme de ses chiffres.

Permuter ces chiffres de toutes les façons possibles : vous obtenez cinq autres nombres.

Faites la somme de ces cinq nombres obtenus et ajoutez A.

Diviser cette somme par la somme des chiffres du nombre A de départ .

Qu'obtenez-vous ?

Recommencer avec un autre nombre A …

10. Écrire un nombre entier K de trois chiffres.

K = ✦ ✧ ✭
L = ✧ ✭✦

a) Écrire un autre nombre L avec ces mêmes chiffres.

Calculer la différence entre le plus grand et le plus petit ; vérifier que cette différence est un multiple de 9.

b) Recommencer avec un autre nombre K.

c) Et que se passe-t-il si, au départ, on prend un nombre de 4 chiffres ?

11. Choisir un entier B de trois chiffres. L'écrire à l'envers.

Faire la différence entre le plus grand et le plus petit.

Renverser cette différence et ajouter ces deux derniers nombres.

Quel est le nombre obtenu ?

Choisir un autre entier B et recommencer …

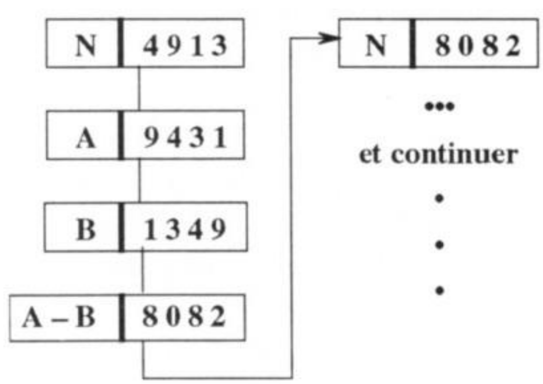
12. (1) Écrire un nombre entier N de 4 chiffres non tous identiques.

(2) Avec ces chiffres écrire le plus grand nombre possible : c'est A.

(3) Avec les chiffres de A écrire le plus petit nombre possible : c'est B.

(4) Calculer A – B.

(5) Remplacer N par A–B et recommencer une fois, deux fois …



• Quand n'est-il plus nécessaire de continuer ?

• Refaire l'exercice avec un autre nombre N de quatre chiffres au départ.

13. Palindromes

- Le nombre 34543 constitue un ***palindrome*** : c'est le même nombre qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche. Il est symétrique.
- Partons du nombre 39. Ajoutons lui son **symétrique** 93 :   39 + 93 = 132.

Comme 132 ne constitue pas un palindrome, ajoutons-lui son symétrique 231 :
132 + 231 = 363. On obtient cette fois un palindrome.

Il a fallu deux opérations, mais parfois c'est beaucoup plus long !

(1) Écrire un nombre : A.

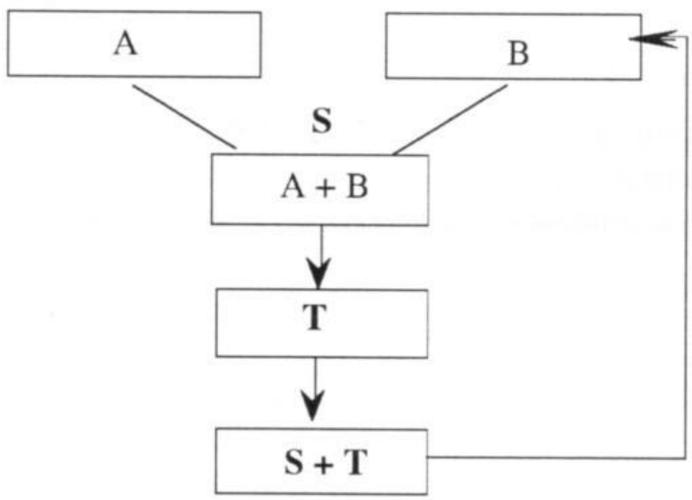
(2) Le renverser : B

(3) Ajouter ces deux nombres : S = A + B

(4) Renverser cette somme T.

(5) Ajouter S + T.

(6) Recommencer jusqu'à l'obtention d'un nombre symétrique !



- Trouver les palindromes à partir de chacun des nombres suivants :

192 ;   79 ;   891 ;   889 ;   188 .

- Et pour 89, c'est un peu plus long … Essayez.

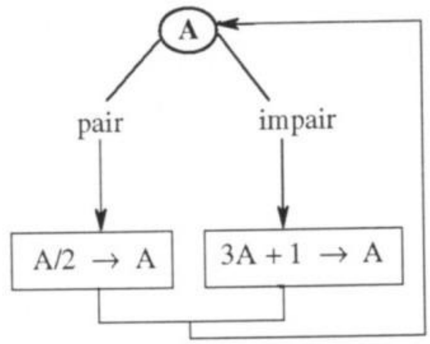
14. La boucle de Syracuse

Choisir un entier A supérieur à 0.

- Si A est pair, le diviser par 2.
- Si A est impair, calculer 3A + 1.

Remplacer A par l'un ou l'autre de ce nouveau nombre

et continuer …



✦ Vérifier !

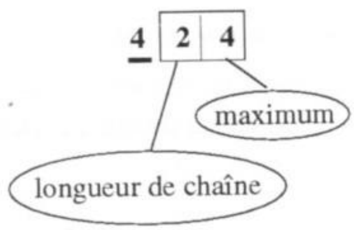
$\boxed{A = 4}$: 4 → 2 → 1 → $\boxed{4}$ (on revient à A)

$\boxed{A = 6}$: 6 → 3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 … STOP !

$\boxed{A = 7}$: 7 → 22 → 11 → … continuer… → 52 → … → 1 STOP !

✦ Partant de A = 4, ou A = 6, ou A = 7, on arrive toujours à 1.

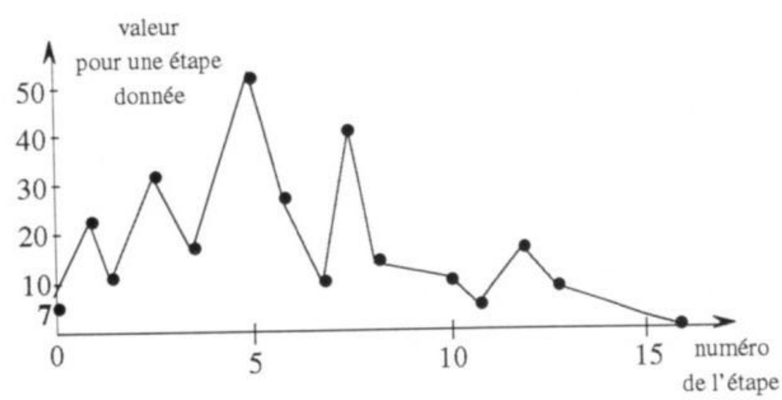
Pour 4, on arrive à 1 par une chaîne de longueur 2 : il y a deux étapes ; et le maximum est 4. On écrit :



✦ En partant de 6, vérifier que l'on a une chaîne de longueur 8, avec 16 comme maximum, c'est-à-dire **6** | **8** | **16**

✦ En partant de 7, on a **7** | **16** | **52** . Vérifiez-le.

Le graphique ci-dessous indique les différentes étapes et le nombre obtenu à chacune des seize étapes, en partant du nombre 7.



✦ Vérifier certaines données du tableau suivant et complétez-le en vous aidant éventuellement d'une calculatrice …

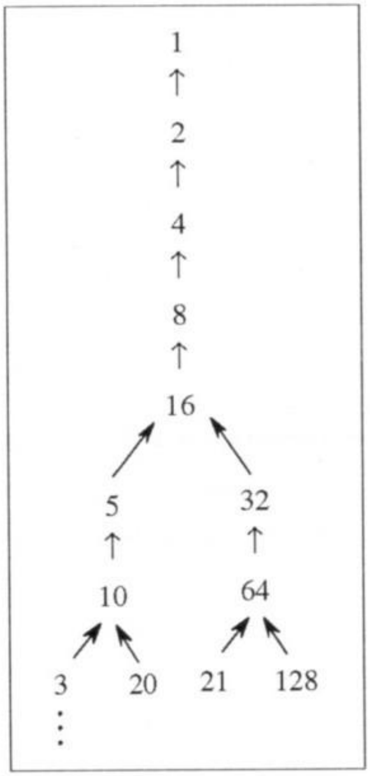
Nombre A au départ	4	5	6	7	8	9	10	12	13		24	25	26	27
Longueur de chaîne	2		8	16								23		111
Maximum	4		16	52								88		9232

✦ Un maximum n'est jamais impair : pourquoi ?

✦ Cet arbre représente toutes les chaînes de longueur 7 aboutissant à 1.

Vérifiez-le.

Complétez cet arbre afin d'obtenir toutes les chaînes de longueur 10 aboutissant à 1.



✦ Tout nombre A qui est une puissance de 2 ($A = 2^k$) a une chaîne qui aboutit à 1. Démontrez-le.
Quelle est la longueur de cette chaîne ?

✦ Tout nombre B qui est le produit par 10 d'une puissance de 2 ($B = 10 \times 2^k$) a une chaîne qui aboutit à 1. Démontrez-le.
Quelle est la longueur de cette chaîne ?

✦ $C = 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4$.
Vérifier que C a une chaîne aboutissant à 1.
Quelle est sa longueur ?

✦ Généralisation : $D = \sum_{k=0}^{k=p} 4^k$.

Démontrer que la chaîne de D aboutit à 1. Quelle est sa longueur ?

On trouve une trace de ce problème en 1930 à l'Université de Hambourg, en 1952 en Grande Bretagne, aux États-Unis.

Ce problème fut introduit vers 1950 à l'Université de Syracuse aux États-Unis, d'où son nom.

La solution générale n'a jamais été démontrée, mais à ce jour on n'a pas trouvé de contre-exemple de nombre A ne conduisant pas à 1.

Pour les mille premiers entiers, on trouve 350 fois le maximum 9232. On a trouvé 52 entiers consécutifs qui donnent la même longueur de chaîne.

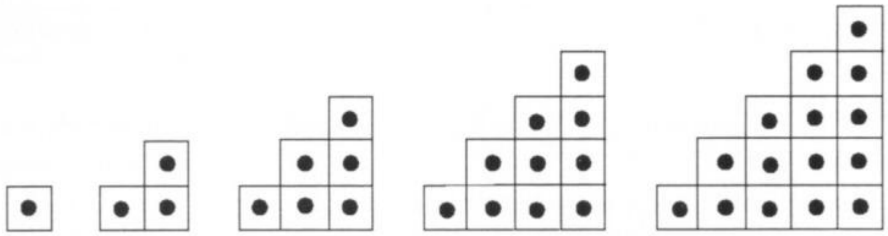
Partant de 77 671, on a une chaîne de longueur 231 et une "altitude" de 1 570 824 736.

"*Pour la Science*", 1984 – B. Hayes

15. Des nombres triangulaires

Voici comment on "construit" les nombres triangulaires T(1), T(2), ... de rangs 1, 2, ...

Rang → 1 2 3 4 5



$T(1) = 1$ $T(2) = 3$ $T(3) = 6$ $T(4) = 10$ $T(5) = 15$

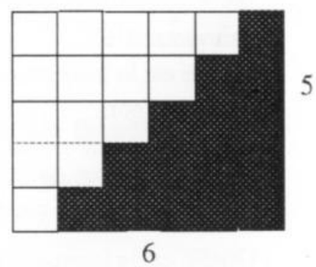
• Quels sont les nombres triangulaires T(6), T(7), T(8) et T(9) ?

• On remarque que, au rang 5 par exemple, on a :

$$T(5) = \frac{5 \times 6}{2} \;.$$

D'une façon générale on a, au rang n :

$$\boxed{T(n) = \frac{n(n+1)}{2}} \;.$$



Vérifiez-le jusqu'au rang 9.

Donner la liste des nombres triangulaires jusqu'à T(20).
Calculer T(100) et T(1000).

• Dans la liste de ces nombres, un seul est un nombre premier : pourquoi est-on sûr qu'il n'y en a pas d'autres ?

• On remarque que $6 + 10 = 16$, autrement dit : $T(3) + T(4) = 4^2$.
Calculer $T(5) + T(6)$ puis $T(6) + T(7)$.
Démontrer que $T(n) + T(n+1)$ est le carré de $(n+1)$.

• Calculer $8\,T(1) + 1$; $8\,T(3) + 1$; $8\,T(5) + 1$.
Démontrer que $8\,T(n) + 1$ est le carré de $(2n+1)$.

• Si n est un multiple de 3, on remarque que T(n) est aussi un multiple de 3.
Vérifier avec T(6), T(9), T(12).
Démontrer cette propriété pour tout n multiple de 3 ($n = 3k$).

• On a $6 = 2+4$. Comparer $T(6)$ et $T(2) + T(4) + (2 \times 4)$.
Démontrer que $T(n+m) = T(n) + T(m) + nm$.

16. Somme de nombres triangulaires

Voici un théorème dû au mathématicien GAUSS (1777-1855) :

« Tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires ».

Cette somme n'est pas forcément unique : elle peut contenir plusieurs fois le même nombre et il faut introduire $T(0)=0$.

Nous allons examiner cette propriété.

- $3 = T(2) + T(0) + T(0)$ ou $3 = T(1) + T(1) + T(1)$
- Décomposer 39 sous la forme d'une somme de 3 nombres triangulaires.
- Même question pour 100.
- Donner les décompositions de tous les entiers de 1 à 20.
- Pour chercher une décomposition de $1000 = A + B + C$, A, B et C étant des nombres triangulaires, essayez pour A **le plus grand T(n) possible**.

  $A = T(44) = 990$.

  $1000= T(44) + 10 = T(44) + T(?) + T(?)$. Achever cette décomposition !
- Donner une décomposition de 1 021 ; de 1 998 ; de 1 111 111 .

  Et pour 1 997 ?

17.

a) Pour le nombre 137, le chiffre des unités est 7.

Cherchons le chiffre des unités de son carré. Inutile de faire le calcul, puisque $7 \times 7 = 49$, le carré de 137 se termine par un 9 …
Il suffit donc de connaître la table “des 7”.

b) Le cube de 137 se termine par 3 car $9 \times 7 = 63$ et la puissance quatrième de 137 se termine par 1 car $3 \times 7 = 21$.
Montrer que la puissance cinquième de 137 se termine par 7.
Et la puissance sixième de 137 ?

c) Remplir le tableau ci-dessous selon que le nombre a se termine par 0 ; 1 ; ... ; 9.
Indiquer le chiffre des unités de son carré, son cube, sa puissance quatrième et sa puissance cinquième.

Le nombre a se termine par …	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Son carré se termine par …								9		
Son cube se termine par …								3		
Sa puissance 4ème se termine par …								1		
Sa puissance 5ème se termine par …								7		

Examinez chacune des lignes et des colonnes. Quelles sont vos remarques ?

d) Le nombre 248 832 peut-il être le carré d'un entier ? Le cube d'un entier ? Et une puissance cinquième d'un entier ?

e) Sachant que 970 299 est le cube d'un nombre N, quel est le chiffre des unités de N ? Calculer les cubes de 80 ; de 90 ; de 100. Pouvez-vous alors trouver le nombre N ?

f) Sachant que 248 832 est la cinquième puissance d'un nombre K, trouver ce nombre K en cherchant d'abord son chiffre des unités !

18. Puissances de 10

Dans 1 mm^3 de sang il y a 5×10^6 globules rouges. Chaque globule a la forme d'un disque de 7×10^{-3} mm de diamètre et de 2×10^{-3} mm d'épaisseur. Le corps d'un homme contient environ 5 litres de sang.

Si on alignait tous les globules rouges contenus dans le sang d'un homme, quelle serait la longueur de cette file ?

Avec cette file, combien de fois pourrait-on faire le tour de la Terre (40 000 km) ?

Distances avec des puissances de 10.

Préfixe	Exposant	Puissance de 10	Exemples
Zetta	21		Diamètre de notre galaxie
	20		
	19		
Exa	18		
	17		
	16		Année de lumière
Peta	15		
	14		
	13		
Téra	12		
	11		Distance Terre-Soleil
	10		
Giga	9		Distance Terre-Lune
	8		
	7		
Méga	6		Rayon de la Terre
	5		
	4		
Kilo	3	10^3 m = 1 km	
Hecto	2	10^2 m = 1 hm	
Déca	1	10^1 m = 1 dam	
	0	10^0 m = 1 m	
Déci	–1	10^{-1} m = 1 dm	
Centi	–2	10^{-2} m = 1 cm	
Milli	–3	10^{-3} m = 1 mm	
	–4		
	–5		Diamètre des bactéries
Micro	–6	10^{-6} m = 1 micron	
	–7		
	–8		
Nano	–9		
	–10	10^{-10} m = 1 Angström	Atome
	–11		
Pico	–12		

Un peu plus difficile !

19. Vous savez effectuer une « division euclidienne ».

Pour trouver le reste dans la division d'un nombre par 9, vous savez qu'il suffit de faire la somme de ses chiffres.

Le tableau ci-dessous comporte d'abord les nombres de 0 à 14.

Sur la seconde ligne, écrire le cube de chacun d'eux.

Sur la troisième, écrire le reste dans la division par 9 de chaque cube.

Nombre a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Calculer son cube														
Le reste en divisant ce cube par 9 est														

Quelles remarques faites-vous sur ces restes ?

Quel est le reste dans la division par 9 du cube de 1998 ? du cube de 1999 ? du cube de 2000 ?

20. Voici une affirmation :

« Si on divise par 4 une puissance de 7, le reste n'est jamais 0 ou 2 ».

En vous aidant de quelques exemples, dites ce que vous en pensez !

En voici une autre :

« Dans la division par 4 d'une puissance de 7, le reste est toujours 1 ou 3 ».

Qu'en pensez-vous ?

21. Soit le nombre $K = A^4 + A^5 + A^6$.

Pour $A = 2$, K est multiple de 7 : pourquoi ?

Pour $A = 3$, K est multiple de 13 : pourquoi ?

Pour $A = 5$, K est multiple de 31 : pourquoi ?

Pour $A = 7$, K est multiple d'un nombre X : trouver X.

22. **a)** Calculer les carrés de 1 ; 11 ; 111 ; 1 111 .

b) Sans calculatrice et sans poser l'opération écrire le carré de :

11 111 ; 111 111 ; 1 111 111 .

c) Calculer les carrés de

9 ;	99 ;	999;	9 999 ;	99 999 ;	etc.
18 ;	198 ;	1998 ;	19 998 ;	199 998 ;	...
27 ;	267 ;	2667 ;	26 667 ;	266 667 ;	...
4 ;	34 ;	334 ;	3 334 ;	33 334 ;	...
7 ;	67 ;	667 ;	6 667 ;	66 667 ;	...

23. La rumeur

À 8 heures du matin, dans une ville de 100 000 habitants, Léontine raconte une nouvelle fort intéressante à dix habitants de cette ville.

15 minutes plus tard, chacune de ces dix personnes s'empresse de raconter cette nouvelle à dix autres personnes.

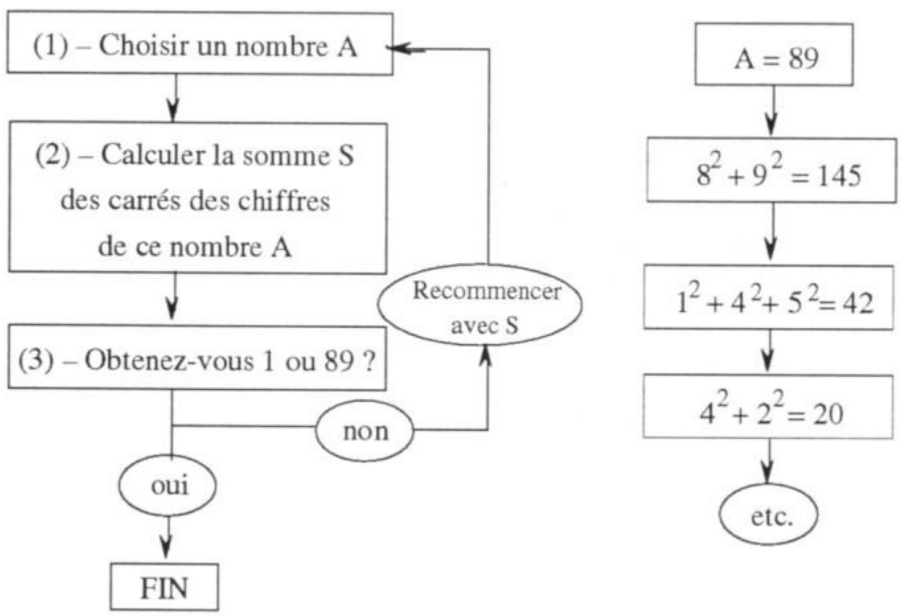
Ainsi de suite, toutes les 15 minutes, chaque personne qui vient d'apprendre la nouvelle la raconte à dix autres personnes qui ne la connaissaient pas.

Combien de personnes connaissent la nouvelle à 8 h 30 min ?

"La rumeur se propage rapidement" dit Prosper.

"En une heure, tous les habitants de la ville connaissent la nouvelle !" Est-ce vrai ?

24. Çà boucle !



Commencer avec au départ A = 89.

Choisir ensuite A = 132.

Recommencer !

25. **a)** Calculer le carré de (1+2) et la somme des cubes $1^3 + 2^3$

Calculer le carré de (1 + 2 + 3) et la somme des cubes $1^3 + 2^3 + 3^3$

Vous ne manquerez pas de faire une remarque intéressante !

b) Faire la somme S des entiers de 1 à 12 : $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 12$

Calculer la somme Σ des cubes de ces entiers de 1 à 12.

c) Vérifier que $S^2 = \Sigma$

d) Recommencer avec tous les entiers de 1 à 25.

26. Curiosités de CUBES

Soit l'égalité $B = A^3$.

On s'intéresse à la propriété :

« Le nombre A est la somme des chiffres de B ».

a) Prendre $A = 8$, calculer B et vérifier la même propriété.

b) On prend $B = 5\,832$. Faire la somme des chiffres de B : on obtient A.
Calculer le cube de A ! CURIEUX !

c) Il n'y a que SIX nombres A pour lesquels la somme des chiffres de son cube est égale à ce nombre A.
Le plus grand est 27. Vérifiez-le !
Trouver ceux qui manquent !

27.

a) On pose $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{15}$.

Doubler cette somme S : écrire 2S et montrer que $2S - S = 2^{16} - 1$.
En déduire S.

b) Un échiquier comporte 64 cases : on place un grain de blé sur la première, puis deux sur la case suivante, puis quatre sur la suivante, … et ainsi de suite, en doublant chaque fois, jusqu'à la 64ème case.

Quelle est la somme B de tous les grains de blés ?

Vérifier que 2^{10} est peu différent de 10^3.

En utilisant cette approximation, évaluer le nombre de chiffres qu'il faut utiliser pour écrire le nombre B.

c) Sachant que 1 m^3 de blé contient environ 15×10^6 grains, trouver le volume de blé correspondant à ce nombre B de grains de blé.

Supposons qu'on entrepose tout ce blé dans un grenier mesurant 4 m de haut et 10 m de largeur ; quelle devrait être sa longueur ? Comparer cette longueur à la distance Terre-Soleil qui est de 15×10^7 km environ.

28.

Écrire la liste des carrés de A, A étant un entier variant de 1 à 20.

Écrire la liste des cubes B^3 pour B variant de 1 à 20.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
A^2												
B^3												

Peut-on trouver un nombre de la seconde liste et un nombre de la première liste dont la différence est 4 ?

Il y en a deux seulement à partir de ces listes. Trouvez-les !

On a démontré qu'il n'y en a pas d'autres.

29. Somme de carrés

Dresser une table de carrés de 1^2 jusqu'à 20^2 .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
n^2	1	4	9									

♦ La somme de deux carrés est un entier, c'est évident. Mais tout entier peut-il s'écrire sous la forme d'*une somme de deux carrés* ?

C'est vrai pour 4 ($4 = 2^2 + 0^2$). Est-ce vrai pour 5 ? pour 9 ? pour 13 ?

♦ *Tout entier peut-il s'écrire sous la forme d'une somme de trois carrés ?*

Exemple : $4 = 2^2 + 0^2 + 0^2$. Vérifier-le pour 5 ; pour 8.

Est-ce possible pour 15 ? pour 164 ?

Ainsi, certains entiers peuvent s'écrire comme somme de deux ou de trois carrés. Mais pas tous ...

Par contre, en 1772, le mathématicien Lagrange a démontré le théorème suivant :

« Tout naturel est somme de quatre carrés. »

Certains peuvent se répéter. Cette décomposition n'est pas toujours unique.

Exemples : $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$
$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$

♦ Décomposez ainsi tous les entiers jusqu'à 20.

♦ Trouvez deux décompositions de 28 en somme de quatre carrés. Y en a-t-il une troisième ?

♦ Décomposons 1997 en somme de 4 carrés.

$$1997 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

Pour A, essayez d'abord le plus grand possible. Comment ?

♦ Même question pour 1 111 111 ; pour 23 456 789 .

30. ✧ Parmi les nombres premiers inférieurs à 50, quels sont ceux dont le reste de la division euclidienne par 4 est 1 ?

✧ Parmi les nombres premiers inférieurs à 50, quels sont ceux qui peuvent s'écrire sous la forme d'une somme de deux carrés ?

✧ Que remarque-t-on ? Faire des essais avec des nombres premiers supérieurs à 50.

✧ 4001 est un nombre premier. Pensez-vous qu'il puisse s'écrire sous la forme d'une somme de deux carrés ? Si oui, quels sont ces nombres ?

31. Le nombre de Champernowne

Écrire le nombre suivant: A = 0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 …

La partie décimale est obtenue en écrivant à la queue-leu-leu tous les entiers successifs sans en sauter un seul, à partir de 1. Il est illimité. Ce n'est donc pas un décimal !

Ainsi, à la 9ème décimale, on a 9, à la 10ème et la 11ème on a : 10, puis 11, etc.

Quelle est la 20ème décimale ?

Après la 9ème décimale, combien écrit-on de nombres de deux chiffres ?

Combien de décimales écrit-on avant d'écrire le premier nombre de 3 chiffres ?

Quelle est la 100ème décimale ? La 1 000ème ?

Les décimales 12ème, 13ème, 14ème forment le groupe $\boxed{111}$: à quel rang va-t-on retrouver ce groupe de chiffres une deuxième fois ? et une troisième fois ?

À quel rang trouve-t-on le groupe $\boxed{1111}$ pour la première fois ?

Quelle est la somme des 9 premières décimales ? Celle des 29 premières ? Celle des 49 premières ? et des 89 premières ?

32. Nombre parfait

La liste des diviseurs de 28 est : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 .

Ses diviseurs propres sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 . (On élimine 28 de la liste).

Calculer la somme de ces diviseurs propres : c'est un résultat étrange !

- ✦ Un **nombre parfait** est un naturel égal à la somme de ses diviseurs propres. 28 est un nombre parfait !
- ✦ Un nombre est **abondant** s'il est inférieur à la somme de ses diviseurs propres et un nombre est **déficient** s'il est supérieur à cette somme.

  Trouver un nombre parfait inférieur à 28. Quel est le plus petit ?
- ✦ Parmi les nombres de 1 à 30, trouver les nombres parfaits, les abondants et les déficients.
- ✦ 496 et 8128 sont les seuls autres nombres parfaits inférieurs à 10000. Vérifier qu'ils sont parfaits. De même pour $2^{12}\,(2^{13}-1)$.
- ✦ On ne sait pas s'il existe un nombre parfait impair !

  Voici un grand nombre parfait : $2^{756838}\,(2^{756839}-1)$.

33. Nombres amiables

a) Trouver tous les diviseurs propres de 220 : faire leur somme.

Recommencer avec le nombre 284. Curieux !!!

Ces deux nombres sont des nombres **amiables** ; chacun de ces deux nombres est égal à la somme des diviseurs propres de l'autre !

b) Les deux suivants sont 1184 et 1210. Vérifiez-le !

En voici d'autres : 2 620 et 2 924 ; 5 020 et 5 564
6 232 et 6 368 ; 17 296 et 18 416

Il y a aussi 9 437 056 et 9 363 584 …

34. Nombre de Erdös

C'est le nombre 0 , 2 3 5 7 11 13 17 19 … dont la partie décimale est obtenue en écrivant à la queue-leu-leu les nombres premiers successifs à partir de 2.

Cette écriture est illimitée.

La dixième décimale est un 7. Quelle est la vingtième ? la centième ?

La troisième décimale est un $\dot{5}$. À quel rang se situe le 5 suivant ?

Quel est le rang du groupe $\boxed{99}$ apparaissant pour la première fois ?

35. Les triplets de Pythagore

C'est un triplet (a;b;c) de trois entiers tel que $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Vous connaissez déjà (3 ; 4 ; 5) : ce sont les côtés d'un triangle rectangle.

Trouvez 4 autres triplets à partir de ce premier qui est bien connu.

Vérifiez que le produit des trois nombres a, b et c est un multiple de 60.

b) Voici un truc pour les trouver tous. On pose :

$a = 2mn$; $b = m^2 - n^2$; $c = m^2 + n^2$ avec $m > n$.

Démontrer que $c > a$ et que $b < a$.

En donnant à m et n des valeurs entières avec $m > n$, écrire les triplets (a ; b ; c). Démontrer que ce sont des triplets de Pythagore.

Vérifier que leur produit est multiple de 60.

36. Jumeaux …

Deux nombres jumeaux sont deux nombres premiers de différence 2.

a) Exemple : (3 ; 5) ; (11 ; 13).Trouver le couple qui suit.
41 a-t-il un jumeau ? Et 311 ? Et 463 ?

b) Trouver les dix premiers couples de jumeaux en utilisant la liste des nombres premiers.

c) On pose $A = 6n - 1$ et $B = 6n + 1$.
Calculer A et B pour l'entier n variant de 1 à 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										

Tous les couples (A ; B) sont-ils jumeaux ?

On démontre que tous les couples de jumeaux sauf (3 ; 5) sont obtenus avec les nombres premiers de la forme $6n - 1$ et $6n + 1$.

La réciproque est-elle vraie ?

d) Montrer qu'il n'y a pas de triplet (A ; B ; C) tels que (A ; B) et (B ; C) soient jumeaux sauf un …

37. Tous les nombres premiers, sauf le premier, sont impairs : pourquoi ?

a) Le premier impair est 3 qui s'écrit $3 = 2^2 - 1$.

Expliquez pourquoi vous ne trouvez pas d'autre nombre premier qui s'écrive $n^2 - 1$.

b) Pourquoi ne peut-on pas avoir de couples de jumeaux $(n^2 - 1 ; n^2 + 1)$ pour $n > 2$, autrement dit deux jumeaux n'encadrent jamais un carré.

c) Le nombre premier 5 s'écrit $2^2 + 1$.

Trouvez d'autres nombres premiers qui s'écrivent $n^2 + 1$.

Trouver les dix plus petits nombres premiers qui s'écrivent $n^2 + 1$.

d) Que dire de $n^2 + 1$ si n est impair ?

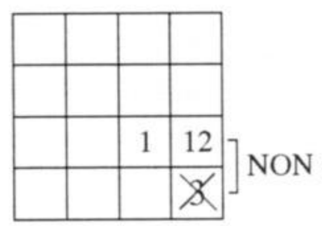
Montrez que si n se termine par 2 ou 8, alors $n^2 + 1$ n'est pas premier.

e) Cherchez des couples de jumeaux qui s'écrivent : $(n^2 + 1 ; n^2 + 3)$ ou $(n^2 + 3 ; n^2 + 5)$.

38. Jeu avec des nombres premiers

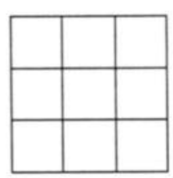
• Placer tous les nombres entiers de 1 à 16 dans les cases du carré (4 × 4) avec la contrainte suivante :

> "La somme de **deux nombres** situés dans deux cases voisines ayant un côté commun doit être un **nombre premier**."

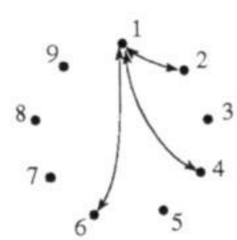


C'est possible et il y a pluseurs solutions !

• Recommencer avec un carré 3 × 3 et tous les entiers de 1 à 9 …



Compléter le schéma ci-contre pour indiquer tous les couples dont la somme est un nombre premier. Il vous aidera à conclure quant à une solution éventuelle.



• Même problème avec un carré (5 × 5) et les 25 premiers nombres entiers.

39. Racines cubiques et calcul mental

♦ Compléter les deux tableaux suivants :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^3		8				216			
Ordre de grandeur de a^3		10				200			

Chiffre des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^3				7						

♦ Voici un procédé pour calculer mentalement une racine cubique entière :

Racine cubique de 250 047 ?

$\underline{250}\ \underline{047}$

250 est *voisin* de 200 : Le chiffre des *dizaines* est 6

Le chiffre des *unités* est 3

$\sqrt[3]{250\,047} = 63$

On a bien $63^3 = 250\,047$

♦ Si les nombres suivants sont des cubes, trouver mentalement les racines cubiques de ces nombres :

753 571 ; 79 507 ; 3 375 ; 46 656 ;
658 503 ; 68 142 ; 328 509 .

♦ Pour chaque «racine» ainsi trouvée, calculer le cube et découvrir un piège caché dans la question précédente.

40. Le plus grand nombre ...

(1) On dispose de trois cartons marqués 1, a et b : $\boxed{1}$ $\boxed{a}$ $\boxed{b}$

a et b sont deux entiers tels que $1 < a < b$.

- Écrire les six assemblages que l'on peut former en plaçant ces trois cartons côte à côte.

- En intercalant deux signes $\oplus$ ou deux signes $\otimes$ ou un de chaque, former, pour chacun des ces assemblages, toutes les expressions possibles.

  Vous obtiendrez 24 expressions.

$1 \oplus a \otimes b$
$1 \otimes a \otimes b$
etc.

- Vous avez droit à deux parenthèses : (et).

  Pour chacune de ces 24 expressions, vous allez les placer de toutes les façons possibles.

  Écrire alors toutes les expressions possibles.

$(1 \oplus a) \otimes b$
$1 \oplus (a \otimes b)$

- Remplacer a et b par deux entiers tels que $1 < a < b$: laquelle de toutes ces expresions a la plus grande valeur ?

  Recommencer avec deux autres entiers a et b ...

  Parvenez-vous à la même conclusion ?

(2) On dispose maintenant de quatre jetons marqués 1, 1, a et b :

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{a}$ $\boxed{b}$

- Reprendre les mêmes questions.

  Pour les calculs, on a toujours $1 < a < b$.

41. Fractions en "cascade"

- La division des entiers permet d'écrire les fractions sous la forme d'une écriture "en cascade" ; par exemple :

$$\frac{49}{9} \;\; \begin{array}{r|l} 49 & 9 \\ \hline 4 & 5 \end{array} \longrightarrow \frac{49}{9} = 5 + \frac{4}{9} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{4}} \;\; \begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 4 & 2 \end{array} \longrightarrow \frac{49}{9} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}$$

  On s'arrête lorsque la dernière division se termine.

  Notons la fraction $\frac{49}{9}$ par la suite [5 ; 2 ; 4].

- La suite [2 ; 3 ; 4] représente le nombre $2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}$.

  Écrire ce nombre sous forme d'une seule fractions.

- Décomposer les fractions suivantes en "cascades" :

  $\frac{22}{7}$; $\frac{333}{106}$; $\frac{355}{113}$ et $\frac{103\,993}{33\,102}$.

- Décomposer en "cascades" la fraction $\frac{33\,102}{103\,993}$. Que remarques-vous ?

  En déduire les écritures en "cascades" de $\frac{113}{355}$ et de $\frac{9}{49}$.

42. Des fractions qui "convergent"

- Choisir deux entiers a et b.

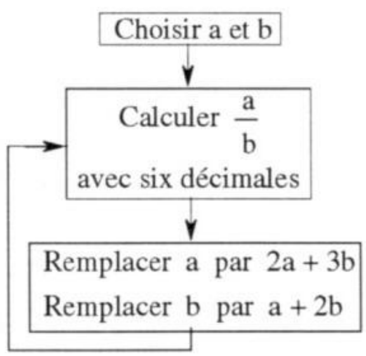
  Donner une approximation décimale de $\frac{a}{b}$ avec six décimales.

  Remplacer a par $a' = 2a + 3b$
  et b par $b' = a + 2b$.

  Calculer alors une approximation de $\frac{a'}{b'}$.

  Recommencer …

  Le tableau vous permet de noter vos résultats jusqu'à la septème étape.



a	b	Valeur approchée de $\frac{a}{b}$.
2	3	0,666 666
13	8	1,625 000
…	…	…

- Écrire une approximation de $\sqrt{3}$.

  Alors … ?

43. Des sommes d'inverses

On s'intéresse ici aux inverses des naturels : l'un d'eux n'a pas d'inverse, lequel ?

a) • Si $a < b$, que peut-on dire de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$? Écrire plus simplement $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$.

• Les inverses d'entiers sont des rationnels. Quel est le plus grand ?

• Y en a-t-il un plus petit que tous les autres ?

b) On s'intéresse à la somme de trois inverses de naturels qui peuvent être égaux.

♦ Vrai ou Faux ?

- La somme des trois inverses est un rationnel.
- La somme de trois inverses peut être un décimal.
- La somme de trois inverses peut être un entier.

Quelle est la plus grande somme de trois inverses égaux ? Et de trois inverses inégaux deux à deux ?

c) Voici une propriété étonnante énoncée par Erdös (1970) et non démontrée à ce jour :

> Quel que soit l'entier n ($n > 1$), $\frac{4}{n}$ est la somme de trois inverses,
> c'est-à-dire que l'on peut trouver a, b, c, non nuls tels que :
> $$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} .$$

Par exemple : $n = 2$ $\qquad \frac{4}{n} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ (c'est vérifié !)

$n = 5$ $\qquad \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ (à vérifier !)

• **Si n est pair,** *c'est facile.* $\quad \frac{4}{2p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$

Décomposer ainsi : $\frac{4}{26}$; $\frac{4}{1998}$.

• **Si n est un multiple de 3,** *ce n'est pas difficile.*

$$\frac{4}{3k} = \frac{3+1}{3k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{6k} + \frac{1}{6k}$$

Décomposer ainsi : $\frac{4}{27}$; $\frac{4}{36}$; $\frac{4}{1998}$.

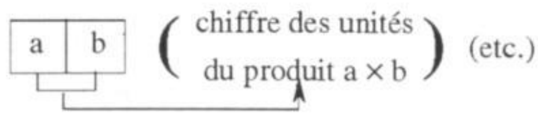
• **Montrer qu'on peut le faire** si n est multiple de 5, si n est multiple de 7.

Décomposer ainsi : $\frac{4}{7}$; $\frac{4}{25}$; $\frac{4}{35}$; $\frac{4}{49}$.

• Décomposer : $\frac{4}{13}$; $\frac{4}{17}$.

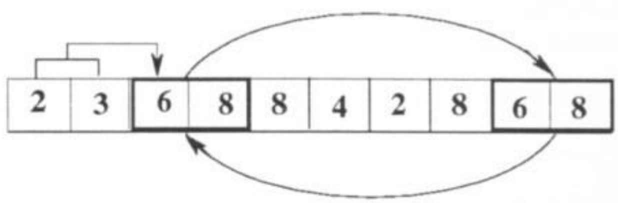
44. Tomber dans un puits …

On choisit deux nombres a et b compris entre 1 et 9 : a est le premier, b le second et le troisième est le chiffre des unités du produit a × b.



Et on continue avec le deuxième et le troisième … On obtient une suite de nombres supérieurs à 10.

Exemple : À partir de 2 × 3, on obtient la suite ci-dessous.



Lorsque l'on parvient au groupe 6 • 8 une seconde fois, on ***"tourne en rond"*** : [6•8] est un "puits" … Inutile de continuer.

- À partir de 3•2 on parvient au puits [2•6] : vérifiez-le !
- Quel est le puits en partant de 1•5 ? Y a-t-il d'autres départs conduisant au même puits ?
- Trouver les puits avec, au départ : 1•1 ; 1•2 ; 1•3 ; … ; 1•9 .
  Et à partir de 9•9 ?
- Si on part de a•b avec a et b tous deux *impairs* ; que se passe-t-il pour tous les nombres de la suite ?
- Et si on part avec a et b tous deux *pairs* ?