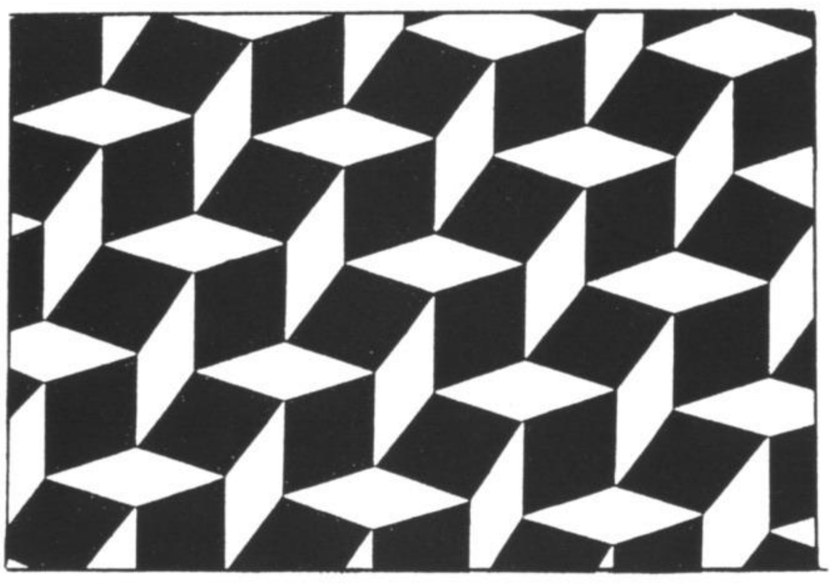
GALION THÈMES

Φ

Autour du Nombre d'Or



"Pavage" au moyen de **triangles d'or**,
qui forment des **losanges d'or**.

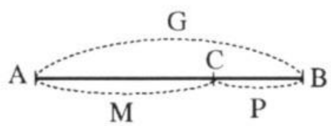
15, quai André Lassagne – 69001 LYON
ISBN : 2-912209-20-X

1 Une vieille histoire !

Le nombre d'Or est une vieille histoire …

Euclide*, déjà (300 avant J.-C.) parlait de "section en moyenne et extrême raison". Il n'était pas vraiment question de nombre, mais de rapport de longueurs ; c'est ainsi d'ailleurs que les nombres étaient considérés par les géomètres grecs.

De quoi s'agit-il ?



On a un segment [AB]. Il s'agit de trouver, sur ce segment, un point C tel que l'on ait les égalités de rapports :

$$\frac{\text{Grand segment (AB)}}{\text{Segment moyen (AC)}} = \frac{\text{Segment moyen (AC)}}{\text{Petit segment (CB)}}$$

Autrement dit, $\frac{G}{M} = \frac{M}{P}$.

Le **nombre d'or** est précisément le rapport $\frac{G}{M}$ ou $\frac{M}{P}$.

Ce rapport est désigné par la lettre grecque Φ en hommage, d'après certains, au sculpteur grec Phidias. Cette section d'un segment, avec deux rapports égaux, devait faire couler beaucoup d'encre chez les algébristes, les géomètres, les architectes et les peintres pour qui ce "rapport miraculeux" devait devenir le canon de la beauté.

Premiers calculs

- Posons $\frac{M}{P} = \Phi$. Montrez que $\Phi = \frac{M+P}{M}$ et $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$;

  donc (1) $\boxed{\Phi^2 = \Phi + 1}$

- Le nombre d'or est donc la racine positive de l'équation du second degré $X^2 - X - 1 = 0$.

  Montrez que (2) $\boxed{\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ et que $\boxed{\Phi \approx 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ \ldots}$

- Calculez l'autre racine de l'équation considérée et vérifiez qu'elle est égale à $-\frac{1}{\Phi}$ c'est-à-dire à $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

- Montrez que (3) $\boxed{\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1}$

Élever au carré le nombre d'Or, c'est lui ajouter 1 !
Prendre l'inverse du nombre d'Or, c'est lui retrancher 1 !

---

* *"Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand est au plus petit" …*

Euclide – Éléments – Livre IV

On notera que, dans ce texte, "droite" est pris au sens de "segment de droite".

2 Un peu de calculs algébriques d'abord

Il y a, autour du nombre d'Or, une foule de propriétés, algébriques, géométriques, trigonométriques …

Il faut bien choisir et commencer par quelque chose et nous avons choisi de commencer par de l'algèbre.

Les puissances de Φ

♦ En reprenant $\Phi^2 = \Phi + 1$, montrer que l'on a, quel que soit n, $\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$.

♦ Les calculs qui suivent reposent sur l'idée suivante, chaque fois que l'on rencontre une puissance de Φ, on peut remplacer Φ^2 par $\Phi + 1$.

Vérifiez l'enchaînement suivant :

$$\boxed{\Phi^2 = \Phi + 1} \rightarrow \boxed{\Phi^3 = 2\Phi + 1} \rightarrow \boxed{\Phi^4 = 3\Phi + 2} \rightarrow \boxed{\Phi^5 = 5\Phi + 3}$$

$$\Phi^n = a_n \Phi + b_n$$

$$\Phi^{n+1} = a_{n+1} \Phi + b_{n+1}$$

On démontrera sans peine par récurrence la propriété figurée ci-contre :

Si on connaît $\Phi^n = a_n\Phi + b_n$

alors pour Φ^{n+1} on a $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$.

Les puissances de $\frac{1}{\Phi}$

Calculer Φ^{-1}, Φ^{-2} et Φ^{-3} en fonction de Φ et comme ci-dessus, trouver une règle de récurrence pour passer de $\left(\frac{1}{\Phi}\right)^n = \alpha_n\Phi + \beta_n$ à $\left(\frac{1}{\Phi}\right)^{n+1}$.

➧ Exercez-vous !

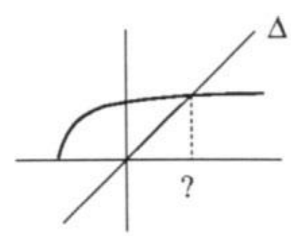
- Pour les puissances de Φ, écrire les coefficients a_n et b_n jusqu'à n = 15.
- Écrire Φ^{15} et Φ^{-15} en fonction de Φ.
- Que peut-on dire de $\Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}$, pour tout n ?

3 Première suite pour Φ

Un problème classique

On considère la suite récurrente définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

On choisira soit $a = 1$, soit $a = 3$ et pour chacune de ces deux suites, on étudiera les points suivants :



- Calculer les 10 premiers termes et faire des conjectures.
- Étudier les variations de la suite.
- Est-elle minorée ? majorée ?
- Démontrer que, dans chacun des cas, elle est convergente … et que sa limite est précisément le nombre Φ.

Tout cela pourra être illustré au moyen de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de la droite Δ d'équation $y = x$.

… conduisant à une formule curieuse

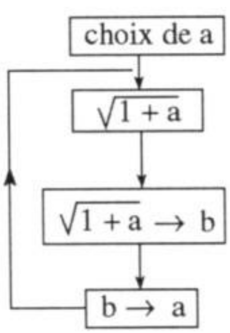
On a vu que Φ est solution positive de $\Phi^2 = \Phi + 1$ donc $\Phi = \sqrt{1+\Phi}$.

Chaque Φ peut être remplacé par $\sqrt{1+\Phi}$, ce qui donne :

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}}} = \ldots$$

C'est la raison pour laquelle, on trouve, pour Φ, l'écriture curieuse suivante :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} \quad \text{etc.}$$



Et si vous savez un peu programmer votre calculatrice, réalisez le programme correspondant à l'organigramme ci-contre.

Si vous faites afficher les valeurs de b, vous verrez défiler les termes de la suite u_n qui converge vers Φ …

4 … et une autre suite pour Φ

On sait que Φ vérifie $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ c'est-à-dire $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.

Comme dans l'activité qui précède, on peut remplacer Φ par $1 + \frac{1}{\Phi}$.

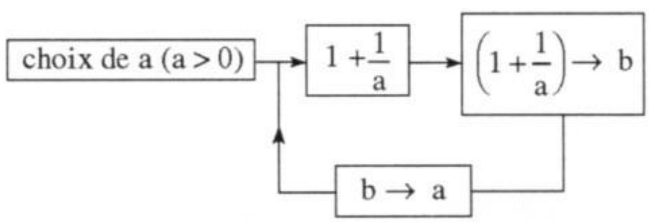
$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \ldots$$

Ce qui conduit à l'écriture suivante pour le nombre d'Or, écriture illimitée, bien sûr … Et cette écriture, non moins curieuse que celle de l'activité 3 suggère deux activités :

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

… à la calculatrice

Voici un nouvel organigramme qui vous permettra de fabriquer un programme faisant apparaître des valeurs de b de plus en plus proches du nombre Φ.



… et l'étude d'une suite

On pourra envisager aussi la suite v définie par :

$$v_0 = a \quad (a > 0) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$$

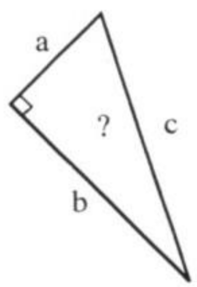
On étudiera cette suite en relation avec la fonction : $x \rightarrow 1 + \frac{1}{x}$

La démonstration de la convergence vers le nombre d'Or est un peu plus difficile …

5 Curiosités de calcul !

Le nombre d'Or que vous commencez à connaître algébriquement, se retrouve curieusement dans certaines situations où on ne l'attend pas ! En voici quelques exemples, pour s'exercer.

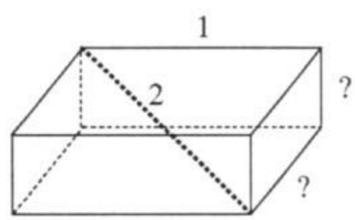
▶ Des triangles rectangles



On considère les triangles rectangles dont les côtés a, b, c sont les termes d'une suite géométrique.

Démontrer que la raison de cette suite est nécessairement la racine carrée du nombre d'or, ou bien sûr, son inverse.

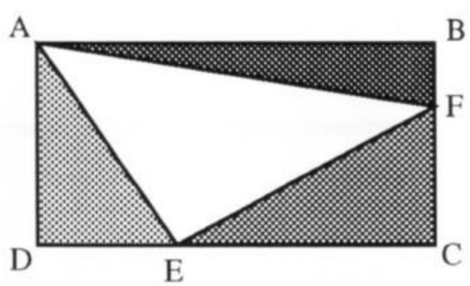
▶ Le curieux pavé !



Un parallélépipède rectangle a un volume de $1\,m^3$. Un côté mesure 1m et la diagonale 2m.

Exprimer les deux autres côtés en fonction du nombre d'or !

▶ Des triangles équivalents



ABCD est un rectangle.

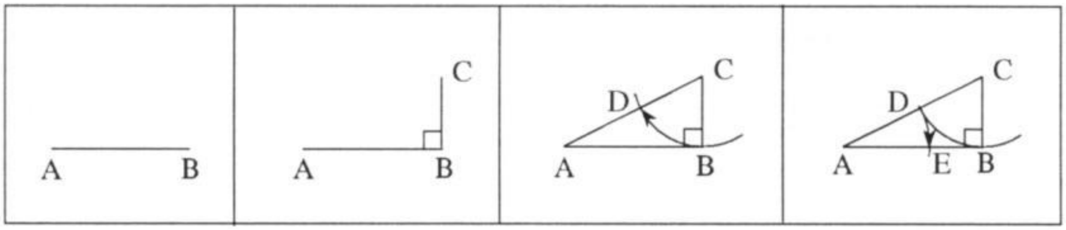
Montrer que, pour que les trois triangles coloriés aient la même aire, il faut que E partage [DC] en “section dorée” et qu'il en soit de même de F sur [BC].

Démontrer que, s'il en est ainsi, pour que AEF soit isocèle, il faut soit que ABCD soit un carré, soit que le rapport des côtés du rectangle ABCD soit le nombre d'Or …

Et alors, montrer que, de plus AEF est un triangle rectangle.

6 Section “dorée” d'un segment de droite

Dans l'optique des géomètres grecs, pour qui la droite et le cercle étaient les "lignes privilégiées" de la géométrie, voici le film de la construction d'une "section dorée" qui se fait avec une règle et un compas, à partir du segment [AB]



I II III IV

I - Tracer le segment [AB] de longueur a.

II - Tracer en B un segment [BC] perpendiculaire et de longueur moitié $\frac{a}{2}$.

III - Rabattre B en D sur (CA) avec le cercle de centre C et de rayon CB.

IV - Rabattre D en E sur (AB) avec le cercle de centre A et de rayon AD.

On montrera alors que $\boxed{\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} = \Phi}$. C'est la **section dorée** !

Un peu de maths …

Pour aider aux calculs (niveau 3ème) on peut prendre AB = a = 2.

On a alors : $BC = CD = 1$; $AC = \sqrt{5}$; $AD = AE = \sqrt{5} - 1$; $EB = 2 - AE = 3 - \sqrt{5}$

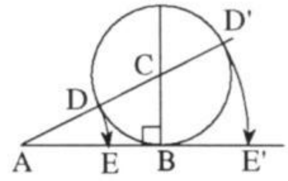
$$\frac{\text{grand segment}}{\text{segment moyen}} = \frac{AB}{AE} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \;;$$

$$\frac{\text{segment moyen}}{\text{petit segment}} = \frac{AE}{EB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

On peut aussi faire ces calculs avec a quelconque, ou a = 1.

Une autre section d'Or

[AB] étant tracé, on trace le cercle de centre C, de rayon AB/2, tangent en B à [AB]. Après avoir tracé (AC), on rabat D et D' en E et E' sur (AB) au moyen d'arcs de cercles de centre A.

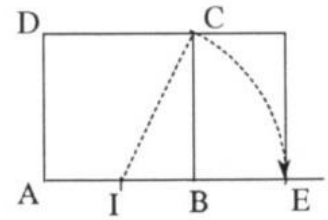


Démontrer que l'on a :

$$\boxed{\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} = \frac{AE'}{AB} = \Phi}$$

7 Rectangle d'or et spirale

Un **rectangle d'Or** est un rectangle dont le rapport $\dfrac{\text{Grand côté}}{\text{Petit côté}}$ est égal au nombre d'or.



Envisageons le carré ABCD.

I est le milieu du côté [AB].

Rabattre le point C sur (AB) en E au moyen du cercle de centre I et de rayon IC.

Construire le rectangle de côtés AD et AE.

Démontrer que $\dfrac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AD}} = \mathbf{\Phi}$ et remarquer que si AD = 1, alors AE = Φ .

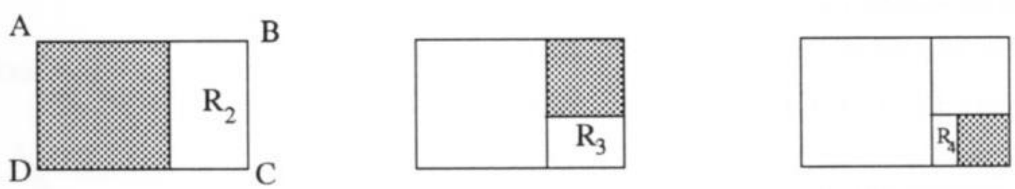
Des rectangles d'Or emboîtés

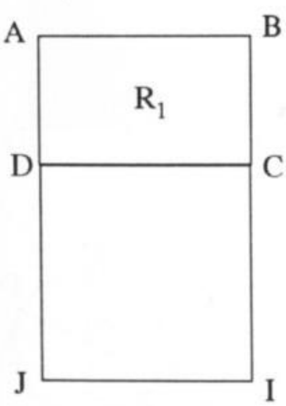
On envisage un rectangle d'or ABCD, désigné par R_1.

On découpe, dans ce rectangle, le carré de côté AD ; il reste alors un rectangle R_2.

• Démontrer que ce nouveau rectangle est aussi rectangle d'Or !

Et ainsi de suite, par "découpage de carrés", on construit les rectangles R_3, R_4, ... successifs qui sont tous des "rectangles d'or" ! Démontrez-le !





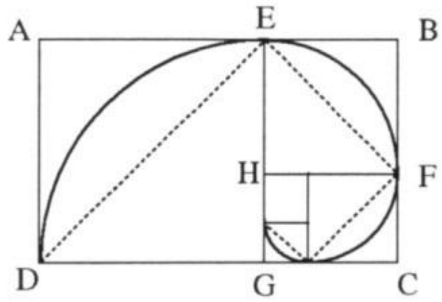
• Construire sur le côté [DC] de R_1 le carré DCIJ à l'extérieur de R_1.

Démontrer que ABIJ est un rectangle d'Or.

Ainsi de suite, … on peut construire un autre carré de côté BI …etc.

À partir d'un rectangle d'Or, vous pouvez soit le … réduire (… à l'intérieur) soit l'agrandir (à l'extérieur).

La spirale du rectangle d'Or



• Le grand rectangle R_1 a pour image R_2 par une similitude directe de rapport $\frac{1}{\Phi}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$: cette similitude transforme par exemple (D, A) en (E, B). On montrera que son centre Ω est l'intersection de (AC) et de [BG] et qu'elle transforme le rectangle R_2 en R_3, R_3 en R_4, etc. et R_n en R_{n+1}.

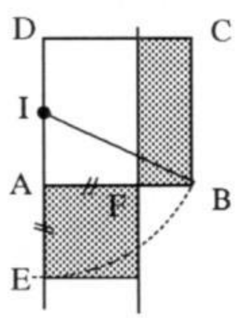
Calculer les coordonnées du centre Ω dans le repère $(D, \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DA})$.

• On trace le quart de cercle DE, de centre G, le quart de cercle EF, de centre H, … et ainsi de suite.

On obtient la *spirale du nombre d'or* courbe “illimitée” qui a pourtant une longueur finie, ce que l'on démontrera (poser AD = 1).

• Et, vers quel “point limite” tend cette courbe … ?

La configuration d'Euclide



Dans son Livre VI des “Éléments”, Euclide propose la construction suivante :.

ABCD est un carré.

I est milieu de [AD] : IB est reporté en IE, sur (AD) et on prend F sur [AB] de telle sorte que AF = AE.

Par F, on trace la droite Δ parallèle à (DA).

Démontrer que les surfaces hachurées ont la même aire …

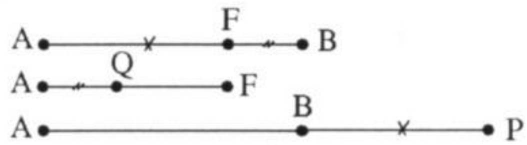
Mais où trouve-t-on le nombre d'Or … ?

Et où est le rectangle d'Or …?

> Voici une traduction du texte d'Euclide :
>
> “Soit AB la droite donnée. Il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments soit égal au carré du segment restant.”

8 Recherche de sections "dorées"

Sur des segments

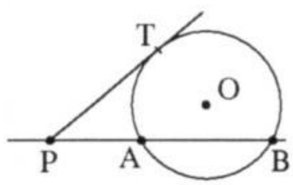


Le point F réalise une section dorée sur [AB].

a) Sur [AF], on place Q tel que AQ = FB. Montrer que Q réalise une section dorée sur [AF].

b) On prolonge [AB] jusqu'en P tel que BP = AF. Montrer que (A, B, P) est une section dorée.

Cercle et tangente

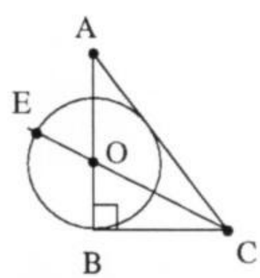


D'un point P extérieur au cercle, on trace la sécante (AB) et la tangente (PT).

• Démontrer que PT est égale à la corde AB si et seulement si A partage le segment [PB] en section dorée.

• La sécante (AB) étant tracée, comment construire P de telle sorte que PT = AB ?

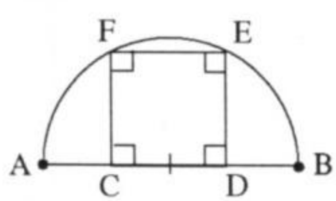
Triangle (3 - 4 - 5)



ABC est rectangle en B : les côtés ont pour mesures 3 - 4 - 5. On construit le cercle centré sur [AB] et tangent aux droites (CB) et (CA) ; la droite (OC) coupe ce cercle en E et F.

Démontrer que la section (C, F, E) est une section dorée.

Demi cercle et carré inscrit



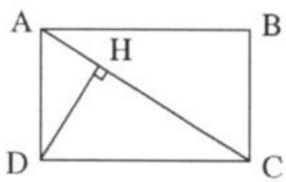
Tracer un demi cercle de diamètre [AB] et construire à la règle et au compas le carré CDEF, C et D étant des points du diamètre, E et F des points du demi-cercle.

Trouver des "sections dorées" sur le diamètre [AB].

9 Rectangles "égyptiens" et pyramide de Kéops

Le rectangle d'Or s'appelle aussi parfois **rectangle Φ**.

◆ **Le rectangle $\sqrt{\Phi}$:** c'est un rectangle tel que $\boxed{\dfrac{\text{diagonale}}{\text{petit côté}} = \Phi}$



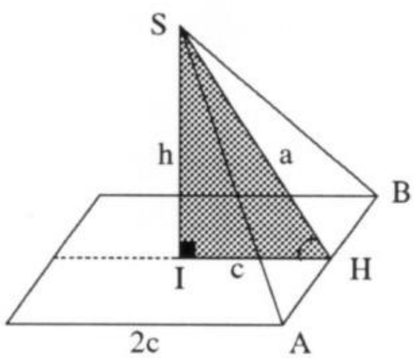
- Démontrer que l'on a alors $\boxed{\dfrac{AB}{BC} = \sqrt{\Phi}}$.
- Construire un tel rectangle à la règle et au compas.
- Construction approchée $\sqrt{\Phi} \approx \dfrac{14}{11} \approx 1,272$.
- Calcul de $\widehat{DAC}$ (51°,82 qui vaut environ 360°/7).

◆ **Triangle égyptien :** Un triangle tel que DAC est appelé *triangle égyptien* car on l'a retrouvé dans diverses structures de monuments égyptiens.

Démontrer que les trois côtés forment une suite géométrique de raison $\sqrt{\Phi}$.

Soit $(DH) \perp (AC)$, démontrer que $\dfrac{HC}{HA} = \Phi$.

◆ **Et la pyramide de Kéops**



On a vérifié que, dans cette pyramide, on a

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{c} \approx 1,272 \approx \frac{14}{11} \approx \sqrt{\Phi}$$

Le triangle SIH est presque un "demi-rectangle $\sqrt{\Phi}$ ".

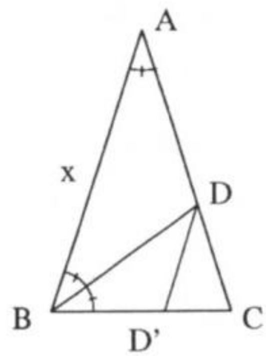
$$\frac{a}{h} \times \frac{h}{c} = \left(\sqrt{\Phi}\right)^2 = \Phi$$

d'où $\boxed{\dfrac{a}{c} = \Phi}$.

Calculons la pente d'une face de la pyramide :

$$\tan \alpha = \frac{h}{c} = \sqrt{\Phi} \approx 1,272 \approx \frac{14}{11} \quad \text{d'où} \quad \alpha \approx 51,82° .$$

10 Triangles d'Or



■ Dans un triangle isocèle ABC, on sait que :

$\widehat{BAC} = 36°$; AB = AC = x et BC = 1.

On démontrera facilement que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$.

On trace la bissectrice de $\widehat{ABC}$ qui coupe (AC) en D puis la bissectrice de $\widehat{BDC}$ qui coupe (BC) en D' .

Démontrer que les triangles BDC, BDA et D'DC sont isocèles.

En déduire AD = BD = 1.

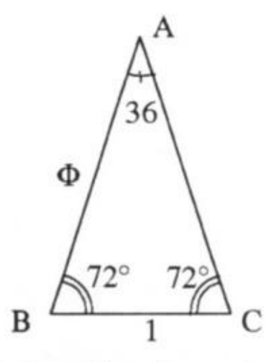
Calculer en fonction de x : BD', D'D, DC et CD'.

Démontrer que (DD') // (AB) et en déduire que x vérifie

$$x^2 = x + 1 \quad \text{donc} \quad x = \Phi .$$

■ Deux triangles d'Or

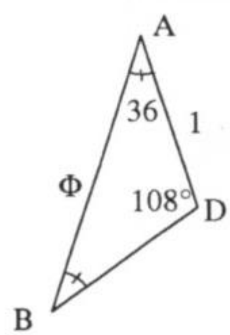
De la figure ci-dessus, on peut extraire deux triangles ABC et ABD.



AB = AC

et

$\frac{AB}{BC} = \Phi$



DA = DB

et

$\frac{AB}{BD} = \Phi$

Ces deux triangles sont appelés **Triangles d'Or.**

■ Un peu de trigonométrie

Tracer (AH), perpendiculaire à (BC).

• Dans ABH, calculer cos 72°, sin 72°, sin 18°, cos 18° en fonction de Φ.

Tracer (DK) perpendiculaire à (AB).

• Dans ADK, calculer cos 36°, sin 36°, sin 54° et cos 54° en fonction de Φ.

Tableau récapitulatif :

On remarque (1) + (8) = (2) + (7) = (3) + (6) = (4) + (5) sont des angles supplémentaires.

(1) + (4) = (2) + (3) sont des angles complémentaires

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
α	18°	36°	54°	72°	108°	126°	144°	162°
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{\Phi+2}}{2}$	$\frac{\Phi}{2}$	$\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}$	$\frac{\Phi-1}{2}$	$-\frac{\Phi-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}$	$-\frac{\Phi}{2}$	$-\frac{\sqrt{\Phi+2}}{2}$
$\sin \alpha$	$\frac{\Phi-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}$	$\frac{\Phi}{2}$	$\frac{\sqrt{\Phi+2}}{2}$	$\frac{\sqrt{\Phi+2}}{2}$	$\frac{\Phi}{2}$	$\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}$	$\frac{\Phi-1}{2}$

Vérifier que $\sin 36° = 2 \cos 18° \cdot \sin 18°$ et que $\sin 72° = 2 \cos 36° \cdot \sin 36°$.

Dans ce tableau remplacez Φ par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et écrivez aussi simplement que possible les résultats trouvés.

▪ Spirale du triangle d'Or

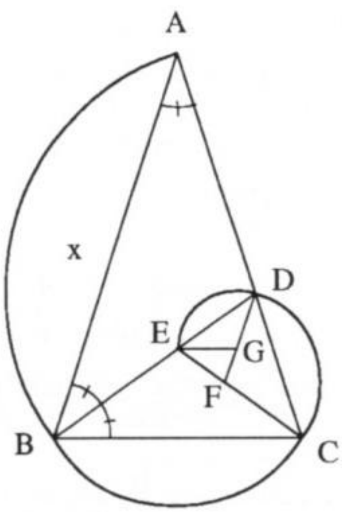
Comme on a dessiné une spirale du rectangle d'Or, on va construire une spirale du triangle d'Or.

$\overset{\frown}{AB}$ est l'arc de cercle de centre D. Montrer que sa longueur est $\frac{3\pi}{5}$.

(CE) étant la bissectrice de $\widehat{DCB}$, $\overset{\frown}{BC}$ est l'arc de centre E. Quelle est sa longueur ?

En utilisant (DF) bissectrice de $\widehat{DBC}$, tracer $\overset{\frown}{DC}$, l'arc de centre F, …etc.

On obtient ainsi des arcs successifs C_1, C_2, C_3, …etc.



- Le triangle ABD a pour image BEC par une similitude : préciser le rapport de similitude.
- L'arc C_2 est l'image de C_1 par cette similitude : expliquez pourquoi.
- Que pouvez-vous dire de la suite des longueurs des arcs C_1, C_2, C_3, … ?

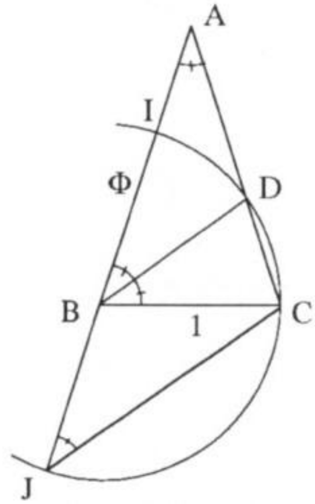
11 Pentagones et décagones réguliers

■ Décagones réguliers

• Reprenons le triangle d'or ABC.

On a $\widehat{BAC} = \dfrac{360°}{10}$, donc BC est le côté du décagone régulier convexe, inscrit dans le cercle de rayon AB = Φ.

En déduire que le côté C_{10} d'un décagone convexe inscrit dans un cercle de rayon R est $\boxed{\ell_{10} = \dfrac{R}{\Phi}}$.



• Traçons le cercle de centre B, de rayon BC ; il passe par D et J. Montrer que CJ est le côté d'un décagone étoilé inscrit dans ce cercle.

En déduire que pour un cercle de rayon R, le côté du décagone régulier étoilé inscrit dans ce cercle est $\boxed{\ell'_{10} = R\Phi}$.

• Montrer que les apothèmes de ces deux décagones sont données respectivement par :

$$\boxed{a_{10} = \frac{R}{\Phi}\sqrt{4\Phi + 3}} \qquad \boxed{a'_{10} = \frac{R\Phi}{2}\sqrt{7 - 4\Phi}}$$

■ Pentagones réguliers

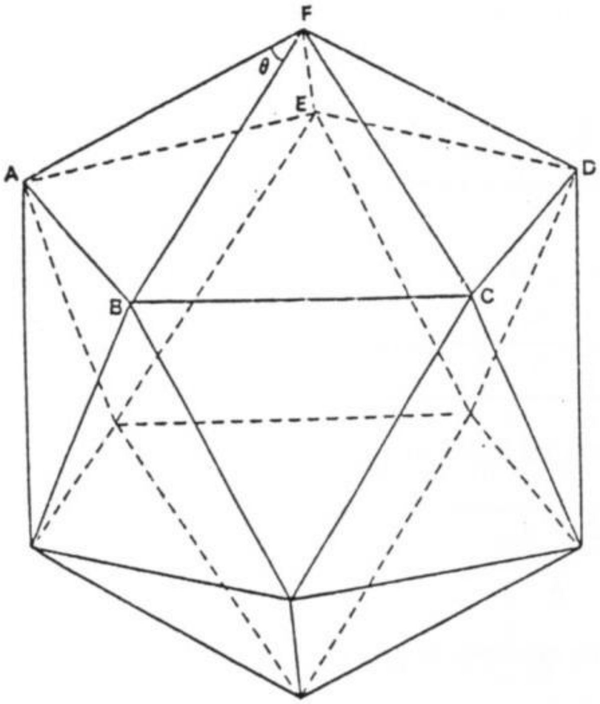
Montrer que IC est le côté c_5 du pentagone convexe inscrit dans le cercle (B, BC).

En utilisant le triangle rectangle ICH, montrer que pour un cercle de rayon R quelconque, on a $\boxed{c_5 = R\sqrt{3 - \Phi}}$

En remarquant que DJ est le côté c'_5 du pentagone étoilé inscrit dans le même cercle, montrer que $\boxed{c'_5 = R\sqrt{2 + \Phi}}$

Montrer que $\boxed{a_5 = \dfrac{1}{2}R\Phi}$ et que $\boxed{\dfrac{c'_5}{c_5} = \Phi}$

12 L'icosaèdre régulier



L'icosaèdre régulier est l'un des cinq solides de Platon.

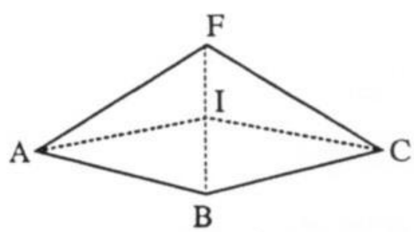
Ses 20 faces sont des triangles équilatéraux.

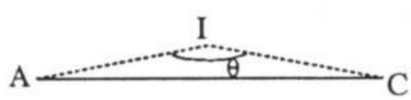
Vous allez calculer l'angle de deux faces et montrer que le cosinus de cet angle s'exprime en fonction du nombre d'or !

Examinons les cinq faces ABF, BCF, CDE, DEF et EAF.

ABCDE est un pentagone régulier convexe.

On a $AB = c_5$ et $AC = c'_5$, ce qui veut dire que si l'on pose $AB = 1$, on a $AC = \Phi$.





Considérons les deux faces ABF et BCF.

Soit I le milieu de [BF]. Les droites (AI) et (CI) sont toutes deux perpendiculaires à (BF) puisque les triangles sont équilatéraux, ceci implique que $\widehat{AIC}$ est l'angle de deux plans (ABF) et (BCF).

Calculons $\cos\theta$ dans le triangle AIC.

Nous avons : $IA = IC = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $AC = \Phi$.

En utilisant la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ (Al Kashi) dans ce triangle AIC, démontrez que :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{3 - 2\Phi^2}{3}} \quad \text{puis} \quad \boxed{\cos\Phi = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\Phi}$$

Calculez alors l'angle θ en degrés.

13 Suites de Fibonacci

■ Une **suite de Fibonacci** est définie par ses deux premiers termes u_1 et u_2 et la relation de récurrence :

$$n \geq 2 \qquad \boxed{u_{n+1} = u_n + u_{n-1}} \qquad (1)$$

➡ On suppose $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$: on a donc

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	
1	1	2	3	5	...

Calculer les vingt premiers termes de la suite et les quotients $\frac{u_{16}}{u_{15}}$ et $\frac{u_{20}}{u_{19}}$.

➡ On suppose maintenant $u_1 = 1$ et $u_2 = \Phi$.

Démontrer qu'on a alors $u_n = \Phi^n$.

La suite précédente est la suite géométrique de raison Φ, de premier terme 1.

➡ Cherchons toutes les suites géométriques qui vérifient (1).

Si q est la raison et le premier terme u_1 alors $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

La relation (1) s'écrit

$$u_1 q^n = u_1 q^{n-1} + u_1 q^{n-2} ,$$

c'est-à-dire après simplification par $u_1 q^{n-2}$:

$$q^2 = q + 1 \quad \text{équation qui a deux solutions } \Phi \text{ et } -\frac{1}{\Phi} .$$

> Les suites de Fibonacci qui sont aussi des suites géométriques ont donc pour raison soit Φ, soit $-\frac{1}{\Phi}$.

Pour ces suites le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est donc soit Φ , soit $-\frac{1}{\Phi}$.

Dans la suite nous noterons (v_n) et (w_n) celles de ces suites géométriques définies par :

$$v_n = \Phi^n \quad \text{et} \quad w_n = \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n .$$

■ **Formule de BINET***

On admet que toute suite de Fibonacci s'écrit sous la forme :

$$u_n = Av_n + Bw_n \quad \text{soit} \quad u_n = A\,\Phi^n + B\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n$$

où A et B sont deux nombres que l'on peut calculer à partir de u_1 et u_2.

• Faire le calcul de A et B dans le cas où : $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, et démontrer ainsi

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$

• Utiliser ce résultat pour démontrer que la suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est convergente et que sa limite est le nombre d'Or.

Un résultat curieux

Reprenons la suite de Fibonacci avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$.

$3\times8 \qquad 8\times21$

$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad \ldots\ldots$

$5^2 = 25$

$13^2 = 169$

$$5^2 - 3\times 8 = 1 \qquad 13^2 - 8\times 21 = 1$$

On peut démontrer que pour cette suite, on a :

$$\boxed{u_n^2 - u_{n+1}\cdot u_{n-1} = (-1)^{n-1}}$$

* Ce résultat exprime que la différence entre l'aire du carré de côté u_n et celle du rectangle de côté u_{n-1} et u_{n+1} est soit 1, soit –1 .

* Quelques indications pour cette démonstration :

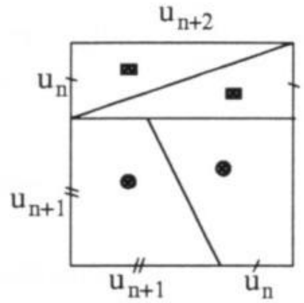
En partant de $u_n = A\,\Phi^n + B\left(-\dfrac{1}{\Phi}\right)^n$, vérifier $u_n^2 - u_{n+1}\ u_{n-1} = -5AB(-1)^n$.

Pour cette suite $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ donc $-5\,A\,B = 1$.

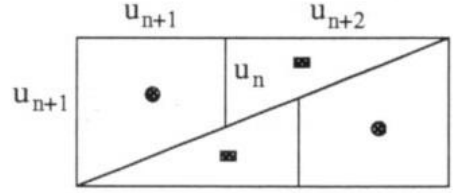
---

* On démontre que l'ensemble des suites de Fibonacci est un espace vectoriel de dimension 2.
À partir de deux solutions "indépendantes", telles que les suites (v_n) et (w_n) trouvées précédemment, on peut écrire toute suite de Fibonacci (F_n) sous la forme indiquée.

14 Le paradoxe de Lewis Caroll : 64 = 65



carré K



Rectangle R

$$\mathbf{u_{n+2} = u_n + u_{n+1}}$$

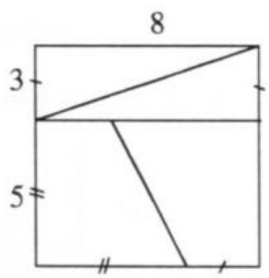
Sur la configuration ci-dessus, les longueurs u_n , u_{n+1} et u_{n+2} sont trois termes consécutifs de la suite de Fibonnacci qui commence par $u_1 = 1$, $u_2 = 1$.

À gauche, le carré (K) de côté u_{n+2} , ou bien $u_n + u_{n+1}$ est partagé en deux triangles rectangles et deux trapèzes rectangles qui, placés autrement, permettent de former le rectangle (R) de côtés u_{n+1} et $(u_{n+1} + u_{n+2})$.

- Écrire l'aire du carré K et celle du rectangle R au moyen des trois termes de la suite.
- Démontrer que :

$$\text{(Aire du rectangle R)} = \text{(Aire du carré K)} + (-1)^n$$

Illusions graphiques



En utilisant du bristol, dessinez un carré de côté 8 (8 cm ou 8 carreaux ...).

Découpez-le comme il est indiqué.

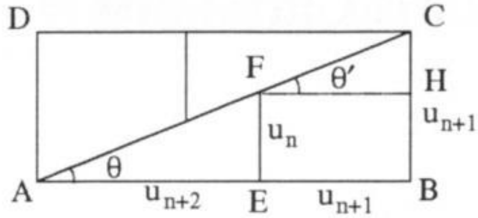
Réassemblez pour obtenir le rectangle 5×13. Comparez les aires du carré et du rectangle ...

Alors ... 64 = 65 ?

Cette "illusion" est d'autant meilleure que les dimensions sont importantes : si le "carré unité" est petit, la différence d'aire $(-1)^n$ semble très petite ...

Ainsi avec les nombres (13 - 21 - 34), le carré de côté 34 et d'aire $34^2 = 1156$ semble vraiment très peu différent, en surface, du rectangle de côtés 21 et (21 + 34) dont l'aire est 1155 ...

L'explication avec les angles



L'aire du rectangle n'est donc pas égale à celle du carré. Il y a une "différence" quelque part, en plus ou en moins (selon la parité de n).

Examinons le rectangle ci-contre reconstitué à partir des morceaux du carré.

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+2} + u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} + 1}$$

Traçons (FH) perpendiculaire à (CB) : $FH = EB = u_{n+1}$; $CH = u_{n+1} - u_n$

$$\text{d'où } \tan\theta' = \frac{CH}{FH} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} = 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} .$$

Pour n très grand : $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \approx \Phi$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \Phi$

$\tan\theta$ tend vers $\frac{1}{1+\Phi}$ c'est-à-dire $\frac{1}{\Phi^2}$

$\tan\theta'$ tend vers $1 - \frac{1}{\Phi}$ soit $\frac{1}{\Phi^2}$

Donc, $\tan\theta$ n'est pas égal à $\tan\theta'$ mais tend vers $\tan\theta'$ lorsque n tend vers l'infini …
Les points A, F, C ne sont donc pas "tout à fait" alignés, comme on pourrait le croire !

• **Remarquons** que si l'on pose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ on trouve :

$$\tan\theta = \frac{1}{2 + \frac{1}{k}} \quad \text{et} \quad \tan\theta' = \frac{k-1}{k}$$

Ainsi $\tan\theta = \tan\theta'$ équivaut à $k^2 = k + 1$, autrement dit l'égalité angulaire est réalisée si la suite de Fibonnacci est une suite géométrique. On a alors $(u_{n+1})^2 = u_n \cdot u_{n+2}$.

15 Nombre d'Or et Trigonométrie

On a vu que :

$$\boxed{\cos 36° = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\Phi}{2}}$$

Voici deux autres démonstrations de ce résultat :

• Méthode 1

Posons $X = \cos\frac{\pi}{5}$ et $Y = \sin\frac{\pi}{5}$; on a $X^2 + Y^2 = 1$.

On sait que $2 \sin a \cdot \cos a = \sin 2a$ et que $\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi$ ce qui permet d'écrire :

$$2XY = \sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5} = \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 2X^2\,Y + (2X^2 - 1)\,.Y$$

En déduire que $X = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}$ c'est-à-dire $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\Phi}{2}$.

• Méthode 2

En utilisant la formule de Moivre, on a $(\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x$

D'où $\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$.

Avec $x = \frac{\pi}{5}$, on montre que $\sin\frac{\pi}{5}$ est l'une des racines de $16X^4 - 20\,X^2 + 5 = 0$.

Et avec $Y^2 = 1 - X^2$, $\cos\frac{\pi}{5}$ est l'une des racines de $16Y^4 - 12\,Y^2 + 1 = 0$.

En déduire que : $\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

♦ Applications

• Exprimer $\sin\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{3\pi}{10}$; $\sin\frac{3\pi}{10}$; $\cos\frac{4\pi}{5}$; $\sin\frac{4\pi}{5}$ en fonction du nombre Φ.

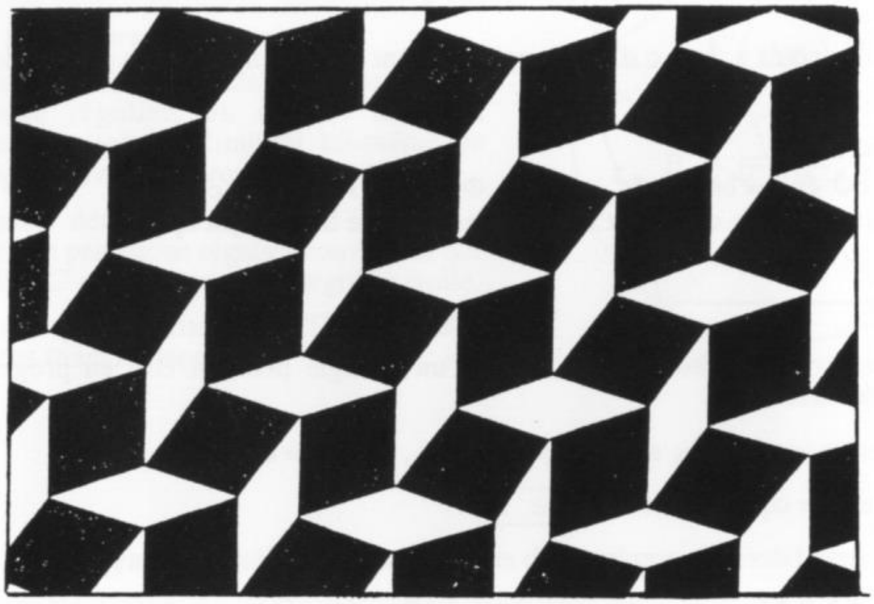
• Il en résulte une propriété remarquable dans les triangles.

Si dans un triangle, on a deux angles de 72° et 36° opposés aux côtés de mesures a et b, alors $\frac{a}{b} = \Phi$.

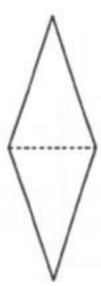
Il suffit de penser à $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ et $\sin 72° = 2 \sin 36° \cos 36°$!

16 Le carrelage doré …

La page de couverture vous propose le pavage suivant, avec des losanges.



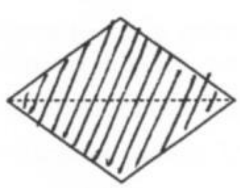
Analysez ce pavage.



- Les losanges blancs sont la juxtaposition de deux triangles d'or (72° - 72° - 36°).

  Précisez les angles du losange.

  Où retrouvez-vous le nombre d'Or ?



- Les losanges noirs sont la juxtaposition de deux triangles d'or (36° - 36° - 108°).

  Précisez les angles du losange.

  Où retrouvez-vous le nombre d'or ?

• Expliquer le "raccordement" des quatre losanges en un sommet commun.

• Trouver des isométries pour passer d'un losange à un autre losange de même couleur …

17 Les côtés d'un triangle peuvent-ils être en progression géométrique ?

Problème 1.

Cherchons si les côtés a, b et c d'un triangle peuvent être en progression géométrique de raison Φ.

Supposons $a \geq b \geq c$,
on aurait $b = c\Phi$ et $a = b\Phi = c\Phi^2$ puisque $\Phi^2 = \Phi + 1$, $c\Phi^2 = c\Phi + c$
Il en résulterait $a = b + c$ ce qui est impossible, sauf si le triangle est aplati.

Problème 2.

Plus généralement, cherchons si les côtés d'un triangle peuvent être en progression géométrique de raison q.

Comme ci-dessus, supposons $a \geq b \geq c$, et $b = cq$, $a = bq = cq^2$.

$b \geq c$ et $b = cq$ entraînent $\boxed{q \geq 1}$.

a étant le plus grand des trois nombres a, b et c, on a un triangle à condition que

$$a < b + c$$

c'est-à-dire $cq^2 < cq + c$

soit $q^2 < q + 1$

Dans ces conditions, démontrer que l'on a alors : $1 \leq q < \Phi$.

> Si les côtés d'un triangle sont en progression géométrique de raison q, cette raison vérifie
>
> $$\boxed{1 \leq q < \Phi}$$

18 Pentagone "emboîtés"

ABCDE est un pentagone régulier convexe.

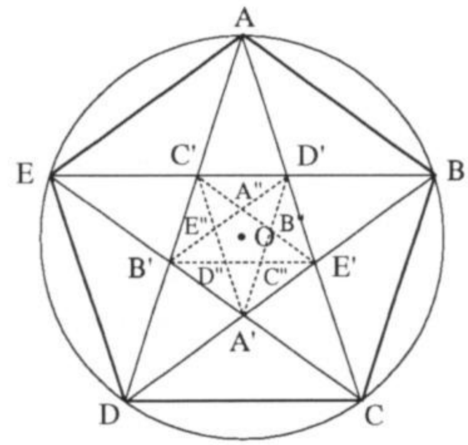
ACEBD est un pentagone régulier étoilé.

O est le centre du cercle circonscrit à ces deux pentagones.

En traçant les diagonales d'un pentagone convexe régulier, on obtient un petit pentagone étoilé, délimitant lui-même un pentagone convexe encore plus petit.

On peut démontrer que A'B'C'D'E' est encore un pentagone régulier convexe et que A'D'B'E'C' est un pentagone régulier étoilé.

Prouver que les triangles B'DE' et A'B'E' sont des triangles isocèles.



➪ De différence en différence

➡ Démontrer que AD – AE = B'E' , autrement dit :

$$\begin{pmatrix}\text{côté du grand}\\ \text{pentagone}\\ \text{étoilé ACEBD}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{côté du grand}\\ \text{pentagone}\\ \text{convexe ABCDE}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{côté du petit}\\ \text{pentagone}\\ \text{étoilé A'D'B'E'C'}\end{pmatrix}$$

➡ Démontrer que AE – B'E' = A'B' , autrement dit :

$$\begin{pmatrix}\text{côté du grand}\\ \text{pentagone}\\ \text{convexe ABCDE}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{côté du petit}\\ \text{pentagone}\\ \text{étoilé A'D'B'E'C'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{côté du petit}\\ \text{pentagone}\\ \text{convexe A'B'C'D'E'}\end{pmatrix}$$

➡ A"B"C"D"E" est un pentagone régulier convexe et on peut démontrer que :

$$B'E' - B'A' = A''E''.$$

Les soustractions successives ne s'arrêtent jamais ! Cette constatation avait beaucoup troublé les Grecs.

➪ Où l'on retrouve le nombre d'Or

Dans toute la suite nous supposerons que le rayon du cercle circonscrit au pentagone régulier ABCDE est égal à 1. Le rayon [OE] coupe [AD] en I.

• Démontrer que I est le milieu de [AD] et que (OE) est perpendiculaire à (AD).

• Sachant que sin 72° = 2 sin 36° . cos 36° , montrer que :

$$\frac{AD}{AE} = 2\cos 36° \quad \text{et donc que} \quad \frac{AD}{DC} = 2\cos 36° .$$

• Prouver que les droites (DC), (B'E') et (EB) sont parallèles. En utilisant le théorème de Thalès, démontrer que $\frac{AD}{DC} = \frac{AB'}{B'E'}$ et en déduire que $\frac{DC}{B'E'} = \Phi$.

De même, démontrer que $\frac{B'E'}{C'D'} = \frac{AB'}{AC'}$ et en déduire que $\frac{B'E'}{C'D'} = \Phi$.

Ce fascicule complète notre premier Galion-Thème sur "Le Nombre d'Or".

Mais les questions abordés ici sont d'un niveau plus élevé : certaines pourront être traitées par des élèves de **Seconde**, mais pour d'autres, il faudra attendre la classe de **Terminale S** !