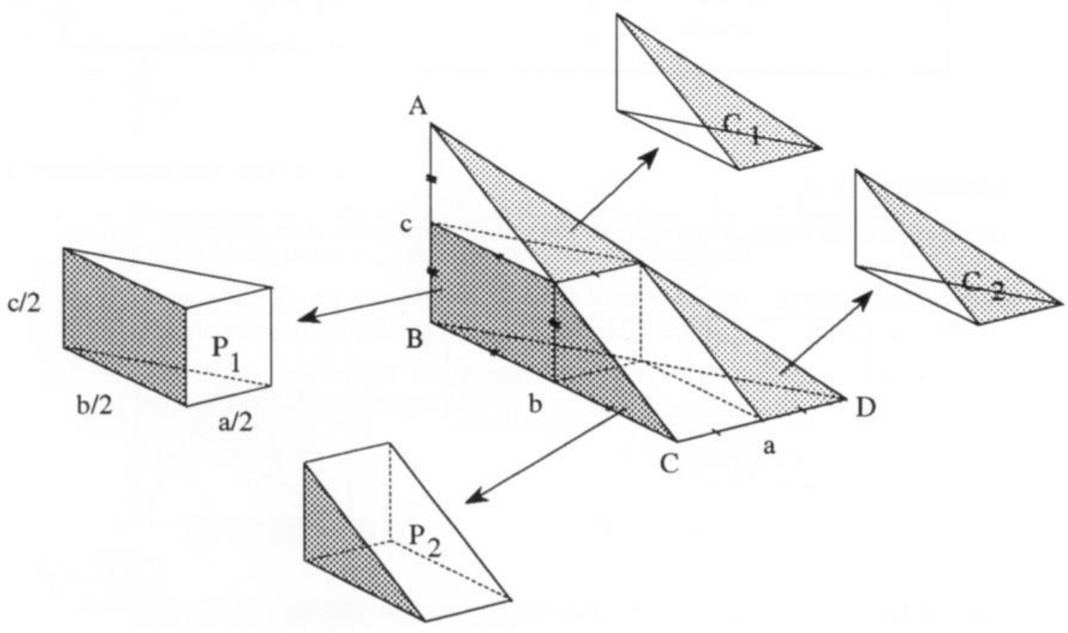
GALION THÈMES

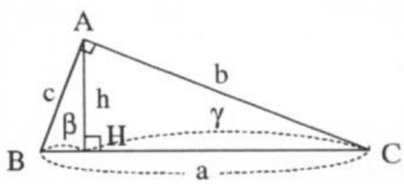
Le bicoin
ou
tétraèdre quadrirectangle



15, quai André Lassagne – 69001 LYON
ISBN : 2-912209-18-8

1. À propos du triangle rectangle

> Ce fascicule vous fera découvrir un tétraèdre particulier, belle configuration de l'espace, que nous avons baptisé **bicoin** …
>
> Il est curieux de constater que certaines de ses propriétés ressemblent fort à des propriétés métriques du triangle rectangle.
>
> C'est donc par des rappels que nous commençons …



Le triangle ABC est rectangle en A.

[AH] est la hauteur relative à l'hypoténuse.

Dans toute la suite, les notations a, b, c, h, β, γ sont celles de longueurs indiquées sur la figure.

Rappelons des propriétés importantes.

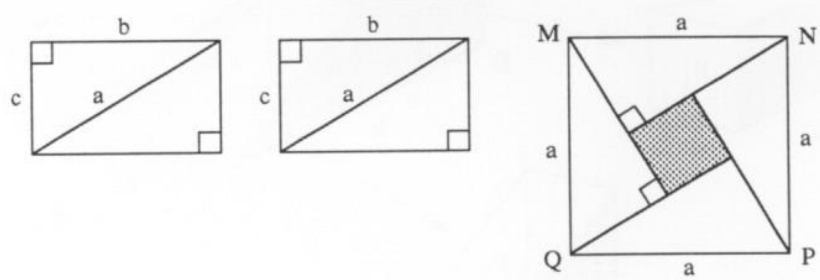
P_1 Dans le triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

C'est le fameux théorème de Pythagore !

Illustration de P_1

Les dessins et découpages qui suivent sont une illustration de cette propriété.



Deux rectangles de côtés b et c sont découpés en triangles rectangles d'hypoténuse a.

Ces quatre triangles rectangles sont assemblés comme l'indique la seconde figure.

Montrez que le quadrilatère MNPQ est un carré et que le quadrilatère hachuré est aussi un carré. Quel est son côté ?

Exprimer l'aire du grand carré de deux façons différentes et déduisez-en le théorème de Pythagore.

Et on peut trouver d'autres "puzzles" illustrant cette propriété de Pythagore.

P₂

$$BA^2 = BH \times BC \text{ c'est-à-dire } c^2 = \beta a$$
$$CA^2 = CH \times CB \text{ c'est-à-dire } b^2 = \gamma a$$

Pour le démontrer, calculer le deux façons le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ et celui de l'angle $\widehat{BCA}$.

P₃

$$\frac{\gamma}{\beta} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

Ce n'est qu'une conséquence de $\mathbf{P_2}$ en divisant membre à membre !

P₄

$$ah = bc$$

Vous le démontrez facilement en calculant de deux façons l'aire du triangle ABC.

P₅

La hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne géométrique des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse :

$$h^2 = \beta\,\gamma$$

On peut partir de $\mathbf{P_2}$ en multipliant membre à membre, puis se servir de $\mathbf{P_4}$, ou encore calculer les tangentes des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{CAH}$.

P₆

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

On a $a^2 = b^2 + c^2$ ($\mathbf{P_1}$)

$a^2 h^2 = b^2 c^2$ ($\mathbf{P_4}$)

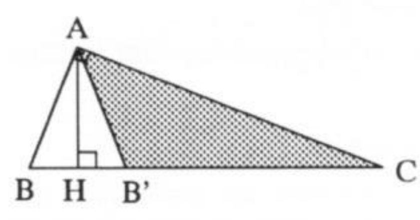
et on divise membre à membre.

➧ Posez-vous des questions !

- Dans le triangle ABC rectangle en A, quelles sont les trois hauteurs ?
- Où est l'orthocentre ? … et le centre du cercle circonscrit ?
- La propriété $\mathbf{P_2}$ est démontrée grâce à la trigonométrie : démontrez le théorème de Pythagore à partir de $\mathbf{P_2}$.
- Soit B' le symétrique de B par rapport à H. Démontrer que :

  $AH^2 = HB' \times HC$

  et $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB'^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.



Dans le triangle AB'C, les relations $\mathbf{P_5}$ et $\mathbf{P_6}$ sont vérifiées et pourtant ce triangle n'est pas rectangle …

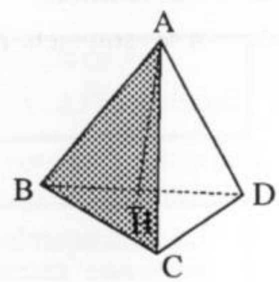
2. Les mots pour le dire …

Mais quittons la géométrie plane pour une longue excursion en géométrie de l'espace (… en trois dimensions).

Nous allons découvrir des objets curieux, avec des propriétés non moins curieuses, qui feront penser à certaines propriétés du triangle rectangle.

➩ Du vocabulaire

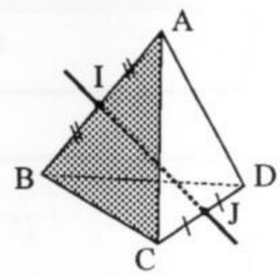
En géométrie de l'espace, le tétraèdre (*tétra* : quatre ; *edros* : face) est un solide dont les quatre faces sont des triangles. Il a quatre sommets et six arêtes.



Les arêtes telles que [AB] et [CD] sont des arêtes opposées.

Trouvez d'autres arêtes opposées.

I et J étant les milieux respectifs des arêtes opposées [AB] et [CD] le segment [IJ] est une bimédiane du tétraèdre.



Il y a deux autres bimédianes que vous trouverez !

Une hauteur, telle que [AH], est perpendiculaire à la face (BCD).

➩ Son volume

Il y a quatre hauteurs. Le volume est le tiers du produit de l'aire d'une face et de la hauteur relative à cette face.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\left(\text{Aire (BCD)} \times AH\right)}$$

➩ L'aire totale

Elle s'obtient en additionnant les aires des quatre faces triangulaires.

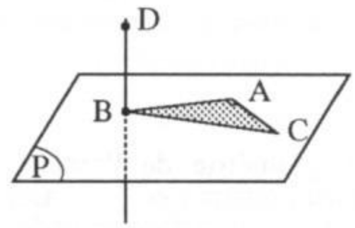
➩ Un patron

C'est un dessin, sur papier fort, qui, après découpage et collage, permet de construire le tétraèdre … Nous verrons cela en détail à l'activité 4.

3. Tétraèdre particulier

On se propose maintenant de fabriquer un tétraèdre particulier, dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

➥ L'équerre ABC est posée sur le plan P ($\widehat{BAC}$ est droit). Le point D est sur la perpendiculaire en B au plan P.



ABCD est un tétraèdre.

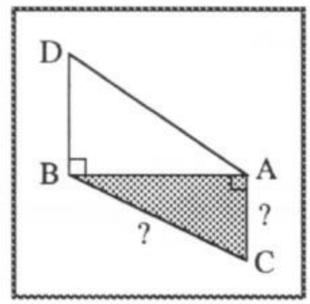
Quels sont ses sommets ? ses arêtes ?

Montrer que ses quatre faces sont des triangles rectangles : nommez-les en indiquant les angles droits.

Imaginons que les faces de ce tétraèdre ABCD soient en carton.

On découpe le long de DB et le long de DA : la face DBA est rabattue sur le plan P.

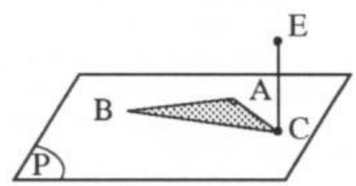
Compléter le **patron** ci-contre avec les deux faces qui manquent.



➥ Cette fois, c'est (EC) qui est perpendiculaire au plan P.

Les faces du tétraèdre ABCE sont-elles toutes des triangles rectangles ?

Dessinez un patron de ce tétraèdre.

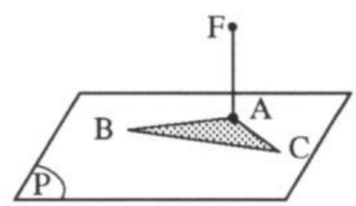


➥ Cette fois, le point F est sur la perpendiculaire en A au plan P dans lequel se trouve l'équerre ABC.

Quelles sont les faces du tétraèdre ABCF qui sont des triangles rectangles ?

Pourquoi le triangle FBC ne peut pas être un triangle rectangle ?

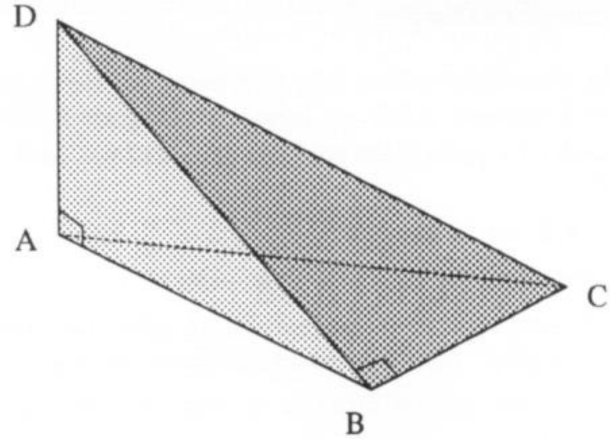
Dessinez le patron.



➥ ***Votre conclusion :*** Si les quatre faces d'un tétraèdre sont des triangles rectangles, comment sont disposés les angles droits ?

4. Un premier patron

Nous appelons BICOIN
tout tétraèdre
dont les quatres faces
sont des triangles rectangles.



Et ce sont ces solides que nous allons étudier maintenant, tout au long de ce fascicule.

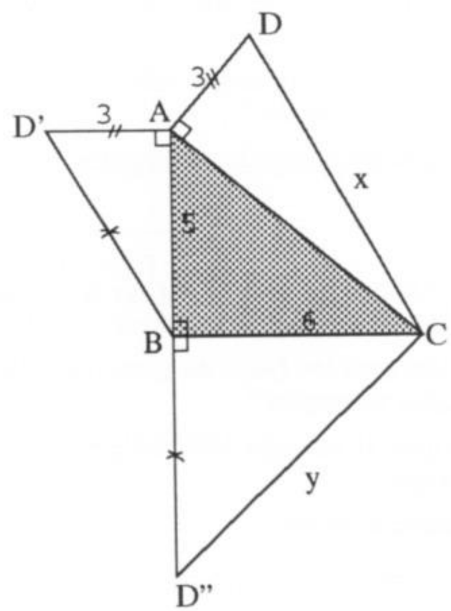
Afin de nous familiariser avec ces objets un peu particuliers, nous allons en fabriquer un ***patron*** qui servira à construire l'objet en question en papier fort.

❖ Premier patron

Vous commencez par dessiner le triangle rectangle ABC, avec les dimension indiquées, puis trois autres triangles rectangles comme il est indiqué, en respectant bien les égalités de longueur : le point D se retrouve trois fois …

Penser aux languettes de collage …

Découper et coller.

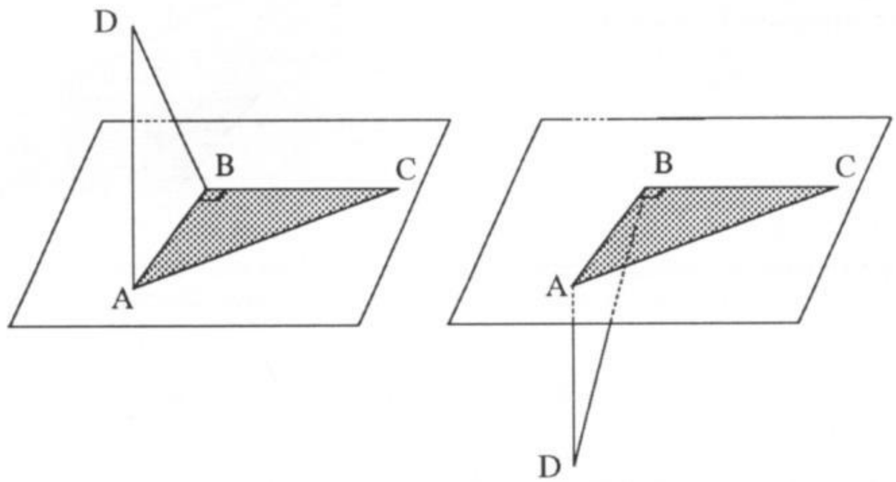


Démontrez que $x = y$.

❖ Bicoins "gauche" et "droite"…

Dessinez deux fois le patron précédent.

Avec ces deux patrons identiques, vous allez fabriquer deux bicoins différents …
Le triangle rectangle ABC étant posé horizontalement, il y a deux façons de plier les autres faces : (BAD) peut être *au-dessus* ou (BAD) peut être *au-dessous* du plan horizontal.

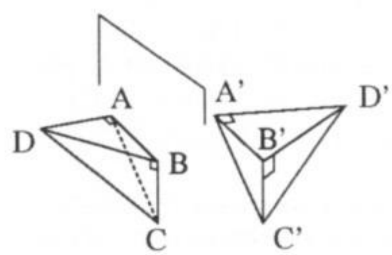


Fabriquer ces deux bicoins.

Vérifier qu'ils ont les mêmes dimensions : les arêtes sont toutes égales deux à deux.

Mais regardez-les de près …

Ils ne sont pas "superposables" l'un des deux apparaît comme étant l'image de l'autre vue dans un miroir.



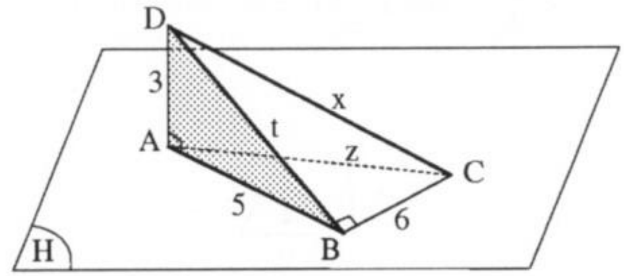
C'est un phénomène de symétrie que l'on retrouve souvent autour de nous : la main droite et la main gauche, …etc.

Et nous en reparlerons …

5. D'autres patrons pour un bicoin ...

➧ Reprenons le tétraèdre étudié à l'activité 4.

Pour obtenir le patron proposé, on peut imaginer que l'on a découpé le bicoin suivant les trois arêtes issues de D et que l'on rabatte sur le plan ABC, chacune des trois faces qui contiennent ce sommet D.



➧ Plus généralement, on peut couper le tétraèdre suivant les trois arêtes issues d'un sommet quelconque et rabattre, sur la face opposée à ce sommet chacune des faces qui le contiennent.

Réaliser les trois patrons correspondant à chacun des sommets A, B et C.

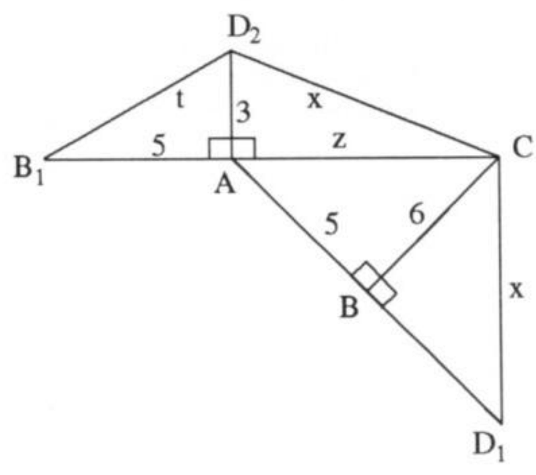
➧ On peut obtenir d'autres patrons de ce bicoin.
Choisissons deux arêtes opposées, [AB] et [CD] par exemple, et l'un des quatre segments [BD] joignant une extrémité de [AB] à une extrémité de [CD].
Coupons le bicoin suivant les trois arêtes choisies ; ces arêtes ont été grasseyées sur le dessin ci-dessus.
(On peut remarquer que ce sont trois arêtes consécutives et non coplanaires du bicoin).

On rabat d'abord la face DBC sur le plan H autour de (BC) : on obtient D_1BC.
On rabat ensuite DAB sur le plan (DAC) autour de (DA) à : on obtient DAB_1 ; B_1 est évidemment sur la droite (AC). On rabat enfin B_1DC sur le plan H autour de (B_1C) : on obtient B_1D_2C et le patron ci-après.

Dessiner les patrons obtenus en coupant le tétraèdre suivant [AB] et [CD] et chacun des trois autres segments joignant une extrémité de [AB] à une extrémité de [CD].

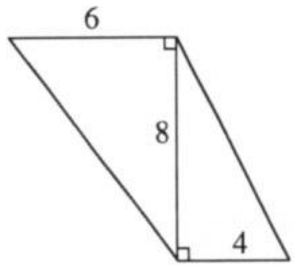
Refaire le même travail avec les arêtes opposées [AD] et [BC] puis avec les arêtes opposées [DB] et [AC].

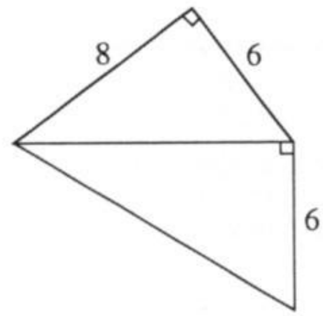
Déterminer BD_1.

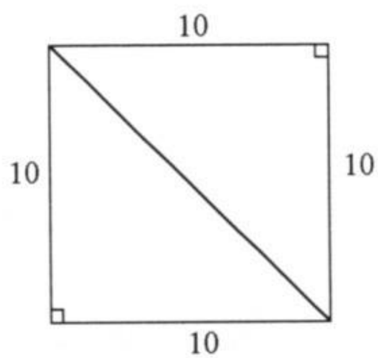


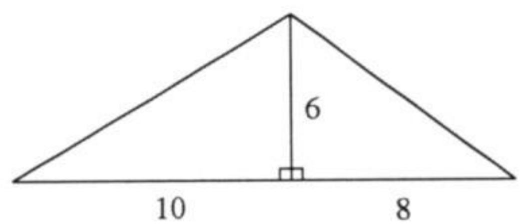
Voici d'autres dessins

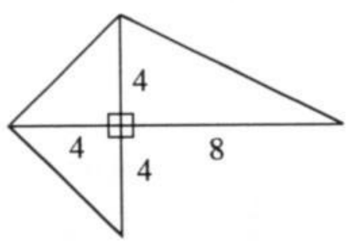
Complétez-les, si possible, pour obtenir un patron de bicoin.

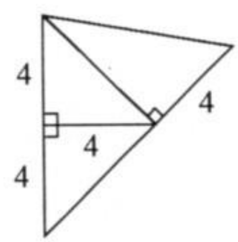












6. Vocabulaire et premiers calculs

▶ Du vocabulaire

Dans le bicoin ci-contre, il y a **deux angles droits** de sommet A et **deux angles droits** de sommet C.

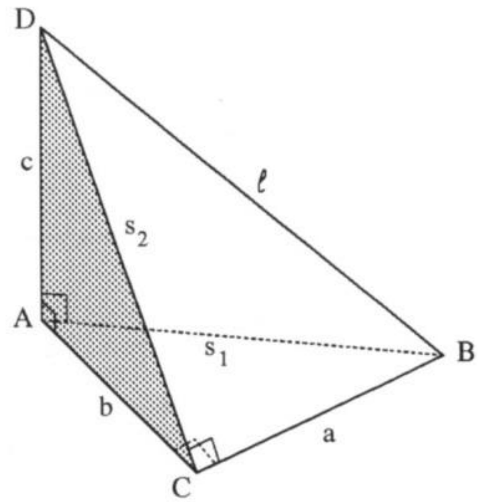
[AC] est **l'arête principale** de longueur b : elle joint les sommets des angles droits.

La droite (AC) est perpendiculaire aux deux arêtes [BC] et [AD] de longueur respective a et c.

Ce bicoin sera noté :

(a, **b**, c) ou (c, **b**, a) ;

l'arête principale de longueur b est placée entre les deux qui lui sont perpendiculaires.



On appelle **arêtes secondaires** les arêtes [AB] et [CD] de longueurs respectives s_1 et s_2 ; l'arête [BD] hypoténuse commune aux deux triangles rectangles BCD et BAD sera appelée **hypoténuse du bicoin**. On pose BD = ℓ.

▶ Et maintenant un peu de calcul

- Calculer s_1^2 , s_2^2 , b^2 et ℓ^2 en fonction de a, b, c ; démontrer que ℓ est la plus grande des arêtes.
- Trouver une relation entre s_1^2 , s_2^2 , b^2 et ℓ^2 et énoncer le résultat en français.
- Trouver une relation entre $(s_1 s_2)^2$, $(b\ell)^2$ et $(ac)^2$ et énoncer le résultat en français.
- Calculer le volume du bicoin en fonction de a, b et c.
- Calculer l'aire totale des quatre faces en fonction de a, b et c.

▶ Et si on se donnait d'autres arêtes que a, b, c ?

Compléter le tableau ci-contre en indiquant pour chaque cas les longueurs qui manquent.

	a	b	c	s_1	s_2	ℓ
(1)	3	4	2			
(2)	5	6	7			
(3)		5		6	7	
(4)	6				5	7
(5)				5	6	7

Si on connaît trois quelconques des six arêtes a, b, c, s_1, s_2, ℓ peut-on calculer les trois autres ?

Voici dans le tableau suivant, quelques situations : les cases marquées d'un point indiquent que l'on connaît la longueur de l'arête correspondante.

	a	b	c	s_1	s_2	ℓ
(Pb 1)	●	●			●	
(Pb 2)			●	●	●	
(Pb 3)	●	●		●		
(Pb 4)						

(Pb 1) • Pouvez-vous calculer les arêtes c, s_1 et ℓ ?

(Pb 2) • Pouvez-vous calculer a, b et ℓ ?

(Pb 3) • Qu'y a-t-il de bizarre ? Il y a un deuxième problème du même type lequel ?

(Pb 4) • Choisissez vous-même trois arêtes …

Vous verrez plus tard qu'il y a 20 choix possibles de 3 arêtes parmi 6.

Essayez de les trouver toutes en vous aidant d'un tableau analogue à celui qui vient d'être ébauché.

Choisissez quelques cas et demandez-vous pour chacun d'eux si vous pouvez calculer les arêtes manquantes .

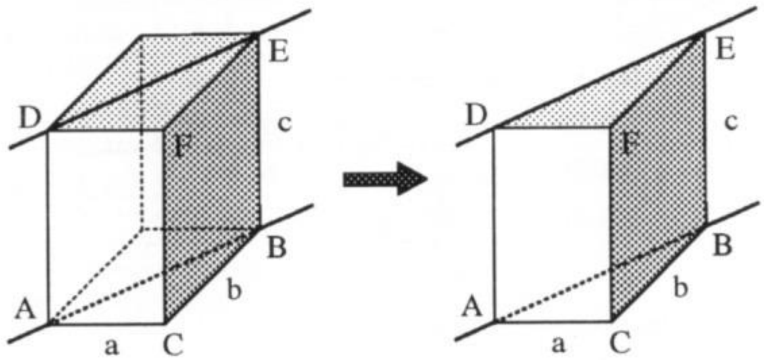
a	b	c	s_1	s_2	ℓ
●	●	●			
●	●		●		
●	●			●	
●	●				●
●		●	●		

▶ Des bicoins particuliers

- Calculer les autres arêtes du bicoin "équilatéral" (a **a** a) et pour les autres bicoins particuliers (a **b** a) et (a **a** b).
- Avec les longueurs 3, 4, 5 au départ, vous pouvez fabriquer des bicoins (3, 4, 5), (4, 5, 3) et (5, 3, 4) : comparez les dimensions de ces trois solides.

7. Des bicoins sur le pavé

Chacun sait que le parallélépipède rectangle s'appelle aussi **pavé** droit. Dans toute la suite, nous dirons "pavé" pour aller plus vite.



Prenons un pavé, de dimension a, b, c et découpons-le, par le plan (ABED) en deux demi pavés comme l'indique la figure. Le demi pavé ABCDEF va être découpé en bicoins !

◆ Combien de bicoins ?

Le demi-pavé comporte six sommets et le bicoin quatre. Si on enlève deux des six sommets de (ABCDEF) il en reste quatre : mais ces quatre sont-ils les sommets d'un bicoin ?

	Laissés	Reste
(1)	A, C	B, D, E, F
(2)	A, B	C, D, E, F
(3)	A, D	
(4)		

• Par exemple, négligeons les sommets A et C. Il reste B, D, E, F. Ce sont les sommets d'un bicoin, expliquez pourquoi, en indiquant les quatre faces qui sont des triangles rectangles, en précisant l'arête principale et celles qui lui sont perpendiculaires ainsi que l'hypoténuse et le type de ce bicoin.

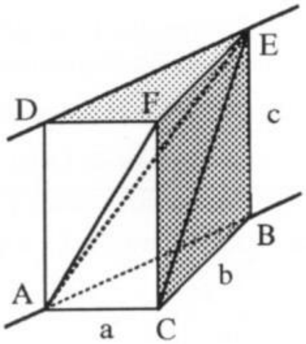
• En revanche, en laissant les sommets A et B, ceux qui restent ne sont pas les sommets d'un bicoin ; expliquez pourquoi !

• Vous allez maintenant dresser la liste des 15 choix possibles, éliminer ceux qui ne donnent pas un bicoin … Rassemblez vos résultats dans un tableau.

Parmi les bicoins obtenus, dire quels sont ceux de type (a, b, c) ceux du type (b, c, a) et ceux du type (c, a, b).

En définitive, vous obtiendrez six bicoins seulement. Quels sont ceux d'hypoténuse (AE) ? ceux d'hypoténuse (BD) ?

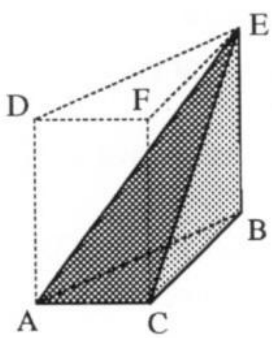
◆ Les deux "décompositions"

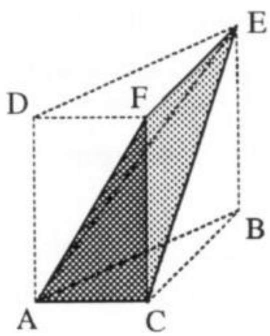


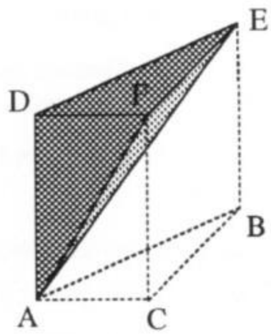
Le demi-pavé peut ainsi subir une première décomposition en trois bicoins de même hypoténuse (AE).

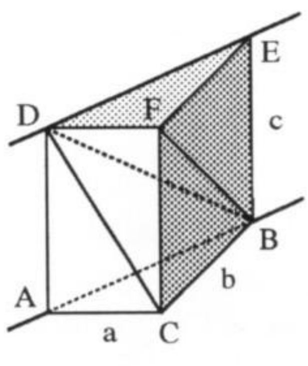
Ils peuvent être obtenus en coupant le demi-pavé par deux plans. Nommez ces plans.

• Indiquez le type de chaque bicoin et les dimensions des quatre faces : par exemple le bicoin (ABCE) est de type (a, b, c) ; ses faces ont pour dimensions a, b, $\sqrt{a^2 + b^2}$, c, $\sqrt{b^2 + c^2}$, etc.









On peut envisager une seconde décomposition en trois bicoins, dont l'hypoténuse commune est [BD].

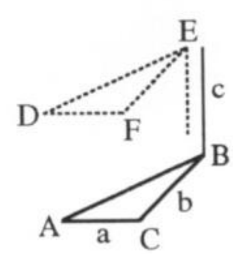
Faites le même travail que ci-dessus.

◆ Encore "l'effet de miroir"

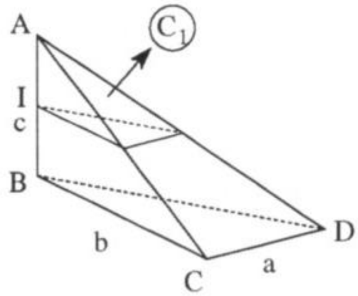
La première décomposition vous a conduit à un bicoin (a, b, c) : c'est le bicoin, ACBE.

La seconde vous a donné le bicoin, DFEB qui est aussi du type (a, b, c) … mais ces bicoins, de même "type", ne se superposent pas ! Ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan mediateur de l'arête [EB] …

Encore un effet de miroir !



8. Huit en un ... et le pavé en 48 morceaux



Pour le bicoin ABCD, on pose :
$CD = a$, $CB = b$, $BA = c$.
Coupons le bicoin par le plan médiateur de [AB].

On obtient deux parties dont l'une C_1 est un tétraèdre.

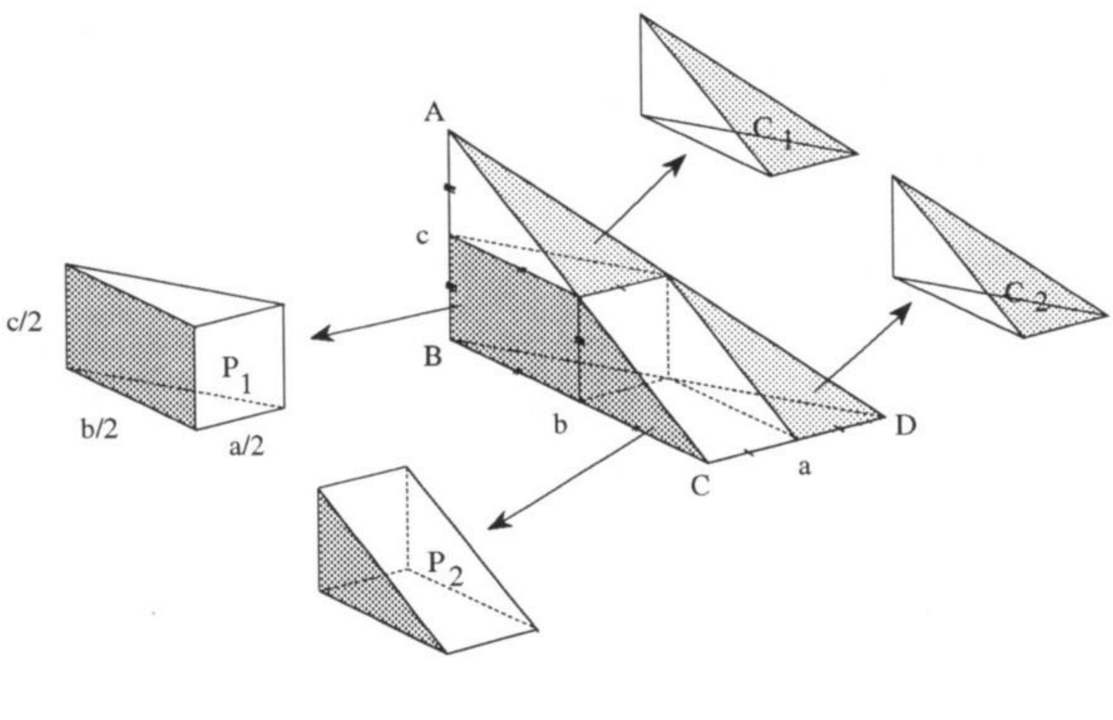
- Montrer que le tétraèdre C_1 est un bicoin.
- Calculer les arêtes de ce bicoin C_1 en fonction de a, b et c.
- Montrer que le bicoin C_1 est une **réduction** du bicoin (ABCD).
  Quel est le *rapport* de cette réduction ?
- Comparer le volume de C_1 au volume de (ABCD).

◆ Reprendre ces questions en coupant le bicoin initial par le plan médiateur de [CD].

◆ Couper ABCD par le plan médiateur de l'arête principale [BC] : démontrer que l'aire du polygone de la section est $\frac{1}{4}$ ac.

◆ En utilisant ces trois découpes par ces trois plans médiateurs, on a découpé (ABCD) en quatre morceaux.

– les bicoins C_1 et C_2
– les deux demi-pavés P_1 et P_2.

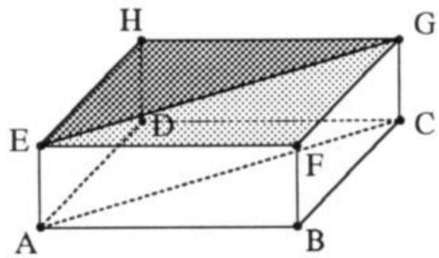


◆ Exprimer le volume de chaque morceau en fonction du volume V du bicoin ABCD de départ.

Chaque demi-pavé P_1 et P_2 peut être découpé en trois bicoins : expliquer comment et montrer que ces bicoins ont même volume que C_1 et C_2.

Alors en définitive, combien de bicoins, à partir du bicoin initial ?

◆ Prenons un parallélépipède rectangle, c'est-à-dire un pavé droit de dimensions $10 \times 12 \times 14$ en centimètres.



On peut se livrer sur ce pavé, aux découpages successifs suivants :

Le pavé $10 \times 12 \times 14$

- un demi-pavé ABCEFG $\to$ **3 bicoins**
  - • (10 ; 12 ; 14) $\to$ **8 bicoins**
  - • (12 ; 14 ; 10) $\to$ ...
  - • (14 ; 10 ; 12) $\to$ ...
- un demi-pavé ADCEHG $\to$ **3 bicoins**
  - • ... $\to$ ...
  - • ... $\to$ ...
  - • ... $\to$ ...

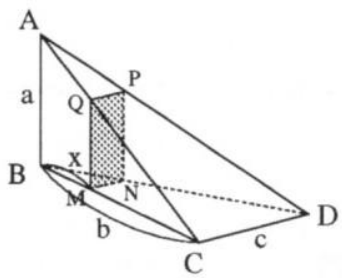
$$6 \times 8 = 48.$$

Le pavé est découpé en 48 bicoins !

Quelles sont leurs dimensions ?

Combien y en a-t-il de chaque type ?

9. Des longueurs et des aires



Le bicoin ABCD est un bicoin (a, b, c) avec

$$AB = a\ ,\ \ BC = b\ ,\ \ CD = c.$$

M est un point de l'arête principale [BC].

On pose $BM = x$.

On coupe le solide par le plan perpendiculaire en M à l'arête principale : on obtient le quadrilatère MNPQ.

L'objectif de cette fiche est de démontrer quelques propriétés et d'effectuer des calculs.

1- ► Démontrer que MNPQ est un rectangle.

On montrera que (CD) est parallèle à (MN) et à (QP), puis que (AB) est parallèle à (MQ) et à (PN).

2- ► $MN = QP = \dfrac{cx}{b}$

Le théorème de Thalès est suffisant à condition de bien choisir les triangles … et les parallèles.

3- ► $MQ = NP = \dfrac{a(b-x)}{b} = a - \dfrac{ax}{b}$

4- ► L'aire de MNPQ est $S = \dfrac{ac}{b^2}(bx - x^2)$

Utiliser 2 et 3.

5- ► $AP = \dfrac{x}{b}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ ,\qquad AQ = \dfrac{x}{b}\sqrt{a^2+b^2}$

Ici, c'est le théorème de Pythagore qui sera utile en se souvenant de la longueur de AD.

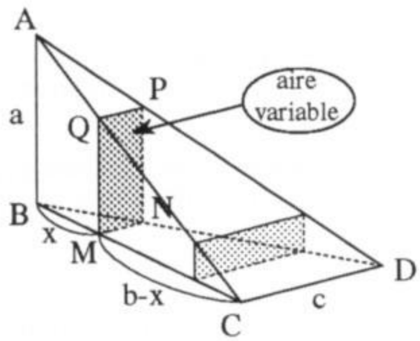
6- ► $AM = \sqrt{a^2+x^2}$

Penser au théorème de Pythagore.

7- ► $MP^2 = \dfrac{1}{b^2}\left((a^2+c^2)\,x^2 - 2ba^2x + a^2b^2\right)$

Utiliser le théorème de Pythagore dans MNP ainsi que (2) et (3).

10. Une surface qui varie



x	0	?	b
S	0 $\nearrow$	?	$\searrow$ 0

Reprenons le plan perpendiculaire en M à l'arête [BC] : on a $BM = x$.

Ce plan coupe le bicoin suivant le rectangle MNPQ d'aire

$$S(x) = \frac{ac}{b^2}\,(bx - x^2)$$

Évidemment, si M se balade sur [BC], l'aire S(x) de ce rectangle est plus ou moins grande.

Pour $x = 0$, cette aire vaut 0.

Pour $x = b$, elle vaut également 0 !

On peut se demander si, entre ces deux valeurs extrêmes, cette aire n'a pas quelque part un maximum.

C'est ce que nous nous proposons d'étudier maintenant.

Voici plusieurs méthodes :

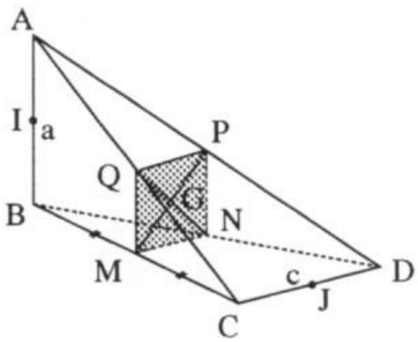
- Démontrer que $S \leq \frac{ac}{4}$ et que $S = \frac{ac}{4}$ pour $x = \frac{b}{2}$.
- Démontrer que $bx - x^2 = \frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$; en déduire que S est maximum pour $x = \frac{b}{2}$. Calculer alors S.
- Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto bx - x^2$ sur $[0 , b]$.

En résumé :

> L'aire de MNP est maximum si M est au milieu de [BC].
>
> Cette aire maximum vaut $\frac{ac}{4}$.

- Pour quelle valeur de x, ce rectangle MNPQ est-il un carré ?
- Que se passe-t-il si $a = c$?

11. À propos des "bimédianes"



Dans un tétraèdre, et en particulier dans un bicoin, une **bimédiane** est un segment joignant les milieux de deux arêtes opposées.

On a vu que le plan médiateur de [BC] coupe le bicoin suivant le rectangle MNPQ.

Soit G le centre de ce rectangle.

- Montrer que [MP] est une bimédiane du bicoin.
- Montrer que [QN] en est une autre.
- On pose $MP = s$ et $NQ = t$.

  Calculer s et t en fonction de a et c.

  Que peut-on dire de ces longueurs a et c ?
- On désigne par I le milieu de [AB] et J celui de [CD] : [IJ] est la troisième bimédiane du bicoin.

  Montrer que IPJM est un parallélogramme de centre G.

  Montrer que la troisième bimédiane passe par G.
- On pose $IJ = r$.

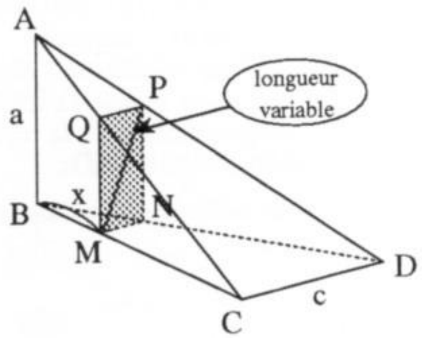
  Calculer r en fonction de a, b et c.

  Vérifier que $\boxed{r^2 - b^2 = s^2 = t^2}$
- Étudier la propriété suivante :

  Dans un tétraèdre quelconque et en particulier dans un bicoin, les trois bimédianes sont concourantes en G qui est leur milieu commun.

  C'est le **centre de gravité** du bicoin et on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

12. Une distance qui varie



Reprenons le "rectangle variable" MNPQ et sa diagonale [MP].

Vous avez calculé MP^2 en fonction de x (activité 9). On a trouvé :

$$MP^2 = \frac{1}{b^2}\left[(a^2 + c^2)\,x^2 - 2ba^2x + a^2\,b^2\right]$$

Évidemment, lorsque x varie, cette longueur varie !

- Voici une propriété :

> La longueur MP est minimum si on a :
> $$x_0 = \frac{a^2b}{a^2 + c^2}\ .$$

En seconde, on peut l'admettre. À partir de la classe de Première, on peut étudier la fonction :

$$g :\ x \mapsto (a^2 + c^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2$$

dont la dérivée s'annule pour $x_0 = \dfrac{a^2b}{a^2 + c^2}$.

- > La longueur minimum de MP est $h = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

Il vous suffit, pour le montrer, de calculer MP^2 puis MP en remplaçant x par la valeur x_0 trouvée plus haut.

- > Lorsque MP a une longueur minimum,
> alors la droite (MP) est perpendiculaire à la fois à (BC) et à (AD).

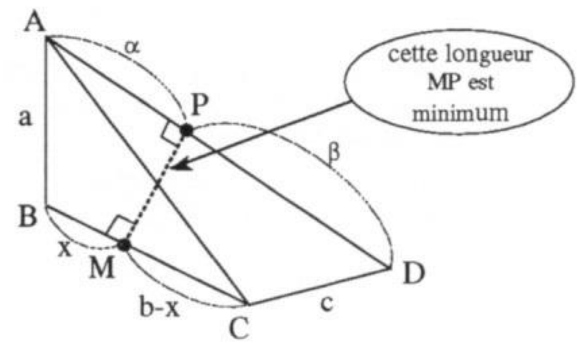
Montrer que (MP) est perpendiculaire à (BC).

Pour démontrer que (MP) est perpendiculaire à (AD), démontrez que le triangle AMP est rectangle au moyen de la réciproque du théorème de Pythagore …

- > La distance minimum h vérifie : $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

… ce qui est très simple à démontrer …

13. Des rapports égaux



Reprenons donc la situation précédente dans laquelle la longueur MP est minimum ; vous avez vu que, dans ce cas la droite (MP) est perpendiculaire à la fois à (BC) et à l'hypoténuse (AD).

(MP) est la ***bihauteur*** relative à l'hypoténuse.

- On pose : $MB = m$ $\quad$ $MC = n.$ $\quad$ On a : $m + n = b$

  $PA = \alpha$ $\quad$ $PD = \beta.$ $\quad$ On a : $\alpha + \beta = \ell$

  $MP = h$

• Démontrer que $\boxed{\dfrac{m}{n} = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2}$

On peut d'abord calculer m et n en fonction de a, b, c (voir fiche 12).

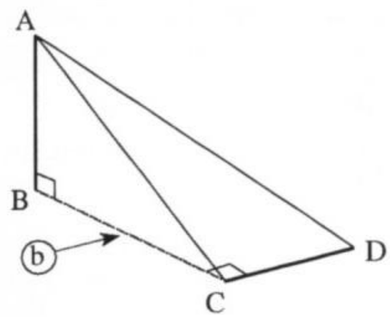
• Démontrer que $\boxed{\dfrac{\alpha}{\beta} = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2}$

Allo ! Thalès ... !

• Démontrer enfin $\boxed{h^2 = \alpha\,\beta - m\,n}$

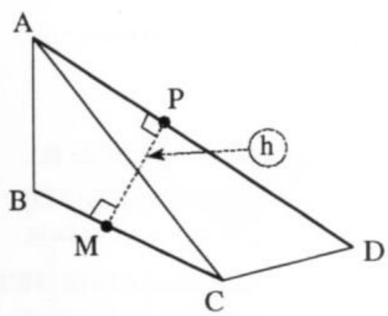
14. Les trois "bihauteurs"

Reprenons le bicoin ABCD.



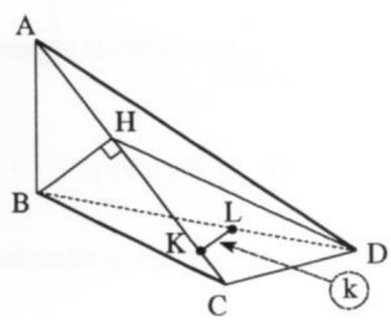
• La droite (BC) est perpendiculaire à la fois aux arêtes (AB) et (CD) : c'est une bihauteur du bicoin.

On a BC = b : c'est la distance des deux droites (AB) et (CD).



• • La droite (MP) (voir fiche 13) est perpendiculaire à la fois à (BC) et à l'hypoténuse (AD) : c'est une seconde bihauteur.

La longueur MP = h est la distance des deux droites (BC) et (AD).



• • • Mais il y a une troisième bihauteur ! Traçons, dans le triangle ABC, la perpendiculaire (BH) au côté [AC].

Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (ACD) puis démontrer que BHCD est un bicoin et que son hypoténuse est (BD).

Dans ce bicoin, soit (KL) la droite perpendiculaire à la fois à (BD) et à (HC).

Montrer que (KL) est la troisième bihauteur du bicoin ABCD.

Posons KL = k.

• Démontrer que $\boxed{\frac{1}{k^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$

Calculer d'abord $\frac{1}{k^2}$ dans le bicoin BHDC.

• Puis que $\boxed{\frac{1}{k^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{b^2}}$ ...

ce qui est une relation entre les trois bihauteurs de (ABCD).

15. Le tétraèdre de Hill

Un bicoin "*équilatéral*" (a, a, a) porte le nom de tétraèdre de Hill.

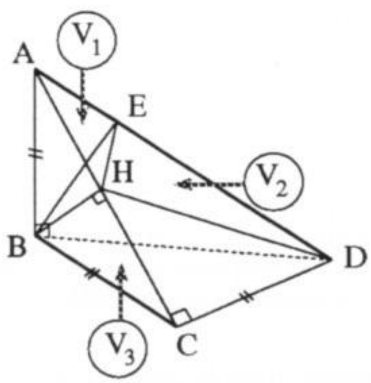
• **Calculs :** Calculer en fonction de a :

- les longueurs des autres arêtes,
- l'aire totale du tétraèdre,
- son volume,
- les bimédianes,
- les bihauteurs

Calculer les angles des faces

... et faire toutes les remarques qui s'imposent.

• **Découpe.** ABCD est tétraèdre de Hill avec AB = BC = CD = a.



Dans ABC, [AH] est la hauteur issue de B.

Dans ACD, [HE] est perpendiculaire à [AD].

– Montrer que les trois tétraèdres AEHB, HEBD et HBCD sont des bicoins dont on précisera les caractéristiques en fonction de a.

– Calculer en fonction de a les volumes respectifs V_1, V_2 et V_3 de ces bicoins.

– Vérifier que $V_2 = 2V_1$ et $V_3 = 3V_1$.

En utilisant un cube d'arête a, montrer comment on peut le décomposer en huit tétraèdres de Hill.

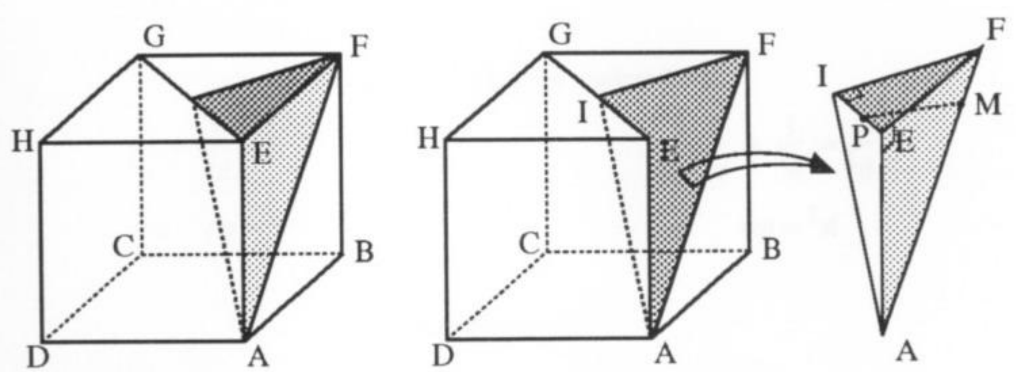
Ces bicoins sont-ils tous identiques ... ?

16. Pour finir … dans un cube

Prenons un cube et deux diagonales de faces telles que (GE) et (AF). On se demande comment est disposée la droite perpendiculaire à la fois à (GE) et à (AF) et quelle est la "plus courte distance" de ces deux droites.

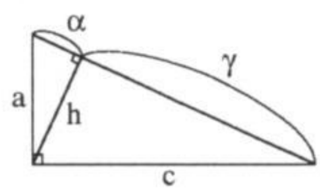
Une démarche possible est la suivante :

- S'arranger pour trouver un bicoin dans lequel (GE) et (AF) sont deux arêtes opposées …
- I étant le milieu de [GE], montrer que le tétraèdre AFEI est un bicoin qui convient à notre problème.
- Trouver l'hypoténuse, les arêtes orthogonales, calculer leur longueur en fonction de a, longueur de l'arête du cube.
- Montrer que $MP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Calculer enfin $\frac{PI}{PE}$ et $\frac{MF}{MA}$ …

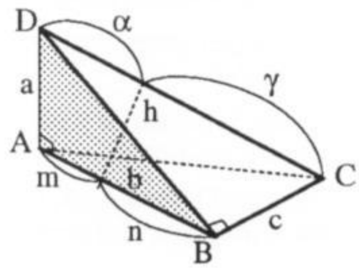


17. Le bicoin et le triangle rectangle

Récapitulons des propriétés du bicoin que nous pouvons rapprocher des propriétés du triangle rectangle.



Triangle rectangle de côtés (a, c).



Bicoin (a, **b**, c)

Le carré de l'hypoténuse ...

$\ell^2 = a^2 + c^2$

$\ell^2 = a^2 + b^2 + c^2$

La hauteur h relative à l'hypoténuse

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$h^2 = \alpha\gamma$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$h^2 = \alpha\gamma - mn$$

Rapports égaux

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

Inscription

Le triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse.

Le bicoin est inscriptible dans une demi-sphère ayant pour diamètre l'hypoténuse.

Mesures

Aire : $S = \frac{ac}{2}$

Volume : $V = \frac{abc}{6}$