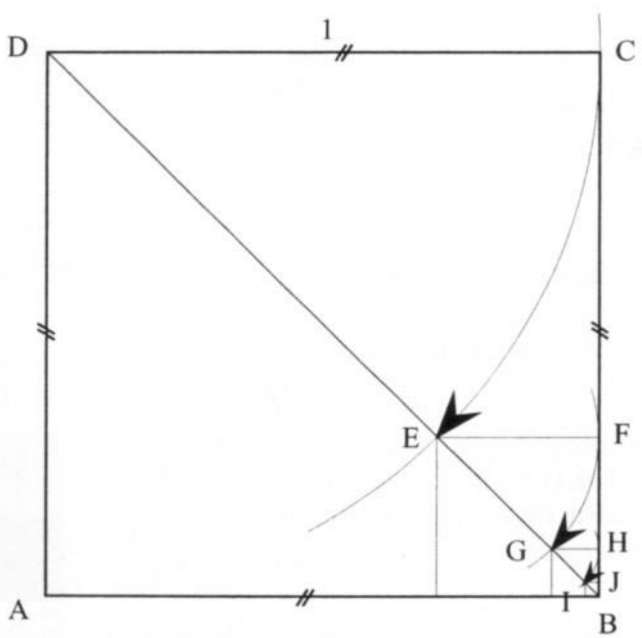
GALION THÈMES

Radical de 2

$$\sqrt{2}$$



$\sqrt{2}$ mesure la diagonale du carré de côté 1

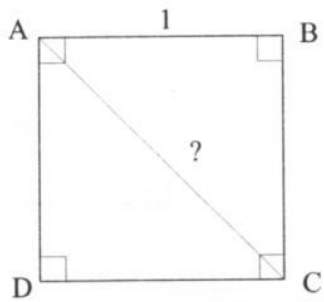
15, quai André Lassagne – 69001 LYON

ISBN : 2-912209-23-04

Un peu d'histoire :

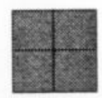
L'énigme de la diagonale du carré.

■ La duplication du carré



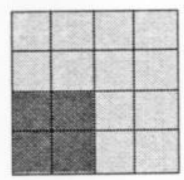
Voici un problème que se sont posés les géomètres grecs il y a plus de 2 000 ans :

"Comment construire un carré qui ait une aire double de celle d'un carré initialement donné ?"

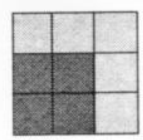


Voici un carré de côté 2. Son aire est 4.

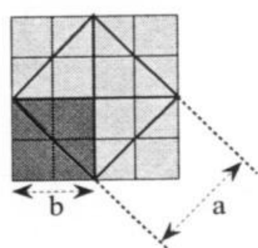
Comment construire un carré d'aire double, c'est-à-dire 8 unités d'aire ?



- Premier réflexe : "je double le côté".
  Mais alors l'aire est 16. C'est trop !



- Alors "je borde le carré avec une unité de plus, une sorte d'équerre en plus sur le côté".
  L'aire est alors 9 unités ! C'est encore trop !



On remarque que le carré de côté 4 a une aire deux fois trop grande : 16 unités ; d'où l'idée de le "couper en deux" par les diagonales. Et le carré intérieur a bien une aire égale à 8 unités, ce que l'on souhaitait.

Ainsi, si b est le côté du petit carré initial et a sa diagonale, le carré de côté a a une aire double du petit et on a :

$$a^2 = 2b^2$$

c'est-à-dire

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

Si b = 1, on a : $a^2 = 2$, ce que nous écrivons $a = \sqrt{2}$.

Mais ce nombre inconnu (irrationnel) fut un mystère pour nos géomètres grecs.

■ $\sqrt{2}$ est irrationnel

Supposons qu'il existe une fraction **irréductible** $\frac{a}{b}$ telle que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

On a alors : $a^2 = 2b^2$.

Comme cette fraction est irréductible, il n'y a que trois cas possibles car a et b ne peuvent pas être tous les deux pairs :

1- a impair et b impair

2- a impair et b pair

3- a pair et b impair.

Étudions le premier cas :

Si a et b sont impairs tous les deux, leurs carrés a^2 et b^2 sont impairs tous les deux.. Mais comme $a^2 = 2b^2$, cela montre que a^2 est pair, ce qui n'est pas possible !

Étudiez les autres cas et montrez que ce n'est pas possible !

Ce qui veut dire que l'existence d'une fraction irréductible égale à $\sqrt{2}$ est impossible. Ce nombre est ce que l'on appelle irrationnel.

Chez les Babyloniens :

Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, les Babyloniens consultaient une table des carrés : ils obtenaient ainsi un encadrement de la racine entre deux valeurs (approximation par essais successifs).

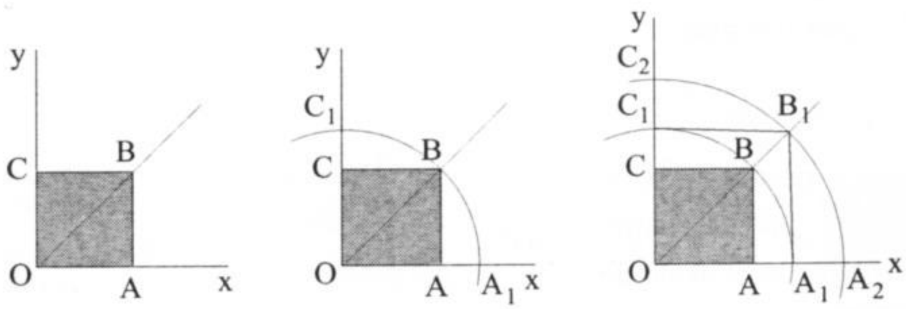
Dans leurs calculs les Babyloniens adoptaient la valeur $1+\frac{25}{60}$, dans le système sexagésimal, pour radical de 2 ; ils la notaient (1 ; 25). Ils connaissaient la valeur plus précise : $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$, notée (1 ; 24 ; 51 ; 10).

Donner une valeur approchée de chacun de ces deux nombres dans le système décimal.

1 Des calculs de longueurs

➡ Dessin

Sur une feuille assez grande, tracer d'abord un angle droit $\widehat{xOy}$ et sa bissectrice ; puis un premier carré OABC avec A sur [Ox) et C sur [Oy). Le cercle de centre O passant par B coupe les côtés de l'angle droit en A_1 et C_1.



Compléter le carré $OA_1B_1C_1$.

Le cercle de centre O passant par B_1 coupe les côtés de l'angle droit en A_2 et C_2 : compléter le carré $OA_2B_2C_2$.

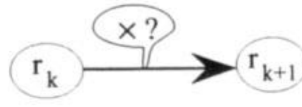
Tracer de la même façon le troisième cercle (O, OB_2), qui coupe en A_3 et C_3 les côtés de $\widehat{xOy}$ et placer B_3 quatrième côté du carré $OA_3B_3C_3$ … et continuer jusqu'au huitième carré …

➡ Des calculs

On suppose que le premier carré OABC a un côté de longueur 1. Calculer :

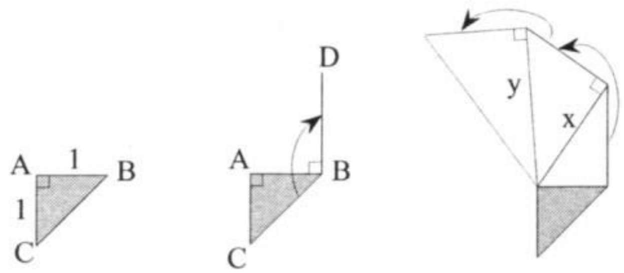
- les rayons des huit cercles successifs Γ_1, Γ_2, Γ_3 …
- les côtés des huit carrés C_1, C_2, C_3 …
- les aires des huit carrés S_1, S_2, S_3 …
- les longueurs des huit quarts de cercles de centre O, L_1, L_2, L_3 …

• Trouver les multiplicateurs pour passer de r_k à r_{k+1}, de C_k à C_{k+1}, de S_k à S_{k+1}, de L_k à L_{k+1}, …



2

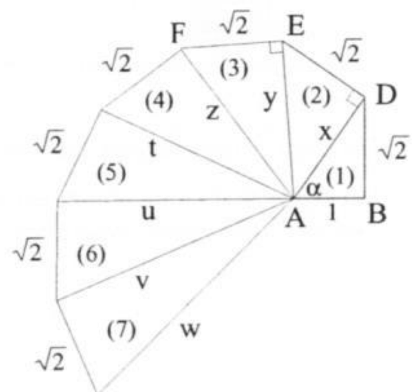
Escargot avec $\sqrt{2}$



Tracer d'abord le triangle ABC rectangle isocèle avec AB = AC = 1. Calculer BC. Sur la perpendiculaire en B à (AB) porter BD = BC. On obtient le triangle rectangle ABD.

On pose AD = x. Puis on reporte DB sur la perpendiculaire en D à (AD). On obtient le triangle rectangle ADE et on pose AE = y.

Et ainsi de suite, on construit les longueurs z, t, u, v, w, …

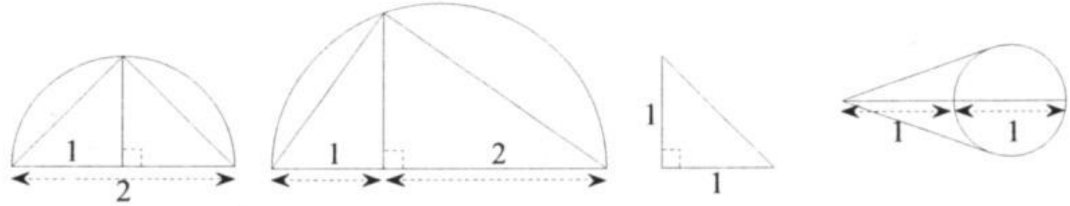


Calculer ces longueurs (valeurs exactes), les aires des triangles (1), (2), (3) … les tangentes des angles α_1, α_2, α_3, … ($\alpha_1 = \widehat{BAD}$; $\alpha_2 = \widehat{DAE}$; $\alpha_3 = \widehat{EAF}$; etc.).

Étape	1	2	3	4	5	6	7	8
Longueur	x	y	z	t	u	v	w	
Aire des triangles	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
Tangente des angles α								
Valeur approchée de α en degrés								

3 Construire à la règle et au compas

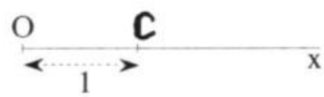
✦ Trouver des segments de longueur $\sqrt{2}$ sur chacune des configurations suivantes :



✦ Pour les géomètres grecs (Thalès, Euclide et quelques autres ...) la droite et le cercle étaient des lignes privilégiées fondamentales pour faire de la géométrie. Pour eux, il était capital de "construire" des figures en n'utilisant que la règle (non graduée) et le compas.

Pour ces géomètres, les nombres étaient représentés par des longueurs de segments.

Un segment de longueur 1, est tracé sur votre feuille : cette longueur "unité" étant fixée une fois pour toutes, vous allez "construire" avec *seulement une règle non graduée et un compas*.



• Sur l'axe [Ox) , on a placé le point C d'abscisse 1.

a) Construire le point A d'abscisse $\sqrt{2}$.

b) Construire le point B d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c) Construire D d'abscisse $\sqrt{2}+1$, puis E d'abscisse $\sqrt{2}-1$?

d) Construire F d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

• Construire un carré de côté $\sqrt{2}$.

Construire un hexagone régulier de côtés mesurant $\sqrt{2}$.

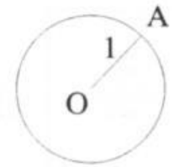
Construire un rectangle d'aire égale à $2\sqrt{2}$.

Construire un triangle quelconque d'aire égale à $\sqrt{2}$.

- On a tracé un cercle de centre O, de rayon OA = 1 : son aire est S.

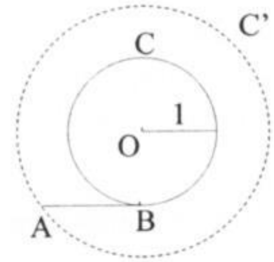
  Construire un cercle concentrique d'aire égale à 2S.

  Construire un cercle concentrique d'aire égale à $\frac{S}{2}$.



- Tracer le cercle C de centre O, de rayon 1.

  Tracer un cercle concentrique C' tel que si d'un point A de C', on trace la tangente (AB) à C, on ait AB = 1.

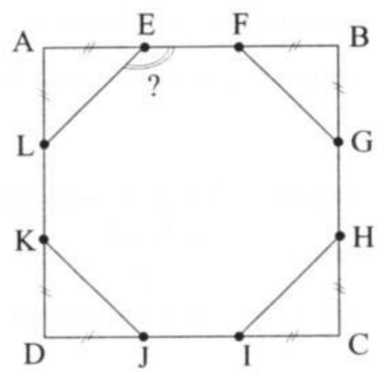


- Même question avec $AB = \sqrt{2}$.

✦ ABCD est un carré (AB = 1).

EFGHIJKL est un octogone. On a marqué des segments égaux sur la figure.

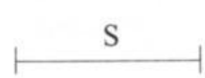
- Montrer que tous les angles de l'octogone sont égaux.
- Si AE = EF = FB, les côtés de cet octogone ne sont pas égaux : pourquoi ?
- On veut que cet octogone ait tous les côtés égaux : quelle est la mesure de AE ?



Construire à la règle et au compas le point E sur [AB], puis F, puis les autres sommets de l'octogone.

Quelle est la mesure de son côté ?

✦ Tracer un segment S quelconque.



Construire à la règle et au compas un carré tel que :

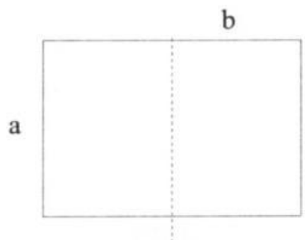
S = (diagonale du carré) – (côté du carré).

4 Des formats chez l'imprimeur

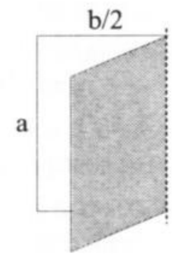
En imprimerie, les formats de papier sont normalisés : on parle de "format $21 \times 29{,}7$" ou de format A_4, ou A_3, etc. Par exemple, tout lycéen travaille en général sur des feuilles $21 \times 29{,}7$ … perforées ou non.
Au fait, d'où vient ce $21 \times 29{,}7$ … ?
C'est ce que nous allons examiner dans cette activité.

1– Un rectangle coupé en deux

Examinons un rectangle de côtés a et b avec $a < b$; mais $a > \frac{b}{2}$.



On le plie suivant une ligne confondue avec la médiatrice des grands côtés : on obtient deux rectangles superposables équivalents, de même aire, de dimensions $\frac{b}{2}$ et a, avec cette fois, a comme grand côté.



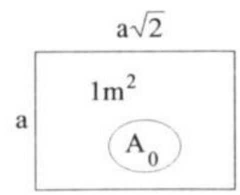
- Comment choisir le rectangle de départ afin que le rapport $\frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}}$ soit conservé après pliage, c'est-à-dire soit le même pour les deux rectangles ?

- Vous avez démontré que $\frac{b}{a} = \frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}} = \sqrt{2}$.

Ainsi, pour un rectangle (a ; $a\sqrt{2}$), s'il est coupé en deux comme il est indiqué ci-dessus, le rapport $\sqrt{2}$ des côtés reste le même après découpage, et c'est encore vrai après deux, trois, quatre … découpes.

2– Rectangle d'aire un mètre carré

Considérons un tel rectangle (avec $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$) d'aire 1 m^2, soit 10 000 cm^2.



Quelles sont ses dimensions ?

$a \times a\ \sqrt{2} = 1$ (en m^2) ou encore $a^2\ \sqrt{2} = 10\ 000$ (en cm^2).
On trouve $a = 84{,}1$ cm environ.

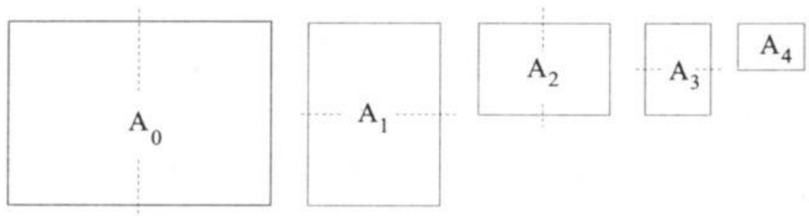
Quant au grand côté, on obtient 118,9 cm environ.

Le rectangle de côtés 1189 mm et 841 mm, d'aire 1 m^2 représente ce que l'on nomme "format A_0" en imprimerie : c'est une dénomination internationale normalisée.

2– Et divisons encore par deux …

Partant de ce format A_0, on peut alors diviser chaque rectangle en deux parties égales suivant la médiatrice des grands côtés : chaque nouveau rectangle obtenu respecte le rapport

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}} = \sqrt{2} \ .$$



A_0	première découpe	$\rightarrow$	format A_1
A_1	deuxième découpe	$\rightarrow$	format A_2
A_2	troisième découpe	$\rightarrow$	format A_3
A_3	quatrième découpe	$\rightarrow$	format A_4
A_4	cinquième découpe	$\rightarrow$	format A_5
A_5	sixième découpe	$\rightarrow$	format A_6

et ainsi de suite jusqu'à A_{10}.

À vos calculatrices, pour calculer en millimètres les côtés successifs : à chaque découpe, le petit côté du format A_n devient le grand côté de A_{n+1}, et le petit côté de A_{n+1} est égal à la moitié du grand côté de A_n.

Complétez le tableau suivant :

Format	Grand côté (en mm)	petit côté (en mm)	Aire (en mm^2)
A_0	1189	841	$999949 \approx 1000000$
A_1			
A_2			
A_3			
A_4			
A_5			
A_6			
etc.			

Comment passe-t-on du grand côté G_n au suivant G_{n+1} ? et du petit côté P_n au suivant P_{n+1} ? et de l'aire A_n à la suivante A_{n+1} ?

5

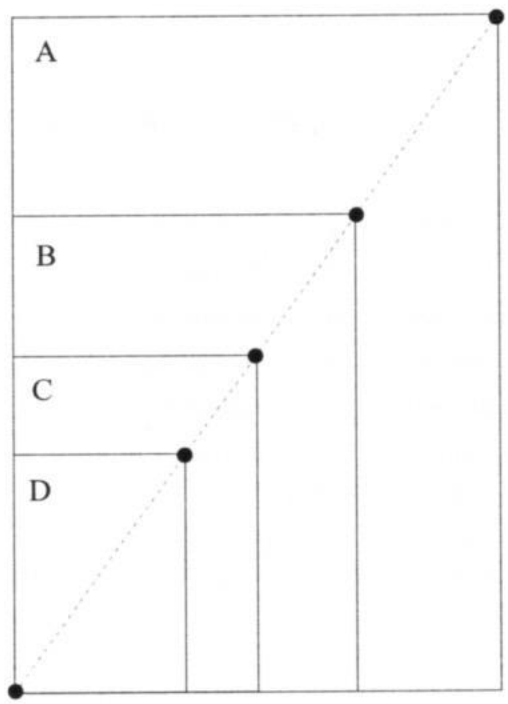
Découpage à partir de deux feuilles $21 \times 29{,}7$

✦ Se munir de deux feuilles $21 \times 29{,}7$ (appelons-les A) ; garder l'une d'elles.

1- Plier la seconde feuille $21 \times 29{,}7$ en deux, parallèlement à la largeur et découper cette feuille selon le pli : on obtient deux feuilles B.

2- Avec l'une des feuilles B, recommencer l'opération 1- afin d'obtenir deux feuilles C ; recommencer avec C pour obtenir deux feuilles D ; etc.

3- Placer A, B, C et D en les "tassant dans un coin" comme l'indique la figure.



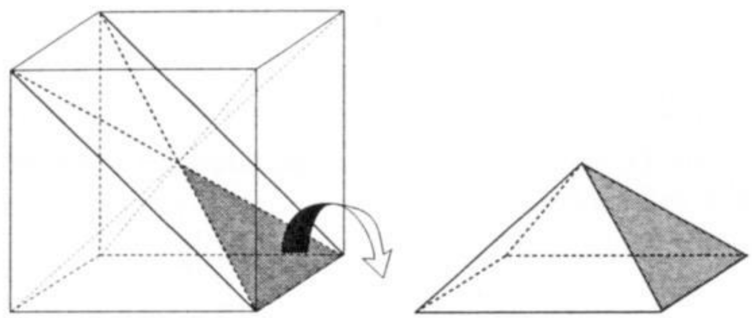
4- Que remarquez-vous ?

✦ Se munir de deux feuilles rectangulaires de 21 cm par 27 cm (c'est l'ancienne norme pour le papier à lettre commercial).

Recommencer la même manipulation. Que remarquez-vous ?

✦ Pourquoi peut-on dire que, pour le format "normalisé" (feuille $21 \times 29{,}7$), toute feuille est semblable à sa moitié ?

6 Dans un cube



Dans un cube d'arête 1, les diagonales de chaque face mesurent donc $\sqrt{2}$.

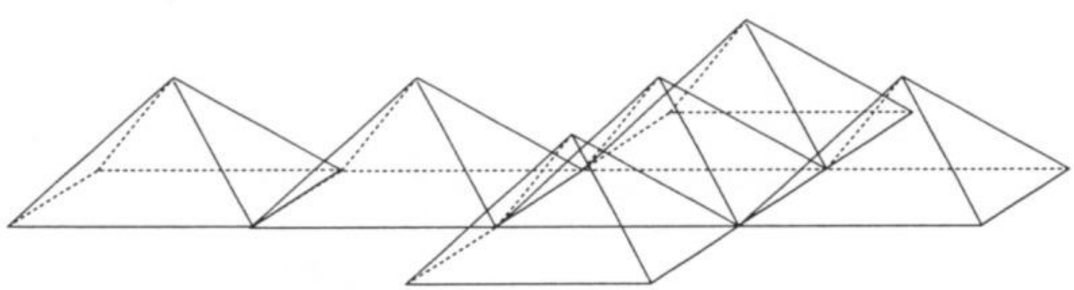
Combien mesure la diagonale du cube ?

Le plan diagonal marqué en gras sur la figure est donc un rectangle $(1\ ;\ \sqrt{2})$ et toute feuille normalisée A4 ou A5 pourrait en matérialiser un.

Le cube est donc formé de six pyramides à base carrée (de côté 1) et dont les faces latérales sont des triangles isocèles.

Quelles sont les mesures des côtés ?

- Avec deux feuilles A5 en bristol, découper quatre triangles isocèles de base 1 ; les assembler pour former une pyramide (sans fond).
- Assembler six pyramides identiques obtenues à partir de douze feuilles A5. Relever les "faces pyramidales" pour former un cube comme sur la figure ci-dessous.
- Observer les propriétés de symétrie de ce solide bien particulier !



7 Des carrés emboîtés

✦ Dessin

Dessiner un grand carré ABCD.

Le cercle de centre D, de rayon DC, coupe la diagonale (DB) en E : on projette orthogonalement E en F sur (CB).

Le cercle de centre E, de rayon EF, coupe la diagonale (DB) en G, qui se projette en H sur (CB).

Et le cercle (G, GH) coupe la diagonale en I qui se projette en J sur (CB), …

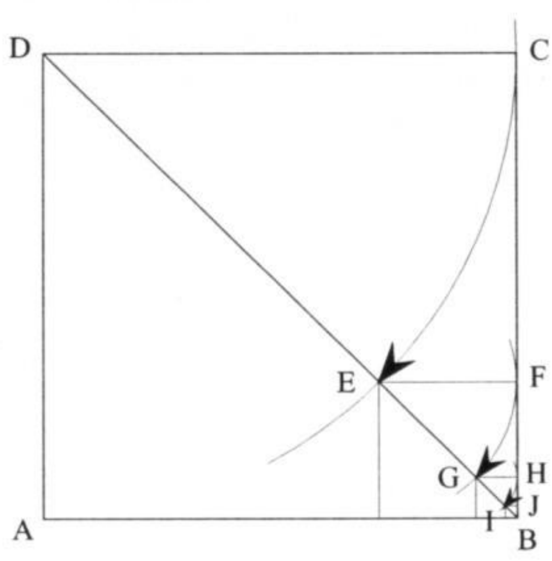
On obtient les carrés "emboîtés" ABCD de côté DC, le carré de côté EF, celui de côté GH, celui de côté IJ …

✦ Calculs

On pose DC = 1.

Calculer les valeurs exactes de EB, EF, $\frac{DC}{EF}$; GB, GH, $\frac{EF}{GH}$; IB, IJ, $\frac{GH}{IJ}$; …

Calculer le rapport : $\dfrac{\text{aire du carré de côté [DC]}}{\text{aire du carré de côté [EF]}}$.



8 Descente infinie chez Euclide

✦ Dessin

Reproduire la figure ci-dessous assez grande. ABCD est un carré ; on pose AB = 1.

Le cercle (D ; DC) coupe la diagonale [DB] en E.

La tangente en E à ce cercle coupe (CB) en F.

Le cercle (F ; FE) coupe [CB] en C_1.

On construit le carré $C_1D_1B_1B$.

Le cercle (D_1 ; D_1C_1) coupe [D_1B] en E_1.

La tangente en E_1 à ce cercle coupe [CB] en F_1.

Le cercle (F_1 ; F_1E_1) coupe [CB] en C_2. etc.

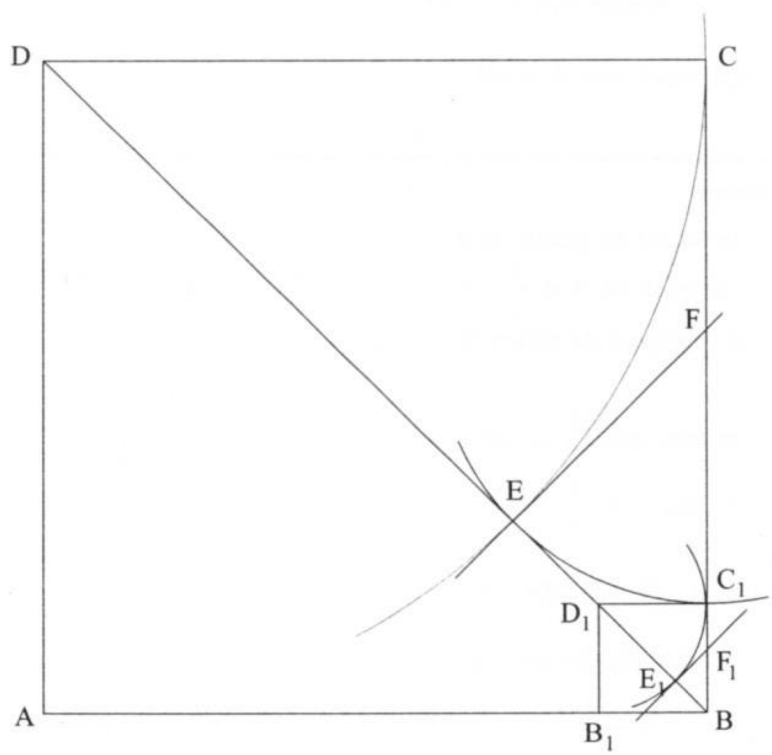
✦ Calculs

Calculer DE et EB.

Pourquoi a-t-on EB = EF ?

Pourquoi a-t-on EF = FC ?

Calculer FB, FC_1, C_1B, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1 …



9 Depuis Héron d'Alexandrie

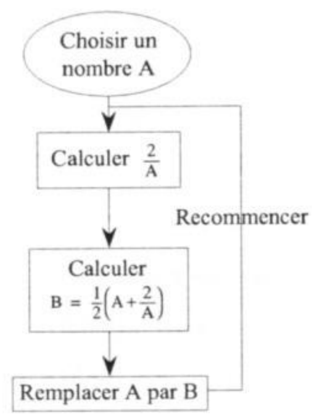
• Ces calculs sont à effectuer à la calculatrice. On choisit un nombre positif A : on calcule $\frac{2}{A}$. On fait la somme $A+\frac{2}{A}$ et on la divise par 2. On trouve $B=\frac{1}{2}\left(A+\frac{2}{A}\right)$.

Choix de A	Calcul de $\frac{2}{A}$	$B=\frac{1}{2}\left(A+\frac{2}{A}\right)$
4	$\frac{1}{2}$	2,25
2,25	…	…
…	…	…
…		

Par exemple avec $A = 5$, on trouve $B = 2,7$.

On remplace A par B et on recommence :

$\frac{1}{2}\left(2,7+\frac{2}{2,7}\right)$, et on recommence en remplaçant A par ce dernier nombre trouvé … et ainsi de suite, une dizaine de fois. Remplir le tableau.
Vous observerez sûrement un truc surprenant.



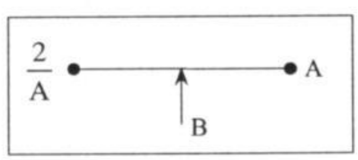
• Recommencez avec, au départ, un autre nombre A, faites un autre tableau … Curieux …

• Commencez maintenant avec $A = 1,41$.

• Et si on commençait avec $A = \sqrt{2}$.

Un peu de théorie

Si on place sur un axe les points M et N d'abscisses respectives A et $\frac{2}{A}$, le nombre B est l'abscisse du milieu de [MN].



$$A>\sqrt{2} \longrightarrow \frac{1}{A}<\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{2}{A}<\sqrt{2}$$

Si $A>\sqrt{2}$, montrez que $\frac{2}{A}<\sqrt{2}$.

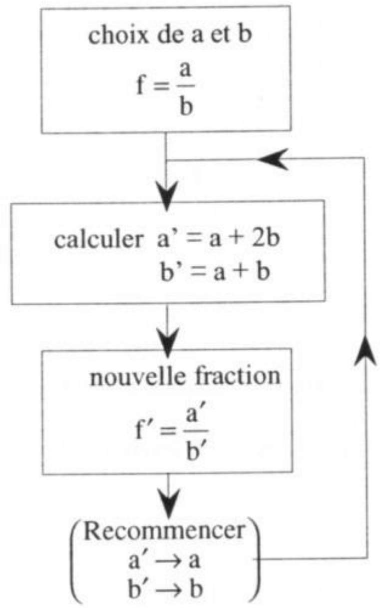
Si $A<\sqrt{2}$, montrez que $\frac{2}{A}>\sqrt{2}$.

Dans tous les cas, $\sqrt{2}$ est “entre” A et $\frac{2}{A}$.

L'écart entre $\sqrt{2}$ et B est plus petit que l'écart entre A et $\sqrt{2}$.

10 On se rapproche de $\sqrt{2}$

Les instructions ci-contre disent tout …



- Après avoir fait choix de deux entiers a et b, écrire la fraction $f = \frac{a}{b}$ et en calculer une valeur décimale exacte ou approchée.
- Recommencer en remplaçant
  a par a + 2b
  b par a + b
  ce que l'on note :
  $(a + 2b) \rightarrow a$
  $(a + b) \rightarrow b$

  On a une nouvelle fraction $\frac{a}{b}$ et ainsi de suite.

  Par exemple, avec a = 2 et b = 3

  $\frac{a}{b} = 0{,}666$ (étape 1)

  À l'étape 2, on prend :

  $a = 2 + 6 = 8$ $b = 2 + 3 = 5$ et $\frac{a}{b} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

et ainsi de suite.

	a	b	$\frac{a}{b}$
(1)	2	3	0,666 …
(2)	8	5	1,6
(3)	18	13	…
(4)			

Continuer jusqu'à la 10ème étape : reproduire le tableau et le compléter.

- Quel est le lien avec $\sqrt{2}$?
- Recommencer avec d'autres valeurs de a et de b au départ.
- Recommencer avec la règle $(3a + 4b) \rightarrow a$ et $(2a + 3b) \rightarrow b$.
- Recommencer avec la règle $(12a + 50b) \rightarrow a$ et $(25a + 12b) \rightarrow b$.

On sait que $\sqrt{2}$ est *irrationnel*. Il n'est pas égal à une fraction $\frac{x}{y}$ …
Cependant, on peut trouver une infinité de fractions qui prennent des valeurs de plus en plus proches de $\sqrt{2}$.

11 D'autres fractions pour $\sqrt{2}$

Voici des fractions de plus en plus compliquées, la lettre a désignant un nombre positif quelconque.

$F_1 = 1 + \dfrac{1}{1+a}$	$F_2 = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1+a}}$	$F_3 = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1+a}}}$	$F_4 = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1+a}}}}$

La règle de formation est la suivante :

Pour passer d'une fraction à la suivante, on remplace a par F_1, c'est-à-dire par $1 + \dfrac{1}{1+a}$.

$$\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) \to a \ .$$

- Écrire la fraction F_5.
- Prendre $\boxed{a = 2}$. Simplifier toutes ces fractions.

  Pour chacune d'elles, donner une valeur décimale approchée avec six décimales et comparer à $\sqrt{2}$ …
- Prendre $\boxed{a = 3}$, et recommencer …
- Prendre cette fois a quelconque, simplifier ces cinq fractions et les écrire en fonction de a. Résoudre chacune des équations d'inconnue a :

$$F_1 = a \ ; \ F_2 = a \ ; \ F_3 = a \ ; \ F_4 = a \ ; \ F_5 = a \ .$$

C'est curieux !

Comment sont fabriquées ces fractions ?

$$x^2 = 2 \quad \text{s'écrit} \quad x^2 - 1 = 1$$

soit $$(x-1)(x+1) = 1 \quad \text{d'où} \quad x - 1 = \frac{1}{1+x}$$

donc $$x = 1 + \frac{1}{1 + \boxed{x}} \ .$$

En remplaçant $\boxed{x}$ par tout le deuxième membre, qui lui est égal, retrouver F_2, puis F_3, et ainsi de suite …