Galion Thèmes

Brins d'Histoire des MATHS

1. Écriture des nombres

Tablette économique (2364-2359 av. J.-C.). (cliché des Musées Nationaux - Paris)

15, quai André Lassagne – 69001 LYON

ISBN : 2-912209-24-08

Introduction

Un système de numération est un procédé d'écriture automatique des nombres entiers en utilisant un nombre limité de **signes** (les ***chiffres***).

- L'écriture utilisée de nos jours est l'écriture décimale ou écriture à base **DIX**. Elle utilise dix caractères : les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. C'est une **numération de position**, ce qui veut dire que la valeur d'un chiffre dans un nombre dépend du rang occupé par ce chiffre dans ce nombre.

  Par exemple, dans le nombre 7202, le chiffre 2 qui est à droite indique deux unités simples, alors que l'autre chiffre 2 indique deux centaines.

$$7202 = \underbrace{7 \times 10^3}_{\textit{millier}} + \underbrace{2 \times 10^2}_{\textit{centaine}} + \underbrace{0 \times 10}_{\textit{dizaine}} + \underbrace{2}_{\textit{unité}}$$

  Remarquez l'importance du zéro qui indique l'absence d'unités du rang occupé par ce zéro.

- Au cours des âges on a aussi rencontré des **numérations de type purement additif** : les chiffres sont entièrement libres les uns par rapport aux autres, ils s'additionnent pour former le nombre et leur position n'importe pas. Un exemple typique de numération purement additive est la numération hiéroglyphique égyptienne.

- Entre ces deux types on trouve toute une gamme de numérations, plus ou moins hybrides, mélange de la numération additive et de la numération de position.

Sur les exemples rencontrées, nous donnons simplement quelques indications sommaires : il est évident que, au cours des siècles, ces écritures ont évolué, certaines ont disparu.

Sommaire

Pour en savoir plus ...

Bibliographie sommaire et sûrement incomplète. Quelques ouvrages dont nous nous sommes souvent inspirés.

Histoire des mathématiques (2 tomes). J.P. Colette - Vuibert.
Histoire universelle des chifres. G. Ifrah - Seghers.
Routes et dédales. A. Dahan - Seuil Sciences.
Mathématiques et mathématiciens. Dedron Itard - Magnard.
L'Homme et son nombre. Michèle Roux - CRDP de Besançon.
Le Monde des chiffres. A. et J.-C. Deledicq - Circonflexe.
Mathématiques égyptiennes. S. Couchoud - Léopard d'Or.
Faire des Maths à partir de leur Histoire (2 tomes). IREM de Rennes.
Histoire des maths pour les collèges. IREM Paris VII - Cedic-Nathan.

1 Les nombres à Babylone

La civilisation babylonienne (ou sumérienne) est l'une des plus anciennes que l'on connaisse : on estime qu'elle a duré depuis 4000 ans avant notre ère jusqu'au début de l'ère chrétienne. Les Sumériens vivaient à l'emplacement de l'Irak et de l'Iran actuels, entre les fleuves Tigre et Euphrate. La ville de Babylone a été créée en – 2 350. On pense que c'est dans cette région du monde que l'écriture est apparue pour la première fois, en particulier pour celle des nombres, pour les besoins des échanges et de la science. Les écritures des nombres, écriture cunéiforme, ont bien sûr évolué au cours des siècles.

« Pour transmettre un message, on incisait au stylet une tablette d'argile fraiche, on la mettait au four, elle durcissait, l'écrit restait. Le sens était ainsi prisonnier de la glaise. Il devenait sillon dans la terre cuite et incision de sens. Le premier homme armé de son stylet est devenu le premier scribe .» (J. Lacarrière)

♦ Vers l'époque – 2 000, pour écrire les nombres, les Babyloniens utilisaient deux signes écrits au stylet dans l'argile : un signe pour l'unité et un signe pour la dizaine. Pour plusieurs unités ou plusieurs dizaines ces signes étaient placés côte à côte.

1	10
▽	<

Ainsi 25 s'écrivait << ▽▽▽▽▽ et 32 se notait <<< ▽▽ .

Exercez-vous :

> Lire les nombres babyloniens suivants : <<<<< ▽▽▽ ; << ▽▽ .
>
> Traduire en babyloniens les nombres 18 ; 53 ; 59.

♦ **La base « soixante »**

Après le nombre 59, ils utilisaient des groupements par soixante. Cette base SOIXANTE subsiste encore chez nous pour les secondes et minutes.

1	60	3600
▽	▽	▽

60 unités = 1 soixantaine, écrite avec le signe ▽ un peu plus grand.

60 soixantaines, soit 3 600 unités : écrit avec le même signe encore agrandi.

Par exemple :

72 = 60 + 12 soit une soixantaine et 12 unités ce qui s'écrivait : ▽<▽▽ .

3 612 = 3600 + 12 unités soit l'écriture ▽<▽▽ .

De même, selon sa position et sa taille, le signe ≺ désignait soit dix unités ou dix soixantaines ou 10 fois 3 600 …

En principe, le scribe laissait un espace entre les divers ordres des unités ou bien changeait la taille des signes utilisés ou encore laissait au lecteur le soin d'interpréter correctement le nombre écrit, selon le contexte.

♦ Les ambiguïtés du système babylonien

Cette écriture n'allait pas sans problème. Ainsi le nombre écrit ▽▽≺≺ peut signifier soit $2 \times 60 + 20 = 140$, soit $2 \times 3\,600 + 20 = 7\,220$, soit encore $2 \times 3600 + 20 \times 60 = 8\,400$. Il y avait donc des problèmes pour écrire les grands nombres, du fait que le zéro n'existait pas. Ce n'est que plus tard, que le zéro apparaît, transmis sans doute depuis les Indous et les Arabes.

Exercez-vous :

Lire les nombres ci-contre ▽▽≺ ; ≺▽ .

Traduire en babyloniens nos nombres 450 ; 2000 ; 2010 ; 2100.

♦ Les fractions à Babylone

En respectant cette technique de la base SOIXANTE, les scribes babyloniens écrivaient des fractions de dénominateur 60 ou 3600 ou 216000 … et toute fraction devait être écrite comme une somme de telles fractions.

Selon sa position, le signe ▽ désignait aussi la fraction $\frac{1}{60}$ ou la fraction $\frac{1}{3\,600}$ ou encore $\frac{1}{216\,000}$.

Le signe ≺ désignait $10 \times \frac{1}{60}$ ou encore $10 \times \frac{1}{3\,600}$ ou $10 \times \frac{1}{216\,000}$.

Des exemples : $\frac{1}{30} = 2 \times \frac{1}{60}$: cette fraction s'écrivait donc , ▽▽ .

Nous avons marqué une "virgule" pour éviter toute ambiguïté.

$\frac{1}{24} = \frac{2}{60} \times \frac{30}{3600}$: donc cette fraction s'écrivait , ▽▽≺≺≺ ;

ce que l'on note parfois (0, 2 ; 30).

Ce système reste donc assez ambigu du fait de l'absence de virgule : c'était le contexte qui permettait de décider de la valeur des signes : afin de clarifier les choses, nous avons utilisé une virgule. Et pour noter sans ambiguïté la fraction $\frac{46}{45}$ écrire  . Vérifiez-le.

Exercez-vous :

Montrez que $\frac{1}{45}$ s'écrivait  c'est-à-dire (0, 1 ; 20).

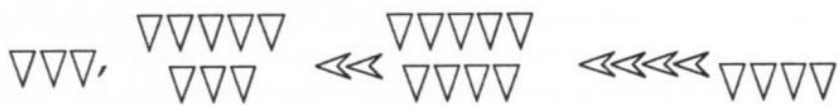
Écrire avec ce système babylonien les fractions suivantes : $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{7}{10}$ . .

♦ Des irrationnels à Babylone

Le nombre $\sqrt{2}$ était connu des Babyloniens vers – 700 : la notation babylonienne correspond à (1, 24 ; 51 ; 10).

* Écrire ce nombre en style babylonien ; indiquer la valeur décimale de chacune des fractions écrites et retrouver une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$.

* Voici une écriture babylonienne d'un nombre décimal



soit (3 ; 8 ; 29 ; 44).

Quel est le célèbre nombre réel dont c'est une valeur approchée ?

Le coin du matheux

- Donner la liste des diviseurs de 60.

  Les fractions babyloniennes pouvaient s'écrire sous la forme :

$$\frac{a}{60}+\frac{b}{3600}+\frac{c}{216000} \quad \text{soit } (0, a ; b ; c).$$

  où a, b et c sont inférieurs à 60.

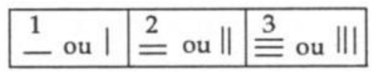
- Écrire en babylonien les fractions suivantes : $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{8};\frac{1}{9};\frac{1}{100};\frac{1}{200}$.

- Quels problèmes se posent pour écrire $\frac{1}{7}$? $\frac{1}{11}$? $\frac{1}{13}$?

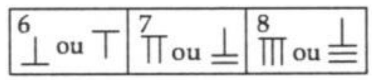
2 Les nombres dans la Chine Ancienne

Sur des monnaies chinoises datant de – 800 (dynastie ZHOU) on trouve de curieuses écritures pour les nombres. Elles ont subsisté, semble-t-il, jusqu'au XIIIème siècle de notre ère avec un certain nombre de modifications au cours des âges. Ces écritures, utilisées par les savants et les comptables, reposaient sur quelques principes simples assez proches de ce que nous connaissons.

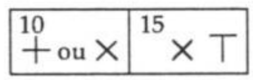
♦ Jusqu'à 5, les chiffres étaient notés à l'aide de traits verticaux – ou horizontaux – juxtaposés, appelés *barres numérales* …



Le 6 est noté au moyen d'une seule de ces barres, avec une barre perpendiculaire de même dimension. Et on ajoute autant de barres qu'il faut pour continuer jusqu'à 9.



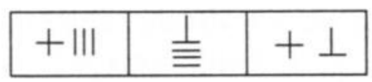
Le 10 est représenté par une croix à laquelle on ajoute autant de barres qu'il faut pour obtenir 11, 12, etc.



Exercez-vous :

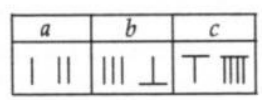
Écrire les nombres de 7 à 17 avec ce mode de notation.

Quels sont les nombres représentés ci-contre :



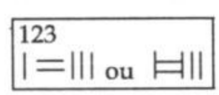
♦ Pour des nombres plus grands, ils utilisaient le principe de **position** : la valeur d'un chiffre est déterminée par la position que ce chiffre occupe dans l'écriture du nombre, un peu comme dans notre numération à base DIX. On laissait un espace (un blanc) entre deux chiffres successifs.

Ainsi l'écriture *a* désigne notre 12, *b* notre 36 et *c* notre 69.



Évidemment cette méthode comporte des ambiguïtés : ainsi l'écriture (a) ci-dessus peut se lire 12 ou encore 3, par inattention. Pour pallier cet inconvénient, ils utilisaient alternativement des barres horizontales et verticales selon le rang de l'unité.

Ainsi observez l'écriture de 123, dans laquelle les diverses unités sont séparées avec la possibilité de les rapprocher.



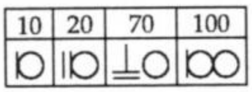
Exercez-vous :

Lire les nombres ci-contre : 

Écrire en “chinois” : 254 ; 2 341 ; 304.

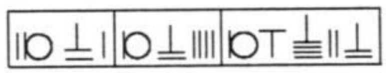
♦ Il subsiste un problème : comment indiquer les unités manquantes, comme dans 6 073 par exemple ?

D'abord, on a laissé un “vide” à l'emplacement du chiffre, comme l'ont pratiqué d'autres civilisations. Puis vers le VIIIème siècle de notre ère, on a utilisé un signe spécial, un rond tel que O , ce qui est devenu le **zéro** que vous connaissez, et ceci sans doute sous l'influence des indous et des arabes de la même époque

Exemples : 

. Et voici l'écriture de 6 073 :  .

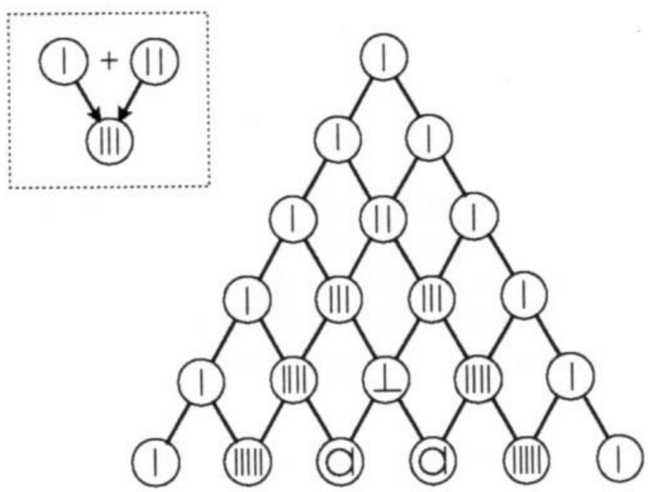
Exercez-vous :

Lire les nombres ci-contre : 

Puis écrire en chinois les nombres : 207 ; 4 205 et 2 000.

♦ Le triangle chinois

Dans l'ouvrage “Su Yuan Yu Chien” publié en 1303, on trouve le dessin suivant, sorte de “triangle” appelé “triangle chinois” par la suite, comportant des ronds avec des nombres entiers avec la notation de l'époque. Et ces nombres n'étaient pas disposés n'importe comment ! On trouve un « 1 » sur la première ligne ; on trouve deux « 1 » sur la deuxième ligne ; puis, sur la suivante, chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui à la ligne précédente.



Exercez-vous :

Traduire ce triangle au moyen de nos chiffres et écrivez la septième ligne.

Vérifier le mode de passage d'une ligne à la suivante. On obtient ce que l'on appelle maintenant le "triangle de Pascal".

Le coin du matheux

Le triangle de Pascal est bien connu des élèves du Lycée (Terminale) car il permet de retrouver certains coefficients algébriques.

$(x + 1)^1$ est $1x + 1$: les coefficients sont 1 et 1 (ceux de la deuxième ligne) ;

$(x + 1)^2$ s'écrit $1x^2 + 2x + 1$: les coefficients 1-2-1 sont ceux de la 3ème ligne ;

$(x + 1)^3$ a pour coefficients 1-3-3-1, ceux de la 4ème ligne du triangle chinois !

et ainsi de suite pour $(x + 1)^n$.

Vous pouvez ainsi retrouver les coefficients pour un exposant n quelconque.

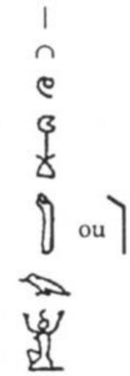
Donner le développement de $(x + 1)^5$.

3 Les nombres au temps de l'ancienne Égypte

Il y a plus de 3000 ans, les Égyptiens écrivaient les nombres au moyen de hiéroglyphes particuliers, lus souvent de haut en bas ; ils ont évidemment évolué au cours des âges.

Leur système d'écriture des nombres reposait sur une base décimale. Il permettait d'écrire des entiers pouvant dépasser le million. En revanche, ils n'avaient pas de signe pour le zéro, indiqué souvent par une place vide. Chacun des signes ci-contre est répété autant de fois qu'il faut pour exprimer un nombre d'unités, de dizaines, de centaines, de milliers …

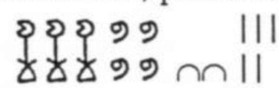
1
10
100
1 000
10 000 ou
100 000
1 000 000



Certains signes changent d'orientation selon le sens de lecture, ainsi pour la centaine, le millier, le "doigt" qui représentait 10 000, le "têtard" pour 100 000 : ils étaient en principe tournés vers le début de la ligne.

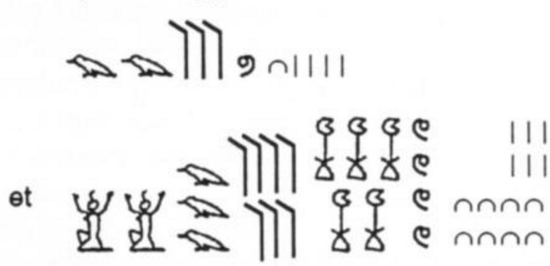
Les chiffres les plus élevés sont en tête, parfois en colonne, de gauche à droite.

Exemple : 3 425 était écrit :

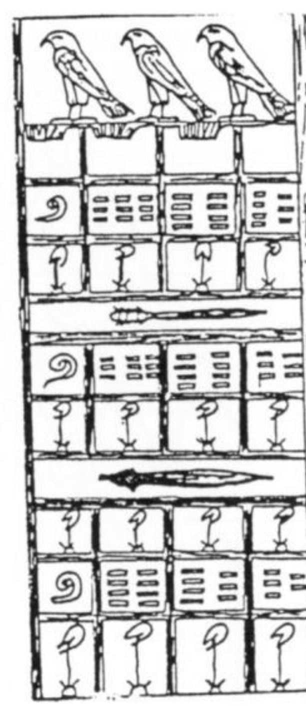


Exercez-vous :

- Écrire dans ce système les nombres 2321 ; 10 035 ; 72 432 ; 70 432 ; 6 028 346.
- Donner l'écriture décimale des nombres suivants écrits par les Égyptiens :



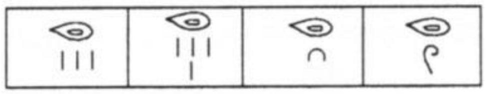
- Déchiffrer les hiéroglyphes indiquant des Écritures numériques sur la stèle ci-contre trouvée à Giseh et datant de − 2 700 avant notre ère, et sur laquelle les "unités" sont indiquées par des traits horizontaux, ce qui atteste des variations dans ce type d'écriture.



♦ Les fractions égyptiennes

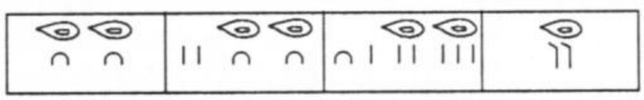
Les scribes égyptiens savaient écrire des fractions de numérateur 1, les seules utilisées. En ce temps-là, en se servant du hiéroglyphe de la bouche, le signe : .

Ainsi, pour les fractions $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}$, on avait les représentations suivantes :



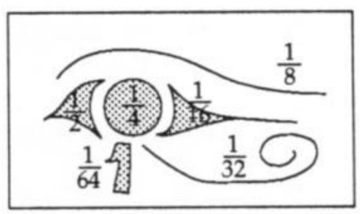
Exercez-vous :

- Sachant que $\frac{3}{4}$ est égal à $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, écrire $\frac{3}{4}$ à la mode égyptienne.
- De même $\frac{47}{60}$ est égal à $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, vérifier puis écrire la fraction $\frac{47}{60}$.
- Écrire en égyptien ancien la fraction $\frac{43}{7}$ après avoir décomposé cette fraction sous la forme d'une somme d'un entier et de fractions de numérateur 1.
- Écrire les fractions suivantes : $\frac{2}{5}; \frac{11}{5}; \frac{17}{5}; \frac{125}{100}$.,
- Lire les fractions égyptiennes suivantes :



♦ Fractions particulières pour des mesures de capacités

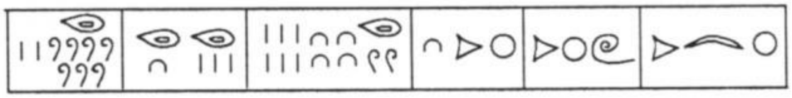
Pour les mesures de capacités – liquides-blé-céréales en général – agrumes – les Égyptiens utilisaient une autre notation en employant des parties de "l'œil d'Horus" le Dieu faucon. Ce hiéroglyphe particulier représenté ci-contre comporte six parties bien caractéristiques : chacune de ces parties représente une fraction de l'unité $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}$.



On pouvait lire ces fractions de gauche à droite ou de droite à gauche.

Exercez-vous :

Trouver les nombres fractionnaires suivants. Certains expriment des mesures de capacités.



4 Les nombres chez les Grecs

De nombreux systèmes de numération ont été en usage chez les Grecs, parfois simultanément ; ces systèmes variant d'une région à l'autre.

Deux systèmes dominent cependant ; il utilisent tous les deux les lettres de l'alphabet grec.

♦ Numération acrophonique

Elle est en usage dès l'an 600 avant notre ère.

Elle utilise six caractères :	I	Γ	Δ	H	X	et	M
qui désignent respectivement :	1	5	10	100	1000	et	10 000.

Les caractères choisis sont les initiales des mots grecs correspondant à ces nombres ; par exemple Δ est la lettre majuscule delta, première lettre du mot grec correspondant à dix, d'où le qualificatif d'**acrophonique** (extrême en grec).

On peut répéter jusqu'à quatre symboles identiques dont les valeurs s'ajoutent :

$$\Delta\,\Delta = 10 + 10 = 20 \;;\quad \mathrm{H\,H\,H} = 300 \;;\quad \mathrm{X\,X\,X\,X} = 4\,000 \;;\quad \mathrm{M\,M} = 20\,000.$$

Au-delà de quatre symboles identiques, on utilise le symbole Γ qui représente 5.

$$\Gamma^{\Delta} = 5 \times 10 = 50 \;;\quad \Gamma^{\mathrm{H}} = 500 \;;\quad \Gamma^{\mathrm{X}} = 5\,000 \;;\quad \Gamma^{\mathrm{M}} = 50\,000 \;;$$

$$\Gamma^{\Delta}\ \Delta\ \Delta = 50 + 20 = 70 \;;\quad \Gamma^{\mathrm{H}}\ \mathrm{H} = 600 \;;\quad \Gamma^{\mathrm{X}}\ \mathrm{X\,X\,X} = 8000 \;;\quad \Gamma^{\mathrm{M}}\ \mathrm{M\,M} = 70\,000 \;;$$

Les symboles Γ^{Δ} , Γ^{H} , Γ^{X} et Γ^{M} évoquent un principe multiplicatif

$$7\,824 \text{ s'écrit ainsi } \underbrace{\Gamma^{\mathrm{X}}\mathrm{XX}}_{7\,000}\ \underbrace{\Gamma^{\mathrm{H}}\mathrm{HHH}}_{800}\ \underbrace{\Delta\Delta}_{20}\ \underbrace{\mathrm{IIII}}_{4}$$

ce qui nécessite 13 signes dont deux à caractère multiplicatif.

Exercez-vous :

- Écrire dans ce système : 697 ; 3 587 ; 26 413.
- Traduire dans le système décimal : $\Gamma^{\mathrm{X}}\ \mathrm{XX\ HH}\ \Gamma^{\Delta}\ \mathrm{III}$, $\Gamma^{\mathrm{X}}\ \Delta\Delta$ et $\mathrm{XH}\Delta\Gamma$.

♦ Numération alphabétique

Elle est plus récente puisqu'elle date du III$^{\text{ème}}$ siècle avant notre ère. Son usage est resté en vigueur, avec quelques variantes, dans le monde méditerranéen jusqu'à l'apparition des chiffres arabes, autour du X$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère et même au-delà.

• Chacun des nombres 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90, 100, 200, ..., 900 est représenté par une lettre ce qui nécessite 27 caractères. L'alphabet n'ayant que 24 caractères, il avait fallu créer 3 symboles supplémentaires.

Pour simplifier nous utiliserons les 26 lettres de notre alphabet, complété par *.
a, b, c, d, e, f, g, h, i représentent 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ;
j, k, l, m, n, o, p, q, r représentent 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 ;
s, t, u, v, w, x, y, z, * représentent 100, 200, 300, 400, 400, 500, 600, 700, 800, 900.

• 852 s'écrit ainsi znb par analogie avec la numération décimale, mais pourrait s'écrire aussi bzn ou nbz, etc.

Cette numération est purement additive ; la place des caractères n'est pas significative ; aucun caractère ne peut être répété.
Le chiffre zéro n'y figure pas, il n'est pas nécessaire.

Exercez-vous :

- Traduire en numération décimale : une, zoe, .ra, vlu, tp, apu.
- Écrire dans le système des Grecs : 614, 720 , 317.

- Pour **les unités de mille,** on reprend les lettres des unités simples qu'on fait précéder soit d'une virgule, soit parfois d'un signe ⊃ placé en haut à gauche ; par exemple : ,d ou $^{\supset}$d représentent 4 000.

1968 s'écrit ainsi ,a*oh ou $^{\supset}$a*oh

8430 s'écrit soit ,hvl soit $^{\supset}$hvl (cet exemple illustre l'inutilité du zéro).

- Pour **les dizaines de mille** ou myliades, on utilise la lettre M surmontée du nombre de dizaines de mille :

Exemple : $\overset{b}{M} = 20\,000$; $\overset{i}{M} = 90\,000$; $\overset{oka}{M} = 4\,210\,000$

Pour décrypter l'écriture : $\overset{lg}{M}$, cgke on remarque : lg = 37 ; $\overset{lg}{M} = 370000$; ,c = 3000 ; gke = 825. Le nombre à décrypter est donc 373 825.

On a ainsi un mélange d'écriture multiplicative et d'écriture additive.

Exercez-vous :

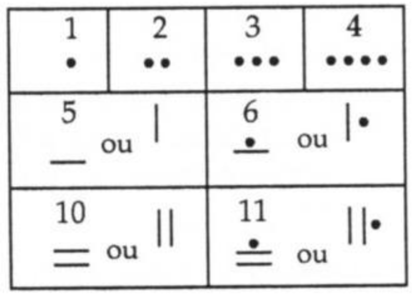
- Comment les Grecs écrivaient-ils 719 614 ; 83 215 ; 17 210 ?
- Écrire dans le système décimal chacun des nombres :

$\overset{xa}{M}$,hta ; $\overset{ma}{M}$ma ; $\overset{h}{M}$,a. .

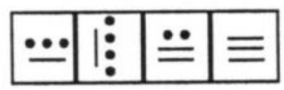
5 Les nombres chez les Mayas

Dans les années 600 à 900 de notre ère, la civilisation Maya, installée en Amérique centrale, utilisait un système de numération assez élaboré, dont on trouve des vestiges sur des inscriptions au Yucatan (Mexique).

- Les nombres 1 à 4 sont notés au moyen de points, le nombre 5 par une barre horizontale ou verticale, à laquelle on associe autant de points qu'il faut jusqu'à 9, et le nombre 10 est noté au moyen de deux barres horizontales ou verticales, avec des points jusqu'à 14 puis trois barres pour 15, etc.



Exercez-vous :

Lire les nombres qui s'écrivaient : 

Écrire avec le système Maya les nombres : 7 ; 8 ; 14 ; 16 ; 17 ; 18 ; 29.

- À partir du nombre 20, pour les plus grands nombres, ils utilisaient un curieux système en relation avec le calendrier et la durée.

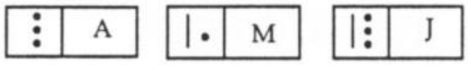
  Quatre figurines principales (les glyphes) représentaient un jour, un mois de 20 jours, une année de 360 jours (18 × 20), une génération de 20 ans, soit 360 × 20 jours.

le jour	le mois	l'année	la génération
			

Pour simplifier la compréhension, nous remplaçons ces figurines par des rectangles marqués J, M, A, G, …

l'unité: le jour	le mois de 20 jours	l'année de 360 jours	la génération de 7 200 jours
| | J |	| | M |	| | A |	| | G |

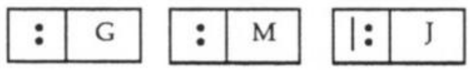
Ainsi  = 2 mois et 6 jours = $2 \times 20 + 6 \rightarrow$ le nombre 46

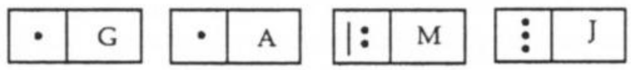
 $= 3 \times 360 + 6 \times 20 + 8 = 848$

Écrire un nombre en maya revient donc à le décomposer en paquets d'unités : 7 200 ; 360 ; 20 ; 1.

Exercez-vous :

- Lire les nombres

a =  = ?

b =  = ?

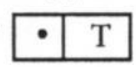
- Traduire en écriture Maya les nombres suivants : 400 ; 719 ; 721 ; 15 740 .

- ***Le zéro***

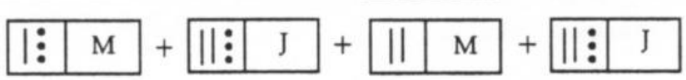
À partir d'une certaine époque, pour traduire l'absence d'unité d'un certain ordre, le "zéro" était représenté par une sorte de "coquille" vide.

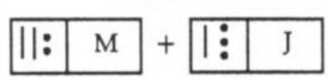
$= 2G + 0A + 1M + 0J = 2 \times 7200 + 5 \times 20 = 14\,500$.

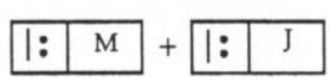
Exercez-vous :

Un cinquième "ordre" d'unité fut utilisé : une durée de 20 générations, pour les grands nombres. Combien représentait-elle d'unités ? Appelons-la T  et utilisez-la pour noter le nombre 200 000 puis le nombre 1 million.

- **Opérations à affectuer de deux façons** en passant par notre écriture et aussi directement dans le système Maya :



Écrire le double du nombre  .

Écrire le triple du nombre  .

Les nombres au temps des Romains

À l'époque de l'empire romain, étaient utilisés des "chiffres" qui subsistent encore de nos jours dans certaines numérotations. Ce sont des lettres de l'alphabet et certains historiens pensent qu'ils sont d'origine grecque.

Ces "chiffres" sont en général connus :	I	V	X	L	C	D	M
	1	5	10	50	100	500	1 000

♦ **Le principe d'écriture** des nombres est le suivant :

Les chiffres de même valeur placés côte à côte s'ajoutent. Il n'y a pas de "zéro". Si à droite d'un chiffre on en écrit un autre égal ou plus petit, ils s'ajoutent : VIII = 8 ; XX = 20 ; LXVII = 67 .

Si à gauche d'un chiffre on en écrit un plus petit, la valeur du deuxième se trouve diminuée de la valeur du premier : IX = 9 ; XL = 40 ; CM = 1 000 – 100 = 900.

Ce système n'est pas utilisé pour les milliers :
Pour 2 897, on écrivait MMDCCCXCVII soit 2000 + 800 + 90 + 7 .
Le nombre 495 pouvait s'écrire CCCCVC ou encore CDVC ou CCCCLXXXXV.
L'écriture CXL peut s'interpréter de deux façons : lesquelles ?

En fait, les pratiques ont, semble-t-il, évolué au cours des âges. Certaines écritures de chiffres ont été modifiées et les règles de juxtaposition se sont modifiées. Ainsi 69 pouvait s'écrire LXIX ou LXVIIII ...

Exercez-vous :

- Écrire en romain les nombres : 69 ; 434 ; 1937 ; 2000 ; 666 ; 949.
- Traduire les écritures suivantes LXXIX ; XCVIII ; MCMDXXXIV .
- Le document ci-contre est une inscription trouvée en Lucanie, dans la Province de Salerne, et conservé au musée de la Civilisation Romaine à Rome. Lire les nombres contenus dans cette plaquette et soulignés par nos soins.

♦ **L'addition chez les Romains**

L'addition des nombres se faisait parfois à l'aide de jetons sur lesquels étaient marqués les nombres de la numération. Pour ajouter il suffisait alors de rassembler certains jetons et de les remplacer par le ou les jetons adéquat(s).

Examiner et analyser l'addition ci-contre. LI + LIV = CV

Exercez-vous :

- Effectuer les opérations suivantes sans faire de conversion dans notre système d'écriture : LXXIX + XCVIII ; CCCCLXII + CDXXIII ; MCM – DCCXLVI ; CCD – XXXVII . Vérifier en faisant une conversion dans notre système.

♦ Et la multiplication chez les Romains

On ne sait pas très bien si les Romains disposaient de tables de multiplication. Leurs pratiques étaient sans doute différentes des nôtres. Mais comment calculaient-ils XLII × VI ? Sans doute en effectuant des additions répétées : XLII répété six fois, et regroupements ...

Exercez-vous :

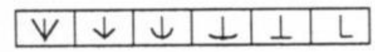
- Dresser une table de multiplication avec les conventions d'écriture que nous nous sommes données, en reproduisant ce tableau :

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
I										
II										
III										
IV										
V										

Puis effectuer des multiplications sans revenir à notre système d'écriture.
Calculer XLI × X ; XLI × XI ; XLIX × LI ; XLIX × LV .

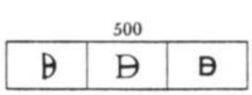
♦ D'autres notations

Voici d'autres écritures des "chiffres" romains rencontrés au cours des âges. Ces chiffres ont eu parfois des aspects différents.

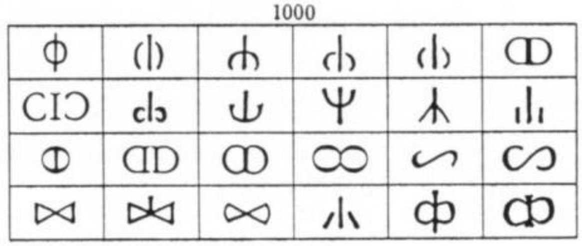
Par exemple, voici plusieurs représentations de 50 : 

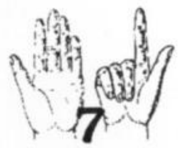
Voici d'autres représentations de 500 et 1 000

500



1000





Numération binaire

♦ Numération décimale

- L'écriture utilisée de nos jours est l'écriture décimale. Elle utilise dix caractères, les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. C'est une numération de position, ce qui veut dire que la valeur d'un chiffre dans un nombre dépend du rang occupé par ce chiffre dans ce nombre.
- Par exemple, dans le nombre 7 202, le chiffre 2 qui est à droite indique deux unités simples, alors que l'autre chiffre 2 indique deux centaines.
  Remarquer l'importance du zéro qui indique l'absence d'unités du rang occupé par ce zéro.
- 7 202 s'écrit avec quatre chiffres ; les nombres qui s'écrivent avec quatre chiffres sont ceux compris entre 1 000 inclus et 10 000 exclu ;

  si $10^3 \leq n < 10^{\mathbf{4}}$, le nombre n s'écrit avec **<u>4</u>** chiffres
- Pour rappeler qu'une dizaine vaut 10 unités, une centaine 10 dizaines, etc., on dit que la **BASE** de la numération décimale est **dix**.

♦ Numération binaire (ou de base deux)

- Elle n'utilise que deux chiffres 0 et 1.
  Deux unités font une paire qui s'écrit 10 (en base deux) (1×2)
  Deux paires font un carré qui s'écrit 100 (en base deux) (1×2^2)
  Deux carrés font un cube qui s'écrit 1 000 (en base deux) (1×2^3)
- Le nombre a qui s'écrit 10101 en base deux est :

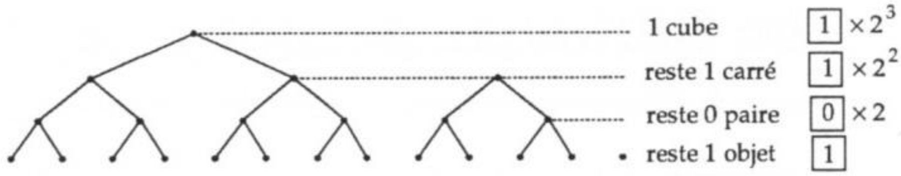
$$1\,0\,1\,0\,1$$

$$a = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$
$$a = 16 + 0 + 4 + 2 + 1$$
$$a = 21 \text{ (base dix)}$$

Exercez-vous :

> Écrire en base dix les nombres suivants écrits en base deux : 1001 ; 11111 ; 101010.

- Pour écrire en base deux le nombre décimal 13, on peut procéder à des groupements par 2 de 13 objets :



13 base dix s'écrit 1101 en base deux ; on écrit $13 = \overline{1}\overline{1}\overline{0}\overline{1}$ (base deux).

- Ces groupements suggèrent des divisions successives par deux :

$$\begin{array}{r|l}
13 & 2 \\ \hline
1 & 6 \;|\; 2 \\
 & 0 \;|\; 3 \;|\; 2 \\
 & \quad\;\; 1 \;|\; 1
\end{array}$$

1ère division $13 = 2\times 6 + 1$

2ème division $13 = 2\times(3\times 2 + 0) + 1 = 2^2\times 3 + 0\times 2 + 1$

3ème division $13 = 2^2\times(1\times 2 + 1) + 0\times 2 + 1$

$13 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1 = \overline{1}\overline{1}\overline{0}\overline{1}$ (base deux)

- Une bonne connaissance des puissances de 2 permet d'éviter ces divisions successives :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Par exemple pour écrire en base deux le nombre 13 on voit tout de suite $2^3 < 13 < 2^4$: $13 = 1\times 2^3 + 5$.
$13 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1 = \overline{1}\overline{1}\overline{0}\overline{1}$ (ne pas oublier le 0)
Remarquer la nécessité du zéro comme en base dix.

Exercez-vous :

> Écrire en base deux les nombres suivants écrits en base dix : 10, 100 et 1000.
> Écrire en base dix les nombres suivants écrits en base deux : 1000, 101010 et 111111.

- L'inconvénient de cette base est de conduire à des écritures très longues.
  De même qu'en base dix si $10^n \leq a < 10^{n+1}$, a s'écrit avec n+1 chiffres.
  En base deux si $2^3 \leq a < 2^{n+1}$, a s'écrit avec n+1 chiffres.
  Par exemple, 814 base dix s'écrit avec dix chiffres en base deux car $2^9 \leq 814 < 2^{10}$.
- L'avantage de la base deux est de conduire à des tables d'addition et de multiplication particulièrement simples ; dresser ces tables.
- La base deux est utilisée essentiellement en informatique.
  Les chiffres 0 et 1 correspondent à chacune des positions "ouvert" et "fermé" d'un interrupteur.

8 Le Bibinaire de Boby Lapointe

Boby Lapointe, chanteur et humoriste était aussi un excellent mathématicien.

Il a conçu, voici plus de trente ans, un système de numération en base seize. Son auteur le baptisait ***système Bibinaire*** !

Comme beaucoup de réformateurs du système décimal, Boby Lapointe s'indignait d'expressions du genre :

1 789 qu'on doit lire *mille sept cent quatre vingt neuf* $(1\,000 + 7 \times 100 + 4 \times 20 + 9)$ ou encore *dix-sept cent quatre vingt neuf* $(17 \times 100 + 4 \times 20 + 9)$ …

Ne parlons pas de nombre comme 100 000 007 qui se lit *cent millions sept* … au mépris de tous ces zéros qu'on ne prononce jamais !

Le système Bibinaire existe en deux versions : le bibi parlé et le bibi écrit.

Le premier seul va nous intéresser dans ce qui suit.

♦ Écrivons en **base deux** les nombres entiers de **zéro à quinze** et complétons à quatre chiffres leur écriture par d'éventuels zéros en début d'écriture :

0000	0	0100	4	1000	8	1100	12
0001	1	0101	5	1001	9	1101	13
0010	2	0110	6	1010	10	1110	14
0011	3	0111	7	1011	11	1111	15

Chaque nombre ainsi codé peut être découpé en deux tranches de deux chiffres ; on obtient quatre groupements possibles à deux chiffres :

00 01 10 11

Pour les groupes de deux chiffres *commençant l'écriture* d'un nombre, Boby Lapointe fit le choix de quatre consonnes :

00 → H 01 → B 10 → K 11 → D

Pour les groupes de deux chiffres *terminant l'écriture* d'un nombre, Boby Lapointe fit le choix de quatre voyelles :

00 → O 01 → A 10 → E 11 → I

Voici la « comptine » des nombres naturels de zéro à quinze :

HO	**HA**	**HE**	**HI**	**BO**	**BA**	**BE**	**BI**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
KO	**KA**	**KE**	**KI**	**DO**	**DA**	**DE**	**DI**
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**

Le suivant de 15 est 16. En binaire, 16 s'écrit : 1000 ; en bibinaire, 16 s'écrit : HAHO, c'est-à-dire une seizaine et zéro unité.

Comment représenter en bibinaire tous les entiers positifs ?

Exemples : 17 $\rightarrow$ $1 \times 16 + 1$; donc 17 s'écrit HAHA.
20 $\rightarrow$ $1 \times 16 + 4$; donc 20 s'écrit HABO.
"J'ai eu HAHA sur HABO à mon dernier problème de math !"

• Pour écrire un grand nombre, il est important de le "décomposer" comme combinaison de puissances de 16.

Ainsi $16^2 < 2\,000 < 16^3$

$$2\,000 = (\underbrace{7}_{\text{BI}} \times 16^2) + (\underbrace{13}_{\text{DA}} \times 16) + \underbrace{0}_{\text{HO}}$$

2 000 s'écrit BIDAHO.

"Attention au bogue de l'an BIDAHO !"

Les puissances de 16

$16^2 = 256$
$16^3 = 4\,096$
$16^4 = 65\,536$
etc.

Exercez-vous :

– Écrire 1789 et 70 000 en bibinaire.
– Dans l'autre sens, traduire en base dix les nombres suivants :
BOBO ; KIHABOBO ; KEKIDI .

• Vous savez facilement écrire en base dix le précédent et le suivant d'un nombre donné, même si cela comporte quelques difficultés :

B999 < 1000 < 1001 ; 589 < 590 < 591 ; 348 < 349 < 350 .

Pour cela, vous vous rappelez les règles de l'écriture ordonnée des nombres. Idem en bibinaire ! Pour cela aidez-vous de la comptine de zéro (HO) à quinze (DI) : attention après DI, il y a une retenue ! avant HO, il y a un DI.

KIDA < KIDE < KIDI ; BEDE < BEDI < BIHO .

– Écrire les dix nombres qui suivent BODEDI.

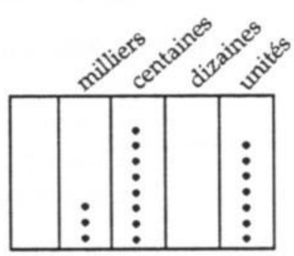
9

Abaques et bouliers

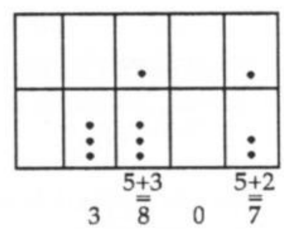
Écrire les nombres est une chose, faire des opérations de manière commode en est une autre et certains types de numération sont peu pratiques pour les opérations. C'est pourquoi, parallèlement à l'écriture des nombres, les hommes ont utilisé des outils pour calculer : additionner, soustraire, multiplier. Cet outillage constitue en fait une autre façon d'écrire des nombres en vue des opérations à effectuer.
Les mains furent le premier instrument de calcul pour "compter sur ses doigts" !
Les abaques, ou tables de calculs, furent utilisés par les Grecs, les Étrusques, les Romains et bien d'autres. Les bouliers sont encore utilisés de nos jours en Chine, en Russie, au Moyen-Orient

♦ L'Abaque

Cette tablette de calcul très ancienne, fut utilisée jusqu'au XVIII^{ème} siècle.
On en trouve des exemples à Salamine, en Grèce et on peut en voir dans divers musées.
C'est une grande plaque de marbre sur laquelle sont gravés des traits parallèles à égale distance les uns des autres. Des jetons – ou des boules – étaient placés dans les colonnes : colonne des unités, des dizaines, des centaines, etc. Lire sur cet exemple le nombre 3 807.



Le jeton change de valeur lorsqu'il passe d'une colonne dans une autre.
En fait, on a introduit très vite une ***ligne médiane*** : dans chaque colonne, un jeton placé au-dessus de la ligne médiane valait cinq unités de la colonne considérée, d'où la seconde "écriture" du nombre 3 807 sur le deuxième dessin.



On utilisait aussi des abaques remplis de sable sur lequel on écrivait avec un stylet ou même avec les doigts (à la cathédrale de Chartres on peut voir Pythagore avec un tel abaque). Les Romains utilisaient des abaques de poche pour compter la monnaie : c'était une plaquette métallique munie de rainures sur lesquelles glissaient des billes de métal (voir à la Bibliothèque Nationale à Paris).

Opérations

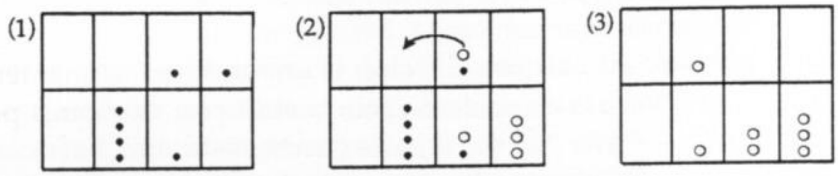
Par exemple, soit à ajouter 465 + 158.

(1) Le premier nombre 465 est figuré sur l'abaque.
(2) Colonne des unités : ajouter 8 unités, ce qui fait 3 unités + 1 dizaine
On laisse donc 3 dans la première colonne et on ajoute une dizaine.
Colonne des dizaines : 6 + 5 + 1 (retenue !) ce qui fait 2 dizaines et 1 centaine.

On laisse 2 dans la seconde colonne et on "retient" 1 dans la troisième.

(3) Colonne des centaines : 4 + 1 + 1 (retenue) ce qui fait 6 centaines.

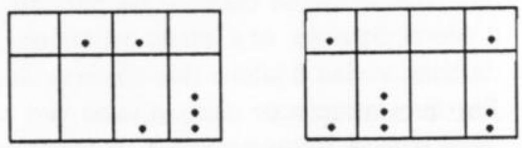
Résultat : 623



Pour les soustractions, il suffit d'ôter des jetons. Les multiplications étaient obtenues comme des additions répétées. par exemple 123 x 5 c'est 123 + 123 + 123 + 123 + 123.

Exercez-vous :

- Quel est le nombre figuré sur chacun des dessins ci-dessous ?

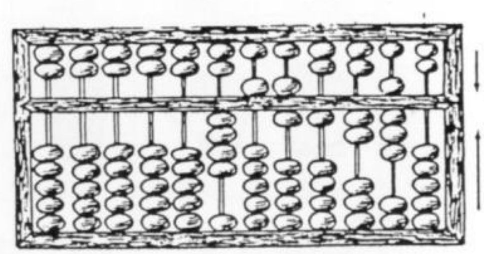


- Représenter sur un dessin d'abaque chacun des nombres suivants :
  5 679 ; 4 089 ; 1 654 079.
- Effectuer des additions sur un abaque : 146 + 423 ; 146 + 975.
- Effectuer des soustractions sur un abaque : 786 – 163 ; 725 – 218.
- Effectuer les multiplications : 123 x 5 ; 124 x 9.

♦ Le boulier

Sans doute inventé par les Chinois, le boulier n'est qu'une modélisation pratique d'un abaque. À la place des colonnes, le boulier comporte des tiges sur lesquelles peuvent glisser des "boules", (en général 10 à douze tiges). On rencontre plusieurs types de bouliers.

Le boulier chinois (*souan pan*) comporte une barre médiane : au-dessous, cinq boules représentant une unité et au-dessus de la barre, deux boules, chacune valant 5 unités. Au départ, les boules sont éloignées de la barre centrale pour indiquer le nombre d'unités voulues, de différents ordres. Lire ci-contre le nombre 4 561 280.



4 5 6 1 2 8 0

On notera que le 6 est noté 5+1 puisqu'une boule du haut vaut 5. Le 8 est de même noté 5+3.

Le boulier japonais (*soroban*) ne comporte que 4 boules au lieu de 5 sur un côté de la barre.

Le boulier russe (*stchoty*) ou turque (*coulba*) est souvent dépourvu de barre centrale, ce qui est moins pratique pour la représentation des nombres et pour les opérations.

Exercez-vous :

- L'idéal serait que vous puissiez disposer d'un boulier de type chinois afin de vous familiariser avec son usage. Effectuer au boulier les opérations proposées ci-dessus avec les abaques. Effectuer et expliquer les manipulations suivantes :

  "Voilà la manipulation pour multiplier par exemple 235 par 42 :

  – Placer 235 sur la partie gauche de la table à compter.

  – Enlever un jeton des unités de 235 et le remplacer par 2 jetons unités et 4 jetons dizaines sur la partie droite de la table.

  – Faire de même pour chacun des jetons unités de 235. Sur la partie droite de la table, remplacer automatiquement 10 jetons situés sur une même ligne par un jeton sur la ligne située à sa gauche.

  – Une fois épuisés les jetons unités de 235, s'attaquer aux dizaines. Cette fois chaque "jeton dizaine" de gauche sera remplacé sur la droite par 2 jetons dizaines, et 4 jetons centaines. Procéder ainsi au remplacement de chacun des 3 jetons des dizaines de 235.

  – Par quoi remplacer chaque jeton des centaines de 235 ? Quand il ne reste plus de jeton à gauche, la multiplication est terminée.

  Le résultat du produit 235 x 42 se lit à droite."

  (Extrait de "Histoire des maths pour les collèges". IREM - Paris VII - Cedic)

Avec les doigts ... en base deux !