Galion Thèmes

Brins d'Histoire des Maths

3. Opérations depuis Babylone

Pictagoras arithmetrice introductor

Extrait d'un calendrier arithmétique - 1491

15, quai André Lassagne – 69001 LYON

ISBN : 2-912209-27-7

1 – La soustraction par la gauche ...

♦ Une habitude ...

Depuis longtemps, les techniques opératoires de la soustraction font que l'on part de la droite :

$$\begin{array}{rrr} \multicolumn{3}{c}{\longleftarrow} \\ 7 & {}^{1}8 & {}^{1}2 \\ -\,\mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{3} \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ \hline 5 & 8 & 9 \end{array}$$

- *Bilan des unités* : 3 ôté de 12 égale **9** et on retient 1.
- *Bilan des dizaines* : 9 et 1 → 10, ôté de 18 égale **8** et on retient 1.
- *Bilan des centaines* : 1 et 1 → 2, ôté de 7 égale **5**.

$$\begin{array}{rrrl} 7 & {}^{1}8 & {}^{1}2 & \\ -\,\mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{3} & \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & + \\ \hline 5 & 8 & 9 & \end{array}$$

Une variante consiste à considérer la soustraction comme une addition à trou : 193 + ... = 782 ; d'où un algorithme tel que : 9 + 3 = 12 ; on écrit **9** et on retient 1 ; etc.

♦ Quel ordre adopter pour commencer une opération ?

Voici un texte relatant un débat à l'école normale de l'an III qui illustre que ce problème du sens choisi pour opérer n'a pas toujours été admis ... :

Placiard.— « ... J'ai observé que les trois premières opérations se font d'abord par la droite, et que la division seule se commence par la gauche. Je désirerais que vous développassiez les raisons pour lesquelles on commence plutôt cette dernière par la gauche que par la droite ... »

Lagrange.— « La difficulté que vous proposez est très bonne. Je vous avoue que j'y ai pensé plus d'une fois et qu'il m'a paru qu'en effet, du moins pour la correspondance, on aurait du commencer la soustraction aussi par la gauche ; car on sait que la division n'est qu'une soustraction, et que la multiplication n'est qu'une addition répétée. Quoiqu'on puisse, à la vérité, commencer la soustraction par la gauche, elle est moins commode ... »

Laplace.— « J'ajouterai aux observations de mon collègue, que les opérations de l'arithmétique doivent être ordonnées, de manière que la suite des opérations n'influe point sur les chiffres déjà inscrits ... »

La remarque de Laplace indique que les pédagogues et le législateur ont toujours opté pour un minimum de ratures dans les dispositions.

♦ Jusqu'à la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, nous rencontrons une technique de soustraction allant de la gauche vers la droite.

Voici les étapes pour obtenir 782 – 193

$$
\begin{array}{r}
 7\ 8\ 2 \\
-1\ 9\ 3 \\
\hline
6\ \
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r}
 7\ \overset{1}{8}\ 2 \\
-1\ 9\ 3 \\
\hline
\cancel{6}\ 9\ \\
5\ \
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r}
 7\ \overset{1}{8}\ \overset{1}{2} \\
-1\ 9\ 3 \\
\hline
\cancel{6}\ \cancel{9}\ 9 \\
5\ 8\
\end{array}
$$

(I) (II) (III)

(I) *bilan des centaines* : 7 – 1 = 6

(II) *bilan des dizaines* : 8 – 9 impossible, on récupère 1 centaine égale à 10 dizaines : 18 – 9 = 9 (le 6 est barré et remplacé par 5).

(III) idem pour le *bilan des unités* : 12 – 3 = 9.

Exercez-vous :

1- Calculez de gauche à droite :

689 – 354 ; 659 – 382 ; 652 – 386 ; 200 000 – 123 .

2- Trouvez les chiffres qui manquent dans ces soustractions de gauche à droite :

$$
\begin{array}{r}
 2\ *\ 3\ 4 \\
-1\ 7\ *\ * \\
\hline
\cancel{1}\ 4\ \cancel{1}\ 5 \\
0\ \ *\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
 3\ *\ 3\ 9 \\
-\ \ *\ *\ 1 \\
\hline
\cancel{3}\ 0\ 9\ * \\
2\ 9\ \
\end{array}
$$

♦ Calculs par les écarts

Voici encore une autre méthode pour aller de gauche à droite …

$$
\begin{array}{r}
 7\ \overset{7}{2}\ \overset{1}{3}\ 8 \\
-1\ 9\ 4\ 5 \\
\hline
6\ \ \ 3
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{r}
 7\ \overset{7}{2}\ \overset{1}{3}\ 8 \\
-1\ 9\ 4\ 5 \\
\hline
\cancel{6}\ 3\ \ 3 \\
5\ \ \
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{r}
 7\ \overset{7}{2}\ \overset{1}{3}\ 8 \\
-1\ 9\ 4\ 5 \\
\hline
\cancel{6}\ \cancel{3}\ 9\ 3 \\
5\ 2\ \
\end{array}
$$

On calcule les écarts :
7 – 1 = 6 écrit en bas
9 – 2 = 7 écrit en haut
4 – 3 = 1 écrit en haut
8 – 5 = 3 écrit en bas

De gauche à droite :
a) On descend le 7 en prenant son complément à 10 (soit 3) et en réduisant de 1 le 6 marqué à gauche ;

b) on descend le 1 de la même manière …
Ainsi :
7238 – 1945 = 5293

Exercez-vous :

• Calculez par cette méthode :

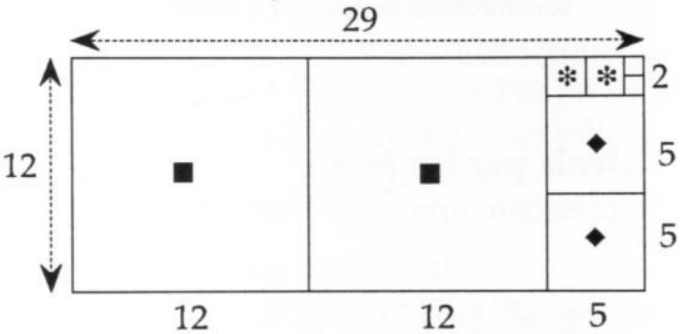
1 234 – 752 ; 20 000 – 123 ; 123456 – 34 567 .

2– Sommes de carrés en Mésopotamie

Le site archéologique de Nippour est proche de l'ancienne Babylone, pas loin de l'Euphrate.

On y a trouvé un grand nombre de temples datant de 3000 ans avant notre ère et bien sûr des sculptures, des statuettes et des tablettes témoignant de l'activité économique de l'époque. Sur des tablettes datant approximativement de 1000 av. J.-C. on peut voir une curieuse démarche pour effectuer des multiplications.

Le "scribe-calculateur" devait probablement disposer de tables de carrés : une multiplication se ramène à une addition de carrés.



♦ Le principe

Soit à calculer 12×29. C'est l'aire d'un rectangle de 12 de large et 29 de long. Ce rectangle se décompose en : 2 carrés de 12×12. Il reste un rectangle de 5×12.

Ce rectangle se décompose alors en deux carrés de 5×5 : reste 5×2 que l'on calcule ou que l'on décompose encore en $2 \times 2 + 2 \times 2 + 2$.

$$12 \times 29 = \underbrace{12^2 + 12^2}_{\blacksquare} + \underbrace{5^2 + 5^2}_{\blacklozenge} + \underbrace{2^2 + 2^2}_{\ast} + \underbrace{1^2 + 1^2}$$

$12 \times 29 = 144 + 144 + 25 + 25 + 4 + 4 + 2 = \mathbf{348}$

Plus généralement, en présence d'un produit $a \times b$, si $\mathbf{a < b}$ on peut alors écrire $b = a + c$, d'où :

$$a \times b = a(a + c) = a^2 + ac$$

et on recommence avec le produit ac dont on « extrait » un carré … jusqu'à la fin

Ainsi : $41 \times 7 = 7 \times (7 + 34) = 7^2 + 7 \times 34$

$7 \times 34 = 7 \times (7 + 27) = 7^2 + 7 \times 27$

5^2	25
12^2	144
13^2	…
14^2	…
15^2	…
16^2	…

$$7 \times 27 = 7 \times (7 + 20) = 7^2 + 7 \times 20$$
$$7 \times 20 = 7 \times (7 + 13) = 7^2 + 7 \times 13$$
$$7 \times 13 = 7 \times (7 + 6) = 7^2 + 7 \times 6$$

puis $\quad 6 \times 7 = 6(6 + 1) = 6^2 + 6 = 6^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

d'où $\quad 41 \times 7 = 7^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 6^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

Enfin $\quad 41 \times 7 = 287$.

On ne peut pas dire que ce procédé soit très pratique et très rapide. À défaut de la connaissance de nos tables de multiplication, liées aux techniques modernes, il nécessite la connaissance de tables de carrés et il suffit alors de savoir faire des additions.

Ce procédé repose sur l'idée que tout nombre entier se décompose en somme de carrés.

Exercez-vous :

- Vous pouvez facilement fabriquer, sans calculatrice, une table de carrés : on passe d'un carré au suivant en ajoutant un nombre impair : $(a + 1)^2 = a^2 + (2a + 1)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1^2 & & 2^2 & & 3^2 & & 4^2 & & 5^2 & 6^2 & 7^2 & \ldots\ldots & 20^2 & \longrightarrow & 21^2 & \longrightarrow & 22^2 \\
1 & \xrightarrow[(+3)]{} & 4 & \xrightarrow[(+5)]{} & & \xrightarrow[(+7)]{} & & \xrightarrow[(+9)]{} & & & & & 400 & \xrightarrow[(+41)]{} & 441 & \xrightarrow[(+43)]{} &
\end{array}$$

- Avec cette technique, calculez les produits :

  29×21 ; 29×23 ; 29×35 ; 140×75

- Pour le produit de deux entiers de différence 2, on peut utiliser l'identité :

  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

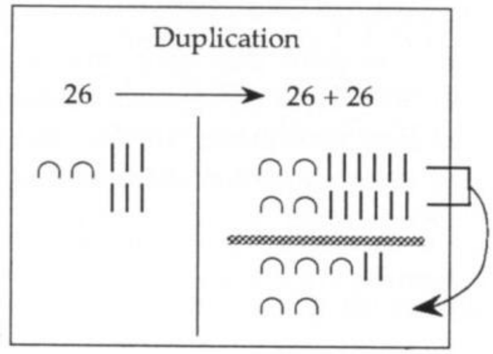
  Par exemple : $42 \times 40 = (41 + 1)(41 - 1) = 41^2 - 1^2$

  Calculez rapidement : 22×24 ; 23×25 ; 101×103

3– Multiplication et division en Égypte

La duplication en Égypte consistait à ajouter un nombre à lui-même pour obtenir son double : $a + a = 2a$.

La multiplication par 2 se faisait donc comme une addition. Et cette technique était utilisée à la fois pour la multiplication et la division de deux nombres comme vous allez le voir.



♦ La Multiplication

Soit à multiplier 26 par 13.

On écrit 26 dans la colonne de gauche et 1 dans la colonne de droite.

26	1
52	2
104	4
208	8

Puis, à droite, on écrit $1 + 1$ soit 2 (duplication)

puis $2 + 2$ soit 4

puis $4 + 4$ soit 8.

On a $8 + 8 = 16$ que l'on n'écrit pas car il dépasse le multiplicateur 13.

A gauche, on compte alors $26 + 26$ soit 52

puis $52 + 52$ soit 104

et enfin $104 + 104$ ce qui fait 208.

On s'arrête face au 8, dernier nombre écrit à droite.

Reprenons le multiplicateur 13. Le plus grand nombre de droite contenu dans 13 est 8 ; $13 - 8 = 5$.

Le plus grand nombre de droite contenu dans 5 est 4 ; $5 - 4 = 1$

Ce qui donne $13 = 8 + 4 + 1$

On coche à gauche les nombres situés en face de 8 ; 4 ; 1.

Et on ajoute ces nombres cochés à gauche : $208 + 104 + 26$ ce qui donne 338.

C'est le produit de 26 par 13.

Il suffisait que le scribe sache effectuer des additions.

Inutile de connaître les tables de multiplication !

L'explication : $26 \times 13 = 26 \times (8 + 4 + 1) = 26 \times 8 + 26 \times 4 + 26 \times 1 = 338$.

Exercez-vous :

- Effectuez les multiplications suivantes à la mode égyptienne :

  38×17 ; 38×22 ; 38×124 ; 256×32 .

♦ La Division

Voici un exemple.

Soit à diviser 209 par 19.

19	1 –
38	2 –
76	4
152	8 –

À gauche, on écrit 19, puis 19 + 19 soit 38 (son double).

Puis 38+38 soit 76, puis 76 + 76 soit 152.

Et on s'arrête, car le double suivant dépasserait le dividende 209.

Dans la colonne de droite, on double à partir de 1 : 1 ; 2 ; 4 ; 8.

Le plus grand nombre de gauche contenu dans 209 est 152

$209 - 152 = 57$

Le plus grand nombre de gauche contenu dans 57 est 38 ; $57 - 38 = 19$

On coche dans la colonne de droite les nombres 8, 2 et 1 en face de 152, 38 et 19

$8 + 2 + 1 = 11$ donc $209 : 19 = 11$

Explication :

$209 = 152 + 38 + 19 = 19 \times 8 + 19 \times 2 + 19 \times 1 = 19 \times (8 + 2 + 1) = 19 \times 11$

Autrement dit le quotient de 209 par 19 est 11.

C'est un exemple simple car la division "tombe juste" !

♦ Fractions et division avec un reste

Essayons de même de diviser 224 par 17.

17	1
34	2
68	4
136	8

Après les duplications successives, on a

$$224 = 136 + 68 + 17 + 3$$

Soit $$224 = 17 \times (8 + 4 + 1) + 3$$

$$224 = 17 \times 13 + 3$$

Le quotient est 13 et le reste 3.

Exercez-vous :

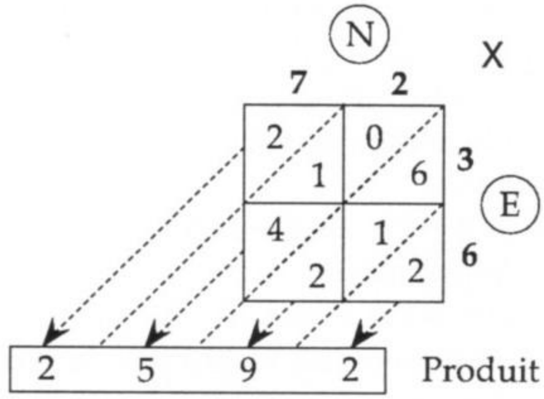
- Effectuer les divisions comme ci-dessus :

  $486 : 27$; $1015 : 29$; $1015 : 35$; $65536 : 64$.

4- Multiplication à « l'italienne »

Cette technique nous viendrait de Russie et de divers pays d'Europe Centrale. On la rencontre dans un traité d'arithmétique d'Al Kashi, du XVème siècle. Elle fut aussi utilisée à Venise, par des commerçants italiens, à la même époque ; on la désignait comme le procédé "per gelosia", allusion à la «Jalousie" des fenêtres italiennes.

♦ La technique



Pour multiplier 72 par 36, les facteurs sont placés en marge du carré :

72 au «Nord» N et 36 à l'«Est» E.

Le carré est divisé en 4 cases, on a tracé les diagonales de droite à gauche.

Dans le carré (2 ; 3), on marque le produit 6.

Dans le carré (7 ; 3) on marque le produit 21 comme indiqué.

Dans le carré (7 ; 6) on marque le produit 42 comme indiqué.

Dans le carré (2 ; 6) on marque le produit 12 comme indiqué.

Il reste à **ajouter** les nombres situés dans la même bande oblique séparée par deux diagonales.

Unité : 2 ; Dizaines : 6 + 1 + 2 soit 9 ; Centaines : 4 + 1 = 5 ; Mille : 2.

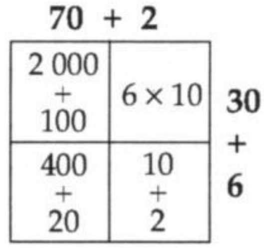
Le produit est **2 592**.

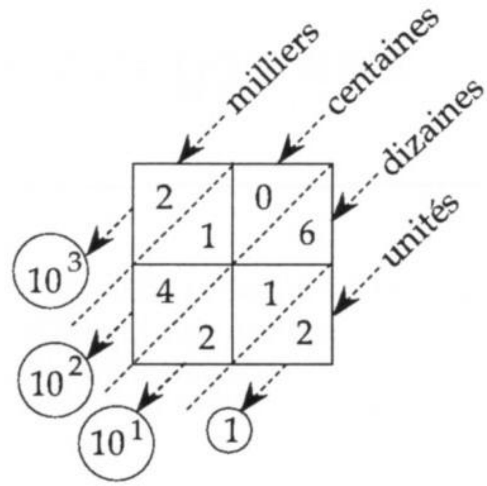
Comment ?

Chaque produit partiel est décomposé en unités, dizaines, centaines, milliers, placés dans la bande diagonale correspondante.

Ainsi $70 \times 6 = 420 = 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1$

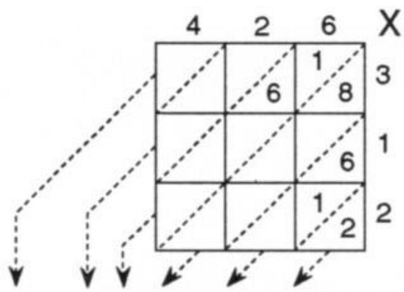
Pour les sommes en diagonale, il convient de tenir compte éventuellement des retenues !

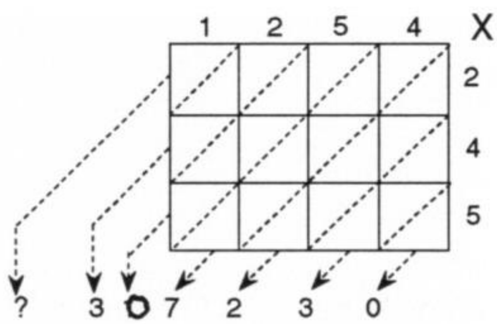




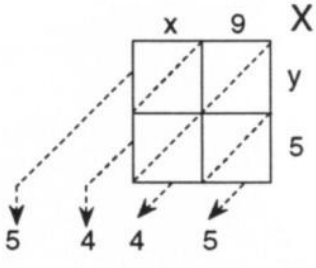
Exercez-vous :

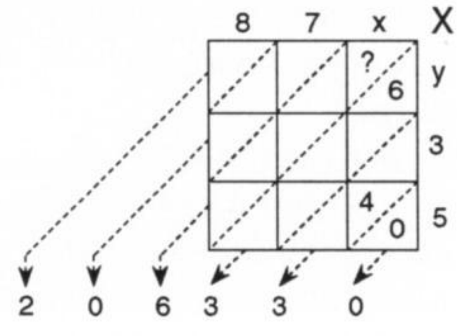
- Complétez et achevez les produits 426 × 312 et 1254 × 245





- Trouver ce qui manque !





5- Les réglettes de Néper

John Napier (dit Néper) (1550 - 1617) était baron et mathématicien écossais. On lui doit l'invention des logarithmes, mais aussi d'une table de multiplication originale, au moyen de baguettes qui portent son nom.

♦ Le principe de la baguette

Il y a d'abord la baguette marquée $\boxed{\times}$ pour le multiplicateur.

La baguette des "4" par exemple reproduit tout simplement notre table de multiplication sous la forme de cellules verticales, coupées par une diagonale.

En face de ($\times$ 2) on trouve $\boxed{0/8}$ $\quad 2 \times 4 = 8$

En face de ($\times$ 3) on trouve $\boxed{1/2}$

une dizaine, 2 unités : $3 \times 4 = 12$

et ainsi de suite jusqu'à ($\times$ 9) $\boxed{3/6}$

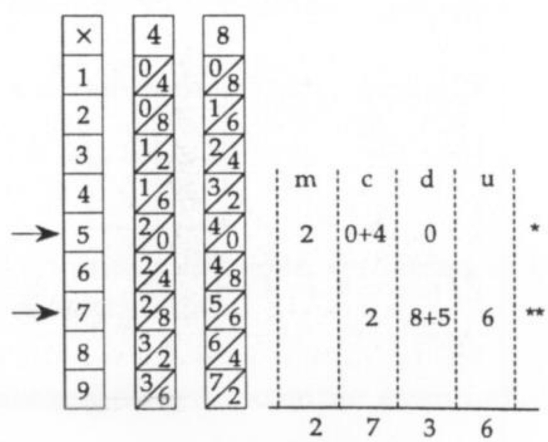
Le carré coupé par une diagonale rappelle tout à fait la multiplication "*per gelosia*" à l'italienne.

♦ Calculer 57×48

Placer les deux baguettes $\boxed{4}$ et $\boxed{8}$ côte à côte en face de la réglette $\boxed{\times}$.

Lire, face au 7 de la réglette $\boxed{\times}$ les produits partiels 28 et 56 marqués à droite.

Lire en face de 5, les produits partiels, avec le décalage qui convient puisque ce produit représente des dizaines.



* 20 centaines plus 40 dizaines
** 28 dizaines plus 56 unités

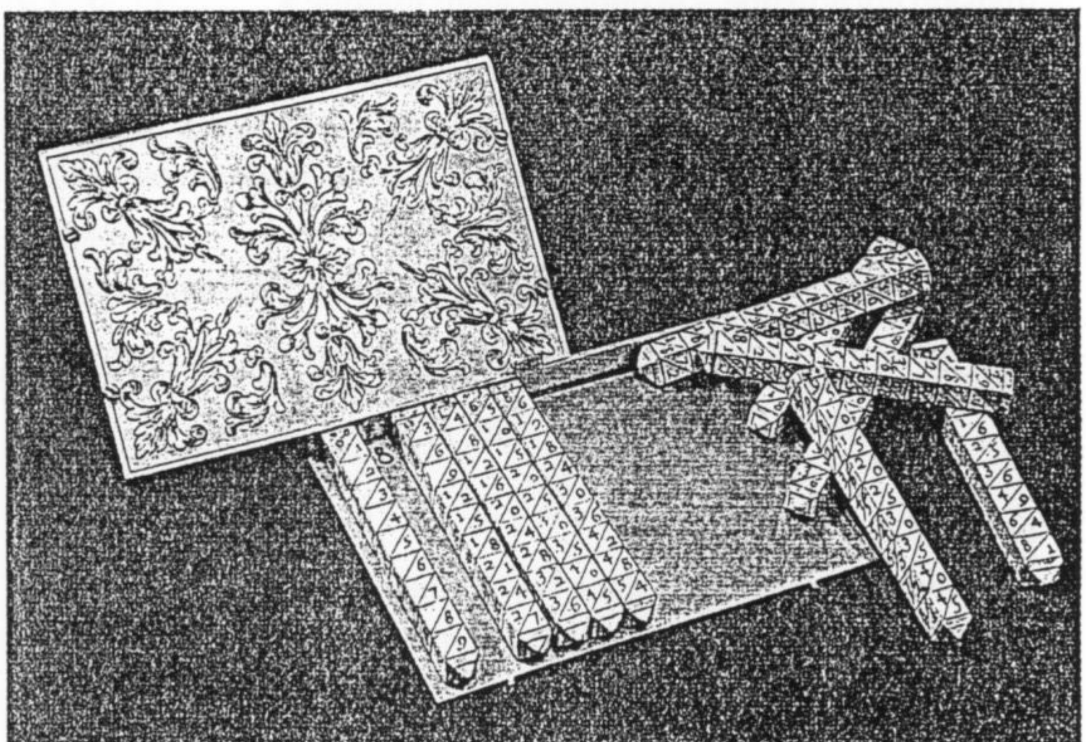
Il reste ensuite à effectuer les sommes, en tenant compte **du rang** des chiffres, sans oublier les retenues éventuelles.

Ces réglettes sont en quelque sorte des tables de multiplication "portatives". Mais il faut bien sûr quelque attention pour les additions finales et les rangs des différents produits.

Exercez-vous :

- Fabriquez une réglette $\boxed{\times}$ pour le multiplicateur puis les 9 réglettes, de 1 à 9, en prenant garde à la largeur des cellules qui doivent se placer face à face.
- Effectuer les calculs suivants :

63×27 ;	63×127 ;
603×27 ;	234×326 .



Les bâtons de Neper.

6_ Multiplier ... en divisant par 2

C'est un procédé curieux, pratiqué il y a fort longtemps, depuis les civilisations de la vallée du Nil et qui était encore utilisé il y a peu en Russie, en Afrique, en Ethiopie sur le marché ...

♦ Le procédé

Soit à multiplier 57 par 13.

57	**13**
28	~~26~~
14	~~52~~
7	104
3	208
1	416

Les deux facteurs sont placés côte à côte, séparés par un trait vertical (mais ce n'est pas obligatoire).

Dans la colonne de gauche (57), on **divise** par 2 – division euclidienne – le quotient étant marqué à la ligne qui suit, et on recommence avec ce nombre jusqu'à obtenir 1.

Dans la colonne de droite (13), on **multiplie** par 2, de ligne en ligne, le produit étant marqué sur la ligne suivante.

On s'arrête à la ligne marquée face au 1 à gauche.

À droite, on barre les résultats situés face à des **nombres pairs** situés à gauche : on barre donc 26 et 52.

La somme des résultats non barrés à droite donne le produit cherché !

$$13 + 104 + 208 + 416 = 741 \quad \text{soit } 57 \times 13 .$$

Pourquoi ?

Examinons ce qui se passe dans la colonne de gauche

$$57 = 2 \times 28 + 1 = 2 \times (2 \times 14 + 0) + 1 = 2 \times (2 \times (2 \times 7 + 0) + 0) + 1$$

$$57 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 3 + 1) + 0) + 0) + 1$$

$$57 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1 + 1) + 1) + 0) + 0) + 1$$

On a donc : $57 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 1$

Chaque fois qu'apparaît un quotient impair (reste 1), on obtient une puissance de 2 qui entre dans la décomposition de 57.

Si le quotient est pair (reste 0) c'est que la puissance de 2 correspondante n'entre pas dans cette décomposition.

Dans la colonne de droite, apparaissent les produits de 13 par les puissances de 2 successives.

$57 \times 13 = 13\,(2^5 + 2^4 + 2^3 + 1)$

$57 \times 13 = 13 \times 2^5 + 13 \times 2^4 + 13 \times 2^3 + 13$

57 i	**13**	
~~28 p~~	$\cancel{13 \times 2}$	$\times 2$
~~14 p~~	$\cancel{13 \times 2^2}$	$\times 2$
7 i	13×2^3	$\times 2$
3 i	13×2^4	$\times 2$
1 i	13×2^5	$\times 2$

Ce qui est astucieux, c'est que ces puissances de 2, utilisées de manière implicite, n'apparaissent nullement dans le calcul !

Exercez-vous :

- Calculez 13×31 puis 31×13 et examinez les différences entre ces deux calculs qui conduisent au même résultat.
- Pour calculer 18×32, il est préférable de choisir l'ordre 32×18 : pourquoi ? Comment s'écrit 32 à l'aide de puissances de 2 ?
- Calculer 256×17.
- Comment s'écrit 512 à l'aide de puissances de 2 ? Calculer 8×512.
- Ces décompositions ne sont pas sans analogie avec l'écriture d'un entier en base DEUX.

  Ainsi $57 = \overline{111001}$ base DEUX.

  Écrire en base DEUX : 13 ; 31 ; 32 ; 64 ; 256 ; 512 .

7 – D'autres techniques pour la multiplication

♦ Pour la **multiplication,** voici un algorithme ancien d'origine hindoue.

Exercez-vous :

1- Effectuez le produit 135 × 12 comme vous savez le faire.

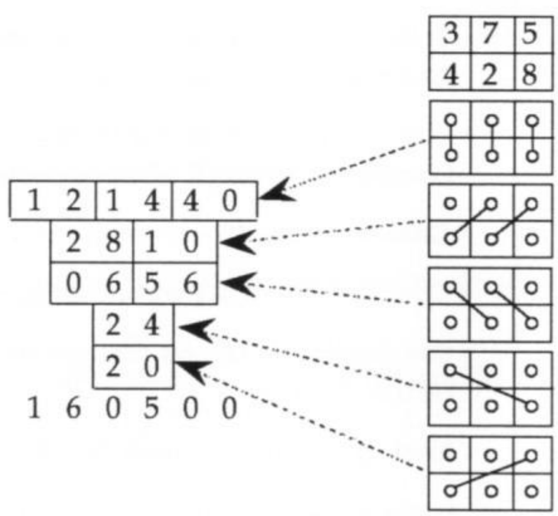
2- Commentez le produit de 135 par 12 présenté ci-contre ; en quoi cette méthode diffère-t-elle fondamentalement de la nôtre ?

3- Calculez de même les produits
147 × 15 ; 107 × 19 et 934 × 314.

1	3	5		
1	2			
1	2			→ 100 × 12
	3	6		→ 30 × 12
		6	0	→ 5 × 12
1	6	2	0	

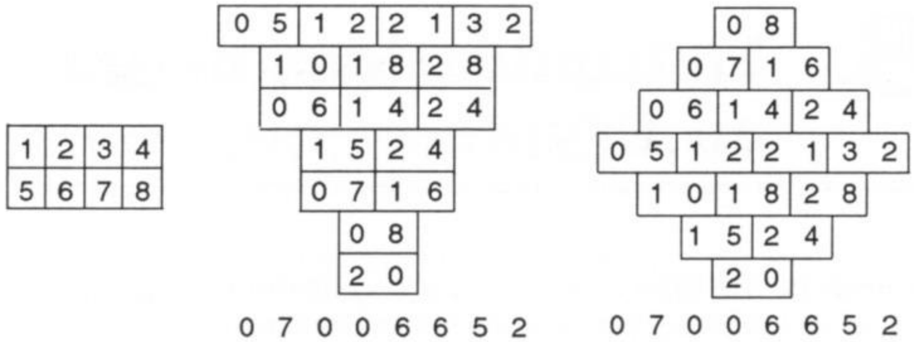
♦ Au XVIème siècle, on rencontre des techniques opératoires dites chiffre à chiffre ; elles sont intéressantes quant à l'algorithme utilisé.

Voici commenté schématiquement le produit de 375 par 428 :



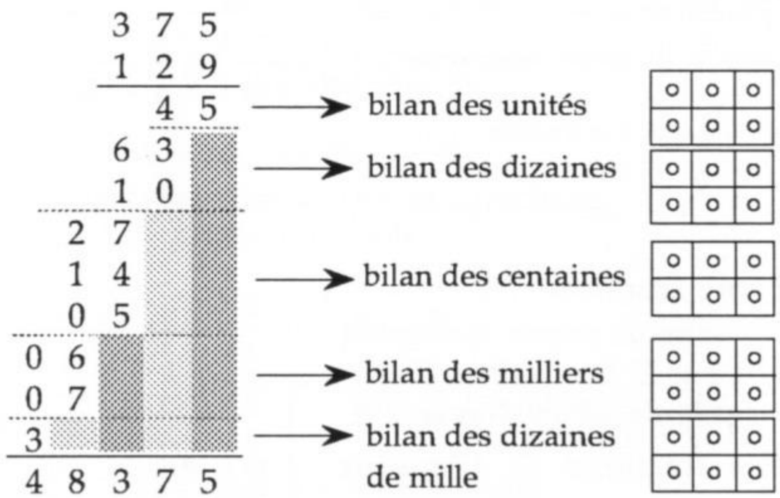
Exercez-vous :

1. Commentez cette disposition : bilan des unités, bilan des dizaines, bilan des centaines, etc.
2. Effectuez de même les produits : 456 × 321 ; 670 × 405 et 987 × 45.
3. Commentez les deux tableaux suivants représentant le calcul de 1234 × 5678.



Calculez les produits 3452 × 8645 et 9076 × 4502.

♦ Ces techniques **chiffre à chiffre** sont particulières et les dispositions varient selon la taille des nombres. Néanmoins, pour généraliser cette technique, il suffit de décider de faire successivement les bilans des unités, des dizaines, des centaines, des milliers, des dizaines de mille, etc.



Identifiez les différents produits en traçant les traits comme à la page de gauche.

Exercez-vous :

1- Calculez de même 234 × 562 et 674 × 109.

2- Simplifiez l'algorithme pour les produits de nombres à deux chiffres : 56 × 34 ; 76 × 13 . En déduire un algorithme simple pour calculer mentalement de tels produits.

8_ Multiplications de fractions en Égypte

Vous avez vu (3), comment, par duplications successives, les égyptiens effectuaient des multiplications et des divisions avec des entiers.

Les seules fractions utilisées étaient de numérateur 1, à l'exception de la fraction 2/3. Les multiplier était donc facile, puisque leur produit a encore comme numérateur 1.

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{3}$

Exercez-vous :

- Calculez, à la mode égyptienne $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{102}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)$ et vérifiez que ce produit est égal à la fraction $\frac{6}{85}$.

♦ Doubler une fraction

Il était nécessaire de savoir multiplier les fractions par 2. Les scribes disposaient pour cela de tables donnant le double des fractions $\frac{1}{n}$ (Papyrus Rhind). En voici un extrait :

La première colonne donne le dénominateur n de la fraction $\frac{1}{n}$ avec n impair.

La seconde donne les dénominateurs tels que $2\times\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots$

Ainsi sur la table, en face de 21, on lit 14 et 42 soit $2\times\frac{1}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$.

Vérifiez le calcul ci-dessus.

n						
5		3		15		
7		4		28		
9		6		18		
11		6		66		
13	8		52		104	
15		10		30		
17	12		51		68	
19	12		76		114	
21		14		42		
23	12			276		
25	15			75		
81		54		162		
83	60		332		415	498
85		51		255		
87		58		174		
89	60		356		534	890
91		70		130		
93		62		186		
95	60		380		570	
97	56		679		776	
99		66		198		
101	101		202		303	606

Exercez-vous :

- Pourquoi, dans le tableau, n'a-t-on que des valeurs impaires de n ?
- Trouver et vérifier le double des fractions suivantes :

$$\frac{1}{9}\ ;\ \frac{1}{15}\ ;\ \frac{1}{25}\ ;\ \frac{1}{97}\ ;\ \frac{1}{16}\ ;\ \frac{1}{24}\ .$$

- Pour $2 \times \frac{1}{15}$ on peut trouver d'autres solutions : $\frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{8} + \frac{1}{120}$.

  Vérifiez-le. Mais on ne sait pas pourquoi la table a privilégié une solution plutôt qu'une autre ...

♦ Multiplier une fraction par un nombre entier

Pour cette opération, les scribes mettaient aussi en pratique la méthode de duplication appliquée aux fractions en utilisant la table dont nous avons donné un extrait.

Soit à calculer $\mathbf{8} \times \frac{10}{9}$.

$\frac{10}{9} = \mathbf{1} + \frac{1}{9}$	**1**
$\mathbf{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	**2**
$\mathbf{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$	**4**
$\mathbf{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	**8**

On écrit $\frac{10}{9} = \mathbf{1} + \frac{1}{9}$ $\rightarrow$ colonne face au 1.

On double : 2 ; 4 ; 8 et on s'arrête.

On double en écrivant chaque fois des fractions de numérateur 1 en utilisant la table :

$2 \times \left(\mathbf{1} + \frac{1}{9}\right)$ soit $\mathbf{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$2 \times \left(\mathbf{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}\right)$ soit $\mathbf{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$2 \times \left(\mathbf{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)$ soit $\mathbf{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

On a donc $\mathbf{8} \times \frac{10}{9} = \mathbf{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

Exercez-vous :

- Vérifiez les calculs intermédiaires ci-dessus.
- Calculez $A = 7 \times \frac{16}{5}$ en remarquant que $\frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5}$.

  Montrez que $A = 22 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

  Vérifiez ce résultat avec vos calculs habituels sur les fractions.
- Calculez $7 \times \frac{19}{8}$.

9_ Additions de fractions babyloniennes

Les babyloniens utilisaient la numération sexagésimale, en particulier pour les nombres fractionnaires, comme nous le faisons de nos jours pour les durées. Ainsi :

3 ; 17 ; 41 signifiait $3+\frac{17}{60}+\frac{41}{60^2}$ $(3 + 17' + 41'')$

14 ; **3** ; 17 ; 41 ; 30 signifiait $14\times 60+3+\frac{17}{60}+\frac{41}{60^2}+\frac{30}{60^3}$.

Les fractions ont pour dénominateur une puissance de 60 et un numérateur inférieur à 60.

60 unités d'un certain rang valent 1 unité du rang précédent
1 unité d'un certain rang vaut 60 unités du rang suivant.

♦ **De la numération babylonienne vers la numération décimale**

Soit a = **5** ; 14 ; 5 . Cherchons à écrire a dans le système décimal.

On a : $5+\frac{14}{60}+\frac{05}{60^2}$ en faisant les divisions, avec six décimales, on trouve

$$a \approx 5 + 0{,}233\,333 + 0{,}001\,389 \quad ; \quad a \approx 5{,}234\,722 .$$

♦ **De la numération décimale vers la numération babylonienne**

b = 76,84 - Cherchons comment les babyloniens écrivaient b.

Pour la partie entière 76 : 76 = 60 + 16 qui s'écrit **1** ; **16**.

Pour la partie décimale 0,84, on doit chercher combien 0,84 contient de soixantièmes

$$0{,}84=\frac{60\times 0{,}84}{60}=\frac{50{,}4}{60}=\frac{50}{60}+\frac{0{,}4}{60}=\frac{50}{60}\times\frac{60\times 0{,}4}{60^2}$$

0,84 = **0** ; 50 ; 24 . Ainsi b = **1** ; **16** ; 50 ; 24 .

Exercez-vous :

- Écrire dans le système décimal **6** ; 31 ; 17 et **17** ; 30 ; 40.
- Écrire en babylonien les nombres 1,4142 et 2,2364 ; valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{5}$.

♦ Addition chez les babyloniens

On additionne les unités de même rang en commençant par la droite. Lorsque, à un certain rang, on obtient une somme supérieure à 60, on convertit 60 unités de ce rang en une unité du rang précédent.

Exemple : a = **3** ; 27 ; 45 ; 53 b = **6** ; 41 ; 17 ; 25 . Calculer S = a + b

$$\begin{array}{rrrrr}
 & \mathbf{3} & 27 & 45 & 53 \\
+ & \mathbf{6} & 41 & 17 & 25 \\
\hline
 & \mathbf{9} & 08 & 62 & 78 \\
 & \mathbf{9} & 68 & 63 & 18 \\
 & & & & \\
 & \mathbf{9} & 69 & 03 & 18 \\
 & \mathbf{10} & 09 & 03 & 18
\end{array}$$

$$\frac{78}{60^3}=\frac{60+18}{60^3}=\frac{1}{60^2}+\frac{18}{60^3}$$

$$\frac{63}{60^2}=\frac{60+3}{60^2}=\frac{1}{60}+\frac{3}{60^2}$$

$$\frac{69}{60}=\frac{60+9}{60}=1+\frac{9}{60}$$

s = 10 ; 09 ; 03 ; 18

De même qu'en numération décimale, lorsqu'un total dépasse 10 il y a retenue. En numération babylonienne, c'est lorsqu'un total dépasse 60 qu'il y a retenue.

♦ Soustraction chez les babyloniens

On fait la soustraction des unités de même rang en commençant par la droite. Pour rendre possible certaines soustractions, on ajoute 60 à ce rang en enlevant 1 au rang précédent.

Exemple : a = **6** ; 23 ; 47 ; 25 ; b = **2** ; 33 ; 54 ; 23 . Calculez d = a – b.

$$\begin{array}{rrrr}
\mathbf{6} & 23 & 47 & 25 \\
-\,\mathbf{2} & 33 & 54 & 23 \\
\hline
\end{array}
\quad \text{revient à} \quad
\begin{array}{rrrr}
\mathbf{5} & 82 & 107 & 25 \\
-\,\mathbf{2} & 33 & 54 & 23 \\
\hline
\mathbf{3} & 49 & 53 & 02
\end{array}$$

d'où d = **3** ; 49 ; 53 ; 02

Remarquer l'analogie avec les retenues dans la soustraction décimale.

Exercez-vous :

- Voici trois nombres babyloniens :

  x = **18** ; 41 ; 13 ; y = **7** ; 21 ; 57 ; 11 et z = **15** ; 55 .

  Calculez x + y ; x + z ; x – y et x – z.

10_ Multiplication des fractions à Babylone

Pour effectuer des produits d'entiers, les scribes babyloniens disposaient de tables donnant des produits a × b pour a et b inférieurs à 60. Pour simplifier la présentation, les calculs seront effectués dans notre système de numération.

	×	2	3
(7)	▽▽▽▽▽▽▽	◁▽▽▽▽	◁◁▽
(8)			

♦ **La multiplication chez les babyloniens**

a) Multiplication par un entier

Soit à calculer le produit p de (**3** ; 35 ; 28) par 7.
On utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.

$$p = 7 \times \left(\mathbf{3} + \frac{35}{60} + \frac{28}{60^2}\right) = \mathbf{7 \times 3} + \frac{7 \times 35}{60} + \frac{7 \times 28}{60^2}$$

$$p = 21 + \frac{245}{60} + \frac{196}{60^2}$$

On se ramène à des numérateurs inférieurs à 60.

$$p = \mathbf{21} + \frac{4 \times 60 + 5}{60} + \frac{3 \times 60 + 16}{60^2}$$

$$p = \mathbf{21} + 4 + \frac{5+3}{60} + \frac{16}{60^2} = \mathbf{25} + \frac{8}{60} + \frac{16}{60^2} \qquad p = \mathbf{25} \,;\, 08 \,;\, 16$$

b) Cas particulier de la multiplication par 60

Soit à calculer p′ le produit de (**8** ; 17 ; 13 ; 25) par 60 :

$$p' = 60 \times \left(\mathbf{8} + \frac{17}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{25}{60^3}\right)$$

$$p' = \mathbf{60 \times 8} + \mathbf{17} + \frac{13}{60} + \frac{25}{60^2} \qquad p = \mathbf{8} \,;\, \mathbf{17} \,;\, 13 \,;\, 25$$

Comparez avec la multiplication par 10 en système décimal.

c) Le produit de deux nombres quelconques

Soit par exemple $a = \mathbf{2} ; 25$ et $b = \mathbf{14} ; 12 ; 17$

On veut calculer le produit $a \times b$. On utilise la distributivité.

$$a \times b = \left(2 + \frac{25}{60}\right) \times \left(14 + \frac{12}{60} + \frac{17}{60^2}\right)$$

$$= \left(2 \times 14 + \frac{2 \times 12}{60} + \frac{2 \times 17}{60^2}\right) + \left(\frac{25 \times 14}{60} + \frac{25 \times 12}{60^2} + \frac{25 \times 17}{60^3}\right)$$

d'où

$$a \times b = 28 + \frac{24 + 350}{60} + \frac{34 + 300}{60^2} + \frac{425}{60^3}$$

$$= 28 + \frac{374}{60} + \frac{334}{60^2} + \frac{425}{60^3}$$

$374 = (6 \times 60) + 14$

$334 = (5 \times 60) + 34$

$425 = (7 \times 60) + 5$

$$\text{et } ab = 28 + \left(6 + \frac{14}{60}\right) + \left(\frac{5}{60} + \frac{34}{60^2}\right) + \left(\frac{7}{60^2} + \frac{5}{60^3}\right)$$

$$= 28 + 6 + \frac{19}{60} + \frac{41}{60^2} + \frac{5}{60^3}$$

soit $ab = \mathbf{34} ; 19 ; 41 ; 5$.

Cette méthode de multiplication permet de calculer le carré d'un nombre fractionnaire.

Exercez-vous :

- Sur la table ci-contre, on a effectué le produit de **3** ; 25 par **2** ; 4 en effectuant les produits partiels pour les différents rangs d'unités.
  Analysez ces calculs.
- Vérifiez que si $a = \mathbf{1} ; 48$
  alors $a^2 = \mathbf{3} ; 14 ; 24$.
- $b = \mathbf{1} ; 43 ; 50$. Calculez b^2.
- $x = \mathbf{18} ; 41 ; 13$
  $y = \mathbf{7} ; 21$
  $z = \mathbf{15} ; 55$.
  Calculez xy ; xz et yz .

	2	4
3	6	12
25	50	100 1,40

6 ; 62 ; 100

$$\mathbf{6} + \mathbf{1} + \frac{2}{60} + \frac{1}{60} + \frac{40}{60^2}$$

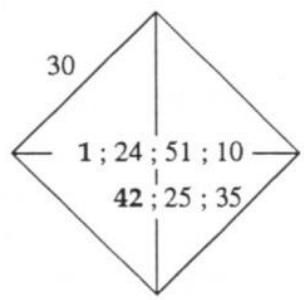
soit **7** ; 3 ; 40

11 – Racine carrée

1– À Babylone

Le calcul de la racine carrée se fait de nos jours simplement par l'utilisation de la touche $\boxed{\sqrt{}}$ d'une calculatrice. Les premières calculatrices ne sont apparues qu'après 1960 ; avant leur apparition c'est "à la main" qu'il fallait extraire les racines carrées.

♦ Voici une reproduction d'une tablette babylonnienne (3000 av. J.-C.) et sa "traduction".



* Écrivez sous forme décimale le nombre **1** ; 24 ; 51 ; 10 figurant sur la diagonale du carré (voir fiche 10). Quel est ce nombre ?

* En utilisant le système sexagésimal, multipliez ce nombre par 30. Retrouvez ce nombre sur le dessin ; quelle longueur représente-t-il ?

♦ Racine carrée à Babylone

Pour trouver une racine carrée, les babyloniens utilisaient des tables de carrés. Vous avez vu précédemment la difficulté d'effectuer des multiplications dans le système babylonien.

La réalisation de ces tables de carrés demandait beaucoup de temps.

Exercez-vous :

- Vérifiez que $(\mathbf{1} ; 40)^2 = \mathbf{2} ; 46 ; 40$.
- Utilisez la table 1 ci-contre pour trouver $\sqrt{3}$ à une "minute" près par défaut, puis la table 2 pour trouver $\sqrt{3}$ à une "seconde" près.
- Quels carrés faudrait-il calculer pour obtenir les autres chiffres de $\sqrt{3}$ en écriture babylonienne ?

n		n^2
1 40	-----	2 46 40
1 41	-----	2 50 1
1 42	-----	2 53 24
1 43	-----	2 56 49
1 44	-----	3 0 16
1 45	-----	3 3 45
1 46	-----	3 7 16
1 47	-----	3 10 49
1 48	-----	3 14 24
1 49	-----	3 18 1
1 50	-----	3 21 40

Table 1

n		n^2
1 43 50	-----	2 59 41 21 40
1 43 51	-----	2 59 44 49 21
1 43 52	-----	2 59 48 17 4
1 43 53	-----	2 59 51 44 49
1 43 54	-----	3 59 55 12 36
1 43 55	-----	3 59 58 40 25
1 43 56	-----	3 0 2 8 16
1 43 57	-----	3 0 5 36 9
1 43 58	-----	3 0 9 4 4
1 43 59	-----	3 0 12 32 1

Table 2

2– Méthode de Héron

(Héron d'Alexandrie, 1er siècle de notre ère)

Le calcul de la racine carrée est lié à la recherche du côté d'un carré dont on connaît l'aire.
Voici une méthode utilisée, sous des forme diverses, par les Grecs, les Hindous et les Arabes au début de notre ère.
Soit à calculer le côté d'un carré dont l'aire est 420, c'est-à-dire $\sqrt{420}$.
420 est voisin de 20^2.
Pour un rectangle d'aire 420, si une dimension est 20, l'autre est 420 : 20 = 21.
On prend la demi-somme de ces deux dimensions : $\frac{20+21}{2} = 20{,}5$

$(20{,}5)^2 = 420{,}25$; 20,5 est une valeur approchée du côté cherché.
Pour avoir plus de précisions, il suffit de recommencer en partant de 20,5 :

$420 : 20{,}5 = \square$; $\frac{\square + 20{,}5}{2} = \Delta$. Calculez $\square$, Δ et Δ^2.

On voit apparaître un algorithme pour calculer $\sqrt{420}$.

$\boxed{\text{on choisit } a_1} \longrightarrow \boxed{\text{on calcule } \frac{420}{a_1}} \longrightarrow \boxed{\text{puis } \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{420}{a_1}\right) \text{ notée } a_2}$

On obtient ainsi une valeur approchée a_2 de $\sqrt{420}$.
Il suffit de recommencer en remplaçant a_1 par a_2.
Voici les résultats successifs obtenus en choisissant $a_1 = 20$:

20 ; 20,5 ; 20,493902 ; 20,493902

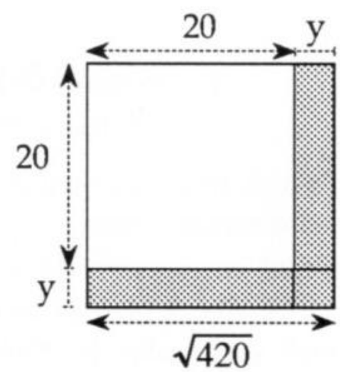
Comparez ce résultat avec la valeur de $\sqrt{420}$ donnée par une calculatrice.

Exercez-vous :

- Utilisez cette méthode pour calculer $\sqrt{2000}$.
- Calculez par cette méthode $\sqrt{400}$ en prenant $a_1 = 10$. Combien faut-il d'étapes pour arriver au résultat que vous connaissez ?

3– Méthode de Nicolas Rhabdas (1341)

Reprenons l'exemple du carré K d'aire 420. Dessinons à l'intérieur un carré de côté 20. Pour arriver au côté du carré K, il faut augmenter 20 d'une certaine quantité y.



carré K

L'aire grisée est la différence $420 - 20^2$;

elle est égale à

$$20 \times y + y^2 + 20 \times y \quad \text{soit} \quad 2 \times 20 \times y + y^2.$$

En négligeant y^2, on aura une valeur approchée de y en divisant $420 - 20^2$ par 2×20.

On voit apparaître un algorithme pour calculer $\sqrt{A}$ à partir de a :

$\boxed{\text{choisir } a} \longrightarrow \boxed{\text{calculer } y = \dfrac{A - a^2}{2a}} \longrightarrow \boxed{\text{remplacer } a \text{ par } a + y}$

Le tableau ci-contre donne les trois premières étapes de la réalisation de cet algorithme. Expliquez pourquoi, à la deuxième étape, on trouve une valeur négative de y.

a	y	a + y	$(a+y)^2$
20	0,5	20,5	420,25
20,5	-0,25	20,25	410,06
20,25	0,24537	20,49537	420,06

En remarquant que $20{,}5^2 > 420$, on aurait pu éviter ce résultat négatif en choisissant 20,4 comme valeur de y à la deuxième étape.

Cette méthode est, en apparence différente de la méthode de Héron, cependant :

$$a + y = a + \frac{A - a^2}{2a} = \frac{A + a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right) \cdot\cdot$$

4– Racine carrée à notre époque

Voici extraite du Larousse encyclopédique (édition 1963) et exposée sur un exemple, la règle qu'apprenaient autrefois les élèves de troisième.

« Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier quelconque 223 416 :

1°/ On partage ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite (22 . 34 . 16) [la dernière tranche à gauche n'a parfois qu'un chiffre].

2°/ On écrit à la racine le plus fort chiffre (4) dont le carré (16) soit susceptible de se soustraire de la tranche de gauche (22).

3°/ À droite du reste (6), on abaisse la tranche suivante (34), dont on sépare par un point le chiffre à droite (63.4) : la partie de gauche (63) forme un dividende, et l'on prend pour diviseur le double du nombre déjà écrit à la racine (8).

4°/ Le quotient (7) est le chiffre suivant de la racine, ou un chiffre trop fort ; on l'essaye en l'inscrivant à droite du diviseur et en multipliant le nombre ainsi formé (87) par ce même chiffre (7), et si ce produit (609) peut se retrancher du nombre (634) réalisé par le dividende et le chiffre séparé, le chiffre essayé est exact, et on l'inscrit à la racine, sinon on le diminue jusqu'à ce qu'on arrive à une soustraction possible.

5°/ On répète les deux dernières opérations jusqu'à ce que toutes les tranches du nombre aient été employés.

22.34.16	472	
6 3.4	87	942
251.6	7	2
63 2	609	1884

Dans la pratique, on se dispense d'ordinaire d'écrire les produits (609, 1884) et l'on fait immédiatement la soustraction, comme dans la division.

Pour faire la preuve de l'opération, au carré de la racine trouvée 472 on ajoute le reste 632, et l'on doit retrouver le nombre 223 416. »

On peut remarquer que cette règle est voisine de la méthode de RHABDAS. Pour calculer $\sqrt{223\,416}$ on choisit successivement pour a : 400, 470 puis 472 ; on pourrait poursuivre en abaissant des tranches de deux zéros pour avoir les premières décimales de $\sqrt{223\,416}$.

12– L'invention des logarithmes

Au cours du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le développement du commerce et celui de l'astronomie ont conduit à la nécessité de disposer d'un outil de calcul permettant d'effectuer rapidement la multiplication et la division de grands nombres.

L'invention des logarithmes répondit à cette exigence. Elle est attribuée à l'écossais John Napier ou Neper (1550-1617) et à Briggs (1556-1630) qui inventa les logarithmes décimaux.

Dès l'origine, les tables de logarithmes connurent un succès important car elles permettaient de traiter rapidement à la fois les calculs astronomiques et des problèmes d'intérêts composés.

Voici un extrait d'un texte de Briggs :

> *« Les logarithmes sont des nombres inventés pour rendre plus facile le calcul des questions d'arithmétique et de géométrie... avec leur aide, toutes les multiplications et divisions ennuyeuses sont évitées et remplacées par l'addition en ce qui concerne la multiplication et par la soustraction en ce qui concerne la division. Les curieuses et laborieuses extractions de racine sont aussi effectuées avec une grande facilité... En un mot, toutes les questions non seulement d'arithmétique et de géométrie, mais aussi d'astronomie sont résolues par eux plus simplement et plus facilement... »*

♦ La fonction logarithme décimal

Mettons en correspondance les termes de deux suites, l'une géométrique de raison 10, l'autre arithmétique de raison 1, la suite des entiers :

$$\begin{array}{lccccccccccc}
(S_1) & \dots\ 10^{-n} & \dots & 10^{-2} = 0{,}01 & 10^{-1} = 0{,}1 & 10^0 = 1 & 10^1 & 10^2 & \dots & 10^n & \dots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
(S_2) & \dots\ -n & \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots
\end{array}$$

n désigne ici un entier naturel

Chaque terme de la suite S_2 est le logarithme décimal du terme correspondant de la suite S_1. Par exemple : $\log 10 = 1$; $\log 1 = 0$; $\log 10^3 = 3$ ou $\log 0{,}0001 = -4$.

Quelles sont les propriétés de cette nouvelle fonction ?

Par exemple : $\log 10^2 = 2$; $\log 10^3 = 3$;

$$\log (10^2 \times 10^3) = \log 10^5 = 5 = 2 + 3 = \log 10^2 + \log 10^3.$$

De même $\frac{10^2}{10^3} = \log 10^{-1} = -1 = 2 - 3 = \log 10^2 - \log 10^3$.

La fonction logarithme remplace des multiplications par des additions et des divisions par des soustractions. c'est-à-dire, x et y désignant des puissances de 10 :

$$\log xy = \log x + \log y \text{ et } \log \frac{x}{y} = \log x - \log y.$$

Ces propriétés sont vraies pour des réels x et y quelconques, strictement positifs.

Notre définition comporte des trous !

Comment calculer le logarithme d'un nombre qui n'est pas une puissance de 10 ? Que devient la première formule si x = y ?

$2 \log x = \log x^2$. Remplaçons x par $\sqrt{a}$, on obtient : $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$.

Ainsi : $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$

De même : $\log \sqrt{0{,}001} = \frac{1}{2} \log (10^{-3}) = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

et $\log \sqrt{100000} = \frac{1}{2} \log 10^5 = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

Voici une nouvelle propriété de la fonction log :

$$\log \sqrt{xy} = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$$

Cette propriété permet de trouver une approximation du logarithme de n'importe quel nombre positif. Elle a été utilisée pour construire les premières tables de logarithmes.

Voici comment Euler décrit la méthode dans l'« *Introduction à l'Analyse Infinitésimale* » (1748) :

> On ne peut donc obtenir les logarithmes des nombres que par approximation au moyen des fractions décimales ; & ils approcheront d'autant plus d'être exacts, qu'ils auront été calculés avec plus de chiffres décimaux. Il ſera poſſible, de cette maniere, d'avoir à-peu-près le logarithme de tout nombre, par la ſeule extraction d'une racine quarrée. En effet, puiſqu'en ſuppoſant $ly = z$, & $lv = x$; $l\sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$,

Exercez-vous :

1- Que signifie la lettre "ℓ" dans le texte d'Euler ci-dessus ?

2- Sachant que log 2 = 0,30103, trouver une valeur approchée de log $\sqrt{2}$; log $\sqrt{\sqrt{2}}$.

3- On se propose de trouver un encadrement de log (70). Sachant que $10 < 70 < 10^2$, encadrer log 70 par deux entiers.

Pour aller plus loin, sachant que $\sqrt{10} \approx 3,16$, montrez que $10^{3/2} < 70 < 10^2$.
En déduire un autre encadrement de log 70.

Pour affiner cet encadrement, on pourrait continuer ce procédé qui nécessite des calculs de racines carrées de plus en plus compliqués.

13_ Tables de logarithmes décimaux

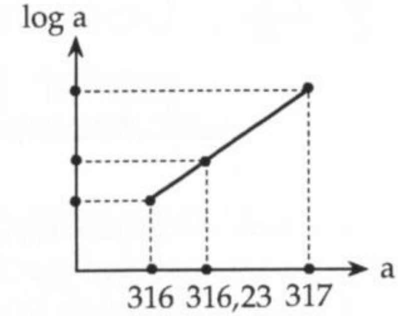
Pour certains nombres positifs a, des tables donnaient une valeur approchée de log a. Voici un extrait de cette table : log a est donné ici avec 4 décimales.

a	log a
1	......
2	0,3010
3	0,4771
4	......
5	0,6990
6	......
7	0,8451
8	......
9	......
10	......
316	2,4997
317	2,5011

Exercez-vous :

- Calculez les logarithmes qui manquent jusqu'à 10 en utilisant les propriétés admises des logarithmes décimaux. Vous allez maintenant utiliser cette table.
- Après avoir décomposé 525 en produit de facteurs premiers, calculez log 525.
- Calculez log 50 000 ; log 5 000 000 ; log 0,000 5...
- On pose $B = \frac{9\sqrt{5}}{7}$. Calculez log B.
- Calculez le logarithme décimal de 2,5 de plusieurs façons...

♦ Calcul de log 316,23



log 316 et log 317 sont donnés par la table.
On a $\log 316 < \log 316{,}23 < \log 317$.
On procède par interpolation linéaire c'est-à-dire que l'on admet la proportionnalité entre les écarts des nombres et les écarts de leurs logarithmes

Δa Δ(log a)	317 – 316 = 1 log 317 – log 316	316,23 – 316 = 0,23 log 316,23 – log 316

Calculez les écarts des logarithmes et en déduire log 316,23.
Calculez de même une valeur approchée de log 2,35.

♦ *Problème inverse :* Trouver un nombre connaissant son logarithme décimal

Si le log ne figure pas dans la table, on utilise le même procédé d'interpolation linéaire en encadrant le logarithme donné par deux log figurant dans la table.

- Soit à calculer b tel que $\log b = 0{,}49$.
  On remarque que $\log 3 < \text{lob } b < \log 4$ donc $3 < b < 4$.

Δb Δ(log b)	4– 3 = 1 0,6020 – 0,4771	b – 3 0,49 – 0,4771

  En déduire une valeur approchée du nombre b.

- On avait $B = \dfrac{9\sqrt{5}}{7}$ et vous avez calculé log B.

  Trouver une valeur approchée de B au moyen des tables. Comparer à la valeur approchée donnée par votre calculatrice.

- Calculer le logarithme décimal de 2^{63}. En déduire le nombre des chiffres de 2^{63}.

14_ Les congruences de Gauss pour trouver un reste

La division euclidienne est l'opération qui, au couple d'entiers naturels a et b, associe le quotient q et le reste r définis par $a = bq + r$ avec $r < b$.
Connaître le reste r de la division de a par b permet de savoir si a est divisible par b (reste $r = 0$).

♦ **Pour b = 9, le caractère de divisibilité par 9** (idem par 3) permet de répondre à cette question sans faire la division ; rappelons : «Le reste de la division d'un naturel par 9 est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 9» ; 123 456 789 est-il divisible par 9 ?

123 456 789 a même reste que $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$; 45 a même reste que $4+5 = 9$ donc 123 456 789 est divisible par 9 …

♦ Pour d'autres diviseurs, par exemple **b = 7,** il semble qu'il faille faire la division par b pour répondre à la question ; ainsi :

- $123 = 7 \times 17 + 4 \rightarrow 4$ est le reste de la division de 123 par 7
- $123^2 = 15\,129 = 2\,161 \times 7 + 2 \rightarrow 2$ est le reste de la division de 123^2 par 7
- $123^3 = 1\,860\,867 = 265\,838 \times 7 + 1 \rightarrow 1$ est le reste de la division de 123^3 par 7.

La technique opératoire habituelle est inopérante pour déterminer par exemple les restes par 7 de 123^{123} de 1999^{2000} …

Gauss a publié en 1801 un ouvrage d'arithmétique intitulé « *Disquisitiones Arithmeticae* », il y précise la notion de congruence qui permet de répondre à ces questions sans faire appel à des calculs astronomiques …
Voici le texte de Gauss qui définit cette notion ; les nombres qui interviennent sont ici des entiers relatifs :
« *Si un nombre c divise la différence des nombres a et b, a et b sont dit congrus suivant c … le nombre c s'appelle le module.* »
On peut aussi traduire cela par : "a – b est un multiple de c."

♦ **Notation**

Nous désignerons la congruence de deux nombres par le signe ≡ , en y joignant, lorsqu'il en sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-7 \equiv 15 \pmod{11}$, $-16 \equiv 9 \pmod{5}$.
En effet, $(-7) - 15 = -22$ est un multiple de 11 ; $(-16) - 9 = -25$ est un multiple de 5.

Exercez-vous :

1- Contrôlez les congruences suivantes :

$47 \equiv 15 \pmod 8$; $123 \equiv 4 \pmod 7$; $1999 \equiv 1 \pmod 9$.

2- Les congruences suivantes sont fausses ; dites pourquoi, sans faire de calculs :

$44^{45} \equiv 10 \pmod 2$; $1999 \equiv 0 \pmod 9$.

3- Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $a \equiv r \pmod b$.

4- Un entier inférieur à 10000 peut s'écrire $\overline{mcdu}$;

montrez que $\overline{mcdu} \equiv m + c + d + u \pmod 9$.

De même $\overline{mcdu} \equiv m + c + d + u \pmod 3$. En généralisant, vous retrouverez les caractères de divisibilité par 9 et par 3.

5- La relation de congruence n'a pas les mêmes propriétés que la relation d'égalité.

- Contrôlez que $34 \equiv 13 \pmod 7$ et $10 \equiv 3 \pmod 7$;
  puis que $34 + 10 \equiv 13 + 3 \pmod 7$.

  On démontre les théorèmes suivants :

  $A \equiv B \pmod m$ et $C \equiv D \pmod m$ entraîne $A \pm C \equiv B \pm D \pmod m$.

  $A \equiv B \pmod m$ et k entier entraîne $kA \equiv kB \pmod m$.
- Contrôlez que $34 \times 10 \equiv 13 \times 3 \pmod 7$

  On démontre $A \equiv B \pmod m$ et $C \equiv D \pmod m$ entraîne $AC \equiv BD \pmod m$.

  $A \equiv B \pmod m$ entraîne $A^n \equiv B^n \pmod n$ où n est un entier positif.
- Trouvez un contre-exemple pour montrer que la propriété suivante est fausse :
  $kA \equiv kB \pmod m$ entraîne $A \equiv B \pmod m$ où k est un entier non nul.

♦ Problème de divisibilité

Les congruences permettent donc de trouver des résultats que le simple calcul (addition et multiplication) ne peut donner.

Exemple : $7 \equiv 1 \pmod 3$ écriture apparemment compliquée pour dire que $7 - 1$ est un multiple de 3.

On peut en déduire que $7^{2000} \equiv 1 \pmod 3$ que l'on énonce :

« Le reste de la division de 7^{2000} par 3 est 1 »

ou encore : « $7^{2000} - 1$ est un multiple de 3 » …

Exercez-vous :

1- Pour chaque cas, trouvez le plus petit entier n tel que :

$4^n \equiv 1 \pmod 7$; $6^n \equiv 1 \pmod 7$; $123^n \equiv 1 \pmod 7$.

2- Calculez le reste de la division par 7 des nombres :

$6^{2\times 999} + 4^{3\times 888}$; $6^{2\times 2001} + 4^{3\times 2002} - 2$.

3- Trouvez le reste de la division par 7 du nombre 1999^{2002}. Pour cela :

– trouvez le plus petit entier a tel que $1999 \equiv a \pmod 7$;

– étudiez les restes des divisions par 7 des puissances successives de a … jusqu'à obtenir 1 ; et concluez !

4- Quel est le reste de la division par 7 de 123^{123} ?

Sommaire