Galion Thèmes

Brins d'Histoire des Maths

4. À petits pas vers l'Algèbre

Extrait d'un ouvrage arabe

© GALION – 2000

15, quai André Lassagne – 69001 LYON

ISBN : 2-912-209-28-5

Sur l'Histoire de l'Algèbre

*(extrait de **"l'Encyclopédie méthodique"**)*

« Quant à l'origine de cet art, nous n'avons rien de fort clair là-dessus : on en attribue ordinairement l'invention à Diophante, Auteur grec, qui en écrivit treize livres, quoiqu'il n'en reste que dix. Xylander les publia pour la première fois en 1575 : et depuis ils ont été commentés et perfectionnés par Gaspard Bachet, sieur de Meziriac, de l'Académie Française, et ensuite par M. de Fermat.

Néanmoins, il semble que l'Algèbre n'a pas été totalement inconnue aux anciens Mathématiciens, qui existaient bien avant le siècle de Diophante.

Mais la vérité est que l'analyse dont ces Auteurs ont fait usage, est plutôt géométrique qu'algébrique, comme cela paraît par les exemples que l'on en trouve dans leurs ouvrages ; en forte que l'on peut dire que Diophante est le premier et le seule Auteur parmi les Grecs, qui ait traité de l'Algèbre. On croit que cet art a été fort cultivé par les Arabes : on dit même que les Arabes l'avaient reçu des Perses, et les Perses des Indiens. On ajoute que les Arabes l'apportèrent en Espagne : d'où, suivant l'opinion de quelques-uns, il passa en Angleterre avant que Diophante y fût connu.

Luc Paciolo, ou Lucas à Burgo, Cordelier, est le premier dans l'Europe, qui ait écrit sur ce sujet : son livre, écrit en Italien, fut imprimé à Venise en 1494. Il était, dit-on, disciple d'un Léonard de Pise, et de quelques autres dont il avait appris cette méthode : mais nous n'avons,aucun de leurs écrits. Selon Paciolo, l'Algèbre vient originairement des Arabes : il ne fait aucune mention de Diophante ; ce qui ferait croire que cet auteur n'était pas encore connu en Europe. Son Algèbre ne va pas plus loin que les équations simples et carrées ; encore son travail sur ces dernières observations est-il fort imparfait.

Après Paciolo parut Striseliux, auteur qui n'est pas sans mérite : mais il ne fit faire aucune progrès remarquable à l'Algèbre. Vinrent ensuite Scipion Ferrei, Tartaglia, Cardan et quelques autres, qui poussèrent cet art jusqu'à la résolution de quelques équations cubiques : Bombelli les suivit.

Tel était l'état de l'Algèbre et de l'Analyse lorsque la France vit naître, dans son sein François Viète, ce grand Géomètre, qui lui fit seul autant d'honneur que tous les auteurs, dont nous venons de faire mention, en avaient fait ensemble à l'Italie.

On peut entre'autres compter sept découvertes chez Viète. Voici les deux premières.

La première, c'est d'avoir introduit dans les calculs les lettres de l'alphabet, pour désigner même les quantités connues.

La seconde, c'est d'avoir imaginé presque toutes les transformations des équations, aussi bien que les différents usages qu'on en peut faire, pour rendre plus simples les équations proposées.

Il n'a point simplifié les expressions où une même lettre se trouvait plusieurs fois, c'est-à-dire les expressions des puissances, en écrivant l'exposant à côté. On verra bientôt que c'et à Descartes qu'on doit cet abrégé, ainsi que les premiers éléments du calcul des puissances, découverte qui en a été la suite naturelle, et qui a été depuis d'un si grand usage. »

Quelques mathématiciens
qui ont participé à l'évolution de l'Algèbre

Les dates sont les dates de naissance.

250 **LIU HUI.**– Mathématicien chinois qui a écrit les "neuf chapitres sur l'art du calcul" avec des problèmes de "fausse position".

325 **DIOPHANTE.**– Il vivait à Alexandrie. Il fut le premier à utiliser un langage symbolique. Ses travaux sont restés inconnus plus de 1000 ans. Nous connaissons 189 problèmes étudiés par Diophante.

780 **AL KHWARISMI.**– Il fut l'auteur du premier traité d'algèbre. Les mots "algorithmes" et "algèbre" sont issus de ses écrits.

1180 **LEONARD de PISE** (ou FIBONACCI).– Il introduit en Occident des travaux des Arabes et des Hindous. Il est considéré comme le premier mathématicien de talent de l'Occident.

1445 **Luca PACCIOLI.**– Ses travaux ont porté sur les écritures algébriques.

1445 **Nicolas CHUQUET.**– Des travaux sur les écritures algébriques et les équations.

1499 **Niccolo TARTAGLIA.**– Résout des équations du troisième degré.

1501 **Jérôme CARDAN.**– Médecin, mathématicien, mécanicien, il est l'auteur de "Ars Magna" qui est considéré comme le traité fondateur de l'algèbre au XVIème siècle.

1540 **François VIÈTE.**– Il généralise l'utilisation des lettres en algèbre et la résolution de problèmes au moyen d'équations.

1526 **Raffaele BOMBELLI.**– Il donne un exposé complet sur l'algèbre, en particulier sur les équations du troisième degré. Il introduit les "nombres imaginaires" appelés "piu di meno".

1595 **Albert GIRARD.**– Dans ses ouvrages d'algèbre, il utilise des racines négatives.

1596 **René DESCARTES.**– Il codifie les notations algébriques et invente la Géométrie analytique.

1601 **Pierre de FERMAT.**– Ses travaux ont porté en particulier sur la théorie des nombres et les probabilités.

1717 **Jean Le Rond d'ALEMBERT.**– Dans la grande encyclopédie, il contribue en particulier à la vulgarisation des méthodes algébriques.

1777 **Carl Friedrich GAUSS** appelé encore "Prince des mathématiciens".– Dans ses nombreux travaux, il utilise les nombres imaginaires et son nom est aussi associé à la résolution des systèmes d'équations.

1811 **Évariste GALOIS.**– Étude de la solution générale des équations du cinquième degré.

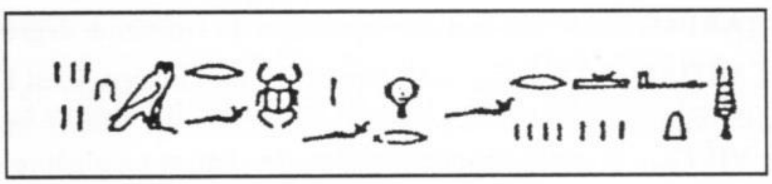
1 - Un problème du Papyrus Rhind (–1650 av. J.-C.)

Chez les Égyptiens, le calcul fractionnaire ne portait que sur les fractions de numérateur 1 auxquelles ils adjoignaient la fraction $\frac{2}{3}$.

Dans « Galion thèmes – Brins d'histoire des maths. 3 » nous avons vu que cela posait des problèmes arithmétiques opératoires pour calculer avec des nombres fractionnaires.

Le papyrus de Rhind contient de très nombreux problèmes d'arithmétique avec leurs solutions, qui ne sont pas précisément algébriques mais nous donnent une idée des méthodes utilisées par les mathématiciens de l'époque – il y a donc 3 600 ans ! – pour résoudre des problèmes que nous traiterions aujourd'hui « par l'algèbre ».

♦ Le problème 26 du papyrus



Voici une traduction de ce problème en termes contemporains :
Chercher une quantité telle que si on lui ajoute son quart, elle devient 15.

Pour résoudre ce problème, le papyrus Rhind propose les étapes suivantes :

a) Énoncé du problème (ci-dessus).

b) Si on choisit 4 pour quantité de départ, alors le quart de cette quantité vaut 1, 4 plus $\frac{1}{4}$ de 4 vaut 5.

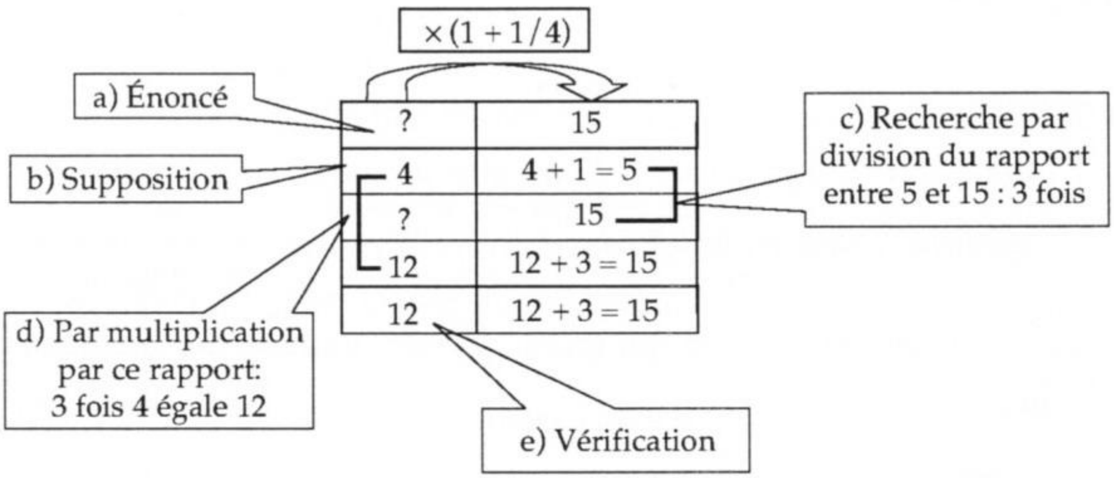
c) Mais on devrait trouver 15 ; divisons 15 par 5 c'est-à-dire déterminons combien de fois 15 contient 5 : 3 fois 5 égale 15.

d) Par cette supposition, on sait que 4 donne 5.

On en déduit par multiplication que 3 fois 4 donne 3 fois 5 (15 recherché). Le nombre cherché est donc 12.

e) Vérification : $12 \rightarrow 12 + \frac{1}{4}$ de $12 = 12 + 3 = 15$.

Nous pouvons représenter les étapes de cette solution sous la forme d'un tableau de proportionnalité simple :



Exercez-vous :

1- Pour quelle raison le scribe Ahmès a-t-il choisi 4 au départ ?

2- Une quantité et son demi vaut 16. Quelle est cette quantité ? (Problème 25).

3- Une quantité et son septième vaut 19. Quelle est cette quantité ? (Problème 24).

4- Une quanité, son demi et son quart vaut 10. Quelle et cette quantité ? (Problème 34).

5- Pour les problèmes précédents, donnez une résolution algébrique.

6- Problème du Pharaon : « Sur un tas de blé de 21 mesures, le paysan doit en donner une part égale au cinquième de la sienne ; que lui restera-t-il ? »
Résoudre, par la méthode précédente, ce problème algébriquement.

2- Un curieux partage de 100 pains

Voici un autre problème tiré du même papyrus.

L'énoncé ainsi que la solution sont quasiment incompréhensibles pour des non initiés, ce qui veut dire que le scribe s'adressait à une élite capable de comprendre.

L'énoncé :

100 pains en 5 personnes ; $\frac{1}{7}$ *des trois premières, c'est la part des deux dernières. Quelle est la différence ?* *

Voici maintenant la solution qui en est donnée, traduite des hiéroglyphes anciens.

Fais comme il arrive : différence 5 1/2				
23	17 1/2	12	6 1/2	1
		Fais croître les nombres 1 fois et 2/3		
	23		38 1/3	
	17 1/2		29 1/6	
	12		20	
	6 1/2		10 2/3 1/6	
	1		1 2/3	
Ensemble	60		100	

Analysons donc ce texte, à la lumière des explications données par des spécialistes du déchiffrage des mathématiques égyptiennes.

C'est l'analyse de la solution, ou plutôt de la vérification du scribe, qui permet de se faire une idée à la fois de la signification de l'énoncé et de sa solution.

* D'après un texte de DEDRON-ITARD "Mathématiques et mathématiciens"

▶ *Analyse de l'énoncé.*

Il s'agit de «partager 100 pains en 5 personnes» en respectant les contraintes suivantes.

«1/7 des trois premiers» :

c'est une fraction de la totalité des pains des trois premiers individus. «la part des deux derniers» : c'est la totalité des pains reçus par des derniers.

«Quelle différence ?» :

cette question signifie que l'écart est le même entre deux parts successives.

En résumé, *sept fois la somme des part des deux derniers vaut la somme des parts des trois premiers, et les écarts sont les mêmes d'une part à l'autre.*

C'est la première part la plus importante.

▶ *Étude et traduction des premiers calculs exécutés par le scribe.*

• Dans notre tableau donnant la «solution» en examinant la colonne de gauche :

a) vérifiez que les écarts sont tous de 5 1/2 entre les parts successives ;
b) vérifiez que le total des cinq parts vaut 60 ;
c) vérifiez que la somme des 3 premières est égale à 7 fois la somme des dernières.

Mais on parvient à un total 60 et pas 100 !

▶ *Le passage au total 100 :* $\frac{100}{60}$ est égal à $\frac{5}{3}$ soit $1 + \frac{2}{3}$.

Le calculateur utilise sans doute ici la proportionnalité et multiplie toutes les parts par 5/3 soit «1 et 2/3».

• Vérifiez que le multiplicateur 5/3 appliqué aux termes de la suite (23 ; 17 1/2 ; 12 ; 6 1/2 ; 1) conduit bien à la suite des parts de la colonne de droite, et que le total est bien 100. Et n'oubliez pas que les seules fractions utilisées en Égypte étaient des fractions de numérateur 1, à l'exception de la fraction 2/3.

▶ *Pourquoi le choix a priori d'une différence 5 1/2 ?*

On ne le sait pas très bien ! Mais les historiens mathématiciens pensent qu'il s'agit ici d'une méthode par tâtonnement, chère aux Égyptiens.

On suppose que la plus petite part est 1 et la différence est 1 : on calcule alors les autres parts et on regarde si la condition c) est réalisée.

Si ça ne marche pas, on essaie une autre "différence", par exemple 2, sans changer la plus petite part, et ainsi de proche en proche.

Plus petite part	Différence	Parts successives	
1	1	1-2 3-4-5	$\underbrace{1+2}_{3}$ $\underbrace{3+4+5}_{12}$ $3>\frac{12}{7}$
1	2	1-3 5-7-9	$\underbrace{1+3}_{\dots}$ $\underbrace{5+7+9}_{\dots}$?
1	3	1-4 …	… … …

Recopiez et complétez ce tableau en trouvant les cinq parts avec la "supposition" faite sur la différence. Dans la liste des parts, on commence par la plus petite, c'est donc l'ordre inverse de l'énoncé.

À chaque étape, demandez-vous si la condition c) est remplie. Si non, augmentez la différence de 1 et allez ainsi jusqu'à une différence 5 puis 6. À ce point, vous pouvez dire que la différence est sans doute entre 5 et 6 : pourquoi ?

D'où l'idée d'essayer 5 1/2 … et ça marche pour l'une des conditions !

Mais une condition n'est pas remplie : le total 100 ; vous avez compris la suite !

Exercez-vous :

Passons donc à des méthodes modernes … Il s'agit en fait d'un problème à deux inconnues : la différence qui est constante et la plus petite part.

Désigner par x cette différence et y la plus petite part : traduire l'énoncé un peu obscur par une système de deux équations que vous saurez résoudre.

3- Al-Khwarismi et la naissance de l'algèbre

Al-Khwarismi (780-850), né en Ouzbékistan était membre d'un groupe de mathématiciens et d'astronomes de la Maison de la Sagesse de Bagdad. Il fut l'un des propagateurs du système décimal positionnel, hérité des Indiens, qui utilisait dans l'écriture des nombres un "petit cercle" pour indiquer une place vide (à l'origine ce signe n'était donc pas considéré comme le nombre zéro).

Al-Khwarismi est l'auteur (833) d'un traité intitulé "Al mukhtasar fi hisâb al-jabrwa al-muqâvala" (bref ouvrage sur la science de la transposition et de la réduction). Ce livre est considéré comme le plus ancien traité d'algèbre connu.

Le nom d'Al-Khwarismi et le mot "Al-jabr" sont à l'origine des mots "algorithme" et "algèbre".

Dans l'introduction de son livre, Al-Khwarismi explique que son objectif est de "fournir aux gens un résumé des opérations de calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales, pour l'arpentage de leurs terres, à la répartition des eaux, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects".

Dans cet ouvrage, il propose une classification des équations de degré inférieur ou égal à 2, en six catégories :

1) $x^2 = bx$;	2) $x^2 = c$;	3) $bx = c$;
4) $x^2 + bx = c$;	5) $x^2 + c = bx$;	6) $bx + c = x^2$.

Les coefficients sont positifs, les nombres négatifs étant inconnus à cette époque.

Pour chaque type d'équation, Al-Khwarismi indique d'abord les calculs à effectuer pour trouver la solution de l'équation et ensuite une preuve géométrique qui assure la généralité de la méthode décrite.

Il explique comment ramener toute équation du second degré à une équation de l'une des catégories ci-dessus.

Pour cela il utilise trois "règles" :

R1 : **Al-jabr** : faire passer un terme précédé d'un signe – dans l'autre membre pour qu'il ne résulte que des termes précédés d'un signe +

R2 : **Al-muquabala** : supprimer des termes égaux dans les deux membres de l'équation

R3 : **Al-hatt** : diviser les deux membres de l'équation par un même nombre.

Exercez-vous :

1- Voici une équation du 1er degré d'inconnue x, écrite avec les notations actuelles : $5x - 5 = 2x + 19$; et voici les différentes étapes données par Al-Khwarismi pour la résolution :

$$3x + 2x - 5 = 2x + 19$$
$$3x - 5 = 19$$
$$3x = 19 + 5$$
$$3x = 24$$
$$x = 8$$

Trouver laquelle de ces trois règles est utilisée à chaque étape.

2- Traduiser le problème suivant avec les notations actuelles :

« Un carré et dix de ses racines égalent trente-neuf dirham … »

Les trois règles ne sont pas suffisantes ici. L'activité suivante explique sa résolution.

4- Le second degré chez Al-Khwarismi

Résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$ (type $x^2 + bx = c$)

Voici la méthode proposée par Al-Khwarismi pour calculer la solution positive de cette équation et sa traduction avec des notations modernes. Cette méthode était déjà utilisée par les Grecs à l'époque d'Euclide.

Dans le texte suivant, le mot "racine" désigne le coefficient b de x, c'est-à-dire 10.

"Son procédé consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq. $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 5 \times 5 = 25$

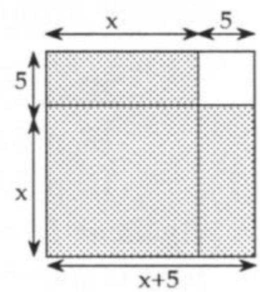
Tu l'ajoutes à trente neuf. Cela donnera soixante-quatre. $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 25 + 39 = 64$

Tu prends alors sa racine carrée qui est huit. $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \sqrt{64} = 8$

et tu en retranches la moitié des racines et c'est cinq. Il reste trois." $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = 8 - 5 = 3$

Cette démarche, non justifiée, donne la racine positive de l'équation.

Pour justifier cette démarche, donnons une interprétation géométrique.



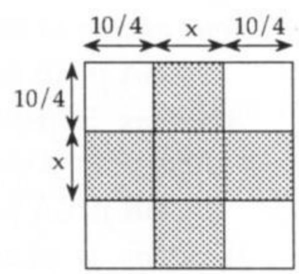
On construit un carré de côté x, et deux rectangles de côtés 5 et x, comme indiqué sur la figure.

L'aire hachurée est donc $x^2 + 10x$ soit 39.

Le "petit carré" a une aire de 25.

Le "grand carré" a pour aire 25 + 39 soit 64, son côté est 8 ; donc pour obtenir x, il faut retancher 5 à 8. On obtient 3.

Exercez-vous :



1- Le grand carré peut être aussi obtenu par l'assemblage ci-contre. En utilisant cet assemblage, donner une autre illustration du calcul fait par Al-Khwarismi.

2- Pour résoudre actuellement l'équation

$x^2 + bx = c$, on écrit $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} = c$.

Achever cette résolution et comparez-la à la méthode d'Al-Khwarismi.

3- Utiliser l'une des deux méthodes pour trouver la solution positive de l'équation :

$$x^2 + 4x = 32.$$

5- Système d'équations à trois inconnues, en 1554

Dans un ouvrage en français de Jacques Pelletier (Algèbre) publié à Lyon en 1554 (BN. V18-126 page 110), on trouve le problème suivant, reproduit ici en langage actuel :

> *« Trois hommes ont chacun un nombre d'écus. Le premier avec la moitié de chacun des autres en a 32. Le second avec le tiers de chacun des deux autres en a 28. Le troisième avec le quart de chacun des autres en a 31. Combien en ont-ils chacun ? »*

Voici la reconstitution partielle de la solution de Pelletier, avec les notations de l'auteur : expliquer d'abord la mise en équation.

« Disposons donc notre trois Equations en cette forme

I- 2R p. 1A p. 1B égales à 64

II- 1R p. 3A p. 1B égales à 84

III- 1R p. 1A p. 4B égales à 124.

Ajoutons la seconde à la tierce : ce feront pour la quatrième Equation :

IIII- 2R p. 4A p. 5B égales à 208

Donc, en la comparons à la première Equation puisque 2R *font tant d'une part que de l'autre : la différence sera égale à la différence de* 1A p. 1B à 4A p. 5B. *Donc nous aurons la cinquième Equation :*

V- 3A p. 4B égales à 144

Ajoutons la première et la seconde nous aurons pour la sixième Equation :

VI- 3R p. 4A p. 2B égales à 148

Ajoutons la première et la tierce ; nous aurons pour la settième Equation :

VII 3R p. 2A p. 5B égales à 188

etc. »

Quelques commentaires

La première inconnue est notée R.

Les deux autres sont notées A et B

La lettre «p» remplace notre «+» actuel.

Il n'y a pas de signe «=» ; il sera introduit par l'Anglais Recorde vers 1550 mais l'usage ne se généralisera pas très rapidement.

Exercez-vous :

- Analyser cette solution partielle. Remarquer l'écriture de "Equation" avec une majuscule, et l'écriture "égales" au pluriel, ainsi que "settième".
- Obtenir une équation VIII à partir de VI et VII comme a été obtenue l'équation V à partir de I et III.
  Vous obtenez alors un système de 2 équations à deux inconnues.
- Achever la résolution en vous inspirant de la méthode de l'auteur par "combinaison".
- Résoudre de cette façon le système suivant :

  I- 3R p. 2A p. 1B égales à 11
  II- 1R p. 1A p. 1B égales à 6
  IV- 2R p. 1A p. 3B égales à 14

  Vous pourrez traduire ces équations avec nos notations actuelles et désigner les "inconnues" par x, y, et z par exemple.

C'est depuis Descartes que l'habitude est prise de désigner les "inconnues" par les dernières lettres de l'alphabet, écrites en caractères minuscules.
À la même époque, les signes + et – étaient aussi notés au moyen des lettres p et m.

6- Système d'équations à la chinoise

Dans la civilisation chinoise comme dans d'autres civilisations, on a cherché des techniques pour résoudre des "problèmes" plus ou moins gratuits : les techniques utilisées, sans être algébriques, présentaient des particularités intéressantes. Seuls quelques rares ouvrages nous sont parvenus : on raconte que vers 220 av. J.-C., un empereur fit détruire tous les livres savants. Dans un ouvrage qui a échappé au massacre, le "Chui Chang Suan" ou "Art mathématique en neuf sections", on trouve une curieuse méthode pour résoudre ce que nous appellons un *problème linéaire* à trois inconnues.

L'écriture ci-dessous, en chiffres chinois est l'écriture du système d'inconnues X, Y, Z :

I I	I I I I	I I I I	← X
I	I I I I	I	← Y
I I I	I I I I I	I I I I	← Z
X I	X X ⊥	X I I I I I	

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 \\ 4x + 4y + 5z = 26 \\ 4x + y + 4z = 15 \end{cases}$$

Les coefficients d'une même équation sont notés dans une même *colonne*, les coefficients d'une même inconnue étant sur une *même ligne*.

La résolution consistait à faire des combinaisons entre les colonnes jusqu'à l'obtention d'un seul coefficient non nul sur une ligne. Il faut noter que les nombres positifs étaient représentés avec des bâtonnets noirs, alors que les nombres négatifs l'étaient avec des bâtonnets de couleur.

En voici la solution comportant cinq transformations A, B, C, D, E sur les tableaux. Tous les nombres sont ici positifs.

A- La colonne (2) est remplacée par :
colonne (2) – colonne (3)
B- La colonne (1) est remplacée par :
2 fois la colonne (1) – colonne (3)
C- La colonne (1) est triplée
D- La colonne (1) est remplacée par :
colonne (1) – colonne (2)
E- les termes de la colonne (1) sont divisés par 5.

Départ

2	4	4
1	4	1
3	5	4
11	26	15

$\xrightarrow{A}$

2	0	4
1	3	1
3	1	4
11	11	15

$\xrightarrow{B}$

0	0	4
1	3	1
2	1	4
7	18	15

$\xrightarrow{C}$

0	0	4
3	3	1
6	1	4
21	11	15

$\xrightarrow{D}$

0	0	4
0	3	1
5	1	4
10	11	15

$\xrightarrow{E}$

0	0	4
0	3	1
1	1	4
2	11	15

Ce dernier tableau correspond au système : $\begin{cases} 1z = 2 \\ 3y + z = 11 \\ 4x + y + 4z = 15 \end{cases}$

Le calculateur ne donne aucune justification de cette démarche !

Exercez-vous :

- Analyser les transformations sur les colonnes.
- Résoudre le dernier système écrit en calculant d'abord z puis y puis x.
  Vérifier que la solution trouvée est bien solution du système initial.
- Résoudre par la méthode chinoise le problème suivant :
  «On considère 20 pièces : les unes de 5 écus, les autres de 2 écus. La valeur-totale est de 76 écus. Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte ?»
- Résoudre de même le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 11 \\ x + y + z = 7 \\ 2x + y + 3z = 14 \end{cases}$$

- Un problème de Diophante :
  «Trouver trois nombres entiers tels que le premier avec la moitié de la somme des autres, le second avec le tiers de la somme des autres et enfin le troisième avec le quart de la somme des autres égale 68.»
  Quels peuvent être ces nombres ?

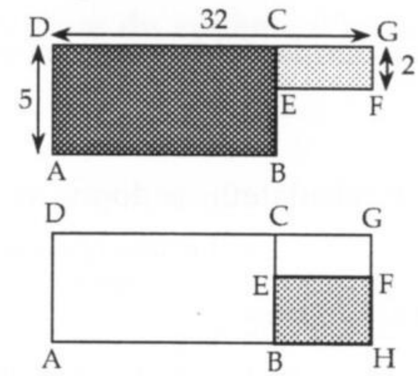
7- La fausse supposition

Cette méthode est semble-t-il due aux mathématiciens arabes. Elle est encore utilisée à l'école pour résoudre des problèmes simples d'arithmétique, avant d'aborder l'algèbre proprement dite.

Soit à résoudre le problème suivant :

> *« Je possède 32 pièces, les unes de 5 écus, les autres de 2 écus. J'ai en tout la somme de 124 écus. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ? »*

La solution arabe est illustrée par des aires de rectangles.



Le rectangle ABCD représente la valeur des pièces de 5 écus : AD = 5. DC est inconnu, c'est le nombre de ces pièces.

Le rectangle CEFG représente la valeur des pièces de 2 écus : CE = 2. CG est inconnu, c'est le nombre des pièces de 2 écus.

On sait que DG = 32, c'est le nombre total des pièces.

Supposons que les 32 pièces valent 5 écus (c'est la ***fausse supposition***), la somme totale serait 32×5 soit 160 écus.

C'est l'aire du rectangle de côtés AD et DG. Il y a une différence de $160 - 124$ soit 36 écus, c'est l'aire du petit rectangle EBHF.

Son côté HF vaut $5 - 2$ soit 3, HF = 3. Son aire vaut 36.

L'autre côté BH vaut donc 36 : 3 soit 12. le nombre CG des pièces de 2 écus est donc 12. Le nombre des pièces de 5 écus est donc $32 - 12$ soit 20.

Exercez-vous :

- Trouver une solution purement arithmétique en supposant d'abord que toutes les pièces valent 5 écus ; puis en utilisant une méthode algébrique.
- Voici deux autres problèmes tirés d'un ouvrage d'arithmétique de 1935, à résoudre par une méthode similaire :

  «Un cultivateur vend au marché 26 hl de blé pour 2635 F. Une partie a été vendue à 97,5 F l'hl et le reste à 103, 75 F l'hl. Combien a-t-il vendu d'hectolitres à chacun de ces deux prix ?»

  «Un ouvrier a travaillé pendant 45 jours chez deux patrons. Le premier lui donne 26,25 F par jour et le second 31 F par jour. Pendant combien de temps a-t-il travaillé chez chaque patron s'il a gagné en tout 1268 F ? »

8- La fausse position

Les scribes égyptiens et les calculateurs arabes indiquaient un mode de résolution par "fausse position" sans donner la moindre explication sur cette méthode. C'est plus tard que ces justifications seront entreprises ...

On trouve en particulier des éléments de justification dans un traité datant de 912, écrit par un calculateur libanais, Qusta Ibn Luga, intitulé "Sur la démonstration des deux erreurs".

Voici un énoncé :

« Le quart d'un nombre plus cinq vaut douze : trouver ce nombre. »

La solution de ce problème peut être obtenue par la méthode de fausse position. Une "recette" en est donnée dans un livre arabe du XVème siècle.

> *«Prends pour l'inconnu tel nombre que tu voudras, nomme-la* ***première supposition****, et opère conformément à l'énoncé du problème.*
> *S'il le vérifie, c'est lui l'inconnu. Mais s'il en dévie de l'un ou de l'autre côté (en plus ou en moins) nomme cette différence* ***première déviation****.*
> *Alors, prends un autre nombre et nomme-le* ***seconde supposition****, s'il dévie, il en résulte alors une* ***seconde déviation****.*
> *Après cela, multiplie la première supposition par la seconde déviation et nomme-le produit "premier résultat", puis la seconde supposition par la première déviation et c'est le "second résultat".*
> *Si les deux déviations sont en même temps positives ou négatives, alors divise la différence des deux résultats par la différence des deux déviations. S'il en est autrement, divise la somme des deux résultats par la somme des déviations. Dans les deux cas, le quotient est le nombre cherché.»*

Exercez-vous :

- Première supposition : 20. La déviation est **2 en moins**. Pourquoi ?
  Seconde supposition : 40. La déviation est **3 en plus**. Pourquoi ?
  Les déviations sont de signes contraires.
  Appliquons la "méthode" :
  $((20 \times 3) + (40 \times 2)) : (3 + 2)$ soit 28. Vérifiez que 28 convient.

Supposition	Déviation
20	2 en moins
40	3 en plus

- Que deviendraient les calculs si la seconde supposition était 8 ?
- Pourquoi est-il judicieux de choisir un multiple de 4 comme supposition ?
- Résoudre ce problème par les moyens algébriques actuels.

▪ Étude d'un autre problème datant du XVème siècle

> *« Deux joyeux compagnons avaient ducas en bourse. Le premier dit au second : si tu me donnes la moitié de tes ducas, j'aurai avec ceux que j'ai, au total 20 ducas. Le second dit au premier : si tu me donnes le tiers de tes ducas, j'aurai aussi 20 ducas avec ce que j'ai.*
> *Combien avaient de ducas chacun d'eux ? »*

Appliquons la recette du calculateur, vue à la page précédente.

Première supposition :
Si le premier avait 9 ducas, pourquoi le second en aurait-il 22 ? La seconde phrase est-elle alors vérifiée ?
Montrez que la déviation est **5 en plus**.

Supposition	Déviation
9	5 en plus
6	10 en plus

Seconde supposition :
Choisir 6 ducas pour le premier, pourquoi le second en aurait-il 28 ? Montrez que la déviation est alors **10 en plus**.
En appliquant la "recette" du calculateur on a :

$(9 \times 10 - 6 \times 5) : (10 - 5)$ soit 12, nombre de ducas du premier.

Montrez alors que le second avait 16 ducas.

Étude du "mécanisme" utilisant les deux "fausses positions"

Première supposition pour le premier : 9
déviation : 5 en plus.
Seconde supposition pour le premier : 6
déviation : 10 en plus.

Supposition	Déviation
9	5 en plus
6	10 en plus
x	0

On cherche le nombre x de ducas du premier pour que la déviation soit 0.

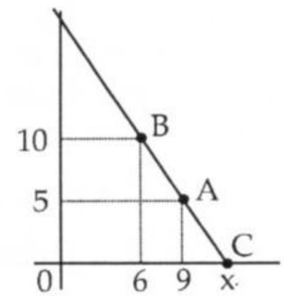
Le calculateur utilise intuitivement la *proportionnalité* entre la différence des suppositions et celle des déviations. Ce qui est justifié puisque les relations entre les nombres de ducas sont des relations du premier degré (relations linéaires). Cette proportionnalité permet d'écrire :

$$(1) \qquad \frac{9 - x}{6 - x} = \frac{5 - 0}{10 - 0} \quad \text{soit} \quad 10 \times 9 - 10x = 6 \times 5 - 5x$$

Vérifiez que l'on obtient $x = \dfrac{10 \times 9 - 6 \times 5}{10 - 5}$ soit $x = 12$ pour le premier.

D'autres traductions actuelles

• Avec une représentation graphique



Sur la représentation graphique, on porte en abscisse les suppositions, on porte en ordonnée, les déviations. Soit les points A (9 ; 5) et B (6 ; 10).

La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en C (x ; 0). En utilisant le théorème de Thalès, retrouver la relation (1) écrite ci-dessus.

Refaire le calcul du scribe en gardant 9 comme première supposition et en prenant 15 comme deuxième supposition. Faites-le graphique et expliquez le calcul.

• Avec des équations de droites

Avec nos notations contemporaines, si on désigne par x l'avoir du premier et par y celui du second, le problème se traduit par le système :

$$x + \frac{y}{2} = 20 \quad \text{et} \quad \frac{x}{3} + y = 20.$$

Vérifiez-le.

Si dans un repère on trace les droites D et D' d'équations précédentes, il s'agit de trouver les coordonnées du point I d'intersection de ces droites. Trouvez les coordonnées de I.

Exercez-vous :

Voici un autre problème chinois à résoudre par cette méthode :.

« Soit un achat en commun de quelque chose. Si chacun paie 8, il y a 3 d'excédent ; si chacun paie 7, il y a 4 de déficit. On demande ce que sont respectivement le nombre d'individus et le prix de la chose. »

(*Neuf chapitres sur l'art du calcul*, problème 1, chapitre 7, de Liu Hiu (250 ap. J.-C.)

9- Cardan et le troisième degré

Dans son ouvrage "Ars magna" publié en 1545, Cardan indique une méthode de résolution d'une équation du 3ème degré :

$$x^3 + px = q.$$

coefficient de l'inconnue — nombre de l'équation

$$x^3 + px = q$$

Voici une traduction de son texte :

« Élève au cube le tiers du coefficient de l'inconnue …	$\left(p/3\right)^3$
… auquel tu ajoutes le carré de la moitié du nombre de l'équation …	$\left(p/3\right)^2 + \left(q/2\right)^2$
Prends la racine carrée du tout …	$\sqrt{\text{-----}}$
Cette racine, tu en useras d'une part pour l'ajouter à la moitié du nombre de l'équation que tu viens de multiplier par lui-même et d'autre part pour lui retrancher cette moitié …	(I) $\frac{q}{2} + \sqrt{\ldots}$ (II) $-\frac{q}{2} + \sqrt{\ldots}$
Tu auras le binomium (I) et son apotome (II).	
Alors soustrais la racine cubique de l'apotome de la racine cubique du binomium.	---
Ce qui reste est la valeur de la racine. »	

- Analyser ce texte et les écritures algébriques contemporaines dans la colonne de droite.
- Compléter cette colonne.
- Écrire l'expression générale de la racine trouvée.
- Cette méthode ne s'applique que si $4p^3 + 27q^2 > 0$. Pourquoi ?

Exercez-vous :

- Appliquer cette méthode à la résolution de $x^3 + 6x = 20$.

  Montrer que $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ et, à la calculatrice, vous trouverez : $x = 2$.

  Retrouver ce résultat en montrant que :

  $$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} = \sqrt{3} + 1 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{3} - 1 \quad .$$

- Résoudre de même chacune des équations suivantes :

  $$x^3 + 6x = 88 \quad ; \quad x^3 + 3x = 2 \ .$$

- Cette méthode s'appplique-t-elle aux équations suivantes :

  $$x^3 - 6x = 40 \quad ; \quad x^3 - 4x = 3 \quad , \text{ dont une racine est } (-1)\ ?$$

Extrait de l'« Ars Magna » de Cardan

REGULA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seminabis, unique dimidium numeri quod iam in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisque Binomium cum sua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica sui Binomij, residuũ quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio.

Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiũ ℞ 108 p: 10, & Apotomen ℞ 108 m: 10, horum accipe ℞ cub. & minue illam quæ est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cub⁹ p: 6 reb⁹ æqlis 20
2 — 20
8 — 10
108
℞ 108 p: 10
℞ 108 m: 10
℞ v: cu. ℞ 108 p: 10
m: ℞ v: cu. ℞ 108 m: 10

Aliud, cubus p: 3 rebus æquetur 10, duc 1, tertiam partem 3, ad cubum, fit 1, duc 5, dimidium 10, ad quadratum, fit 25, iunge 25 & 1,

Un peu d'histoire :

En 1535, un concours eut lieu entre Eisr et Tartaglia afin de résoudre les équations du troisième degré. Tartaglia fut vainqueur. Il confia sa solution à Cardan sous la condition de ne pas la publier. Toutefois, ce dernier en donna la solution dans *Ars Magna* en 1545.

Signalons aussi que *Ars Magna* est considéré comme le traité fondateur de l'algèbre du XVIème siècle.

C'est Bombelli qui, introduisant une notation telle que $\sqrt{-1}$, prolonge l'utilisation des formules de Cardan au moyen des *nombres imaginaires*.

10- Un problème de Bezout

Dans un cours de mathématiques à l'usage des Gardes de la Marine, Bezout (1730-1783) exerce sa pédagogie à l'aide de divers problèmes d'arithmétique pouvant être mis en équation ...

En voici un exemple.

On demande en combien de manières on peut payer 542 livres en donnant des pièces de 17 livres et en recevant en échange des pièces de 11 livres.

♦ Méthode des "divisions" de Bezout

Si x est le nombre de pièces de 17 livres et y le nombre de pièces de 11 livres, on obtient l'équation $17x - 11y = 542$ où x et y sont deux niombres inconnus entiers positifs.

a) On calcule y en fonction de x : $\quad y = \dfrac{17x - 542}{11}$

b) On effectue la division «autant qu'il est possible» :

$$y = \frac{17x - 542}{11} = \frac{11(x-49) + (6x-3)}{11} = x - 49 + \frac{6x-3}{11}$$

c) $6x - 3$ doit être un multiple de 11 : $6x - 3 = 11u$ (u étant un entier quelconque) ; d'où $x = \dfrac{11u+3}{6}$ que l'on « divise encore » :

$$x = \frac{6u + 5u + 3}{6} = u + \frac{5u+3}{6}$$

donc $5u + 3 = 6t$ (t entier quelconque) ; ce qui nous donne

$$u = \frac{6t-3}{5} = \frac{5t + t - 3}{5} = t + \frac{t-3}{5}$$

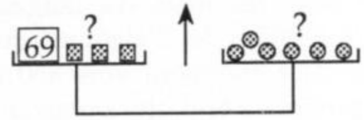
d) Le processus des divisions s'arrête : $t - 3 = 5s$ (s entier quelconque).

- Calculer t, puis u, x et y en fonction de s et montrer que
  $x = 11s + 6$ et $y = 17s - 40$ (s entier quelconque).
- Pour que y soit positif, montrer que $s \geqslant 3$.
- Pour $s = 3$, calculer x et y et vérifier.
- Même question pour $s = 4$, etc.

Exercez-vous :

1- Comment payer 226 écus en donnant des pièces de 13 écus et en recevant des pièces de 5 écus ?

2- Sur le plateau de gauche, on a une masse de 69 g et y petites masses de 5 g, équilibrées par x masses de 7 g. Trouver x et y.



3- Voici une division dans laquelle x et y sont des entiers positifs inconnus : on rappelle que :

(dividende) = (quotient × diviseur) +(reste)

Trouver toutes les valeurs possibles de x et y.

$$\begin{array}{r|l} 5x & 4y \\ \cline{2-2} & 3 \\ 32 & \end{array}$$

♦ Autre méthode par la recherche d'une solution particulière

Reprenons l'équation $17x - 11y = 542$ (1)

a) On recherche par tâtonnement une *solution particulière* de l'équation $17x - 11y = 1$.
$17 \times 2 - 11 \times 3 = 1$ donc $\mathbf{17 \times 542} \times 2 - 11 \times \mathbf{542 \times 3} = 542$ (2)

b) On soustrait membre à membre les égalités (1) et (2) :

$$17(x - 542 \times 2) = 11(y - 542 \times 3)$$

c) 17 divise $11(y - 542 \times 3)$; 17 est premier avec 11 donc 17 divise $(y - 542 \times 3)$* ; $y - 542 \times 3 = 17k$ avec k entier quelconque.

- Montrer que $y = 542 \times 3 + 17k$ et $x = 542 \times 2 + 11k$.
  x et y étant positifs ($542 \times 3 + 17k \geqslant 0$ et $542 \times 2 + 11k \geqslant 0$) ; en déduire que $k \geqslant -95$
- Pour $k = -95$, calculer x et y.
  Même question pour $k = -94$; $k = -93$; etc.

Exercez-vous :

1- Reprendre l'exercice de l'activité 7 (fausse supposition) :
« Je possède 32 pièces, les unes de 5 écus, les autres de 2 écus. J'ai en tout la somme de 124 écus. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?»
L'équation s'écrit : $5x + 2y = 124$ avec x et y entiers positifs.
a) Reprendre la méthode de Bezout et retrouver la solution de ce problème.
b) Recommencer en cherchant une solution particulière de $5x + 2y = 1$ où x et y entiers, positifs ou non. En déduire la solution de ce problème.

2- Résoudre par cette nouvelle méthode les exercices 1-2-3 de la première partie.

* **Théorème de Gauss :** *si a divise bc et s'il est premier avec b, alors il divise c.*

La Genèse des écritures algébriques

Les problèmes et leurs solutions furent donnés durant des millénaires dans la *langue locale* avec les mots du langage ordinaire, sans usage de lettres pour les "inconnues". L'invention de «l'algèbre" que vous pratiquez s'étale sensiblement sur 1000 ans, de l'arabe Al Khwarismi vers 850 jusqu'à Descartes en 1640. Cependant, il y eut un certain nombre de tentatives pour utiliser des écritures symboliques qui peuvent être considérées comme les premières notations algébriques.

DIOPHANTE et les Grecs (300 de notre ère)

Diophante est en général considéré comme le premier à avoir utilisé une écriture symbolique. En Grèce, à l'époque de Diophante,n les puissances de x : x, x^2, x^3, x^4, x^5 étaient notées respectivement N, Q, C, QQ, QC ...

Les nombres : 1, 2, 3, ... étaient écrits à la manière grecque avec les lettres : α, β, γ, ...

Les constantes sont notées $\overset{\circ}{M}$. L'inconnue est notée ς et son carré Δ^V ou Δ^T.

L'addition se note par juxtaposition, et la soustraction est notée $\uparrow$.

L'équation $2X^2 - 5X = 23$ était notée par Diophante $\Delta^T \beta \uparrow \varsigma \varepsilon \ \varepsilon\sigma\tau\iota \ \overset{\circ}{M} \beta\gamma$

Mais l'œuvre de Diophante restera inconnue pendant un millénaire, jusqu'au Moyen-Âge.

BRAHMAGUPTA (Inde, 7ème siècle)

Ce mathématicien indien utilise aussi un certain nombre de notations symboliques.

L'inconnue est désignée par « yà ». Son carré par « yàva ».

Le nombre négatif (connu des hindous) tel que –5 est noté $\dot{5}$.

Les constantes sont notées « ru ». L'équation $2X^2 - 5X = 23$ s'écrivait ru 23 yàva2 va $\dot{5}$.

Nicolas CHUQUET (1445-1500) **et François VIÈTE** (1540-1603)

sont considérés comme les promoteurs de l'algèbre en Europe à cette époque. Chuquet publie le premier livre d'Algèbre en France.

Pour écrire $\sqrt{4x^2 + 4x + 2x}$ il proposait la notation $R^2 4^2 p 4^1 p 2^1$: la lettre p remplace +.

Pour Viète, l'inconnue est désignée par une lettre : A ou a. Le carré est noté q (quadratus).
le cube est noté c (cubus).

L'équation $2X^2 - 5X = 23$ est notée par Viète : 2aq – 5a aeq 23 (*égalité notée aeq*).

René DESCARTES (1596-1650)

Il apporte une contribution décisive aux notations : les inconnues sont notées avec les dernières lettres de l'alphabet, x, y, z... alors que les constantes connues avec les premières lettres, a, b, ... et cette habitude dure encore.

$2X^2 - 5X = 23$ était notée par Descartes sous la forme 2zz – 5z égal à 23. Puis 2zz – 5z $\propto$ 23.
Le signe = apparaît à cette époque.

(d'après des documents IREM)