

Brins d'Histoire des Maths

5. Quelques éléments de géométrie

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΗ ΕΨ
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ-
ΟΥΣΙΩΝ.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἢ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρῶτος βιβλῆς.

Adiecta præfationcula in qua de disciplinis
Mathematicis nonnihil.



M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

Première édition imprimée des *Éléments* d'Euclide. Bâle. 1533.

© GALION – 2001
15, quai André Lassagne – 69001 LYON

ISBN : 2-912-209-29-3

Les origines de la géométrie

Les témoignages des historiens grecs veulent que la géométrie (littéralement : *la mesure de la Terre*) soit née en Égypte.

Hérodote raconte :

“ Ils disaient que ce roi (Sésostris environ 2000 av. J.-C. avait partagé le territoire entre tous les Égyptiens, en attribuant à chacun une parcelle égale, de forme carrée ; il percevait les impôts sur la base de cette subdivision, après avoir instauré le paiement d'une contribution annuelle. Si le fleuve venait à rogner quelque parcelle de terrain, le propriétaire se rendait chez le roi et le lui signalait : ce dernier dépêchait alors des fonctionnaires sur les lieux, chargés d'observer et de mesurer le rétrécissement du terrain pour que l'impôt en fût à l'avenir diminué d'autant.

Ce sont, selon moi, ces pratiques qui ont donné naissance à la géométrie et cette dernière s'est par la suite transmise à la Grèce”.

Si le fleuve avait purement et simplement effacé les confins des champs, il appartenait à ces mêmes fonctionnaires de rétablir équitablement les limites.

Les arpenteurs égyptiens étaient appelés “*arpedonaptés*”, c'est-à-dire noueurs de cordes. C'est en tirant leurs cordes qu'ils tracèrent les deux lignes les plus simples et les plus importantes de la géométrie : la droite et le cercle. Pour la première, il leur suffisait de tendre une corde entre deux points, une opération dont l'image subsiste dans les expressions “tirer une droite”, “tirer une perpendiculaire” ; quant au second, ils l'obtenaient en faisant tourner un de ces points autour de l'autre qui restait fixe.

Pouvaient-ils imaginer la variété des constructions que véhiculaient deux pratiques aussi élémentaires ? Probablement pas. Il est cependant à peu près certain que des constructions comme celles que l'on appelle aujourd'hui “à la règle et au compas” - on devrait dire plutôt “avec droites et cercles” devinrent très vite indispensables dans les techniques des arpenteurs.

“*Au-delà du compas*” Enrico Giusti.

1 - La propriété de THALÈS (624-546 av. J.-C.)

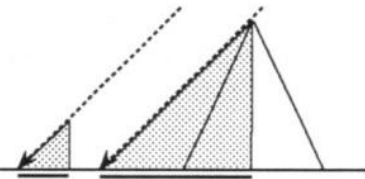
Thalès et son école philosophique, 500 ans avant notre ère, furent sans doute les premiers à énoncer des propriétés géométriques reprises par Euclide trois siècles plus tard.

Cette géométrie nous est parvenue à travers des traductions et des interprétations, en particulier grâce à des chercheurs arabes qui les ont étudiées puis fait connaître en Occident.

La propriété de Thalès, bien connue depuis le collège, ne lui est d'ailleurs pas toujours attribuée.

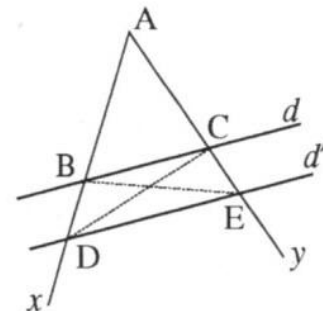
On prête à Thalès l'idée d'évaluer la hauteur de la pyramide de Khéops, près du Caire.

Il aurait utilisé une perche de longueur connue : les longueurs des ombres de cette perche et de la pyramide permettent de déterminer la hauteur de la pyramide.



■ La démonstration de la propriété de Thalès par Euclide

Les deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ sont coupées par les droites parallèles d et d' comme sur la figure.



Exercez-vous :

- Démontrer que les triangles BDE et CDE ont la même aire.
- En déduire que les triangles ADC et ABE ont la même aire.
- Montrer que $\frac{\text{aire}(ABC)}{\text{aire}(ADC)} = \frac{AB}{AD}$ et $\frac{\text{aire}(ABC)}{\text{aire}(ABE)} = \frac{AC}{AE}$.
- En déduire la propriété de Thalès.
- Montrer de plus que $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$.

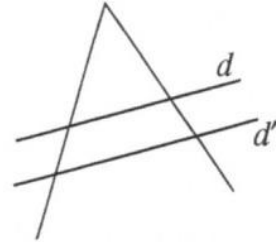
Vous avez ainsi retrouvé la propriété de Thalès au moyen des aires, méthode chère à Euclide !

■ Comment « faire des opérations » avec cette propriété ?

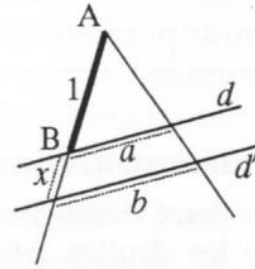
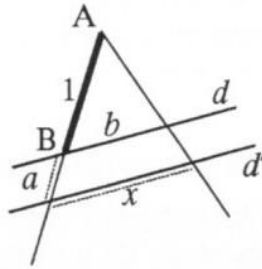
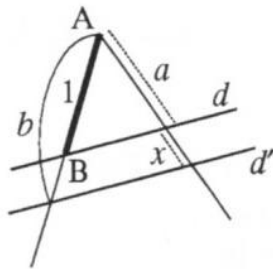
Pour les Grecs, les nombres étaient envisagés comme des mesures de longueurs ou d'aires ou encore des mesures de volumes. Si on choisit un segment comme "mesure unité", comment effectuer géométriquement le produit d'un nombre a par un nombre b ? Leur quotient ?

Exercez-vous :

- 1/ Les nombres 1, a et b sont des mesures de longueurs. Comment les disposer sur la "configuration" de Thalès ci-contre, pour obtenir un segment de longueur $a \times b$ sur cette figure, les droites d et d' étant parallèles ?
Vous pouvez trouver plusieurs dispositions ...



- 2/ La longueur unité 1 est toujours connue : c'est la longueur du segment $[AB]$. Les longueurs a et b sont disposées de diverses manières sur la "configuration" de Thalès. Sur les dessins suivants, les droites d et d' sont des droites parallèles. Dans chacun des cas suivants, comment s'exprime, en fonction de a et de b la longueur inconnue marquée x sur la figure ?



■ Comment résoudre des équations ?

Résoudre chacune des équations suivantes "à la grecque", c'est-à-dire sans calcul, mais uniquement par des tracés dans lesquels l'unité 1 est représentée par un segment et les longueurs connues sont représentées par d'autres segments, correctement disposés sur une configuration de Thalès : l'inconnue x est alors déterminée comme la mesure de la longueur d'un segment de la figure :

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{x} ; 5x = 7 ; \frac{5}{x} = 7 ; \frac{x}{3} = 2 .$$

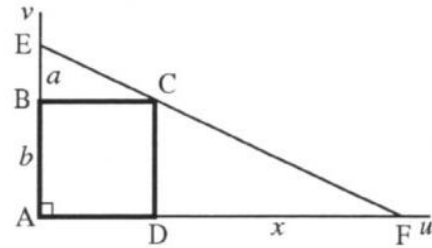
■ Utiliser des aires

Voici un mode de résolution de l'équation d'inconnue x : $ax = b^2$.

Tracer l'angle droit \widehat{uAv} à l'intérieur duquel on construit le carré ABCD de côté connu b .

Porter $BE = a$ sur $[Av)$. (EC) coupe (AD) en F.

Démontrer que $DF = x$.



Là aussi la propriété de Thalès peut servir ...

Résoudre ainsi "géométriquement" les équations :

$$7x = 25 ; \quad 13x = 100 ; \quad 8x = 81 ; \quad 7x = 5 .$$

⇒ Survol de « l'ère des principaux géomètres grecs »

(Les dates données sont les dates de naissance supposées).

Thalès	Pythagore	Platon	Euclide	Archimède		
-625	-500	-427	-300	-287	av JC...	2000
*	*	*	*	*	...	*

Si on représente par un segment de 20 cm la distance dans le temps entre Thalès et Archimède, quelle est, à la même échelle, la longueur du segment qui représente le temps écoulé entre Archimède et l'année 2000 ?

Extrait de "Les origines de la géométrie" de Michel SERRES

À méditer,

Auguste Comte : « Nous devons regarder comme suffisamment constatée l'impossibilité de déterminer, en les mesurant directement, la plupart des grandeurs que nous désirons connaître. C'est ce fait général qui nécessite la formation de la science mathématique ... Car, renonçant, dans presque tous les cas, à la mesure immédiate des grandeurs, l'esprit humain a dû chercher à les déterminer indirectement, et c'est ainsi qu'il a été conduit à la création des mathématiques. » La géométrie résulte d'une ruse, d'un détour, dont la route indirecte permet d'accéder à ce qui dépasse une pratique immédiate. Elle consiste, ici, à construire une réduction de pyramide : n'importe quel objet vertical, notre corps par exemple. De fait, Thalès découvre le module ou modèle réduit. Pour atteindre à l'inaccessible pyramide, il invente l'échelle.

2- Les Éléments d'Euclide (300 av. J.-C.)

Les Éléments d'Euclide constituent la première œuvre mathématique construite sur le modèle déductif. Les Éléments sont un prolongement de la pensée d'Aristote.

Plus tard, Leibniz dira que «ce ne sont pas les figures qui donnent la preuve chez les géomètres ; la force de la démonstration doit être indépendante de la figure tracée »

Les Éléments sont organisés autour des Définitions, des Axiomes, des Postulats et des Propositions :

■ Les Définitions

La définition d'un objet lui donne un statut qui le détache de l'espace sensible qui nous entoure.

Ainsi pour Euclide, le point est ce dont la partie est nulle. C'est donc un objet sans étendue.

Définitions

- 1- *Le point est ce dont la partie est nulle.*
- 2- *Une ligne est une longueur sans largeur.*
- 3- *Les extrémités d'une ligne sont des points.*

...

- 15- *Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne telle que toutes les droites tombant sur elle à partir d'un point parmi ceux intérieurs à la figure sont égales entre elles.*

...

- 24- *Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.*

■ Les Notions Communes ou Axiomes

Les axiomes sont des énoncés dont l'évidence s'impose absolument si l'on veut pouvoir mener à bien un raisonnement déductif.

Notions Communes

- 1- *Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.*
- 2- *Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales les tous seront égaux.*

...

■ Les Postulats ou Demandes

Les définitions et les axiomes étant posés, pour démontrer de nouvelles propriétés, Euclide leur adjoint les postulats (ou demandes) : ce sont des propositions qu'il serait absurde de ne pas accepter mais que l'on pourrait écarter.

Ainsi le postulat 5 pourrait être remplacé par un autre énoncé (voir paragraphe suivant).

Demandes

- 1- *Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.*
- 2- *Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.*
- 3- *D'un point quelconque et avec un intervalle quelconque, décrire i.e circonférence de cercle.*
- 4- *Tous les angles droits sont égaux entre eux.*
- 5- *Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

...

■ Les Propositions

Si l'on accepte les définitions, les axiomes et les demandes (ou postulats) le géomètre peut alors déduire un certain nombre de Propositions, c'est-à-dire de théorèmes qui énoncent et démontrent une vérité.

La proposition 1 précise en les justifiant les étapes de la construction d'un triangle équilatéral.

La proposition 15 est un théorème qui énonce une propriétés.

Propositions

- 1- *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.*

...

- 15- *Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux.*

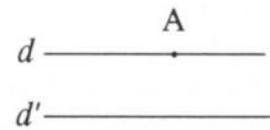
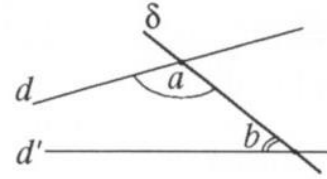
...

■ À propos du Postulat 5

Ce Postulat 5 conditionne toute la pensée déductive euclidienne. On peut en donner deux «lectures» :

- *À partir de l'énoncé lui-même*
 - Si la somme $a + b$ est inférieure à deux droits, alors les droites d et d' sont sécantes de ce côté-là
 - Si $a + b$ est égale à deux droits, les deux droites ne se coupent ni d'un côté, ni de l'autre : elles sont parallèles.
- *À partir de son interprétation*

Par un point A extérieur à la droite d , il ne passe qu'une droite d' parallèle à d .



On a longtemps pensé que l'on pouvait déduire ce postulat 5 des autres. Les essais furent vains. On s'est aussi demandé ce que deviendrait cette théorie si l'on remplaçait ce postulat 5 par l'un ou l'autre des énoncés suivants :

- 1) Par un point, on peut mener plusieurs droites parallèles à une droite donnée. C'est ce qu'a fait Lobatchevski (1792-1856) sans rencontrer de contradiction dans son discours.

Dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits.

- 2) Par un point, on ne peut mener aucune parallèle à une droite donnée. C'est le raisonnement mené par Riemann (1826-1866) sans rencontrer non plus de contradiction.

Dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux droits.

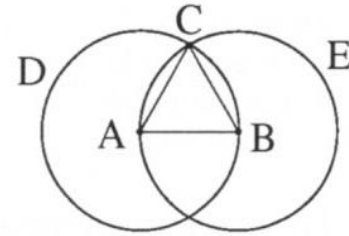
La mécanique newtonienne est modélisée grâce à la géométrie euclidienne ; une géométrie non-euclidienne sera nécessaire pour modéliser la physique élaborée à partir d'Einstein.

Une démonstration d'Euclide

Proposition 1 : Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Voici AB la droite donnée et finie. On cherche à construire un triangle équilatéral sur AB. Avec le centre en A et la distance AB, on décrit le cercle BCD. [Postulat 3]

Avec le centre en B et la distance BA, on décrit le cercle ACE [Postulat 3] et du point C, point d'intersection des cercles, aux points A, B, on trace les lignes droites CA, CB [Postulat 1].



Maintenant, puisque le point A est le centre du cercle CDB, AC est égal à AB [Définition 15].

Encore, puisque le point B est le centre du cercle CAE, BC est égal à BA [Définition 15].

Mais on a déjà prouvé que CA est égal à AB, de plus chacune des droites CA, CB est égale à AB.

Et les choses qui sont égales à la même chose sont égales entre elles.

[Notion commune 1].

Ainsi CA est aussi égale à CB.

De plus, les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles. Alors le triangle ABC est équilatéral ; et il a été construit sur la droite donnée et finie AB.

Ce qu'il fallait faire.

*Un texte d'Euclide, dans les Éléments (III^{ème} siècle av. J.-C.)
Cette œuvre monumentale a dominé tout l'enseignement des mathématiques
jusqu'à nos jours.*

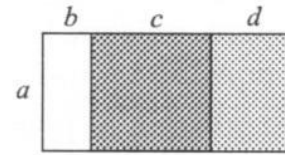
3- Géométrie au bord du Nil

La géométrie (*géo* : la terre, et *metron* : mesure) serait d'abord née pour tenter de résoudre les problèmes d'arpentages à la suite des crues du Nil. Elle devint ensuite une connaissance "théorique", codifiée par Euclide qui enseignait à Alexandrie.

■ Figures géométriques pour des formules algébriques

Proposition d'Euclide (traduit du grec)

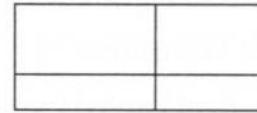
« Si l'on a deux droites et si l'une d'elles est coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée et sous chacun des segments de l'autre. »



$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

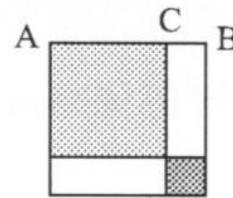
Compléter la formule et le dessin.

$$(a + b)(c + d) = ?$$



Texte d'Euclide

« Que la droite AB soit coupée à volonté en un point C : je dis que le carré de AB est égal aux carrés des segments AC et CB et à deux fois le rectangle contenu sous AC et CB. »



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exercez-vous :

- 1) Illustrer par un dessin et justifier avec des aires la formule : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 2) Même question pour la formule $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- 3) Voici une formule illustrée par Euclide : $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = bc$; la démontrer.

Elle peut s'énoncer : "Le produit de deux nombres est la différence du carré de leur demi-somme et du carré de leur demi-différence."

Expliquer la démonstration suivante, due à Euclide, en utilisant des aires.

Texte d'Euclide

Si une droite AB est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle contenu sous les segments inégaux de la droite entière avec le carré de la droite comprise entre les segments est égal au carré de la moitié de la droite entière.

On pose $AD = b$ et $DB = c$ ($b > c$).

On a donc $AB = b + c$. C étant le milieu de $[AB]$:

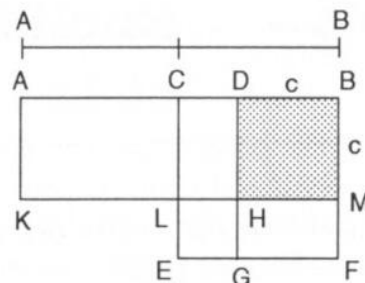
$$AC = CB = \frac{b+c}{2}.$$

On a construit le carré $CBFE$, puis le carré $DBMH$ et enfin le rectangle $ABMK$.

* Montrer que : Aire $(CBFE) - \text{Aire}(EGHL) = \text{Aire}(ADHK)$.

* $CBFE$ est un carré, écrire en fonction de b et c , l'aire du carré $CBFE$, celle de $EGHL$ et l'aire de $(ADHK)$.

* En déduire la formule demandée.



■ Un autre problème d'égalité d'aires

Voici un texte extrait des "Éléments" d'Euclide et une démonstration.

« Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux. »

Notations :

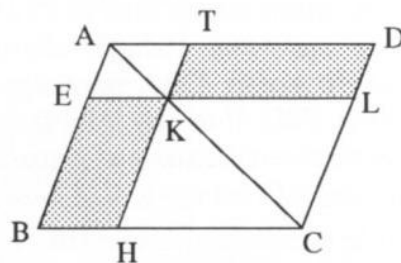
Le parallélogramme $ABCD$ est désigné par sa diagonale AC .

Son aire est désignée par (AC) et l'aire du triangle ABC est désignée par (ABC) .

« Soit le parallélogramme AC et ET et LH les parallélogrammes situés autour de sa diagonale AC . Soit encore BK et KD les parallélogrammes appelés compléments des précédents.

Je dis que l'on a entre ces compléments :

$$(BK) = (KD).$$



En voici la démonstration :

Dans le parallélogramme AC , nous avons $(ABC) = (ACD)$.

De même dans le parallélogramme ET nous avons $(AEK) = (ATK)$.

Pour la même raison, $(KLC) = (KHC)$

et par addition : $(AEK) + (KHC) = (ATK) + (KLC)$.

Mais nous avons : $(ABC) = (ADC)$ et par soustraction, nous obtenons les compléments : $(BK) = (KD)$. »

Exercez-vous :

* Refaire cette démonstration avec le langage et les notations actuels. Expliquer en particulier le mot "complément".

* Justifier les égalités d'aires. Retrouver la propriété citée par Euclide.

4- Euclide et le théorème de Pythagore

Étudier la démonstration suivante du théorème de Pythagore telle qu'on la trouve dans Euclide (Livre I, prop. 47) :

Soit ABC un triangle rectangle, que BAC soit l'angle droit ; je dis que le carré sur BC est égal aux carrés sur BA, AC.

Décrivons sur BC le carré BDEC et sur BA, AC les carrés (GB), (HC). Par A menons AL parallèle à BD et CE, et joignons AD, AE.

Puisque chacun des angles BAC, BAG, est droit, les deux- droites AC, AG, non placées du même côté, font avec la droite BA au point A, deux angles adjacents égaux à deux droits ; donc CA est en ligne droite avec AG. Pour la même raison BA est aussi en ligne droite avec AH.

Et puisque l'angle DBC est égal à l'angle FBA, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABC, l'angle entier DBA sera égal à l'angle entier FBC. Puisque DB est égal à BC, et FB à BA, les deux côtés AB, BD seront respectivement égaux aux deux côtés FB, BC, et l'angle ABD est égal à l'angle FBC. Donc la base AD est égale à la base FC, et le triangle ABD est égal au triangle FBC.

Or le parallélogramme (BL) est double du triangle ABD, car ils ont la même base BD et sont entre les mêmes parallèles BD, AL.

Et le carré (BG) est double du triangle FBC, car ils ont aussi la même base FB et sont entre les mêmes parallèles FB, GC.

Donc le parallélogramme (BL) est aussi égal au carré GB.

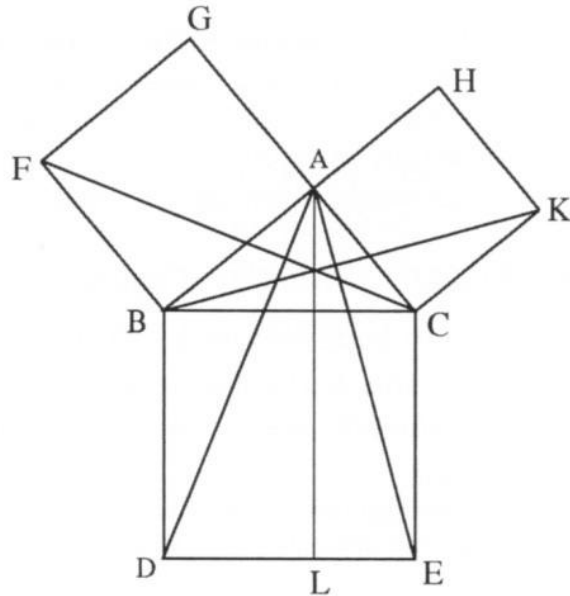
De même, si nous joignons AE, BK, nous démontrerons que le parallélogramme (CL) est égal au carré (HC).

Donc le carré entier BDEC est égal aux deux carrés (GB), (HC).

Mais le carré BDEC est décrit sur BC, et les carrés (GB), (HC) sur BA, AC.

Donc le carré décrit sur le côté BC est égal aux carrés décrits sur les côtés BA, AC.

Donc, dans les triangles rectangles, le carré, sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit.



La démonstration d'Euclide par Pierre Hérigone.

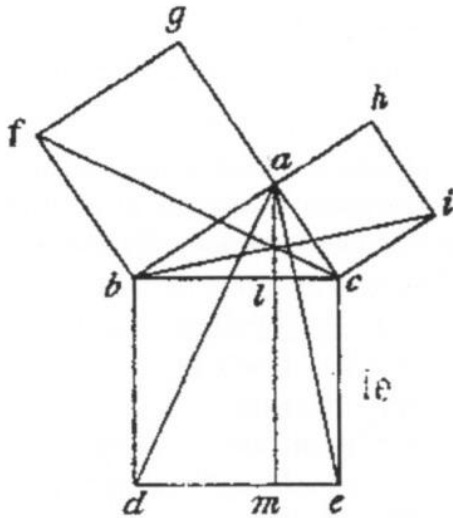
Pierre HÉRIGONE (17^{ème} siècle) a fait une tentative pour simplifier le langage et faciliter le raisonnement en géométrie à l'aide d'un mode spécial de notations.

Les symboles qu'il emploie à cet effet sont entre autres : **est**, **snt** (sont), Π (à), **U** (ou), **-** (droite), **=** (2 droites parallèles), **<** (angle quelconque), **L** (angle droit), \square (carré), \diamond (parallélogramme quelconque), Δ (triangle), **2|2** (signe de l'égalité), **+** (signe de l'addition), **commun add.** (indication de l'opération d'ajouter une même quantité aux deux membres d'une égalité).

Ce procédé lui a permis de réunir dans son *Cours mathématique* (1644), sous un très petit volume, une grande quantité de matière, notamment les Livres d'Euclide en français et en latin.

À titre d'exemple, voici la démonstration du théorème de Pythagore d'après Euclide. La colonne de gauche de la démonstration indique les références aux propositions, postulats et axiomes antérieurs.

Hypoth.	Req. Π demonstr.
$\angle bac$ est \perp ,	$\square bc$ 2 2 $\square ab$ + $\square ac$.



Præpar.	
46, I (1)	be est $\square bc$,
46, I (1)	af est $\square ab$,
46, I (1)	ai est $\square ac$,
31, I (2)	$am = bd$ \perp ce ,
I, p. 1 (3)	ad, ae, bi, cf snt -
hyp.	$\angle bac$ est \perp ,
constr.	$\angle bag$ est \perp ,
14, I (4)	gac est -,
29 d. I (3)	ab 2 2 bf ,
29 d. I (3)	bd 2 2 bc ,
12 a. I (6)	$\angle abc$ 2 2 $\angle fba$.
	$\angle abc$ commun add.
2 a. I (7)	$\angle abd$ 2 2 $\angle fbc$,
4, I (8)	Δabd 2 2 Δfbc , α
41, I (9)	$\diamond blmd$ 2 2 2 Δabd ,
41, I (9)	$\square af$ 2 2 2 Δfbc ,
6 a. I (10)	$\diamond blmd$ 2 2 $\square af$, β
d. α	Δace 2 2 Δicb ,
d. β	$\diamond clme$ 2 2 $\square ai$,
concl.	
2 a. I (7)	$\square be$ 2 2 $\square af$ + $\square ai$

Extrait de Emile FOURREY "Curiosités Géométriques" (Vuibert).

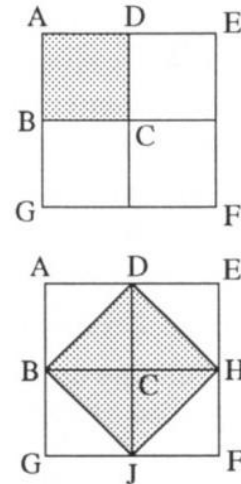
5- Duplication du carré

Voici un problème simple auquel se sont intéressés les géomètres grecs.

On considère un carré ABCD. Comment à la règle et au compas, construire un carré d'aire double ?

C'est le problème connu sous le nom de "duplication du carré". Platon, vers 600 av. J.-C., posait cette question dans "Le Menon".

La première idée qui vient à l'esprit est de doubler le côté du carré. C'est évidemment erroné, vérifiez-le sur le dessin.



Exercez-vous :

- 1- Montrer que le carré grisé BDHJ de la deuxième figure est bien un carré d'aire double du premier carré ABCD et moitié de celle de ADEG.
- 2- Montrer que si a désigne le côté du carré donné, le côté x du carré d'aire double est tel que $x^2 = 2a^2$.
- 3- Voici trois figures, sur chacune d'elles est indiquée le côté a du carré à dupliquer. Réaliser la construction complète de chaque figure à la règle et au compas. Montrer que le segment marqué x a bien pour longueur celle du côté du carré d'aire double.

<p>Penser aux formules dans un triangle rectangle MNP.</p>	<p>Penser à la formule dans le triangle rectangle : $HN^2 = HM \times HP$.</p>	<p>Utiliser le triangle rectangle MTO.</p>

■ **Insertion de x entre a et $2a$**

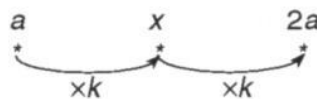
Entre a , côté du carré qui est donné, et x , côté du carré d'aire double que l'on cherche, on doit avoir la relation $x^2 = 2a^2$.

Exercez-vous :

1- Montrer que cette équation est équivalente à $\frac{x}{a} = \frac{2a}{x}$.

2- Posons $x = ka$.

Montrer que pour déterminer x , il faut insérer entre a et $2a$ un nombre positif x qui vérifie à la fois $x = ka$ et $2a = kx = k^2 a$.



3- Montrer que $k = \sqrt{2}$

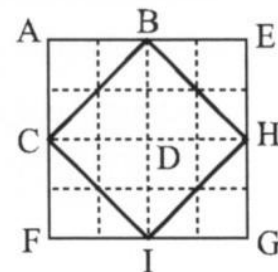
■ **Le Ménon de Platon**

Brunschvicg : Étapes de la Philosophie Mathématique - PUF

Il s'agit de construire un carré d'aire double d'un carré de deux pieds de côté.

« Socrate platonicien fait introduire un esclave auquel, sans rien apprendre directement, par le seul effet de la lumière naturelle qui se révèle à elle-même, il prétend faire retrouver la véritable solution du problème. Les premières réponses de l'esclave sont empruntées aux cadres de l'arithmétique pure : le carré de surface double paraît avoir un côté de longueur double. – Mais la longueur double est 4, la surface double est 16. – Le côté du carré sera donc plus grand que 2, plus petit que 4, c'est-à-dire 3. – Mais cette réponse, qui épuise en quelque sorte les ressources de l'imagination proprement numérique, est encore inexacte ; le carré de trois pieds de côté aurait une surface de neuf pieds. – Socrate suggère alors une considération exclusivement géométrique. Soit le carré ABCD, nous pouvons lui juxtaposer trois carrés égaux de façon à obtenir la surface quadruple AEGF.

En prenant les diagonales BC, CI, IH, HB, nous coupons en deux chacune des quatre surfaces égales au carré primitif. Le carré BCIH est donc double du carré primitif ; le côté, dont la longueur sera égale à $\sqrt{8}$, est la ligne que les sophistes appellent diamètre ; c'est du diamètre que se forme donc la surface double. »



6- Duplication du cube

■ Le problème de Délos

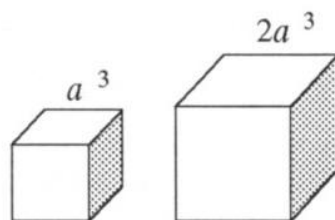
On raconte que vers 600 av. J.-C., des habitants de Délos avaient reçu l'ordre d'un oracle, de doubler le volume d'un autel cubique. Embarassés, ils s'adressèrent aux géomètres de l'Académie de Platon pour résoudre ce problème.

Ce problème est connu depuis sous le nom de "duplication du cube".

Les géomètres de l'époque cherchèrent à construire à la règle et au compas l'arête du nouveau cube à partir de celle du cube donné. Ils se heurtèrent à une impossibilité.

Ils cherchèrent alors à réaliser cette construction par d'autres procédés plus ou moins mécaniques que vous allez découvrir dans ces pages.

C'est en 1837 que le mathématicien français Wantzel a démontré que cette construction, qui fit l'objet de nombreuses recherches, est impossible à la règle et au compas.



Si on désigne par a l'arête du cube donné, montrez que l'arête x du cube de volume double doit vérifier $x^3 = 2a^3$.

■ Étude d'Hippocrate de Chios (- 500 av. J.-C.)

S'inspirant de l'idée "d'insertion" vue à propos de la duplication du carré, ce géomètre eut l'idée d'insérer, entre a et $2a$, deux nombres positifs x et y tels que :

$$x = ka ; y = kx \text{ et } 2a = ky \text{ autrement dit } \frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{2a}{y} = k.$$

Exercez-vous :

1- Montrer que $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$; $xy = 2a^2$.

2- Montrer que $k^3 = 2$ autrement dit $k = \sqrt[3]{2}$.

3- Montrer alors que $x^3 = 2a^3$, autrement dit que si a est l'arête du cube donné, alors x est celle du cube de volume double.

■ **Les travaux de Menechme (- 375 ; - 325 av. J.-C.)**

En coupant un cône par un plan, ce géomètre grec découvre ce que l'on appelle à l'époque "les triades de Menechme" et que l'on appelle de nos jours les "coniques" : ce sont le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole.

À partir de la seconde, on étudie le cercle, la parabole et l'hyperbole par l'intermédiaire de leurs équations dans un repère.

Si le côté a est donné, vous avez vu que le côté x du cube de volume double est le nombre x tel que $x = a \sqrt[3]{2}$.

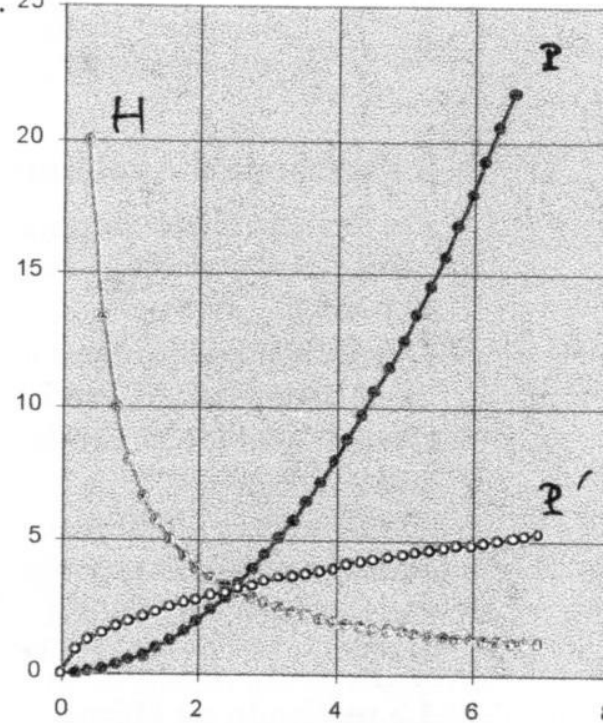
Le point $(x ; y)$ est sur la parabole P d'équation $y = \frac{x^2}{a}$.

Le point $(x ; y)$ est sur l'hyperbole H d'équation $y = \frac{2a^2}{x}$.

On a de même $y^2 = 2ax$.

Le point $(x ; y)$ est sur la parabole P' d'équation $y = \sqrt{2ax}$.

Il s'agit de déterminer graphiquement l'abscisse x du point commun à ces trois courbes.



Exercez-vous :

- On veut dupliquer un cube d'arête $a = 2$. Il faut donc trouver la longueur x du cube de volume double.
 Dans un repère de votre choix, construire la parabole P d'équation $y = \frac{1}{2} x^2$, l'hyperbole H d'équation $y = \frac{8}{x}$, puis enfin la parabole P' d'équation $y = 2\sqrt{x}$.
 Montrer que ces trois courbes ont un point commun A : son abscisse x est l'arête du cube de volume double de celui du cube d'arête $a = 2$.
 C'est donc un procédé graphique qui apporte la solution de la "duplication" du cube.
- Démontrer que le cercle de centre K (2 ; 1) passant par l'origine du repère passe aussi par le point A ci-dessus.
- Démontrer que, pour a quelconque, le cercle de centre K ($a ; a^2$) passant par l'origine O passe aussi par le point commun aux trois courbes P, P' et H.

7- Des procédés mécaniques pour la duplication du cube

Constatant l'impossibilité de la duplication du cube "à la règle et au compas", les géomètres ont imaginé d'autres procédés "mécaniques" de construction approchée.

Rappelons le problème :

« Connaissant l'arête a d'un cube, il s'agit de construire un segment de longueur x , côté du cube de volume double. »

■ La méthode d'Apollonius de Perge (200 av. J.-C.)

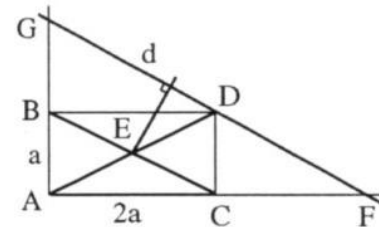
On construit un rectangle $ABDC$ de côtés $AB = a$ et $AC = 2a$. Son centre est le point E .

Une droite d passant par le point D coupe (AB) en G et (AC) en F .

On fait pivoter la droite d autour du point D .

On démontre que lorsque la médiatrice du segment $[FG]$ passe par le point E , centre du rectangle, alors $CF = x$.

On a de plus, $BG = y$ (cf. n° 6).



■ La méthode de Héron

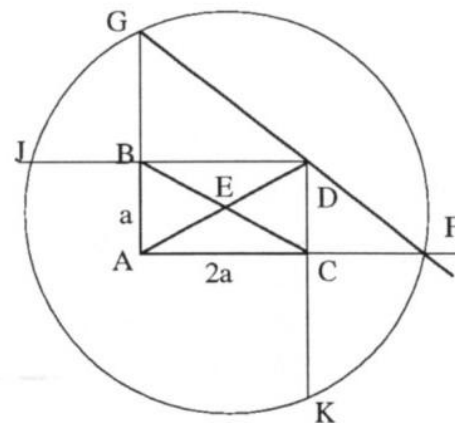
d'Alexandrie (100 av. J.-C.)

Cette méthode n'est qu'une variante de la construction d'Apollonius.

Partant du même rectangle $ABDC$, de largeur a et de longueur $2a$, Héron propose de construire un cercle de centre E , centre du rectangle. Ce cercle coupe (AC) en F et (AB) en G .

Lorsque la corde $[FG]$ passe par le point D , alors on a $CF = x$.

De plus, $BG = y$.



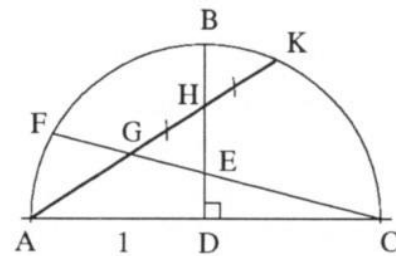
Exercez-vous :

- Faire ces deux manipulations sur papier calque après avoir choisi l'arête a du cube que vous voulez dupliquer.
- Pour le procédé de Héron, il est commode de tracer des cercles concentriques de centre E jusqu'à ce que la corde [FG] passe par le point D.
- Réaliser ces deux figures avec un logiciel de géométrie, type Cabri Géomètre ou le logiciel Géoplan.

■ **La méthode de Pappus (400 av. J.-C.)**

Voici un texte traduit et attribué à Pappus expliquant une autre méthode :

« Construisons le demi-cercle ABC ; élevons de son centre D la droite DB à angle droit et faisons mouvoir une règle autour du point A, de telle sorte que l'une de ses extrémités soit retenue par une cheville disposée au point A et que l'autre extrémité circule autour de la cheville prise pour centre, entre les points B et C.



Ces constructions étant faites, qu'il soit imposé de trouver deux cubes ayant entre eux un rapport donné, faisons en sorte que le rapport d'une droite BD à une droite ED soit ce rapport donné et prolongeons la droite de jonction CE jusqu'au point F. Faisons alors passer la règle entre B et C jusqu'à ce que sa partie découpée entre les droite FE et EB devienne égale à celle qui est découpée entre BE et l'arc BKC, ce qui se fait aisément en tâtonnant continuellement et en faisant avancer la règle. Que ce soit chose faite et que la règle ait la position AGHK, de manière que les droites GH et HK soient égales. Je dis que le cube construit sur la droite DB est au cube construit sur la droite DH dans le rapport de la droite DB à la droite DE. »

Exercez-vous :

- 1) Analyser ce texte et montrer que la fin se traduit par $\left(\frac{DB}{DH}\right)^3 = \frac{DB}{DE}$.

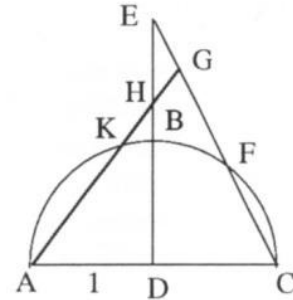
Montrer que si E est le milieu de [DB], après avoir fait pivoter la droite comme il est

dit, on a $\frac{DB}{DH} = \sqrt[3]{2}$.

2) Voici une variante de cette figure.

On construit un cercle de rayon $DA = 1$. On place le point E à l'extérieur tel que B soit le milieu de $[DE]$. On trace (CE) qui coupe le cercle en F . La règle pivote autour de A jusqu'à ce que $HK = HG$.

Montrez que l'égalité étudiée plus haut montre que l'on a alors $DH = \sqrt[3]{2}$.



■ La méthode de Descartes (1596 - 1650)

C'est la "construction mécanique" dite "méthode de la bande de papier".

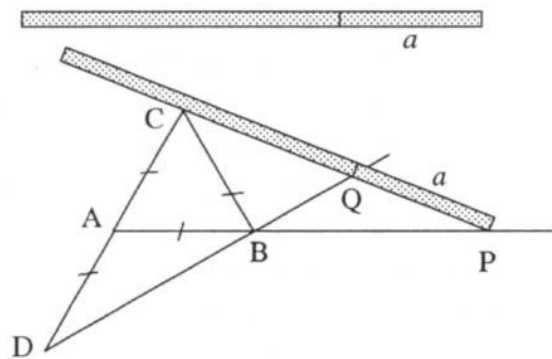
On trace un triangle équilatéral ABC de côté a .

D est le symétrique de C par rapport à A . On trace la droite (DB) .

Descartes imagine une bande de papier.

On fait pivoter cette bande de papier autour du point C . Elle coupe (AB) en P et (DB) en Q .

On déplace la règle jusqu'à ce que l'on ait $QP = a$. Lorsqu'il en est ainsi, Descartes a démontré que l'on a alors $CQ = x$.



Exercez-vous :

- Réaliser cette construction sur papier ou au moyen d'un logiciel de géométrie.

8- Trisection de l'angle

Dans l'Antiquité, les géomètres grecs savaient construire à la règle et au compas la bissectrice d'un angle, la médiatrice d'un segment. Par application du théorème de Thalès, ils savaient réaliser la trisection d'un segment (partage d'un segment en trois segments égaux)... Toutefois, la **trisection** de l'angle (partage d'un angle en trois angles égaux) leur parut très vite impossible à mener à bien avec ces deux instruments. Pour trouver une solution à ce problème, les Grecs imaginèrent d'autres approches.

Sur le plan théorique, vingt cinq siècles plus tard, le mathématicien français Wantzel démontra cette impossibilité en 1837.

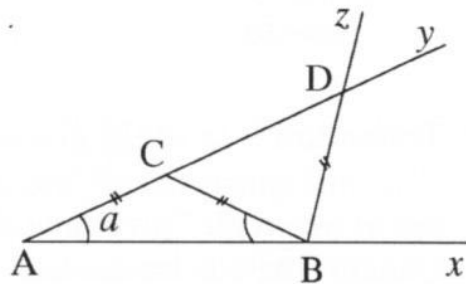
Exercez-vous :

- La trisection de certains angles est néanmoins possible à la règle et au compas : la réaliser pour $a = 180^\circ$; 135° ; 90° et 45° .

■ Construire le triple d'un angle

Pour construire le double, puis le triple d'un angle a donné, appliquons le scénario suivant :

1. Tracer un angle $\widehat{xAy} = a$ et marquer un point C sur $[Ay)$.
2. Marquer B sur $[Ax)$ tel que $CB = CA$
3. Marquer D sur $[Ay)$ tel que $BD = BC$.



Exercez-vous :

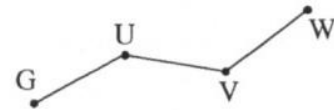
- Faire la figure pour différentes valeurs de a :
 $a < 45^\circ$; $a = 45^\circ$; $45 < a < 60^\circ$; $a = 60^\circ$ et $60^\circ < a < 90^\circ$.
- Montrer que $\widehat{xBz} = 3a$.

Si l'on sait que la trisection d'un angle quelconque est impossible à la règle et au compas, il n'est pas possible de réaliser cette figure en partant de l'angle \widehat{xAy} et en cherchant à construire l'angle \widehat{xBz} .

Cette construction peut cependant être exploitée pour imaginer des solutions aux conditions moins restrictives que le seul usage de la règle et du compas.

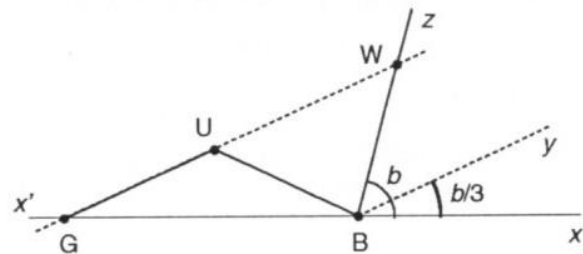
■ Trisection avec une règle articulée

La figure précédente nous permet d'imaginer une trisection à l'aide d'une règle articulée comme ci-contre (les trois brins ont même longueur).



Exercez-vous :

- Tracer un angle $\widehat{xBz} = b$.
Placer l'extrémité V de la règle en B et placer W sur [Bz]. Placer G sur [Bx'] et déplacer ce point sur cette demi-droite jusqu'à ce que les points G, U et W soient alignés.
Montrer que \widehat{UGB} vaut $\frac{b}{3}$.



Tracer la demi-droite [By] parallèle à (Gu). [By] est une trisectrice de l'angle \widehat{xBz} .

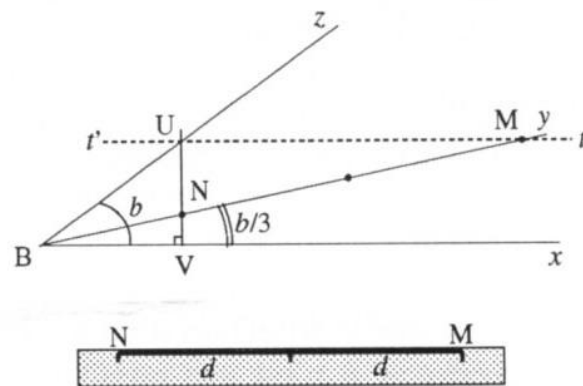
■ Trisection à la règle glissante et pivotante

Voici une construction "mécanique" dite d'Archimède qui utilise le compas et une règle "pivotante et coulissante".

L'angle $\widehat{xBz} = b$ est donné.

Scénario du tracé :

- Choisir un point U sur [Bz] et poser $BU = d$.
- Mener [UV] perpendiculaire à [Bx).
- Tracer la parallèle ($t't$) à [Bx] passant par U.
- Sur une règle plate (bord d'une feuille de papier), marquer deux points N et M tels que $NM = 2d$.



Exercez-vous :

- Faire pivoter la règle autour de B et la faire glisser sur elle-même de manière à amener N sur (UV) et M sur (t't').

Montrer que $\widehat{xBy} = \frac{b}{3}$ (penser à utiliser le milieu de [NM]).

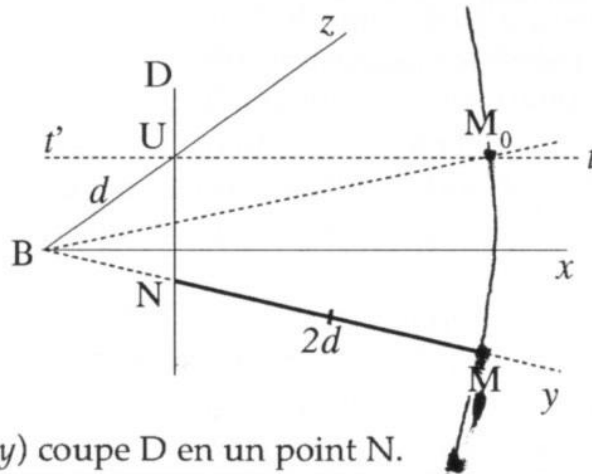
■ **Trisection avec la Conchoïde de Nicomède**

Si l'on dispose d'une courbe auxiliaire dessinée point par point dans le plan, on peut également réaliser cette trisection.

Pour cela, Nicomède (II^{ème} siècle avant J.-C.) inventa une courbe appelée *conchoïde*.

Données : Un angle \widehat{xBz} égal à b ; une droite D perpendiculaire à [Bx) coupe [Bz) en U. On désigne par d la longueur BU.

Voici comment construire point par point la conchoïde correspondant à l'angle b .



- Une sécante [By) coupe D en un point N.
- On associe à cette sécante le point M de la demi-droite [Ny) tel que $NM = 2d$.
- Lorsque [By) tourne autour du point B, le point M décrit une courbe appelée conchoïde.

Trisection de \widehat{xBz} : Traçons par U la parallèle (t't') à [Bx) ; elle coupe la conchoïde en M_0 . Montrer que $\widehat{xBM_0}$ est le tiers de l'angle \widehat{xBz} soit $\frac{b}{3}$.

Exercez-vous :

- 1) Tracer un angle \widehat{xBz} égal à 30° . Tracer une droite D perpendiculaire à [Bx). Construire une vingtaine de points de la conchoïde correspondante. En déduire le tracé d'une trisectrice de \widehat{xBz}
- 2) Recommencer avec un angle $\widehat{xBz} = 60^\circ$.

9- Descartes (1596-1650) et la trisection d'un angle

Comme pour de nombreux problèmes de géométrie, l'idée de Descartes est de trouver un procédé algébrique pour résoudre le problème de la trisection de l'angle.

Méthode

On trace un cercle de centre O et de rayon 1.
Les côtés de l'angle que l'on veut trisecter, coupent le cercle en A et B .

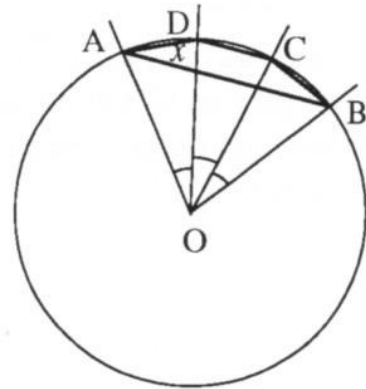
Les trisectrices le coupent en D et C .

Connaissant la corde $[AB]$, il s'agit de pouvoir construire les points D et C , c'est-à-dire de connaître la longueur x de la corde $[AD]$.

On pose $AB = q$ ($0 < q \leq 2$) qui est connu et $AD = DC = CB = x$ qui est inconnu.

Descartes démontre que x est solution de l'équation

$$x^3 = 3x - q \quad (1)$$



Exercez-vous :

- 1) Pour trouver l'équation (1), Descartes traçait la parallèle à (OC) passant par D qui coupe (AB) en F . (OC) coupe (AB) en G et (OD) coupe (AB) en E .
Démontrer que les triangles OAD et ADE sont isocèles et semblables.
En déduire que $DE = AD^2 = AE^2 = x^2$
Démontrer que les triangles ADE et DEF sont isocèles et semblables.
En déduire que $FE = x^3$.
Retrouvez l'équation (1) de Descartes en utilisant l'égalité $AB = 3AE - EF$.
- 2) Quelle équation obtenez-vous pour un angle de 180° ? Quelle est la solution cherchée ? Quelle équation obtenez-vous pour un angle de 90° ?

10- PAPPUS, les polygones réguliers et les alvéoles des abeilles

Étudiées depuis l'Antiquité, les alvéoles des abeilles ont une forme hexagonale caractéristique. Aristote (IV^{ème} siècle av. J.-C.) dans son livre "Histoire des animaux" et Plin l'Ancien (I^{er} siècle) dans son "Histoire naturelle" parlent déjà de cette forme hexagonale. C'est en étudiant ces alvéoles que Pappus (IV^{ème} siècle) s'est posé un problème plus général concernant les périmètres et les aires de polygones réguliers.

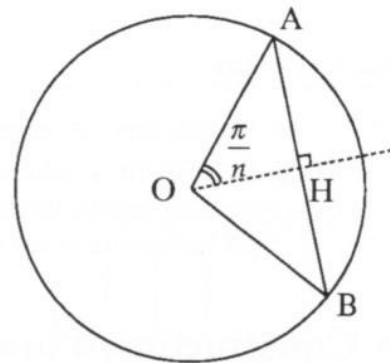
Un énoncé de Pappus :

« Si deux polygones réguliers ont le même périmètre, alors le polygone qui a le plus grand nombre de côtés est celui qui a la plus grande aire. »

Pour justifier cette propriété, nous n'utiliserons pas la méthode de Pappus, mais une démarche utilisant des outils actuels.

On désigne par p le périmètre d'un polygone régulier P de n côtés, inscrit dans un cercle de centre O .

Soit $[AB]$ un côté, \widehat{AOB} l'angle au centre et OH l'apothème, c'est-à-dire la distance du centre O à (AB) .



Exercez-vous :

- 1) Justifier les égalités suivantes :

$$AB = \frac{p}{n} ; \quad \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n} ; \quad OH = \frac{p}{2n \tan \frac{\pi}{n}}$$

Montrer que l'aire S du polygone P est donnée par :

$$S(n) = n \times \frac{1}{2} \times OH \times AB = \frac{p^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$$

- 2) Le théorème de Pappus se pose de la façon suivante :

On considère deux polygones réguliers P et P' , ayant respectivement n et n' côtés ($n' > n$) de même périmètre p . Il s'agit de démontrer que $S(n') > S(n)$.

Considérer la fonction : $F : x \mapsto \frac{1}{x \tan \frac{\pi}{x}}$ (avec $x \geq 3$).

Vérifier, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, que cette fonction est croissante. En déduire que si $n' > n$ alors $S(n') > S(n)$ puisque p est le même pour tous les polygones réguliers considérés.

■ Les alvéoles des abeilles

Pour des alvéoles de même profondeur, la quantité de cire utilisée pour façonner les alvéoles est proportionnelle au périmètre de base. Or, d'après Pappus, pour un périmètre fixé, on aura une aire maximum si le nombre des côtés est le plus grand possible.

Il n'y a que trois polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan : le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier.

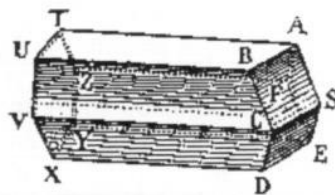
Afin d'économiser la cire, les abeilles ont donc choisi l'hexagone régulier pour avoir une aire maximum.

Exercez-vous :

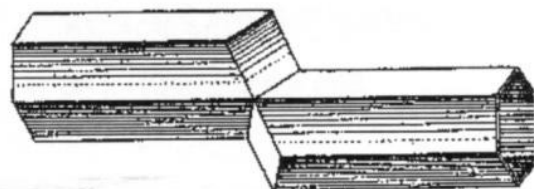
- 1) Vérifier que l'on peut paver le plan avec ces trois polygones réguliers.
- 2) En prenant un périmètre égal à 12 cm pour chacun de ces trois polygones, calculer de deux façons différentes (avec ou sans la formule précédente) les valeurs exactes de leurs aires et les comparer.

■ Construction d'une alvéole d'abeille

Le fond des alvéoles n'est pas plat comme on pourrait le penser, mais c'est une surface formée de trois losanges identiques ayant un sommet commun S : SCDE, SABC et SEFA.



Sur une cellule s'adossent trois autres cellules par chacun de ces trois losanges.



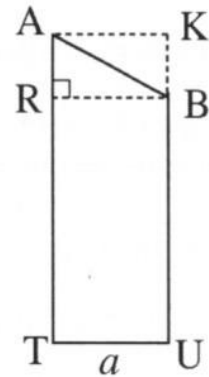
Adossement des fonds.

En 1712, Maraldi, neveu de Cassini, astronome à l'observatoire de Paris, a déterminé avec précision la forme de ces alvéoles.

Le corps de l'alvéole est formé de six trapèzes rectangles identiques constituant la surface latérale et de trois losanges identiques.

Maraldi a apporté les précisions suivantes :

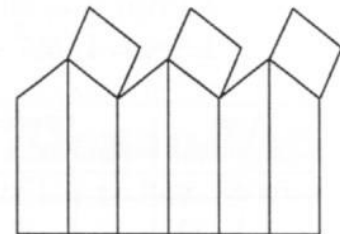
- Dans le trapèze ABUT, on a $AT = \frac{25a}{6}$ en posant $TU = a$.
- La distance AR est égale à $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.
- Dans le losange SABC, l'angle \widehat{ABC} vaut environ $109^\circ 28'$.



On peut le tracer exactement puisque l'on connaît son cosinus qui vaut $-\frac{1}{3}$.

Exercez-vous :

- 1) Calculer AB en fonction de a.
- 2) Choisir une longueur a et effectuer la construction des six trapèzes et des trois losanges de raccordement pour obtenir le patron d'un alvéole.
- 3) Voici les dimensions approchées d'un alvéole obtenues par Maraldi :



Côté de l'hexagone : 1 ligne 1/5 soit environ 2,71 mm
 Profondeur de l'alvéole : 5 lignes soit environ 11,3 mm.
 Calculer les côtés du losange et ses diagonales.

Avant que l'on ne choisisse le méridien terrestre comme référence pour les longueurs, le naturaliste Réaumur avait proposé de prendre l'alvéole comme base d'un système de mesure de longueur invariable :

« ...car il est plus que probable que les abeilles d'aujourd'hui des environs d'Athènes et de Rome sont de la même espèce que celles qui y étaient autrefois. Que celles d'aujourd'hui ne font pas des alvéoles plus grands ou plus petits que ceux que faisaient les abeilles du temps des Grecs et des Romains. »

(Histoire des insectes - tome 5).

11 - La trigonométrie à l'époque de Ptolémée

Astronome et mathématicien à Alexandrie, Claude Ptolémée (90-168) publia l'Almageste, qui rassemblait les connaissances mathématiques depuis les Babyloniens et les Grecs, avec quelques découvertes de son cru. Il s'est largement inspiré des travaux d'Hipparque. Il fut sans doute l'inventeur des tables de trigonométrie.

■ Tables de cordes de Claude Ptolémée

Sur un cercle dont le diamètre est divisé en 120 unités, à chaque arc tel que l'arc BF, il associe la longueur de la **corde** BF sous la forme de *fractions du diamètre*, en notation sexagésimale.

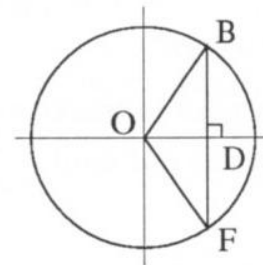
Le diamètre est divisé en 120 Parts.

1 Part = 1/120 du diamètre de cercle

1 Part = 60 Prim = 3 600 Sec

1 Prim = 1/60 d'une Part

1 Sec = 1/60² d'une Part



Arcs		Cordes		
Deg.	Min.	Part.	Prim.	Sec
2	0	2	5	40
2	30	2	37	4
9	0	9	24	54
10	0	10	27	32
10	30	10	58	49

Voici un court extrait d'une "table de cordes" établie par le mathématicien pour les arcs de 0,5° à 180°. La mesure de l'arc BF est donnée en degrés et demi-degré (30') et la corde BF est donnée en "parties du diamètre" en notation *sexagésimale*, comme chez les Babyloniens.

Ainsi pour 2°0' : on lit

(2 - 5 - 40) qui signifie : $2 + \frac{5}{60} + \frac{40}{60^2}$ parties du diamètre.

Exercez-vous :

- 1) Considérer la ligne « 2 Deg 0 Min » : on a $\widehat{BOF} = 2^\circ$: BF = 2 Part + 5 Prim + 40 Sec. Calculer à 0,001 près, le quotient de BF par le diamètre, c'est-à-dire

$\left(2 + \frac{5}{60} + \frac{40}{3600}\right) : 120$. C'est le sinus de "l'angle moitié" : 1°.

Comparer ce résultat à sin 1° donné par la calculatrice.

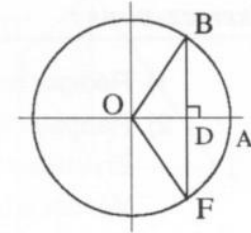
- 2) Examiner la ligne 3 : $\widehat{BOF} = 9^\circ$; $BF = 9 \text{ Part} + \frac{24}{60} \text{ Part} + \frac{54}{3600} \text{ Part}$.

Calculer BF à 0,001 près et comparez à la valeur donnée par la calculatrice.

- 3) Comparer les données de la ligne 4 au sinus de 5° .
 4) Calculer $\sin(5^\circ 15')$ avec la table de Ptolémée.
 5) Montrer que $\frac{BF}{\text{diamètre}} = \frac{BD}{OB} = \sin(\widehat{DOB})$

Texte de Nicolas de Lacaille

« Le sinus d'un arc quelconque est la moitié de la corde d'un arc double. Car si on prolonge BD jusqu'en F, BD sera la moitié de BF, corde du double de l'arc BA. Et de là, pour le dire en passant, que vient probablement la dénomination des sinus ; car autrefois les cordes d'un cercle s'appelaient inscriptae, et leur moitié semisses inscriptae, se désignaient par S. ins.



On finit donc par prononcer sinus dans un temps où la plupart des mots se terminaient en us. Dire que le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double, il suit évidemment que le sinus d'un arc de 30° est la moitié du rayon. »

12- La trigonométrie à Alexandrie

■ Un calcul d'Hipparque (190-120 av. J.-C.)

Hipparque a trouvé comment calculer le cosinus d'un angle de mesure a à partir du cosinus de l'angle de mesure double $2a$.

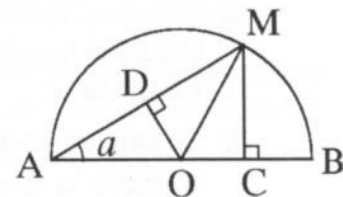
En fait, Hipparque ne parlait pas de "cosinus" mais un langage autre qui est équivalent. Voici sa démarche en langage moderne.

On trace le demi-cercle de diamètre $[AB]$ de centre O et de rayon $OA = OB = 1$. M est un point de ce demi-cercle de tel que $\widehat{BOM} < 90^\circ$.

D et C sont tels que :

$$(\overline{OD}) \perp (\overline{AM}) \quad \text{et} \quad (\overline{MC}) \perp (\overline{AB})$$

Vérifier que $\widehat{MOC} = 2 \widehat{MAC}$.



On pose $\widehat{MAC} = a$. Calculer $\cos(2a)$ dans le triangle OMC et $\cos a$ dans le triangle OAD puis dans le triangle AMC. En remarquant que $AM = 2 AD$ et que $AC = 1 + OC$, démontrer la formule

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} .$$

Si l'on connaît $\cos(2a)$, elle permet de calculer $\cos a$, c'est-à-dire le cosinus de l'angle moitié.

Exercez-vous :

- 1) Rédiger complètement cette démonstration. Vérifier cette formule pour $a = 30^\circ$.
- 2) Rappeler la valeur exacte de $\cos 30^\circ$, puis de $\cos 45^\circ$.
En utilisant cette formule, calculer $\cos 15^\circ$, $\cos 7,5^\circ$, $\cos 22,5^\circ$ et $\cos 11,25^\circ$.
Vérifier à la calculatrice.

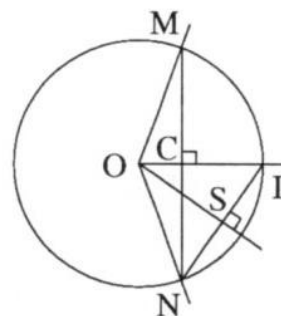
■ Un calcul de Ptolémée (90-168)

Voici un calcul de Ptolémée permettant d'exprimer $\sin a$ en fonction de $\cos(2a)$.

Dans le cercle de centre O, de rayon 1, l'angle au centre \widehat{MON} est un angle de mesure $4a$ ($a < 45^\circ$). Sa bissectrice coupe [MN] en C et le petit arc MN en I. Soit S le milieu de [IN].

Ptolémée établit le résultat suivant :

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2} .$$



Exercez-vous :

- 1) Montrer que $IS = \sin a$.
- 2) Calculer CN, CM et CI en utilisant les lignes trigonométriques de $2a$.
Utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle CIN pour démontrer le résultat de Ptolémée.
- 3) En déduire la valeur exacte de $\sin 15^\circ$, $\sin 7,5^\circ$, $\sin 22,5^\circ$, $\sin 11,25^\circ$.
Vérifier à la calculatrice.

13- Sur le papyrus de Moscou

Le papyrus dit «de Moscou» date du Moyen Empire Égyptien (1900 av J.-C.). On y trouve une curieuse étude donnant le volume exact d'un tronc de pyramide particulier à bases carrées.

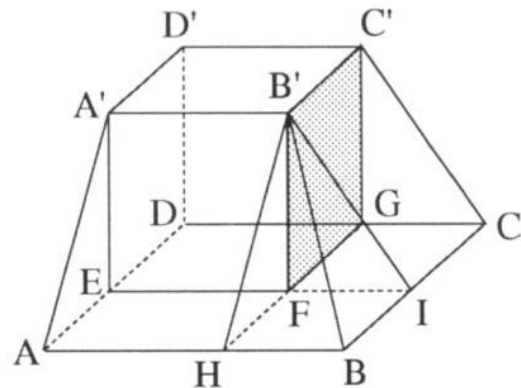
Notations

Grande base : ABCD est un carré (C1) de côté a .

Petite base : A'B'C'D' est un carré (C2) de base b ($b < a$).

Les points D', A', B', C' se projettent respectivement en D, E, F, G sur (ABCD).

On pose $DD' = h$. (GF) coupe (AB) en H et (EF) coupe (BC) en I.



Le tronc de pyramide se décompose en

- un parallélépipède rectangle A'B'C'D'EFGD
- une pyramide de sommet B', de base BIFH
- deux prismes droits AA'EHB'F et CC'GIB'F.

Exercez-vous :

- 1) Démontrer que FIBH est un carré de côté $a - b$.
Démontrer que l'aire de la base de chaque prisme est $\frac{h(a-b)}{2}$.

Trouver le volume du parallélépipède, celui de la pyramide et celui de chacun des prismes en fonction de a et b .

En déduire que le volume du tronc de pyramide est donné par

$$V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2), \text{ formule donnée dans le papyrus de Moscou.}$$

- 2) On considère un carré (C3) d'aire ab , c'est-à-dire de côté \sqrt{ab} qui est la moyenne géométrique des côtés des deux carrés de base. Donc le volume V est le produit de h par la moyenne arithmétique des aires des trois carrés (C1), (C2) et (C3).
- 3) Si l'on coupe le tronc de pyramide par un plan parallèle aux plans de bases et équidistant de ces plans, montrer que l'intersection du tronc de pyramide et de ce plan est un carré (C4) de côté $\frac{a+b}{2}$. Vérifier alors la formule dite des *trois niveaux* :

$$V = \frac{h}{6} (\text{Aire}(C1) + 4\text{Aire}(C4) + \text{Aire}(C2)) .$$