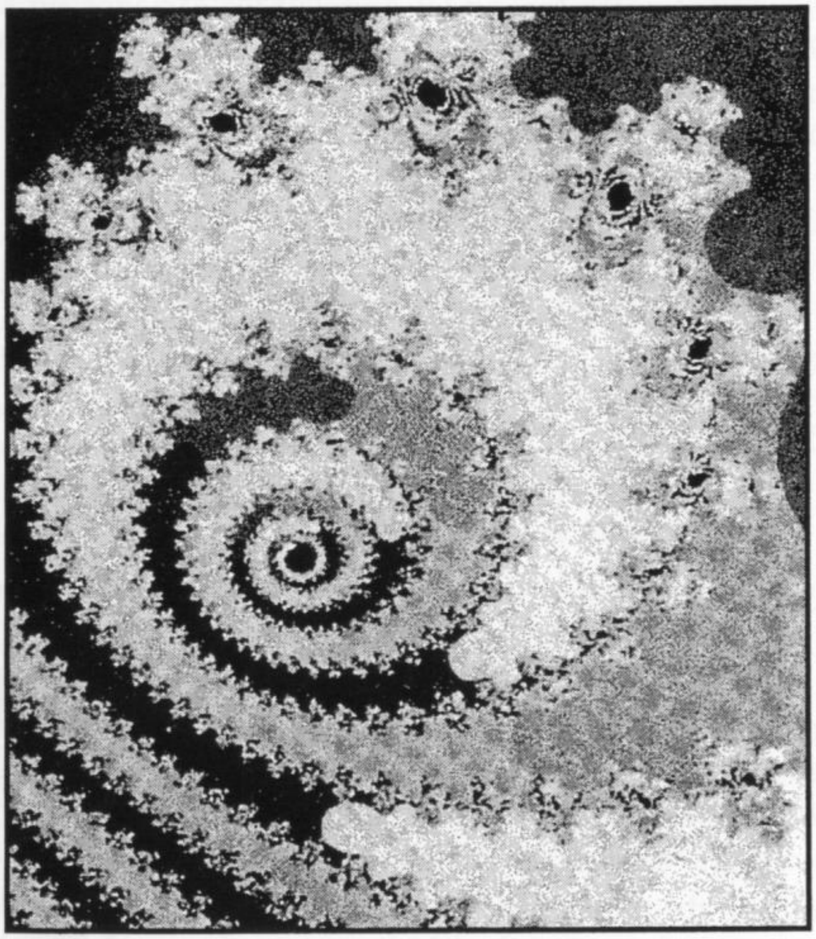
Galion Thèmes

Brins d'Histoire des Maths

6. Quelques belles courbes



B.B. Mandelbrot : *The fractal geometry of nature.* Freeman. 1982

15, quai André Lassagne – 69001 LYON

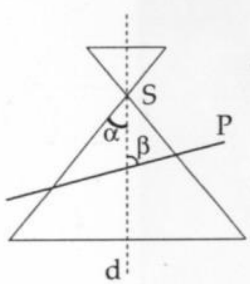
ISBN : 2-912-209-99-4

1 - Les coniques

Le mot "conique" désigne l'une des trois courbes : ellipse, hyperbole ou parabole. Elles ont été découvertes et étudiées dès l'Antiquité, par Apollonius de Perga, ainsi que par Archimède (300 av. J.-C.). Archytas et Menechme (400 av. J.-C.) utilisèrent la parabole et l'hyperbole, en vue de la résolution du problème de la duplication du cube, sans s'intéresser particulièrement à leurs propriétés géométriques.

Quatre siècles avant notre ère, on les appelait les «Triades de Menechme». Ptolémée (90-168), Galilée (1564-1642), Torricelli (1608-1647), Newton (1642-1727) et bien d'autres utilisèrent les coniques dans leurs recherches en astronomie, en mécanique, en mathématiques.

■ Les sections d'un cône de révolution



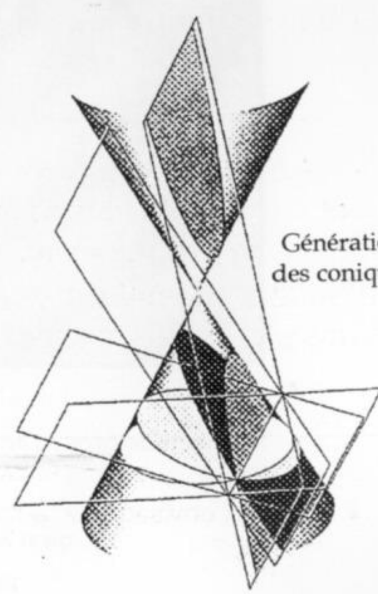
On considère un cône de révolution dont l'axe est la droite d, le sommet est le point S.

On représente ici la coupe de cette surface par un plan contenant d.

Le demi-angle au sommet du cône a pour mesure α. Considérons alors un plan P ne passant pas par le sommet S.

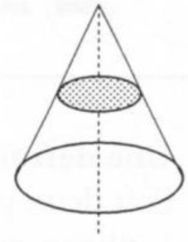
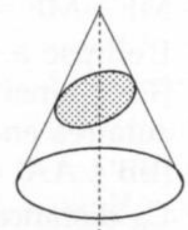
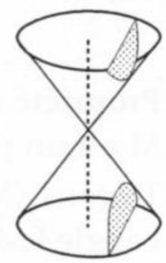
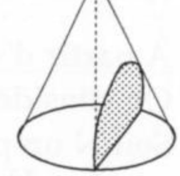
L'intersection de la surface par ce plan – ce que l'on appelle une section plane du cône – est une courbe appelée conique.

Selon l'angle β du plan avec l'axe d, la conique aura une forme particulière.



Génération des coniques

Quatre cas peuvent se présenter.

Cas (1) : Le plan P est perpendiculaire à l'axe *d*. La section conique est un ***cercle.*** On peut considérer que le cercle est une conique particulière.	$\beta = \frac{\pi}{2}$ 
Cas (2) : L'angle de P avec *d* est plus grand que α. La section conique est une ***ellipse.*** Cette courbe ressemble à un cercle vu "en perspective".	$\beta > \alpha$ 
Cas (3) : L'angle de P avec *d* est plus petit que α. La section conique est une ***hyperbole.*** L'hyperbole comporte deux "nappes" chacune correspond à une partie de la surface conique, située de part et d'autre du sommet S.	$\beta < \alpha$ 
Cas (4) : L'angle de P avec *d* est égal à α. La section conique est une ***parabole.***	$\beta = \alpha$ 

Dans les activités qui suivent, nous allons apprendre à les tracer, à découvrir quelques propriétés et voir comment elles ont été exploitées dans divers domaines. Ces propriétés ne seront pas démontrées mais admises.
Il faut savoir cependant que la plupart d'entre elles étaient connues et démontrées depuis Archimède et Apollonius.

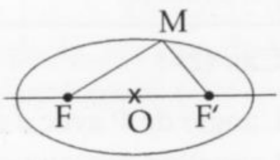
Exercez-vous :

1. Démontrer que dans le cas 1, la section est un cercle.
2. On peut envisager un autre cas : si le plan P contient l'axe d, que se passe-t-il dans ce cas ?

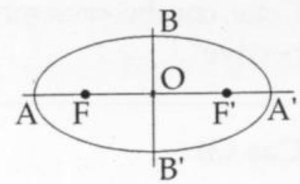
2 - L'ellipse

- **Une définition géométrique**

Soit deux points F et F′ et une longueur a ($2a > FF'$).
L'ellipse est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$. F et F′ sont ses foyers.

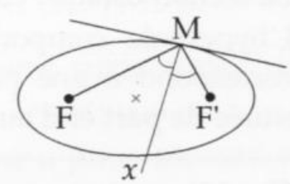


L'ellipse a un centre de symétrie, le milieu O de [FF′], ainsi que deux axes de symétrie perpendiculaires en O : le grand axe [AA′] et le petit axe [BB′]. $AA' = 2a$; $BB' = 2b$.
La distance FF′ est la distance focale : $FF' = 2c$.
Et on a : $a^2 = b^2 + c^2$



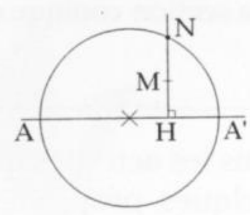
- **Propriété de la tangente en un point M de l'ellipse**

M est un point de l'ellipse de foyers F et F′.
Traçons (MF) et (MF′) et [Mx) la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.
La tangente en M à l'ellipse est la perpendiculaire en M à la demi-droite [Mx).



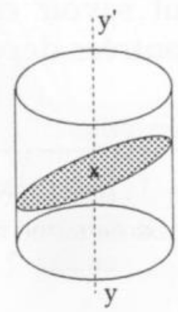
- **À partir d'un cercle**

On considère le cercle C de diamètre [AA′].
Soit N un point de C, qui se projette orthogonalement en H sur le diamètre [AA′].
Construisons le point M tel que $\overrightarrow{HM} = k\,\overrightarrow{HN}$ (k est une constante positive).
Lorsque le point N décrit le cercle C, le point M décrit une ellipse.



- **Section plane d'un cylindre de révolution**

L'intersection d'un cylindre de révolution par un plan non perpendiculaire à l'axe de révolution ($y'y$) et non parallèle à cet axe est une ellipse.
Lorsque l'on projette orthogonalement un cercle sur un plan, on obtient une ellipse.



Exercez-vous :

1. Comme le jardinier

Marquer deux points F et F' (FF' = 10 cm) sur un support bien plat (planche à dessin). Prendre un fil de 16 cm et fixer ses extrémités en F et F' au moyen de punaises.

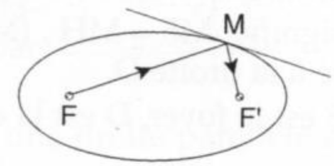
Un crayon glissant le long de la ficelle bien tendue dessinera une ellipse de foyers F et F'. Marquer son centre et tracer ses axes de symétrie.

Recommencer en changeant la distance FF' ainsi que la longueur du fil.

C'est ce que l'on appelle la "méthode du jardinier" pour dessiner une ellipse.

2. Sur un billard ou sous une voûte

Si le bord d'un billard est une ellipse de foyers F et F', une boule placée en F est lancée et frappe le bord en M : après le rebond la boule passe par le point F', pourquoi ? Prolonger alors la trajectoire.

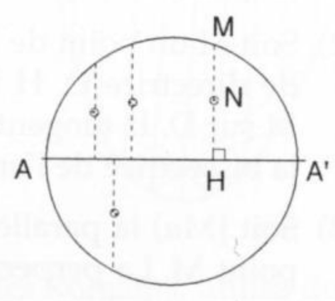


Ce phénomène de réflexion d'une boule de billard est valable pour une onde sonore : si l'on parle depuis le foyer d'une pièce à voûte elliptique, les ondes sonores se réfléchiront sur la voûte et iront se rencontrer au second foyer.

On peut le vérifier à l'Abbaye de la Chaise-Dieu.

3. À partir d'un cercle

Dessiner un cercle de diamètre [AA'] avec AA' = 20 cm. Choisir un point M du cercle, la perpendiculaire à (AA') passant par M coupe (AA') en H, marquer alors sur [MH] le point N tel que HN = 0,5 HM.

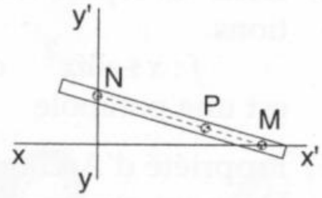


Recommencer avec un grand nombre de points M du cercle. Les points N sont tous sur une ellipse de grand axe [AA'].

Recommencer en choisissant HN = 2HM.

4. Avec une bande de papier

Sur une bande de papier, marquer deux points M et N et un point P sur le segment [MN]. Faire glisser la bande de sorte que le point M se déplace sur l'axe xx' et que le point N décrive l'axe yy', la trajectoire du point P est alors une ellipse.



5. Avec un liquide

Verser un liquide coloré dans un verre conique ou cylindrique. En penchant le verre, vous verrez apparaître une ellipse à la surface du liquide.

Comment faire pour que la courbe soit un cercle ?

3 - La parabole

On a vu qu'une parabole est la section d'une surface conique par un plan particulier qui fait avec l'axe du cône un angle égal au demi-angle au sommet de ce cône.

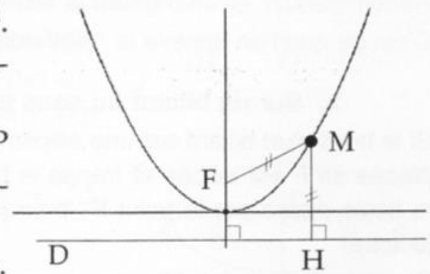
Voici une définition en géométrie plane de la parabole.

Soit D une droite et F un point non situé sur D.

La parabole est l'ensemble des points M équidistants du point F et de la droite D.

Autrement dit, M est un point de la parabole P signifie $MF = MH$, (MH) étant perpendiculaire à la droite D.

F est le foyer, D est la directrice de la parabole.



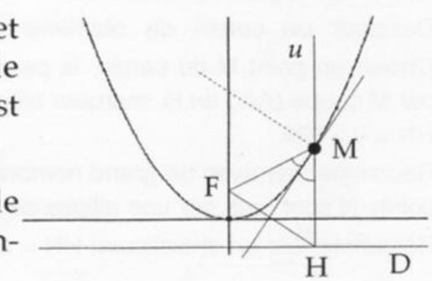
Quelques propriétés admises

(1) La perpendiculaire à D passant par F est un axe de symétrie de la parabole.

Le point de la parabole situé sur cet axe est le sommet de la parabole.

(2) Soit M un point de la parabole de foyer F et de directrice D, H le projeté orthogonal de M sur D, la tangente en M à la parabole est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH}$.

(3) Soit [Mu) la parallèle à l'axe passant par le point M. La perpendiculaire en M à la tangente est la bissectrice de l'angle $\widehat{uMF}$.



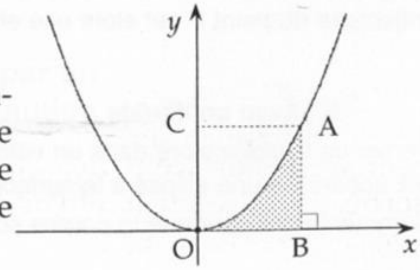
(4) Dans un repère du plan, la représentation graphique de l'une des fonctions

$$f : x \mapsto ax^2 \quad \text{ou} \quad g : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

est une parabole

(5) Propriété d'Archimède

Dans un repère orthonormal xOy, la parabole d'équation $y = x^2$ passe par O et par le point A (1 ; 1). L'aire de la surface hachurée située au-dessous de la courbe est le tiers de la surface du carré OBAC de côté 1.

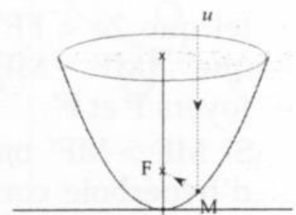


Exercez-vous :

Dans un repère

1. Dessiner un repère orthonormal du plan. Dans ce repère, construire des points représentatifs de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour x variant de -3 à $+3$.
2. Dans ce même repère, on considère le point F(0 ; 2) et la droite D d'équation $y = -2$;
   Soit M un point de coordonnées (x ; y), trouver une équation de la parabole de foyer F et de directrice D en écrivant que $MF^2 = MH^2$ en fonction des coordonnées.

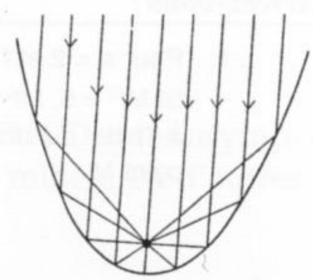
Quelques applications



Par rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie, on obtient une surface «parabolique» appelée encore «paraboloïde». Si cette surface est réfléchissante, tout rayon lumineux (uM) parallèle à l'axe frappant la surface en M se réfléchit suivant la droite (MF) qui passe par le foyer.

Inversement, un rayon issu de F se réfléchit suivant une droite parallèle à l'axe. C'est cette propriété qui et utilisée dans les applications suivantes :

Antenne parabolique

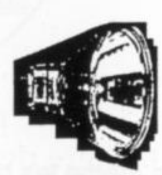


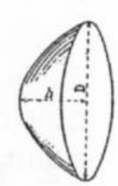
Une antenne «parabolique» a la forme d'un paraboloïde.
Une onde hertzienne arrive parallèlement à l'axe de cette parabole et frappe sa surface en M. Elle se réfléchit en passant par le foyer. Ainsi, en ce foyer convergent les ondes qui frappent la surface.

Four solaire

On raconte qu'Archimède, au siège de Syracuse par les Romains, utilisa des surfaces paraboliques dont l'axe était orienté vers le soleil pour mettre le feu aux navires romains placés au foyer de la parabole.

Le phare d'une voiture





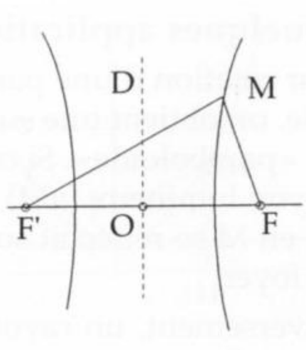
Dans un phare de voiture, la surface réfléchissante a la forme d'une surface parabolique. La lampe éclairante est placée au foyer F. Les rayons lumineux partis du foyer se réfléchissent sur la surface parabolique et forment à la sortie un faisceau lumineux de rayons parallèles à l'axe de la surface parabolique.

4 - L'hyperbole

La plupart des comètes ont une trajectoire elliptique ou parabolique. Il en existe d'autres qui ont une trajectoire hyperbolique.

■ Une définition géométrie

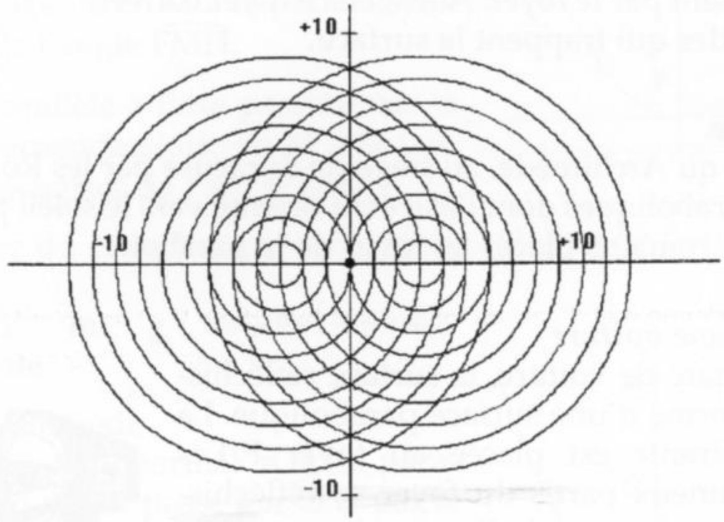
F et F' étant deux points et a un nombre positif tel que $2a <$ FF', l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole de foyers F et F'.



Si MF > MF' on a $MF - MF' = 2a$, la branche d'hyperbole correspondante est située dans le demi-plan contenant F', délimité par la médiatrice D de [FF']. L'autre branche de l'hyperbole est symétrique de la première branche par rapport à D.

Exercez-vous :

1. Pour a = 2 et FF' = 6, on a MF' = MF – 4.
   Si MF = 5, MF' = 1, M est à l'intersection du cercle C (F ; 5) et du cercle C' (F' ; 1). À l'aide du double réseau ci-dessous de cercles concentriques, déterminer ce point M.

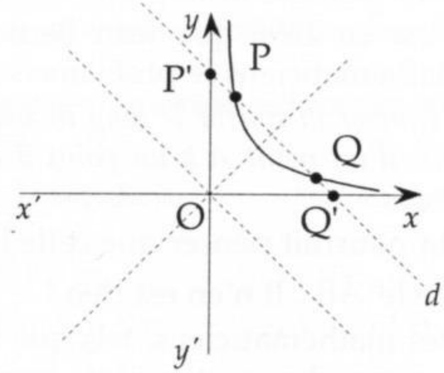


2. Trouver de même les points M lorsque MF prend les valeurs 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11.
3. Trouver les symétriques de ces points par rapport à D.

Propriétés

* Les deux points de l'hyperbole situés sur la droite (FF′) sont appelés sommets de la courbe.
* La tangente en M à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.
* Dans un repère orthonormal xOy, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{k}{x}$ (k constante) est une hyperbole.

  Les axes de coordonnées xx' et $y'y$ sont les asymptotes à la courbe. Le point O est centre de symétrie. Les bissectrices des axes sont axes de symétrie de la courbe



* La représentation graphique d'une fonction homographique $g : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équation : $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$.
* Si une sécante d coupe l'hyperbole en deux points P et Q et les asymptotes en P′ et Q′, alors [PQ] et [P′Q′] ont le même milieu, en d'autres termes les longueurs PP′ et QQ′ sont égales.

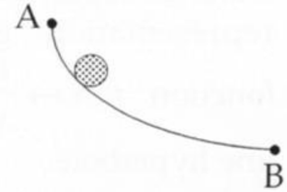
Exercez-vous :

1. Après avoir tracé la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, coupée par une droite d'équation $y = -2x + b$, vérifier la dernière propriétés ci-dessus».
2. On donne d et d', asymptotes d'une hyperbole H et un point M de cette hyperbole. En utilisant l'une des propriétés ci-dessus, et des droites passant par M, construire autant de points que vous voulez de cette courbe.

5 - La cycloïde

C'est en 1696 que Jean Bernoulli propose aux mathématiciens le problème suivant :

« *Trouver la courbe le long de laquelle glisserait une bille d'un point A à un point B en un minimum de temps.* »

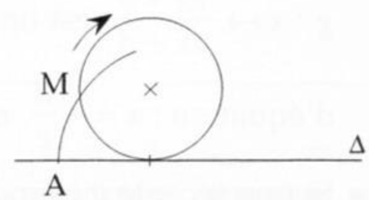


On pourrait penser que cette ligne est le segment [AB] ou encore un arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$. Il n'en est rien !

Des mathématiciens, tels que Huyghens et Leibniz ont démontré que c'est une courbe particulière appelée ***cycloïde,*** déjà connue de Galilée, de Torricelli et de Pascal.

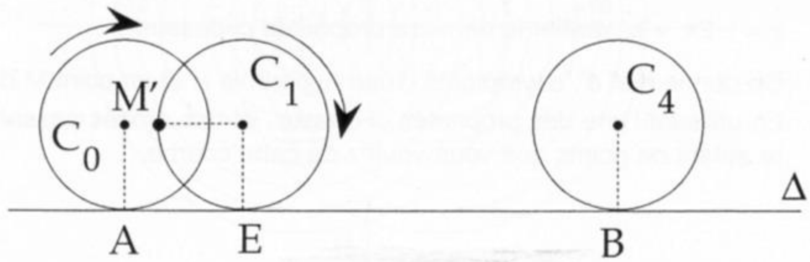
■ Définition de la cycloïde ou roulette

La cycloïde ou roulette est la courbe décrite par un point M d'un cercle lorsque ce cercle roule sans glisser sur une droite fixe.



Comment tracer une cycloïde ?

Soit Δ la droite sur laquelle «roule» le cercle de centre C et de rayon R. Au départ, M est au point A sur Δ. Au bout d'un tour du cercle, le point M se trouve en B sur Δ de telle sorte que $AB = 2\pi R$. Après un quart de tour, le cercle est tangent à Δ en E tel que $AE = \frac{AB}{4} = \frac{\pi R}{2}$. son centre est en C_1



Le point M est alors en M' tel que l'arc $\overset{\frown}{EM'}$ est un quart de cercle. M' est un point de la cycloïde ...

Reproduire et compléter la figure précédente avec R = 4 cm.

a) Marquer les centres C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, pour le cercle au départ, puis après un quart de tour, un demi-tour,n trois quarts de tour et un tour complet.
   Marquer les points correspondants de la cycloïde.

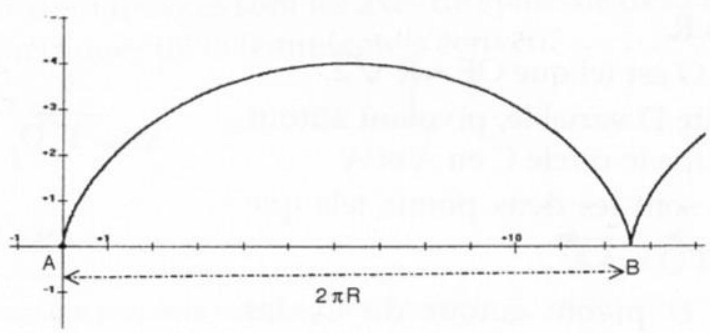
b) Sur le même dessin, marquer les points correspondant aux huitièmes de tour.

c) Utiliser un logiciel de géométrie pour faire dessiner le lieu géométrique du point M.

d) Utiliser une calculatrice graphique pour dessiner la cycloïde sachant que des équations paramétriques de la cycloïde sont :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{(t en radians)}$$

Voici la courbe que vous obtiendrez avec R = 2 :



e) Reprendre la question c : dessiner le lieu du milieu de [OM].

▪ Des propriétés remarquables

Longueur du segment [AB] : 2πR.

Longueur de l'arc $\widehat{AB}$ de la cycloïde : 8R (démontré par Waren (1632-1723)) (le nombre π n'intervient pas).

Aire de l'arche de la cycloïde : $3\pi R^2$ soit trois fois l'aire du disque de rayon R (démontré par Roberval au début du 17$^{\text{ème}}$ siècle).

Où trouve-t-on une cycloïde ?

Lorsque le vélo roule sur la route, la valve de chacun des pneus décrit une cycloïde.

Les tremplins de ski et de skate ont la forme d'une cycloïde.

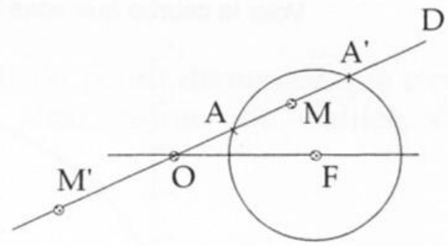
Sur une roue dentée, le profil des dents a la forme d'une cycloïde.

6 - La lemniscate de Bernoulli (1654-1705)

La lemniscate de Bernoulli est une courbe en forme de "8". Elle fut utilisée par le mathématicien Jacques Bernoulli, en 1694, dans un ouvrage consacré à l'étude des marées. Son nom vient du grec *lemniskos* qui signifie *ruban*.

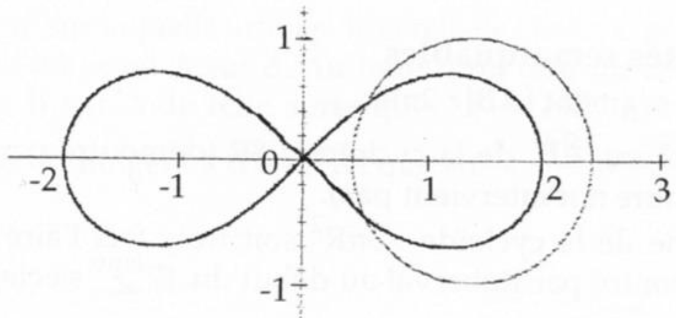
■ Définition géométrique

On considère un cercle C de centre F et de rayon R.
Le point O est tel que OF = R $\sqrt{2}$.
Une droite D variable, pivotant autour de O, coupe le cercle C en A et A'.
M et M' sont les deux points tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'O} = \overrightarrow{AA'}$.



OM = OM' = AA'

Lorsque D pivote autour de O, les points M et M' décrivent la lemniscate de Bernoulli dessinée ci-dessous avec R = 1.



Exercez-vous :

1. Tracer point par point une lemniscate avec R = 3 cm. Où sont les points M et M' lorsque D est tangente au cercle ? Lorsque D est confondue avec (OF) ?
2. Préciser le centre de symétrie et les deux axes de symétrie de la lemniscate.
3. Sur la première figure, on pose $\widehat{FOM} = \theta$. OF = R$\sqrt{2}$. Soit H le milieu de [AA']. Calculer en fonction de R et θ :

• FH dans le triangle OHF
• AH dans le triangle AHF.

En déduire $OM = 2R\sqrt{1-2\sin^2\theta} = 2R\sqrt{\cos 2\theta}$.

Avec $OM = \rho$ on obtient l'équation polaire de la lemniscate : $\rho = 2R\sqrt{\cos 2\theta}$.

Utiliser cette équation polaire pour tracer une lemniscate avec une calculatrice ou un ordinateur.

■ Propriétés de la courbe

✦ Si on désigne par F′ le symétrique de F par rapport au point O, la lemniscate est l'ensemble des points M tels que $MF \times MF' = 2R^2$.
Les points F et F′ s'appellent les foyers de la lemniscate.

✦ Dans un repère dont les axes sont les axes de symétrie de la courbe, des équations paramétriques de la lemniscate s'écrivent :

$$x(t) = 2R\frac{t+t^3}{1+t^4} \qquad y(t) = 2R\frac{t-t^3}{1+t^4}.$$

Exercez-vous :

1. Vérifier la première propriété lorsque D est tangente au cercle, puis lorsque D passe par F.
2. Déterminer les valeurs du paramètre t correspondant aux points d'intersection de la lemniscate avec les deux axes de coordonnées.
3. Utiliser les équations pour tracer une lemniscate avec une calculatrice.

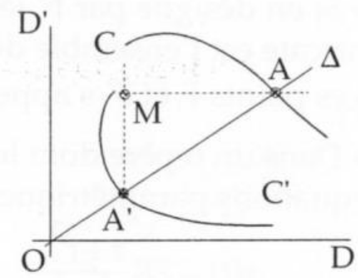
■ Autre construction

Placer deux points A et B tels que AB = 8 cm.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre A, de rayon 5 cm, $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre B et de rayon 5 cm.
P est un point variable du cercle $\mathscr{C}$. Déterminer Q sur $\mathscr{C}'$ tel que PQ = 8 cm. Placer le point M milieu de [PQ] pour diverses positions de P.
L'ensemble des points M est une lemniscate.

7 - Courbes et transformation de Newton (1642-1727)

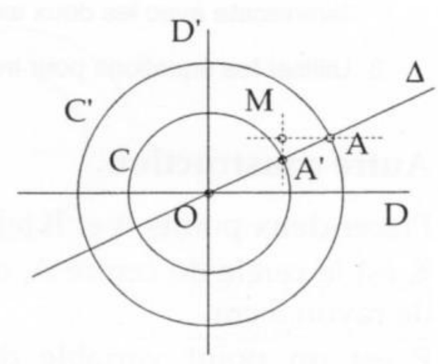
Principe d'une transformation

D et D' sont deux droites fixes, perpendiculaires et sécantes en O.
C et C' sont deux courbes fixes.
Δ est une droite variable qui pivote autour du point O. Elle coupe C et C′ respectivement en A et A′. La parallèle à D passant par A coupe en M la parallèle à D′ passant par A′. Lorsque la droite Δ pivote autour de O, le point M décrit une courbe Γ.



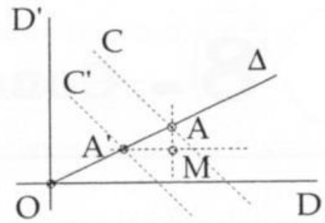
C'est cette courbe qui nous intéresse !
Vous allez tracer Γ point par point dans les quatre cas suivants. Il peut être intéressant d'utiliser un logiciel de géométrie pour faire tracer ces courbes.

- *Premier cas :* **C et C′ sont deux cercles de même centre O.**
  Les deux points A et A′ sont d'un même côté de O.
  Construire point par point la courbe Γ correspondante.
  Cette courbe est une ellipse.



- *Deuxième cas :* **C et C′ sont deux droites parallèles**
  Construire des points de la courbe Γ dans chacun des cas suivants :
  a) C passe par O.
  b) C est parallèle à D.
  c) C et C′ ont pour équations respectives
  $$y = -x + 1 \quad \text{et} \quad y = -x + 2.$$

Pour Δ, on prendra une équation $y = mx$. Calculer les coordonnées de M en fonction de m.



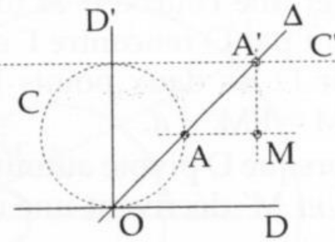
→ *Troisième cas :* **C est un cercle tangent à la droite D en O et C′ est la tangente au cercle C et parallèle à D.**

Tracer la courbe Γ.

Que se passe-t-il si Δ vient se confondre avec D ?

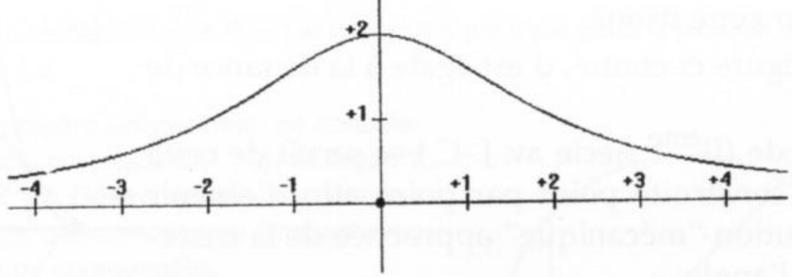
Et si elle vient se confondre avec D′ ?

C'est une mathématicienne italienne, Maria Agnesi qui étudia cette courbe pour la première fois au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Cette courbe est parfois appelée "sorcière d'Agnesi".



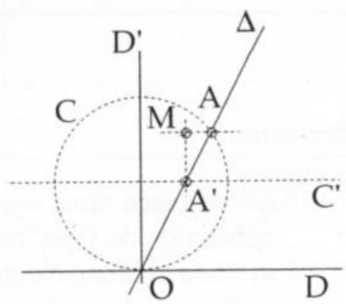
Une équation de cette courbe est de la forme $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ ce qui vous permet de la construire en choisissant a.

Sur cette courbe $a = 2$



→ *Quatrième cas :* **C est un cercle tangent en O à D et C′ est le diamètre de C parallèle à D.**

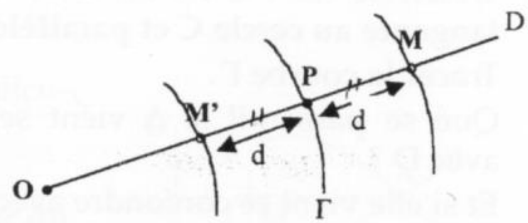
Construire des points de Γ.



8 - Conchoïdes

Les conchoïde tiennent leur nom du fait qu'elles sont parfois en forme de *coquille* …

On considère un point O, une longueur d et une courbe Γ. Si une droite D passant par O rencontre Γ en P, on marquer sur D les deux points M et M′ tel que PM = PM′ = *d*.



Lorsque D pivote autour de O, les points M et M′ décrivent une courbe appelée conchoïde de Γ par rapport au pôle O.

Cette courbe peut être formée de deux branches distinctes ou bien se refermer sur elle-même.

Vous allez construire, point par point des conchoïdes dans deux cas particuliers.

▪ Une conchoïde de droite : la conchoïde de Nicomède

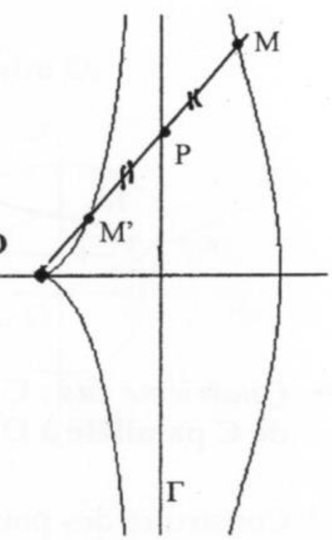
La courbe Γ est une droite, le pôle O n'est pas situé sur cette droite.

Sur la figure ci-contre, d est égale à la distance de O à Γ.

Nicomède (II$^{\text{ème}}$ siècle av. J.-C.) se servit de cette courbe construite point par point afin d'obtenir une solution "mécanique" approchée de la trisection de l'angle.

Voir *fascicule 5* : Quelques éléments de géométrie (activité 8).

O



Exercez-vous :

1. On se place dans un repère orthonormal d'origine O. Construire point par point la conchoïde de Γ par rapport au pôle O dans chacun des cas suivants :
   a) Γ est la droite d'équation x = 1 et on prend d = 2.
   b) Γ est la droite d'équation x = 2 et on prend d = 1.

2. La droite Γ d'équation cartésienne x = b a pour équation polaire $\rho = \dfrac{b}{\cos\theta}$; la conchoïde a pour équation polaire $\rho = \dfrac{b}{\cos\theta} + d$ ou $\rho = \dfrac{b}{\cos\theta} - d$.

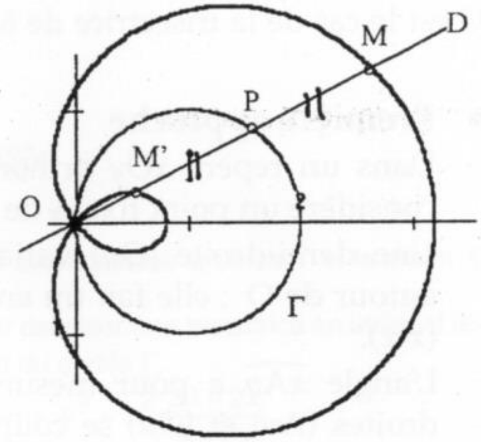
   Dessiner les courbes de l''exercice précédent à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice.

■ Une conchoïde de cercle : le limaçon de Pascal

La courbe Γ et un cercle ; le pôle O est situé sur le cercle.

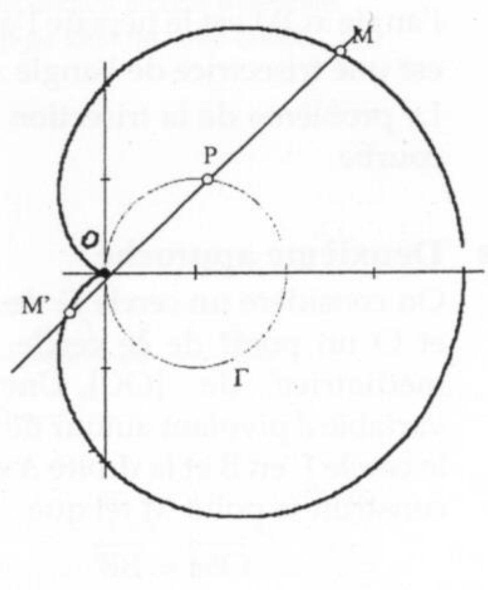
Le limaçon a été découvert par Etienne Pascal (1588-1651), père de Blaise Pascal (1623-1662).

Lorsque d = 2R, le limaçon obtenu est une cardioïde.



Exercez-vous :

1. Tracer un cercle de rayon R = 1 et construire point par point le limaçon de ce cercle pour d = 1,4.
2. Dans un repère orthonormal, on considère le cercle de centre C (1 ; 0); de rayon 1 avec d = 1,4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du limaçon avec les axes de coordonnées.
3. Construire point par point la cardioïde d'un cercle de rayon R = 2.
4. Le cercle Γ de centre A(1 ; 0) et de rayon 1 a pour équation polaire r = 2 cos θ. En déduire l'équation polaire de la cardioïde et la tracer à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice.
5. Tracer le limaçon pour d = R. Ce limaçon particulier a été utilisé pour le problème de la "trisection de l'angle".



9 - La trisectrice de Mac Laurin

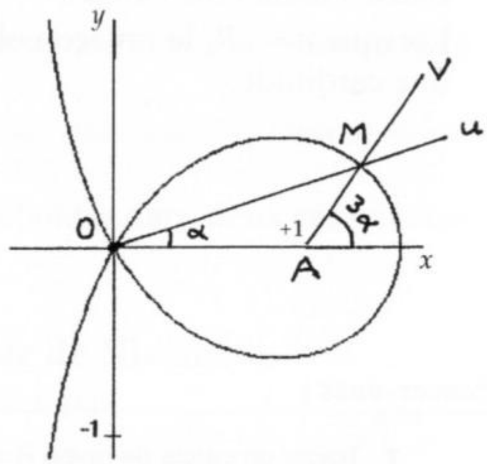
La recherche d'une solution de la trisection d'un angle, impossible à la règle et au compas, a conduit les géomètres à inventer un certain nombre de courbes pour en donner une solution approchée.
C'est le cas de la trisectrice de Mac Laurin.

▪ Première approche

Dans un repère xOy orthonormal, on considère un point fixe A de l'axe $(x'x)$.

Une demi-droite $[Ou)$ variable pivote autour de O : elle fait un angle α avec $(x'x)$.

L'angle $\widehat{xAv}$ a pour mesure 3α : les droites (Av) et (Ou) se coupent en un point M.



Lorsque α varie, le point M décrit une courbe que l'on appelle trisectrice de Mac Laurin.

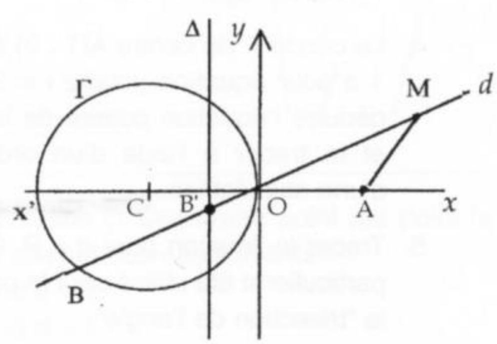
Lorsque cette courbe est tracée, si l'on place l'angle à trisecter en $\widehat{xAv}$, le côté $[Av)$ coupe la trisectrice en M : l'angle $\widehat{xOM}$ est le tiers de l'angle $\widehat{xAM}$: la parallèle à $[Ou)$ passant par A est une trisectrice de l'angle $\widehat{xAv}$.

Le problème de la trisection est donc résolu par l'intermédiaire de cette courbe.

▪ Deuxième approche

On considère un cercle Γ, de centre C et O un point de ce cercle. Δ est la médiatrice de [OC]. Une droite variable d pivotant autour de O coupe le cercle Γ en B et la droite Δ en B'. On construit le point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BB'} \ .$$



Le lieu géométrique de M lorsque *d* pivote autour du point O est la trisectrice de Mac Laurin.

Exercez-vous :

1. **Étude de cette figure.**

   Soit A le symétrique du centre C par rapport à O. A est fixe. On pose $\widehat{COB} = \alpha$.. Pour démontrer que l'angle $\widehat{xAM}$ est le triple de $\widehat{xOu}$, on pourra démontrer les propriétés suivantes :

   • OCB' et OCB sont des triangles isocèles.

   • $\widehat{CB'B} = 2\alpha$. .

   • OMA et BCB' sont des triangles isométriques.

   • En déduire que $\widehat{xAM} = 3\alpha$..

2. **Tracer une trisectrice** point par point après avoir dessiné le cercle Γ et la droite Δ.

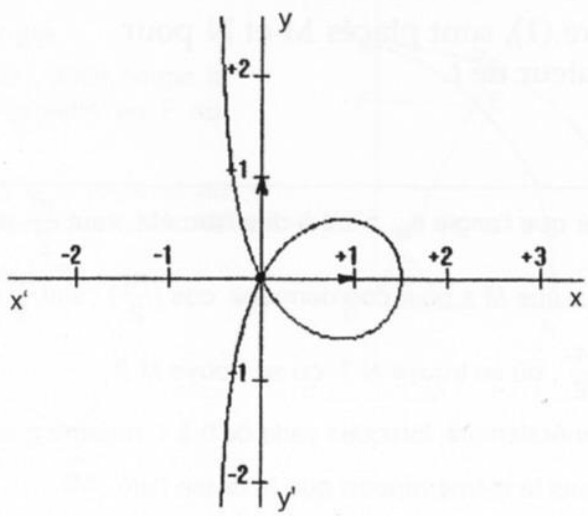
3. Utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour dessiner une trisectrice en utilisant les informations suivantes, R désignant le rayon du cercle Γ.

   Équation cartésienne dans le repère (Ox, Oy) : $y^2 = x^2 \dfrac{3R - 2x}{R + 2x}$.

   Équation polaire : $r = 2R\cos\theta - \dfrac{R}{2\cos\theta}$.

   Équations paramétriques : $x(t) = \dfrac{R(3 - t^2)}{2(t^2 + 1)}$ et $y(t) = \dfrac{Rt(3 - t^2)}{2(t^2 + 1)}$.

4. Voici le tracé d'une trisectrice dans un repère orthonormal du plan.
   Sur cette figure, tracer Γ et la droite Δ correspondant à cette trisectrice.
   Placer ensuite le point A, puis trisecter un angle $\widehat{xAM}$ de votre choix.



10 - La quadratrice de Dinostrate

Réaliser la quadrature du cercle consiste à tracer un carré ayant la même aire qu'un cercle donné. On emploie aussi cette expression pour la construction d'un segment ayant même longueur que le périmètre d'un cercle donné.

Il a été démontré que la solution de ce problème n'est pas possible avec une règle et un compas.

Hippias d'Elis ($5^{ème}$ siècle av. J.-C.), Dinostrate ($4^{ème}$ siècle av. J.-C.) imaginèrent une courbe appelée quadratrice qui permet de résoudre simultanément le problème de la quadrature du cercle et celui de la trisection d'un angle.

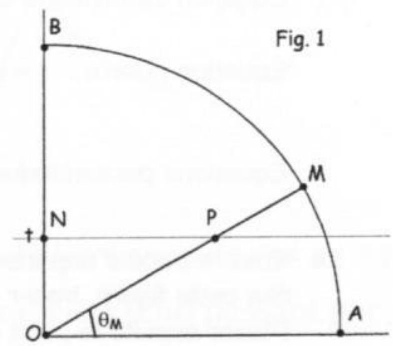
La quadratrice

$\widehat{AB}$ est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.

Considérons deux mouvements uniformes pour un temps t (en seconde) variant de 0 à 1 :

- celui du point N parcourant [OB] de O vers B en 1 seconde ;
- celui du point M parcourant l'arc $\widehat{AB}$ de A vers B en 1 seconde.

Sur la figure (1), sont placés M et N pour la même valeur de t.



Exercez-vous :

1. Montrer que l'angle θ_M, c'est-à-dire l'arc AM, vaut $\frac{\pi t}{2}$ et que $y_N = t$.

   Montrer que M a pour coordonnées $\cos(\frac{\pi t}{2})$; $\sin(\frac{\pi t}{2})$.

2. Si $t = \frac{1}{2}$, où se trouve N ? où se trouve M ?.

   Plus généralement, lorsque t varie de 0 à 1, montrer que le point N divise le segment [OB] dans le même rapport que M divise l'arc $\widehat{AB}$.

3. Le point P est l'intersection de (OM) et de la parallèle à (OA) passant par N. Construire huit points du lieu de P en partageant [OB] et l'arc $\widehat{AB}$ en huit parties égales. P décrit une courbe appelée quadratrice. (voir fig.2). On ne peut pas construire P si t = 0 (M en A). On admet que sur [OA] le point P_0 correspondant a pour abscisse $\frac{2}{\pi}$.

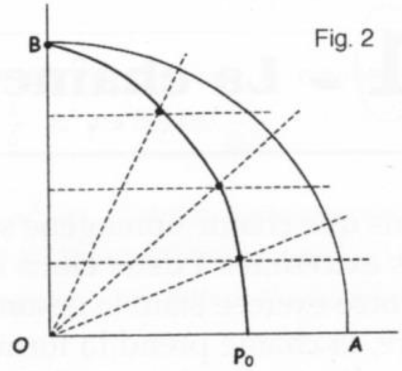


Fig. 2

4. Montrer que $x_P = \dfrac{t}{\tan\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)}$; $y_P = t$.

En déduire que $x = \dfrac{y}{\tan\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)}$ est une équation de la quadratrice.

5. En utilisant des équations paramétriques de la quadratrice :

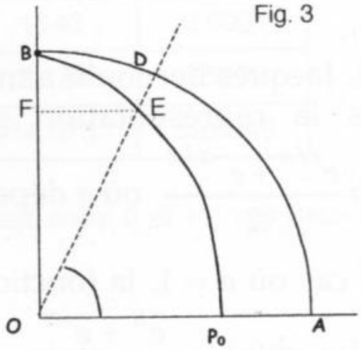
$$x(t) = \frac{t}{\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \quad ; \quad y(t) = t$$

tracer cette quadratrice.

6. **Pour la quadrature du cercle.**
Sur l'axe [OA], placer le point C d'abscisse 4 et le point P_0.
La parallèle à (P_0B) passant par C coupe l'axe [OB] en G.
Montrer que OG = 2π.

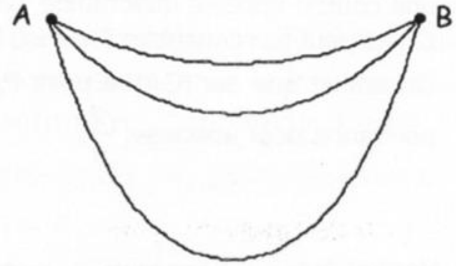
7. **Pour la trisection de l'angle.**
Tracer un angle aigu $\widehat{AOD}$; [OD) coupe la quadratrice en E qui se projette en F sur [OB].
Trisecter le segment [OF] à la règle et au compas ; en déduire la trisection de l'arc de cercle $\widehat{AD}$ puis de l'angle $\widehat{AOD}$.

Fig. 3

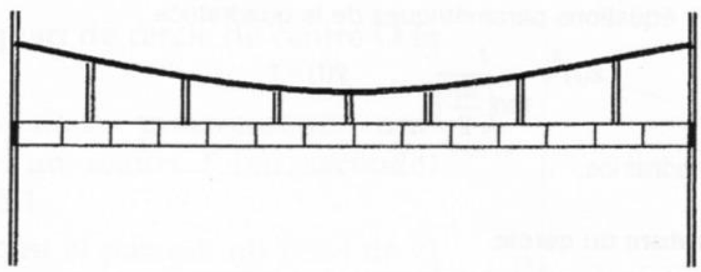


11 - La chaînette

Imaginons une chaîne homogène suspendue à ses extrémités à deux clous A et B ; la seule force exercée étant la pesanteur. À l'équilibre, la chaîne prend la forme d'un morceau d'une courbe mathématique appelée ***chaînette.*** L'allure de cette chaînette dépend de la longueur du fil, de la position des points A et B et de la nature physique de la chaîne.



On la retrouve dans les filins des ponts suspendus, les câbles électriques le long des routes, les caténaires des voies ferrées électrifiées. Le mot anglais pour chaînette est d'ailleurs *catenary* (du latin catena : chaîne).



Galilée s'est intéressé à cette courbe en la "confondant" alors avec une parabole.

En 1691, Jacques Bernoulli a montré que cette courbe n'est pas une parabole mais la représentation graphique d'une fonction F définie par

$F(x) = a\dfrac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$ où a dépend de la chaîne utilisée et des points A et B.

Dans le cas où $a = 1$, la fonction F est alors la fonction *cosinus hyperbolique* notée ch : $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Exercez-vous :

1. Avec un ordinateur ou avec une calculatrice, dessiner la courbe d'équation $y = ch(x)$; recommencer avec $y = 2\,ch\,\frac{x}{2}$ et $y = 0{,}5\,ch\,\frac{x}{0{,}5}$.

2. On considère la parabole d'équation $y = x^2 + 1$. Calculer les ordonnées des deux points correspondants sur la chaînette et sur la parabole pour $x = 3$; 5 et 10.

   En déduire que la chaînette "monte" beaucoup plus vite que la parabole.

3. **Chaînette et parabole.**

   Soit la courbe $y = ch(x)$.
   Vérifier que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie.
   Soit S et I les points de cette courbe d'abscisse 0 et 1. Vérifier que l'ordonnée de I a pour valeur approchée 1,543.

   Pour essayer de comprendre l'erreur de Galilée, vérifier que la parabole de sommet S passant par I a pour équation $f(x) = 0{,}543x^2 + 1$. Tracer cette parabole et la chaînette sur un même graphique à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice.

   Au moyen d'un tableur, on a calculé la valeur de ch(x), de f(x) ainsi que la différence $ch(x) - f(x)$.

x	ch(x)	f(x)	ch(x) – f(x)
0	1	1	0
0,2	1,0201	1,0217	–0,0017
0,4	1,0811	1,0869	–0,0058
0,6	1,1855	1,1955	–0,01
0,8	1,3374	1,3475	–0,0101
1	1,5431	1,543	0,0001
2	3,7622	3,172	0,5902
5	74,2099	14,575	59,6349

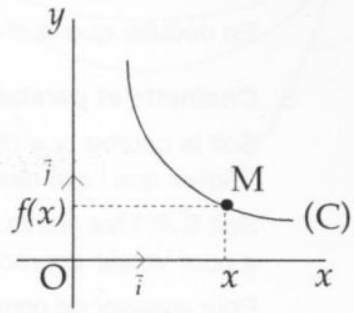
   Constater que pour les valeurs de x comprises entre 0 et +1, ces deux fonctions sont très proches l'une de l'autre.
   Qu'en est-il pour x supérieur à 1 ?

• Diverses équations pour une courbe

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut associer diverses équations à une même courbe.

1. Équation cartésienne

La courbe (C) est la représentation graphique d'une fonction f.
$y = f(x)$.



2. Équation implicite

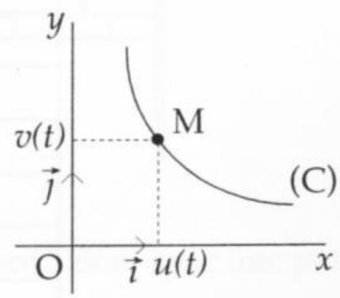
La courbe (C) est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient $F(x, y) = 0$.
Par exemple $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est une équation implicite d'un cercle de rayon 1.

3. Équation paramétrique

La courbe (C) est l'ensemble décrit par le point M (x, y)

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

lorsque le paramètre t varie.



4. Équation polaire

La courbe (C) est l'ensemble des points M tels que

$$\rho = g(\theta)$$

θ est l'angle orienté que fait avec $(O, \vec{i})$ un axe $(O, \vec{u})$ contenant M, ρ est l'abscisse du point M sur cet axe $(O, \vec{u})$.