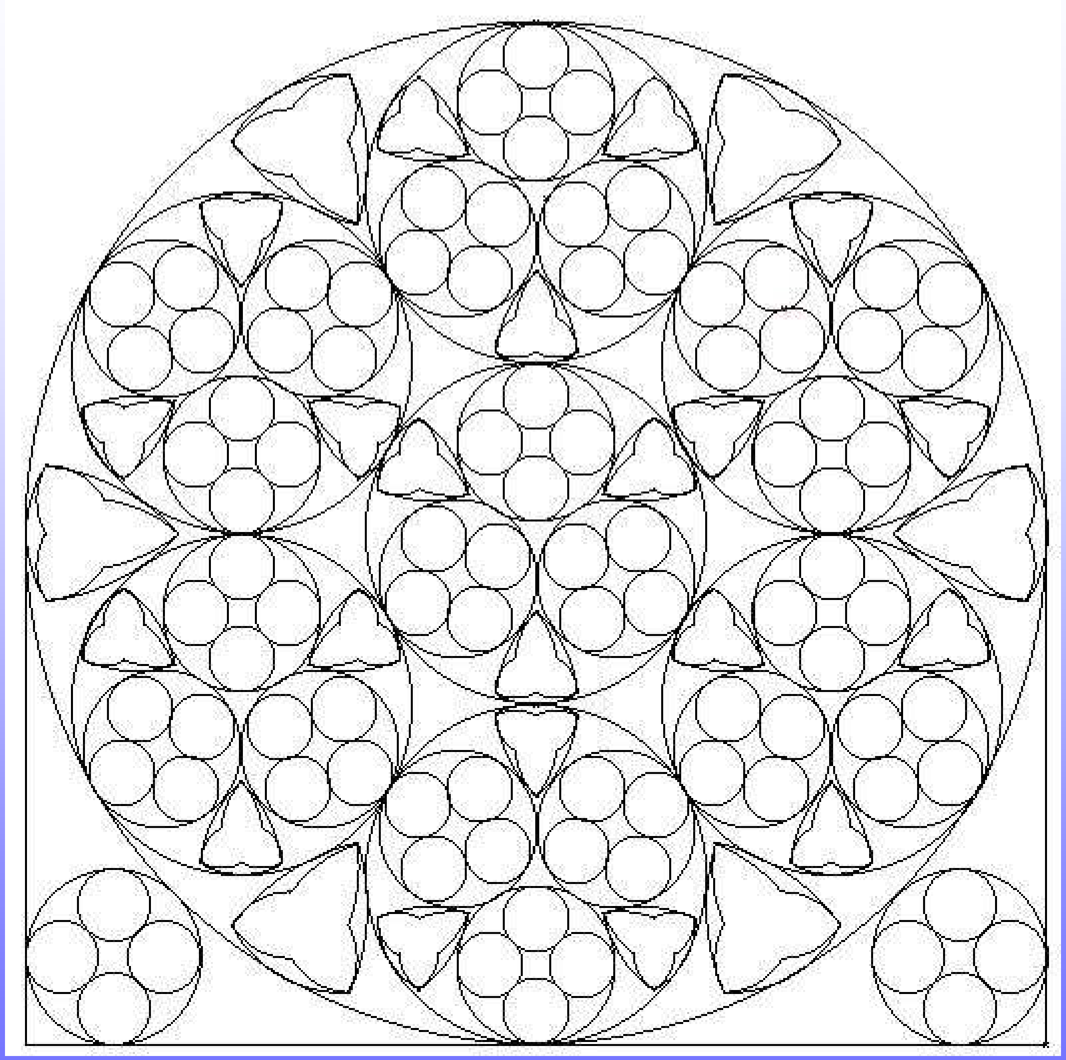
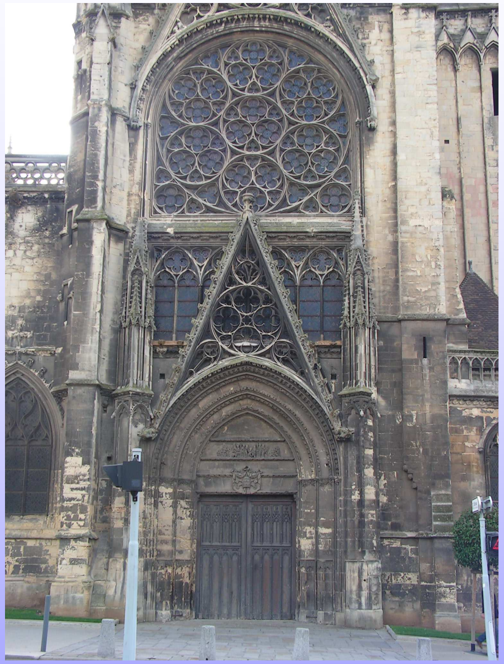
Architectures et mathématiques





Matthieu Gaud

Enseignant de mathématiques
Champigny sur Marne (94)
matthieugaud@gmail.com
APMEP Ile de France

Journées de l'APMEP La Rochelle, 25 octobre 2008

Introduction : pourquoi cet intérêt pour l’art en mathématiques ?

Classe de seconde (29 élèves)

25 option Arts Plastiques

Enquête distribuée au début de l’année

24 désirent faire une 1ère L

Classe très hétérogène

7 sur 8 redoublants ont délaissé les mathématiques

4 bons éléments

Les mathématiques : ça sert à quoi ?

M. GAUD

Sommaire

- Intérêt pour le lien mathématiques ~ Arts
- Mathématiques et arts : quels rapports ?
- Promenade mathématique dans les constructions gothiques
- Panorama des figures géométriques communes
- Activités dans les classes :
  - La géométrie du triangle à travers une première activité
  - La géométrie des transformations à travers une deuxième activité
  - Exemples d'autres figures géométriques
- Liens avec les sangaku

Mathématiques et Arts : quels rapports ?

- Vocabulaire commun pour des liens insoupçonnés
  - Créativité, beauté, universalité, dynamisme
- Des mathématiques artistiques ?
  - Beauté de l'argumentation, élégance des preuves
  - Représentation visuelle de concepts mathématiques par le développement informatique : art fractal (ensembles de Mandelbrot ou de Julia)
  - Images miroir, les frises et les pavages
    - Jardins de Le Nôtre, mosaïque de l'Alhambra, gravures d'Escher
- De l'art mathématique ?
  - Désir de rechercher l'harmonie, l'équilibre
    - Recherche de la bonne proportion (nombre d'or, nombre d'argent)
    - Architecture de Le Corbusier (Modulor)
  - Peinture dans l'art abstrait : Kandinsky

Mathématiques et Arts : quels rapports ?

Peinture

- Notion de perspective, le trompe l'œil, les anamorphoses
- Les symétries
- Les proportions

L'école d'Athènes
Raphaël

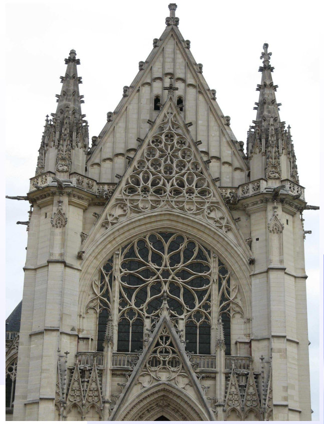
Les Ambassadeurs
Hans Holbein Le Jeune

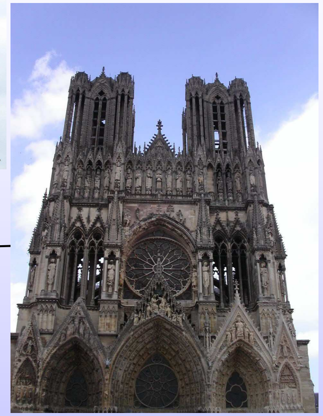
La Flagellation du Christ
Piero della Francesca

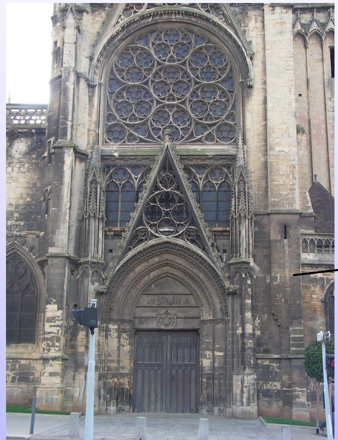
Mathématiques et Arts : quels rapports ?

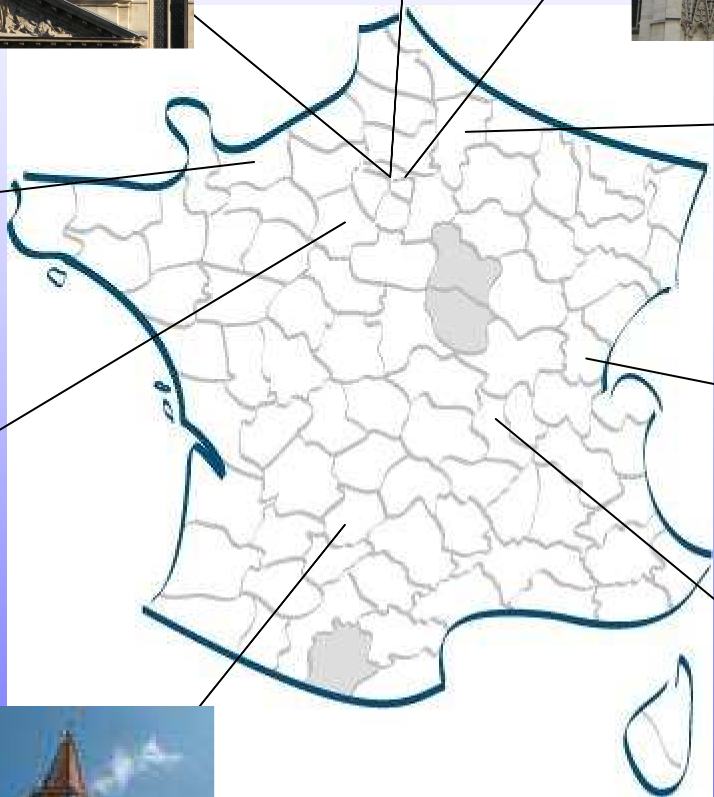
- Musique
  - Gamme pythagoricienne
  - …
- Littérature
  - Oulipo (fondée née 1960)
    - Oulipiens : rats qui ont à construire le labyrinthe dont ils se proposent de sortir
    - Ecrire sous des contraintes que l'on s'est donné
      - Méthode S + n, Jean Lescure en 1961
      - Littérature combinatoire, Raymond Quenaud (Cent mille milliards de poèmes)
      - Poèmes booléens basés sur la théorie des ensembles
- Architecture

Promenade gothique





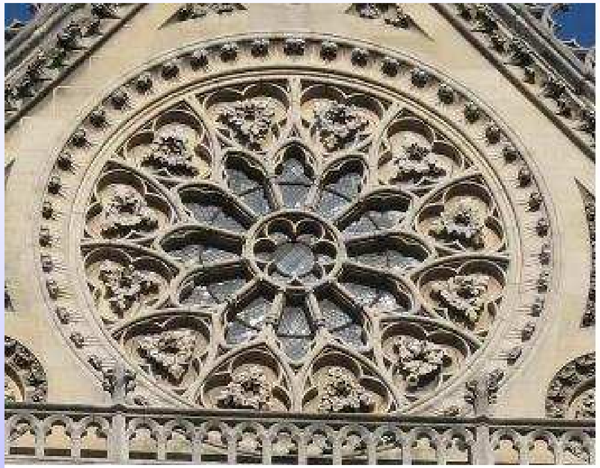




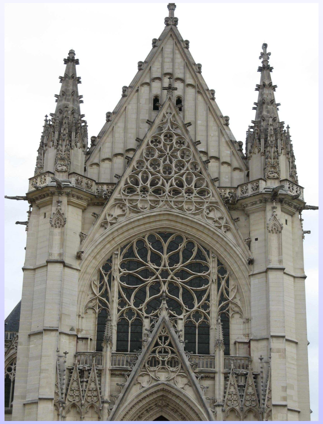
M. GAUD

Quelques exemples de figures géométriques

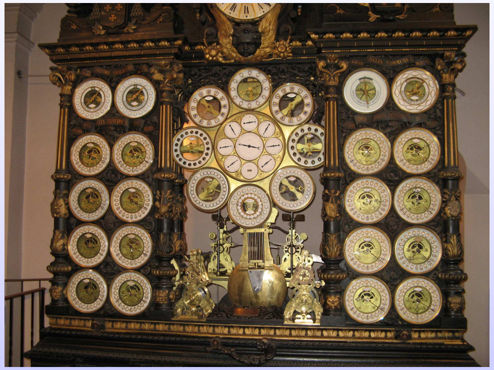
Notre Dame de Paris (1)



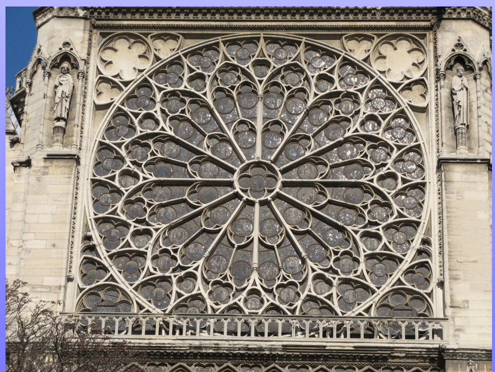
La Sainte Chapelle du château de Vincennes



Horloge astronomique de Besançon



Notre Dame de Paris (2)



Ensemble

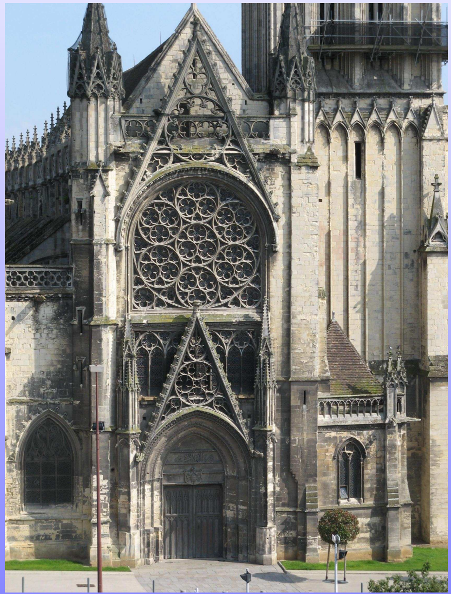
Cathédrale de Clermont-Ferrand

Eglise Sainte Geneviève (Paris)

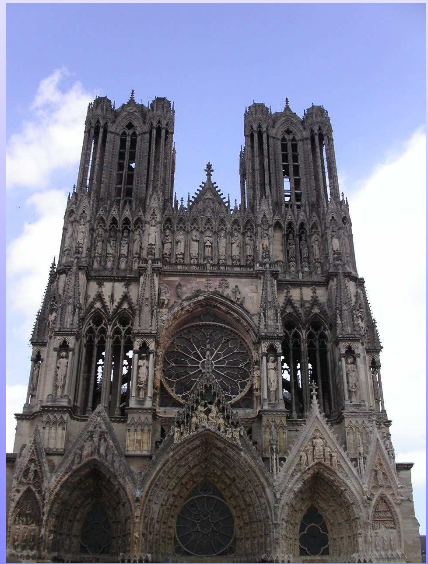
M. GAUD

Quelques exemples de figures géométriques (2)

Eglise Saint Pierre de Caen



Cathédrale de Reims



Cathédrale de Chartres

Eglise de Caussade

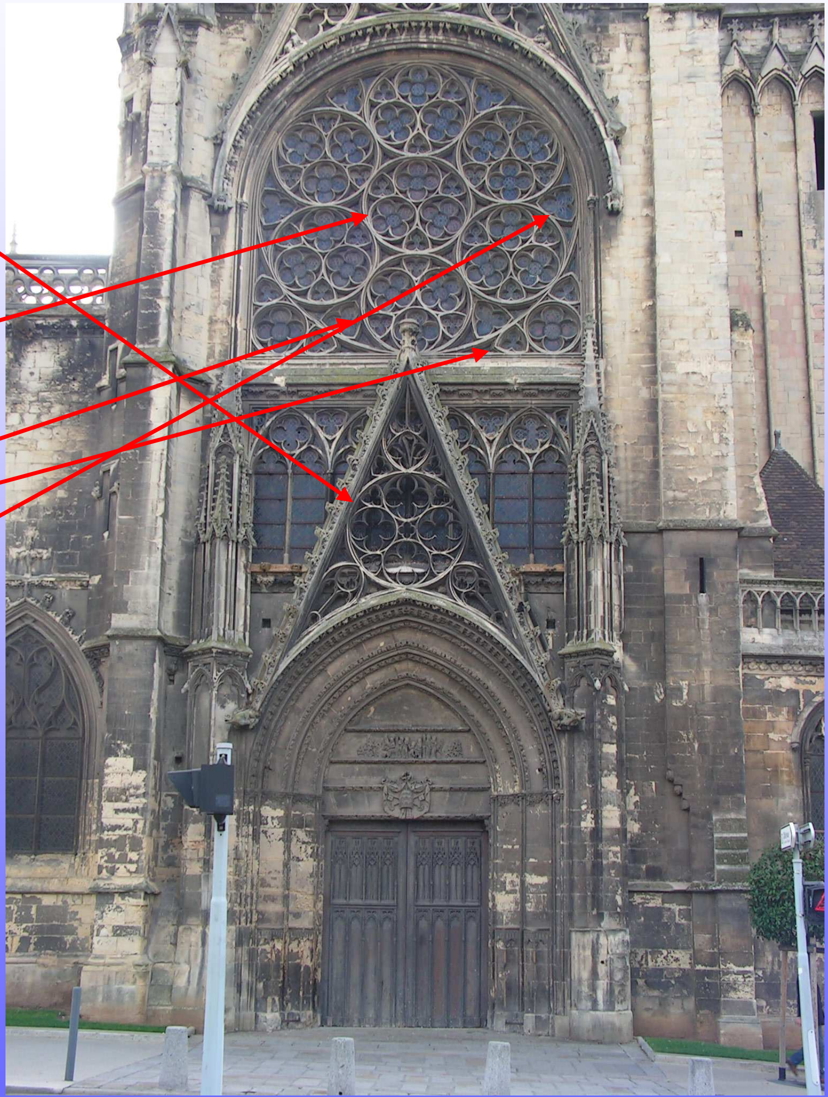
~~Comment ont été construites ces figures ?~~

M. GAUD

Prétextes à des problèmes de constructions géométriques

Analyse de la façade de l'Eglise Saint Pierre de Caen

Que peut-on observer ?



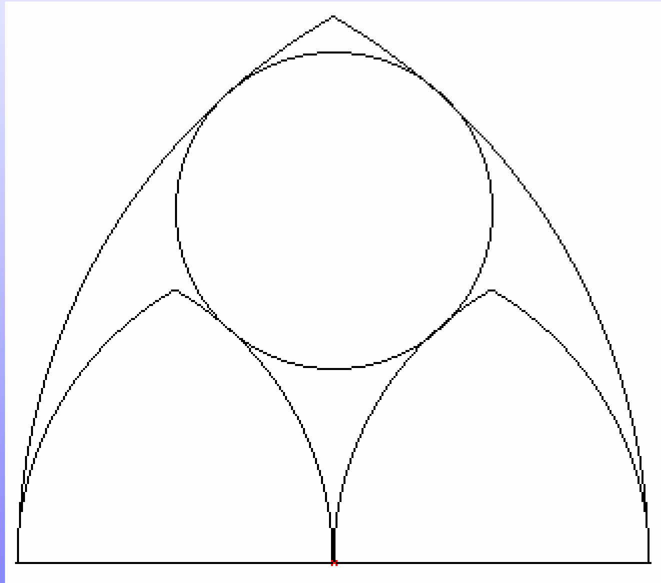
- 4 cercles de même rayon inscrits dans un cercle
- 3 cercles de même rayon inscrits dans un cercle
- 6 cercles de même rayon inscrits dans un cercle
- Triangles de Reuleaux
- Triangles isocèles elliptiques

M. GAUD

Mathématiques en architecture

Analyse de la façade de l'église Saint Pierre.

Problème :



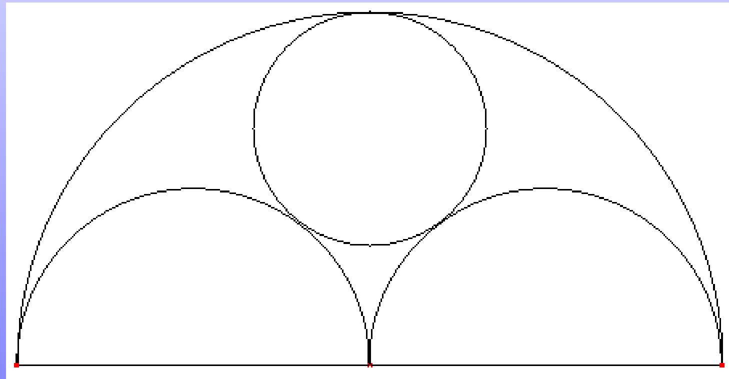
M. GAUD

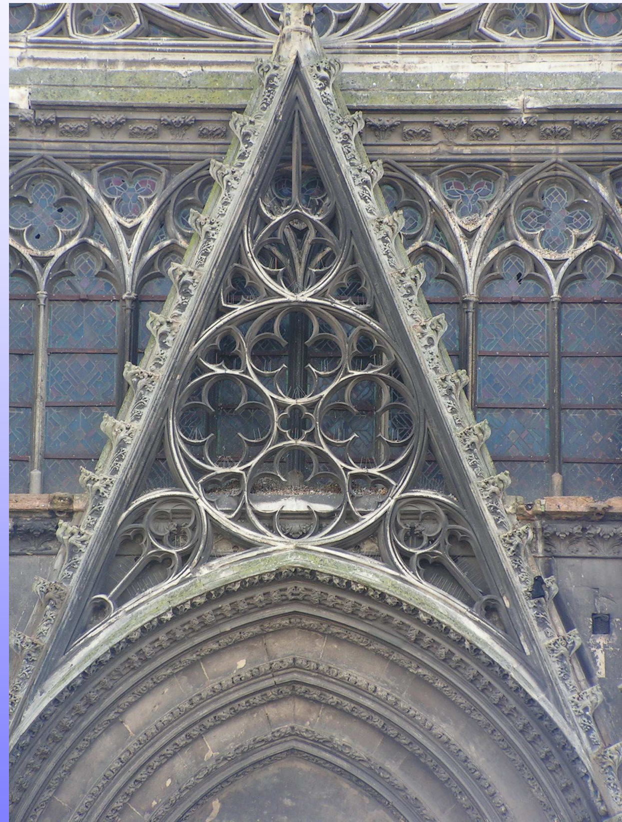
A vos compas et règle (non graduée !)

Mathématiques en architecture

Analyse de la façade de l'église Saint Pierre (2).

<u>Problème plus difficile :</u>
étant donné un demi-cercle, construire dans ce demi-cercle deux demi cercles de même rayon et un cercle de même rayons.





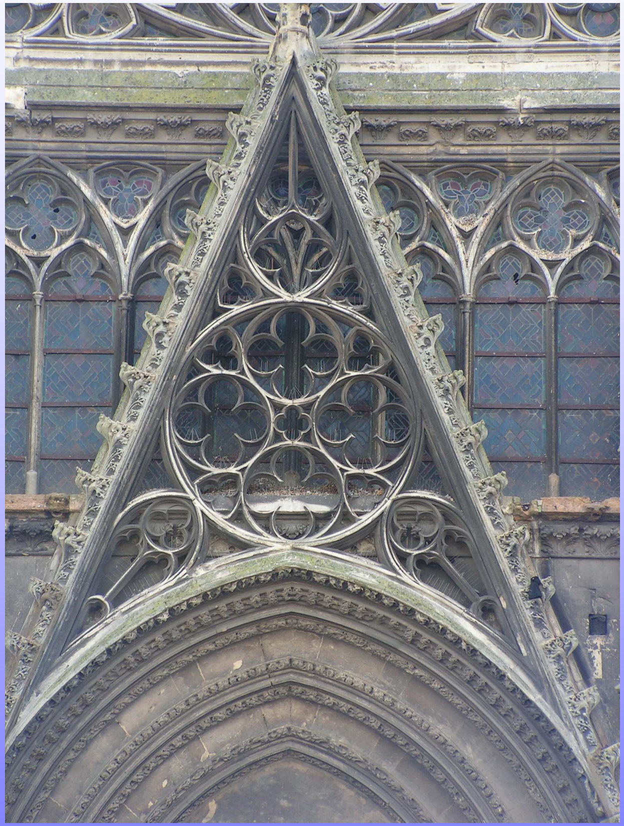
M. GAUD

A vos compas et règle (non graduée !)

Et dans les classes ?

Mathématiques en architecture

Premier travail sur la façade de l'église Saint Pierre.



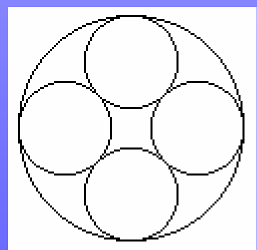
<u>Problème :</u>
étant donné un cercle, construire dans ce cercle quatre cercles de même rayons tangents extérieurement à deux autres et tangents intérieurement au grand cercle.

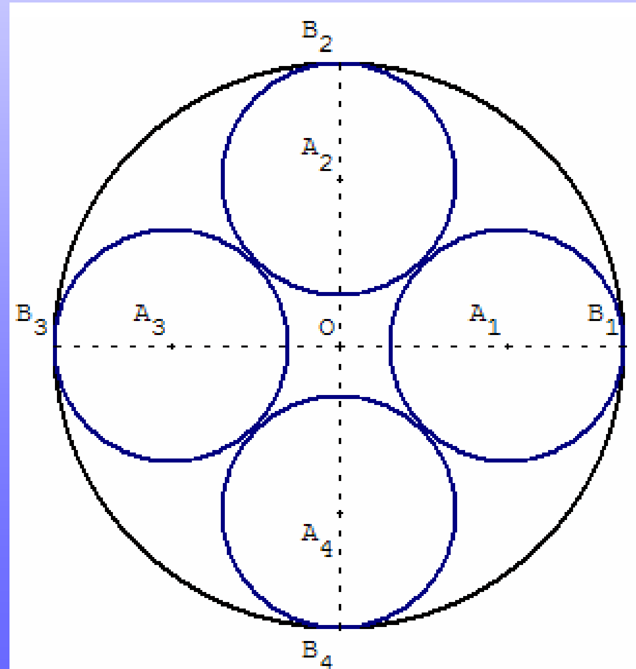
A vos compas et règle (non graduée !)

M. GAUD

Analyse de la situation

- **Contenu mathématique :**
  - Cercles tangents
  - Théorème de Pythagore
  - Calcul littéral avec la difficulté supplémentaire consistant à trouver une quantité une fonction d'une autre.
  - Nombres constructibles à la règle et au compas
    - Théorème de Pythagore
    - Triangles semblables
- **Contenu pédagogique :**
  - Problème de recherche
    - Découvrir leur méthode de travail
  - Démarche scientifique
  - Initiation au problème de construction
    - Pas de synthèse
  - Confronter les élèves à une situation de la vie où l'usage du calcul littéral peut prendre son sens.



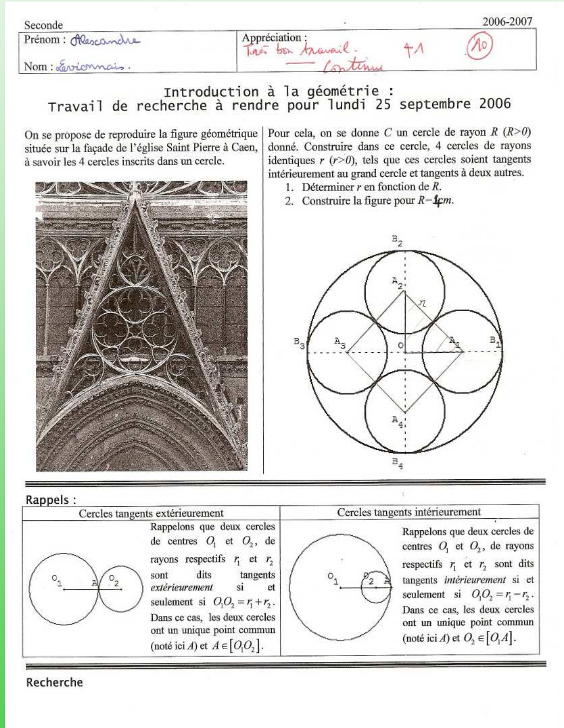


M. GAUD

Enoncé donné aux élèves et exemples de travaux

Enoncé donné aux élèves

Exemples de travaux :



Seconde 2006-2007

Prénom : Alexandre

Nom : Levionnais.

Appréciation : Très bon travail. Continue +1 10

Introduction à la géométrie :
Travail de recherche à rendre pour lundi 25 septembre 2006

On se propose de reproduire la figure géométrique située sur la façade de l'église Saint Pierre à Caen, à savoir les 4 cercles inscrits dans un cercle.

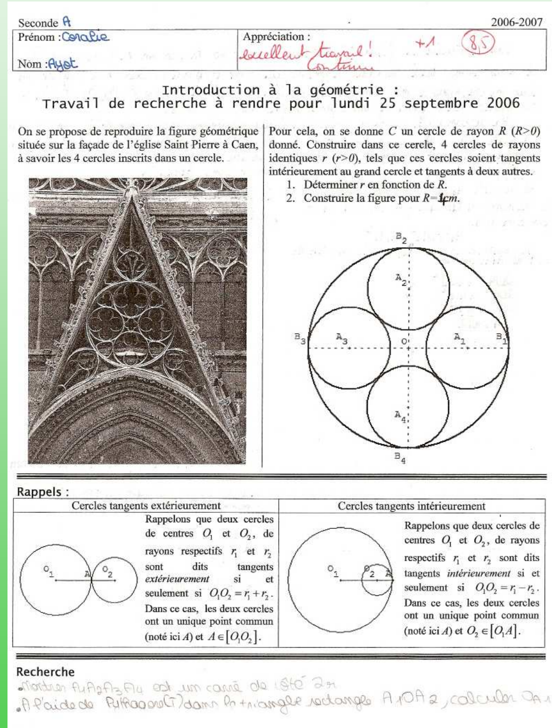
Pour cela, on se donne C un cercle de rayon R ($R>0$) donné. Construire dans ce cercle, 4 cercles de rayons identiques r ($r>0$), tels que ces cercles soient tangents intérieurement au grand cercle et tangents à deux autres.

1. Déterminer r en fonction de R.
2. Construire la figure pour $R=4cm$.

Rappels :

Cercles tangents extérieurement	Cercles tangents intérieurement
Rappelons que deux cercles de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs r_1 et r_2 sont dits tangents *extérieurement* si et seulement si $O_1O_2 = r_1 + r_2$. Dans ce cas, les deux cercles ont un unique point commun (noté ici A) et $A \in [O_1O_2]$.	Rappelons que deux cercles de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs r_1 et r_2 sont dits tangents *intérieurement* si et seulement si $O_1O_2 = r_1 - r_2$. Dans ce cas, les deux cercles ont un unique point commun (noté ici A) et $O_2 \in [O_1A]$.

Recherche



Seconde A 2006-2007

Prénom : Coralie

Nom : Ayot

Appréciation : excellent travail ! Continue +1 8,5

Introduction à la géométrie :
Travail de recherche à rendre pour lundi 25 septembre 2006

On se propose de reproduire la figure géométrique située sur la façade de l'église Saint Pierre à Caen, à savoir les 4 cercles inscrits dans un cercle.

Pour cela, on se donne C un cercle de rayon R ($R>0$) donné. Construire dans ce cercle, 4 cercles de rayons identiques r ($r>0$), tels que ces cercles soient tangents intérieurement au grand cercle et tangents à deux autres.

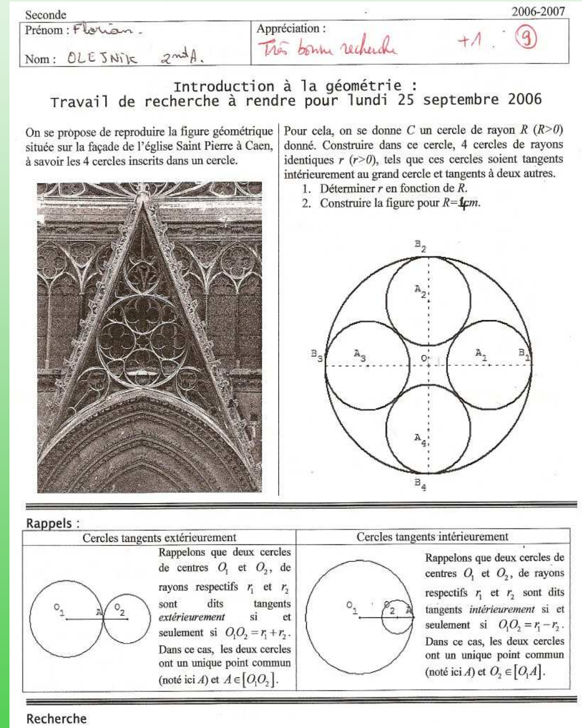
1. Déterminer r en fonction de R.
2. Construire la figure pour $R=4cm$.

Rappels :

Cercles tangents extérieurement	Cercles tangents intérieurement
Rappelons que deux cercles de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs r_1 et r_2 sont dits tangents *extérieurement* si et seulement si $O_1O_2 = r_1 + r_2$. Dans ce cas, les deux cercles ont un unique point commun (noté ici A) et $A \in [O_1O_2]$.	Rappelons que deux cercles de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs r_1 et r_2 sont dits tangents *intérieurement* si et seulement si $O_1O_2 = r_1 - r_2$. Dans ce cas, les deux cercles ont un unique point commun (noté ici A) et $O_2 \in [O_1A]$.

Recherche

- Montrer $A_1A_2A_3A_4$ est un carré de côté $2r$
- A l'aide de Pythagore dans le triangle rectangle A_1OA_2, calculer OA_1



Seconde 2006-2007

Prénom : Florian.

Nom : OLEJNIK 2nd A.

Appréciation : Très bonne recherche +1 9

Introduction à la géométrie :
Travail de recherche à rendre pour lundi 25 septembre 2006

On se propose de reproduire la figure géométrique située sur la façade de l'église Saint Pierre à Caen, à savoir les 4 cercles inscrits dans un cercle.

Pour cela, on se donne C un cercle de rayon R ($R>0$) donné. Construire dans ce cercle, 4 cercles de rayons identiques r ($r>0$), tels que ces cercles soient tangents intérieurement au grand cercle et tangents à deux autres.

1. Déterminer r en fonction de R.
2. Construire la figure pour $R=4cm$.

Rappels :

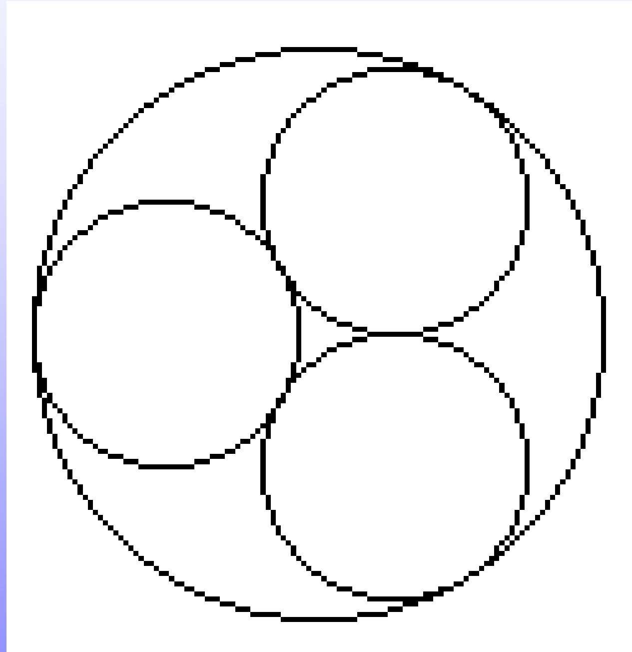
Cercles tangents extérieurement	Cercles tangents intérieurement
Rappelons que deux cercles de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs r_1 et r_2 sont dits tangents *extérieurement* si et seulement si $O_1O_2 = r_1 + r_2$. Dans ce cas, les deux cercles ont un unique point commun (noté ici A) et $A \in [O_1O_2]$.	Rappelons que deux cercles de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs r_1 et r_2 sont dits tangents *intérieurement* si et seulement si $O_1O_2 = r_1 - r_2$. Dans ce cas, les deux cercles ont un unique point commun (noté ici A) et $O_2 \in [O_1A]$.

Recherche

Une autre figure de base : la rosace trilobée

<u>Problème :</u>

étant donné un cercle, construire dans ce cercle trois cercles de même rayons tangents extérieurement à deux autres et tangents intérieurement au grand cercle.

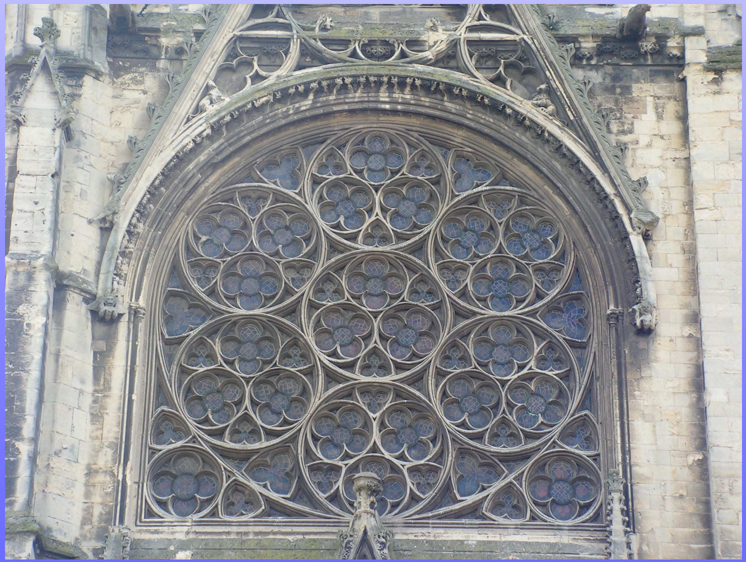


- Contenu mathématique
  - Cercles tangents
  - Théorème de Pythagore
  - Calcul littéral
  - Longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral
- Contenu pédagogique (identique au précédent)

Mathématiques en architecture

Deuxième travail sur la façade de l'église Saint Pierre.

Problème :
étant donné un cercle, inscrire quatre cercles de même rayon, inscrits dans trois cercles de même rayon, inscrits dans sept cercles de même rayon, inscrits dans le grand cercle initial.



M. GAUD

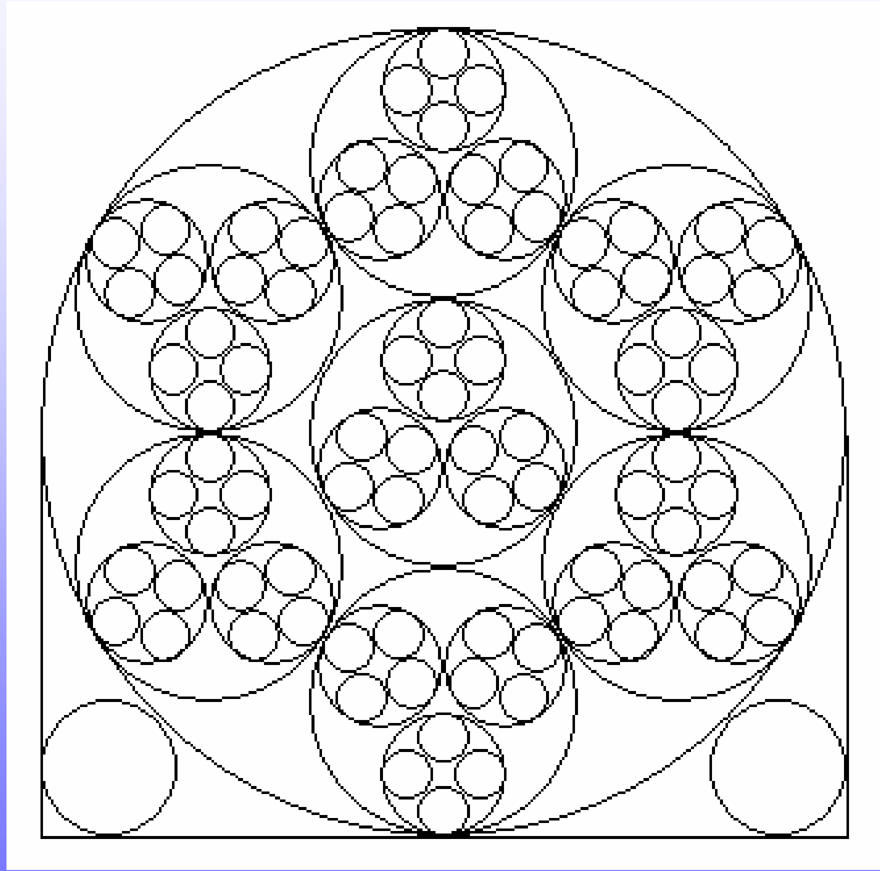
Deuxième travail sur la façade de l'église Saint Pierre,
Analyse de la situation

- **Problème de construction**

(analyse – synthèse – construction)

  - trouver les différentes relations entre les rayons
  - Exprimer tous les rayons en fonction du grand rayon initial
  - Justifier que les relations entre les rayons sont suffisantes

- **Avoir une démarche scientifique**
- Donner une application concrète de l'utilité des mathématiques
  - Utilisation du calcul littéral
  - Outils de géométrie classique

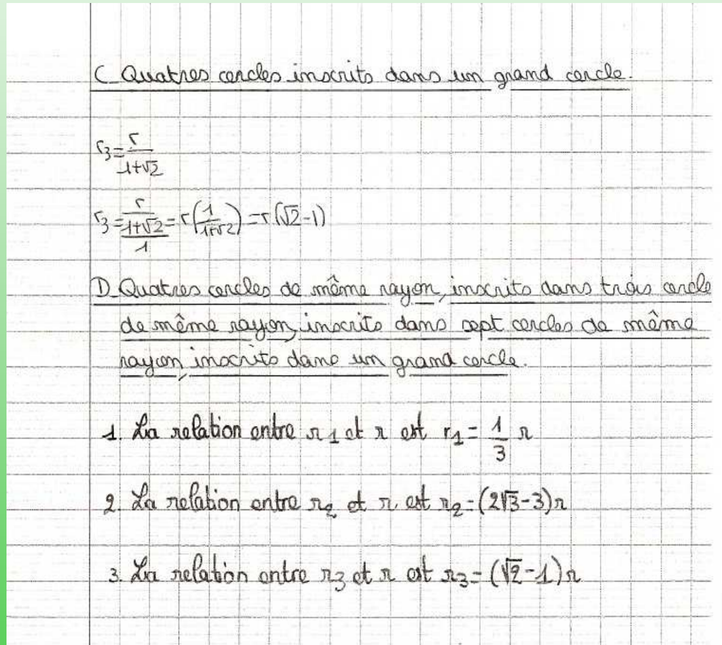


M. GAUD

Enoncé donné aux élèves et exemples de travaux

Enoncé donné aux élèves

Exemples de travaux :



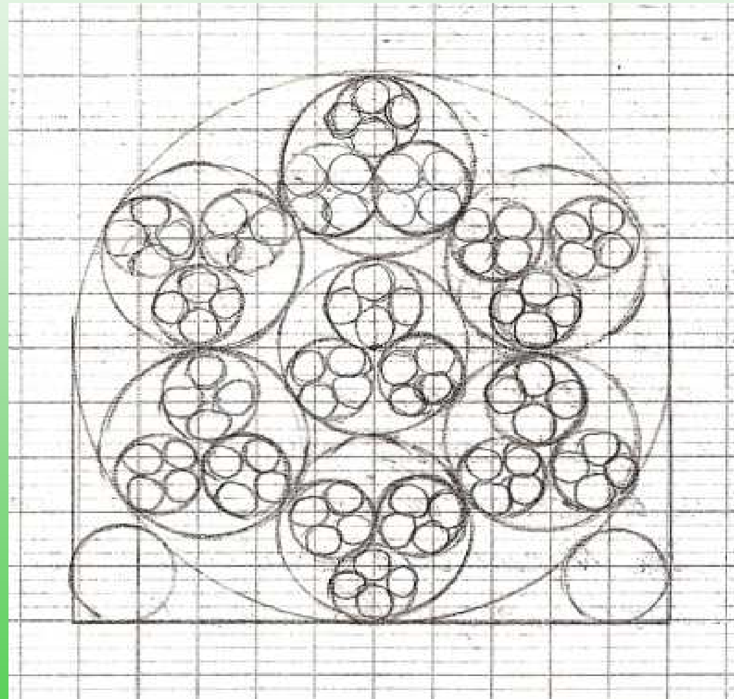
C_Quatres cercles inscrits dans un grand cercle.

$r_3 = \frac{r}{1+\sqrt{2}}$

$r_3 = \frac{r}{\frac{1+\sqrt{2}}{1}} = r\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = r(\sqrt{2}-1)$

D_Quatres cercles de même rayon, inscrits dans trois cercle de même rayon, inscrits dans sept cercles de même rayon, inscrits dans un grand cercle.

1. La relation entre r_1 et r est $r_1 = \frac{1}{3} r$
2. La relation entre r_2 et r est $r_2 = (2\sqrt{3}-3)r$
3. La relation entre r_3 et r est $r_3 = (\sqrt{2}-1)r$



Ouverture

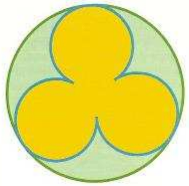
- Activités de découverte faite en seconde
- Figures de base à découvrir tout au long de la scolarité
  - Sixième et cinquième
  - Quatrième, troisième et seconde
  - Première et terminale

Sixième ~ cinquième : programmes de construction élaborés

– Rosace trilobée

ROSACE TRILOBÉE

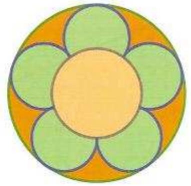
1. Tracer un cercle de centre O.
Placer un point A sur le cercle.
2. Reporter le rayon 4 fois à partir de A, dans le sens des aiguilles d'une montre, et nommer un point toutes les deux marques : B et C.
3. Tracer les demi-droites [AO), [BO) et [CO).
4. Tracer la perpendiculaire à [AO) passant par A ; elle coupe la demi-droite [CO) en D .
5. Tracer la bissectrice du secteur ADC ; elle coupe [AO) en O_1.
6. Tracer le cercle de centre O_1, passant par A.
7. Reporter la longueur O_1A sur [BO] à partir de B et marquer O_2.
8. Tracer le cercle de centre O_2, passant par B.
9. Reporter la longueur O_1A sur [CO] à partir de C et marquer O_3.
10. Tracer le cercle de centre O_3, passant par C.



– Rosace pentalobée

ROSACE PENTALOBÉE

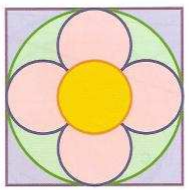
1. Tracer un pentagone ABCDE inscrit dans un cercle de centre O.
2. Tracer la demi-droite [DO), elle coupe le côté [AB] en son milieu I.
3. Tracer les demi-droites [EO), [AO), [BO), et [CO).
4. Tracer la perpendiculaire à [AO) passant par A ; elle coupe la demi-droite [OI) en P.
5. Tracer la bissectrice du secteur APO ; elle coupe [AO) en O_1.
6. Tracer le cercle de centre O_1 passant par A.
7. Reporter la longueur O_1A sur [BO] à partir de B et marquer O_2.
8. Reporter de même la longueur O_1A sur [CO] à partir de C et marquer O_3, puis sur [DO] à partir de D et marquer O_4, et sur [EO] à partir de E et marquer O_5.
9. Tracer le cercle de centre O_2 passant par B, le cercle de centre O_3 passant par C, le cercle de centre O_4 passant par D, et celui de centre O_5 passant par E.
10. Tracer le cercle de centre O passant par les points de contact des cinq petits cercles.



– Rosace quadrilobée

ROSACE QUADRILOBÉE

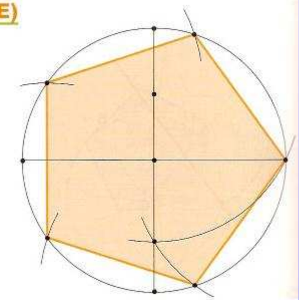
1. Tracer un carré ABCD (voir page 10).
2. Construire les milieux E de [AB], F de [BC], G de [CD], H de [DA].
3. Tracer les diagonales du carré [AC] et [BD], et les médianes du carré [EG] et [FH].
4. Elles se coupent en O.
5. Tracer la bissectrice du secteur BAC ; elle coupe [EG] en O_1.
6. Tracer le cercle de centre O_1 passant par E.
7. Reporter la longueur O_1E sur [FO] à partir de F et marquer O_2, puis sur [GO] à partir de G et marquer O_3, puis sur [HO] à partir de H, et marquer O_4.
8. Tracer le cercle de centre O_2 passant par F.
9. Tracer le cercle de centre O_3 passant par G, et le cercle de centre O_4 passant par H.
10. Tracer le cercle de centre O passant par E, et le cercle de centre O passant par les points de contact des quatre petits cercles.



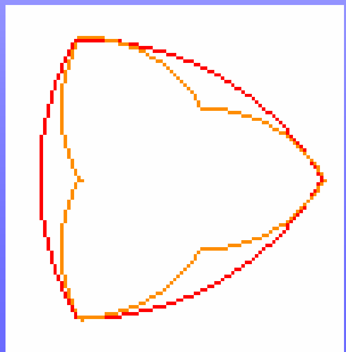
– (construction d'un pentagone)

PENTAGONE RÉGULIER (RAPIDE)

1. Tracer un cercle de centre O. Placer un point A sur le cercle.
2. Tracer deux diamètres [AC] et [BD] perpendiculaires.
3. Construire le milieu P du segment [AO].
4. Tracer un arc de cercle de centre P, passant par B et coupant [OC].
5. Cet arc coupe [OC] en R.
6. Tracer un arc de cercle de centre B, passant par R et coupant le cercle en S. [BS] est un côté du pentagone.
7. Reporter au compas trois fois successivement la distance BS. On construit ainsi les sommets T, U et V du pentagone.
8. Joindre les sommets du pentagone BSTUV.



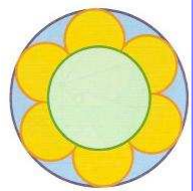
– Triangle de Reuleaux



– Rosace à six pétales

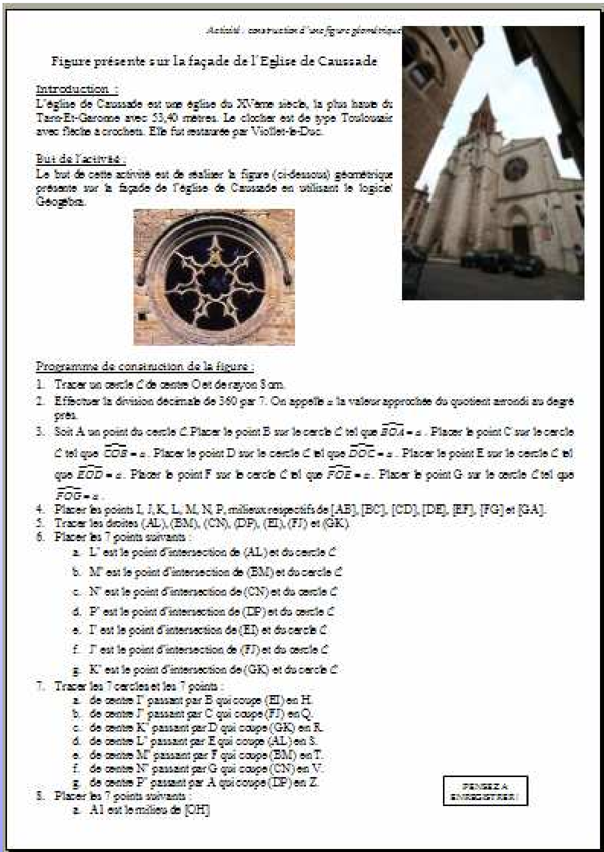
ROSACE À SIX PÉTALES

1. Tracer un cercle de centre O. Placer un point A sur le cercle.
2. Reporter le rayon 5 fois à partir de A, dans le sens des aiguilles d'une montre, comme pour construire un hexagone régulier, et nommer les points B, C, D, E, F.
3. Tracer les droites (FA) et (BC) ; elles se coupent en M.
4. Tracer les droites (OM) et (AC).
5. Marquer leur point d'intersection G, et tracer le diamètre [DA].
6. Construire la droite perpendiculaire à (OM) passant par G. Elle coupe (OA) en P.
7. Tracer le cercle de centre P, passant par A.
8. Tracer les diamètres [BE], et [CF].
9. Tracer le cercle de centre O, passant par P, il coupe les rayons [OB], [OC], [OD], [OE], [OF] respectivement en Q, R, S, T, U.
10. Tracer les cercles de centre Q, passant par B, de centre R passant par C, de centre S passant par D, de centre T passant par E, et de centre U passant par F.



M. GAUD

Sixième ~ cinquième : Eglise de Caussade



Activité : construction d'une figure géométrique

Figure présente sur la façade de l'Eglise de Caussade

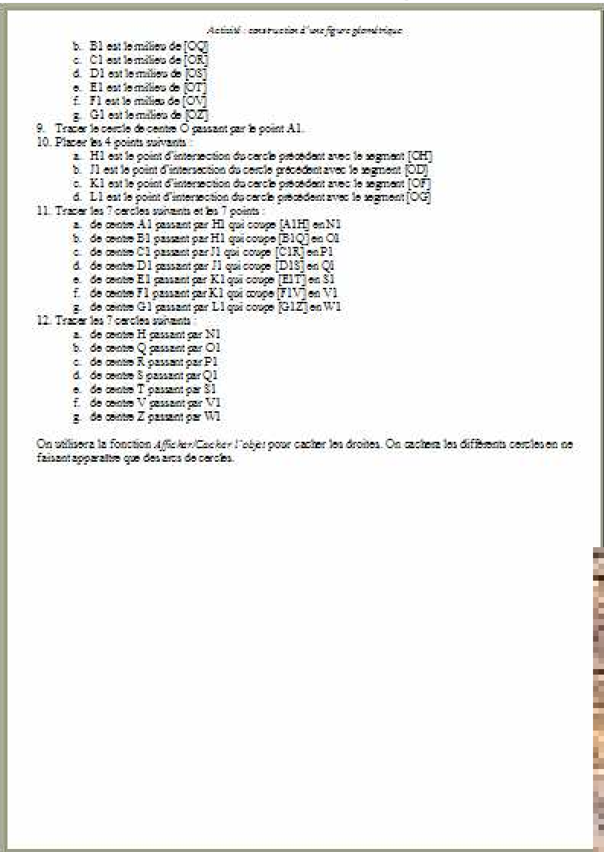
Introduction :
L'église de Caussade est une église du XVème siècle, la plus haute du Tarn-Et-Garonne avec 53,40 mètres. Le clocher est de type Toulousain avec flèche à crochets. Elle fut restaurée par Viollet-le-Duc.

But de l'activité :
Le but de cette activité est de réaliser la figure (ci-dessous) géométrique présente sur la façade de l'église de Caussade en utilisant le logiciel Géogébra.

Programme de construction de la figure :

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 8 cm.
2. Effectuer la division décimale de 360 par 7. On appelle α la valeur approchée du quotient arrondi au degré près.
3. Soit A un point du cercle $\mathcal{C}$. Placer le point B sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{BOA} = \alpha$. Placer le point C sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{COB} = \alpha$. Placer le point D sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{DOC} = \alpha$. Placer le point E sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{EOD} = \alpha$. Placer le point F sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{FOE} = \alpha$. Placer le point G sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{FOG} = \alpha$.
4. Placer les points I, J, K, L, M, N, P, milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FG] et [GA].
5. Tracer les droites (AL), (BM), (CN), (DP), (EI), (FJ) et (GK).
6. Placer les 7 points suivants :
   a. L' est le point d'intersection de (AL) et du cercle $\mathcal{C}$
   b. M' est le point d'intersection de (BM) et du cercle $\mathcal{C}$
   c. N' est le point d'intersection de (CN) et du cercle $\mathcal{C}$
   d. P' est le point d'intersection de (DP) et du cercle $\mathcal{C}$
   e. I' est le point d'intersection de (EI) et du cercle $\mathcal{C}$
   f. J' est le point d'intersection de (FJ) et du cercle $\mathcal{C}$
   g. K' est le point d'intersection de (GK) et du cercle $\mathcal{C}$
7. Tracer les 7 cercles et les 7 points :
   a. de centre I' passant par B qui coupe (EI) en H.
   b. de centre J' passant par C qui coupe (FJ) en Q.
   c. de centre K' passant par D qui coupe (GK) en R.
   d. de centre L' passant par E qui coupe (AL) en S.
   e. de centre M' passant par F qui coupe (BM) en T.
   f. de centre N' passant par G qui coupe (CN) en V.
   g. de centre P' passant par A qui coupe (DP) en Z.
8. Placer les 7 points suivants :
   a. A1 est le milieu de [OH]

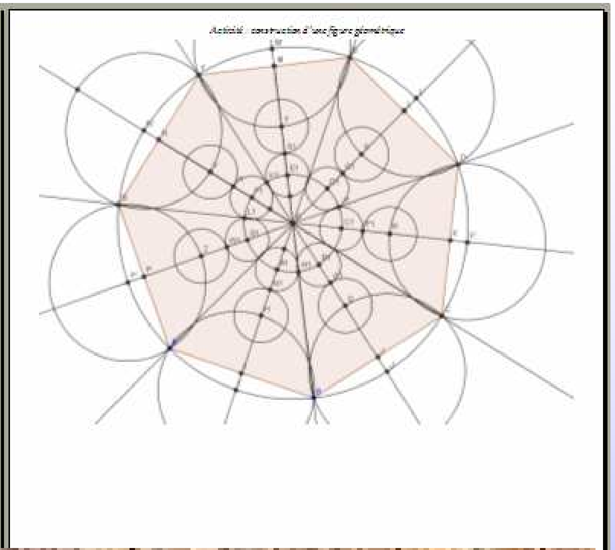
PENSEZ A ENREGISTRER !



Activité : construction d'une figure géométrique

   b. B1 est le milieu de [OQ]
   c. C1 est le milieu de [OR]
   d. D1 est le milieu de [OS]
   e. E1 est le milieu de [OT]
   f. F1 est le milieu de [OV]
   g. G1 est le milieu de [OZ]
9. Tracer le cercle de centre O passant par le point A1.
10. Placer les 4 points suivants :
   a. H1 est le point d'intersection du cercle précédent avec le segment [OH]
   b. J1 est le point d'intersection du cercle précédent avec le segment [OD]
   c. K1 est le point d'intersection du cercle précédent avec le segment [OF]
   d. L1 est le point d'intersection du cercle précédent avec le segment [OG]
11. Tracer les 7 cercles suivants et les 7 points :
   a. de centre A1 passant par H1 qui coupe [A1H] en N1
   b. de centre B1 passant par H1 qui coupe [B1Q] en O1
   c. de centre C1 passant par J1 qui coupe [C1R] en P1
   d. de centre D1 passant par J1 qui coupe [D1S] en Q1
   e. de centre E1 passant par K1 qui coupe [E1T] en S1
   f. de centre F1 passant par K1 qui coupe [F1V] en V1
   g. de centre G1 passant par L1 qui coupe [G1Z] en W1
12. Tracer les 7 cercles suivants :
   a. de centre H passant par N1
   b. de centre Q passant par O1
   c. de centre R passant par P1
   d. de centre S passant par Q1
   e. de centre T passant par S1
   f. de centre V passant par V1
   g. de centre Z passant par W1

On utilisera la fonction *Afficher/Cacher l'objet* pour cacher les droites. On cachera les différents cercles en ne faisant apparaître que des arcs de cercles.



Contenu mathématique :

Division décimale et arrondi

Programme de construction très élaboré avec des objets géométriques simples.

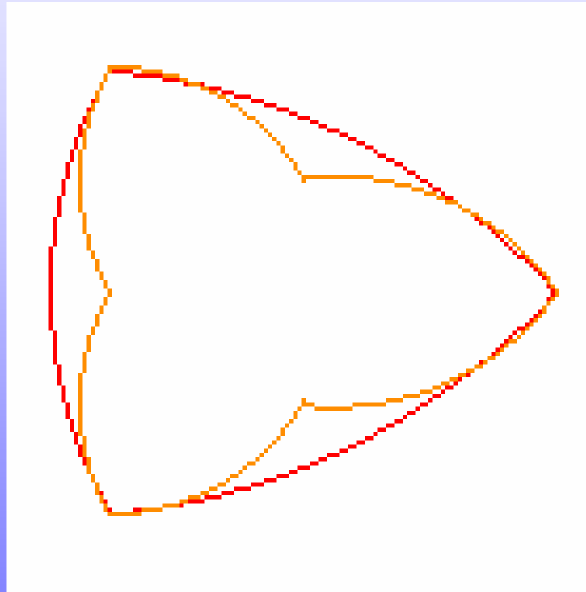
M. GAUD

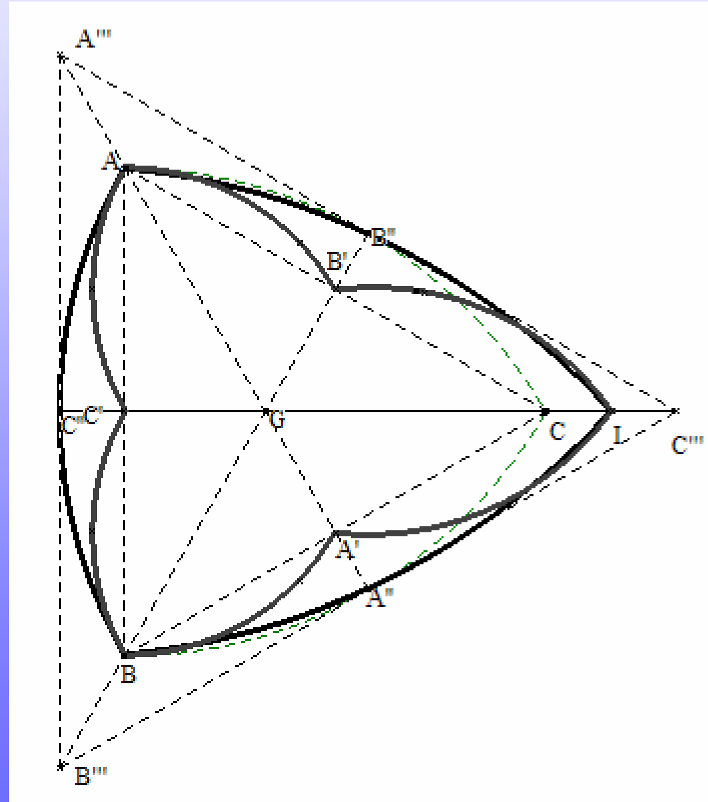
Difficulté :

Beaucoup d'objets (points) : notation indicée

Première ~ Terminale : problème de construction élaborés

- Introduction du problème de construction en insistant sur la synthèse
- Construction du triangle isocèle elliptique en terminale :





Ces figures géométriques sur les églises gothiques vues comme des sangaku ?

M. GAUD

Les sangaku :

de la mathématique divine…

… aux mathématiques artistiques

M. GAUD

D'après un travail de l'Irem de Poitiers non publié

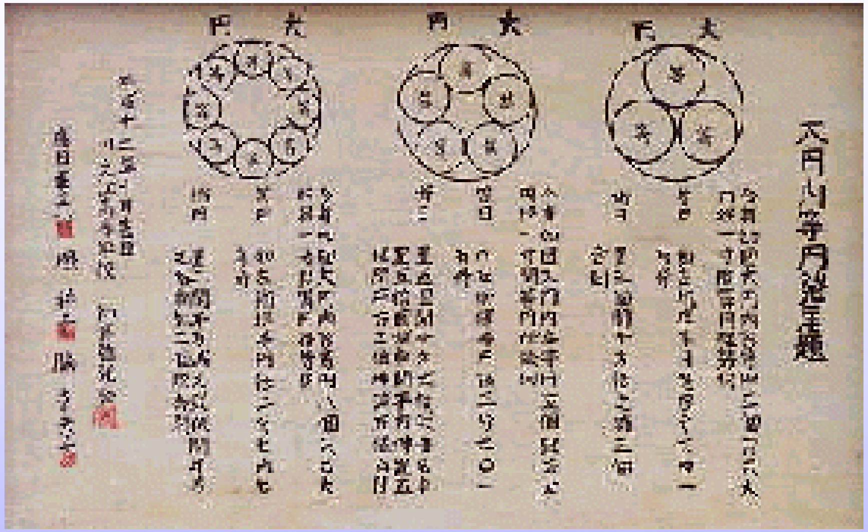
Qu'est-ce que des sangaku ?

Tablettes en bois gravées de problèmes mathématiques, accrochées en offrande dans les temples japonais du XVII$^{\text{ième}}$ au XIX$^{\text{ième}}$ siècle.

M. GAUD

D'après un travail de l'Irem de Poitiers non publié

Exemples (1/3)

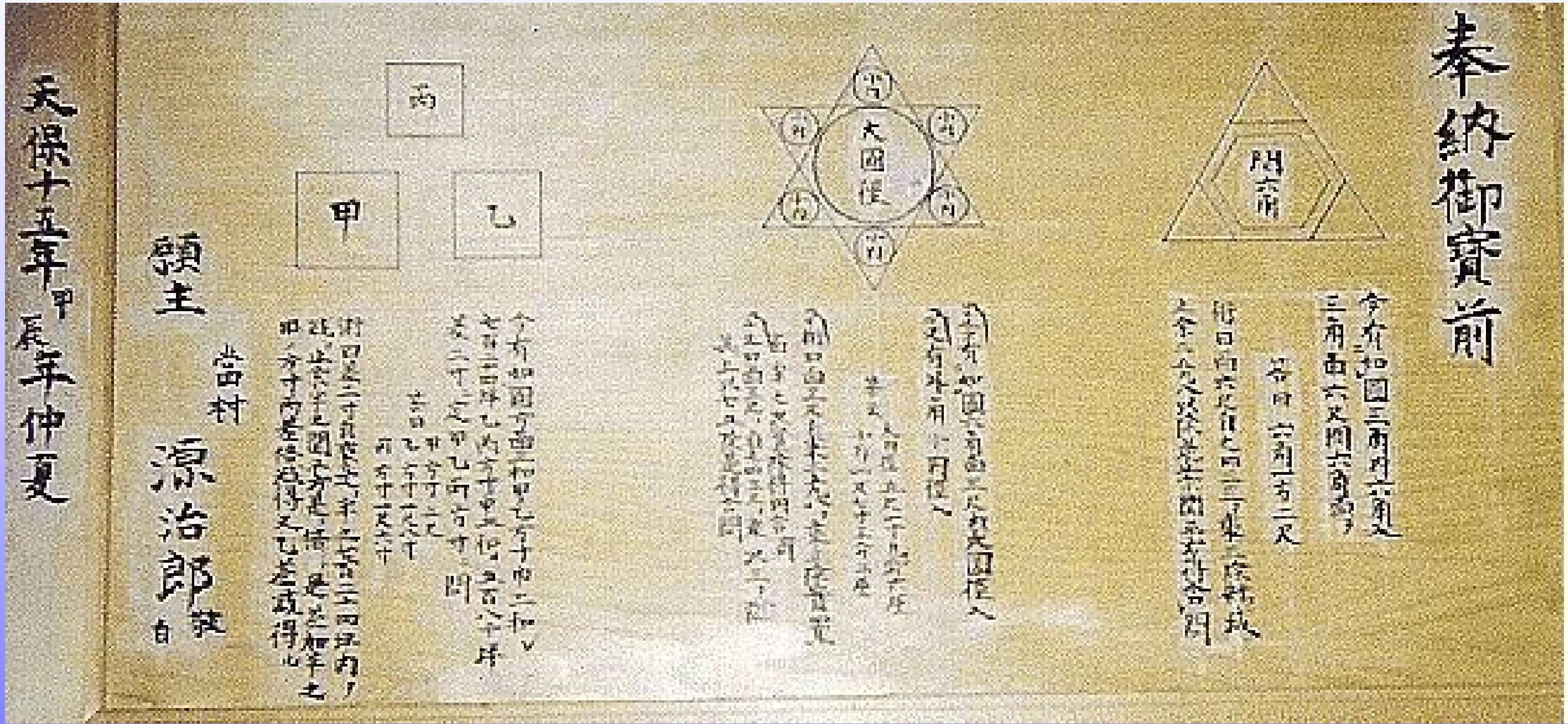


M. GAUD

Exemples (2/3)

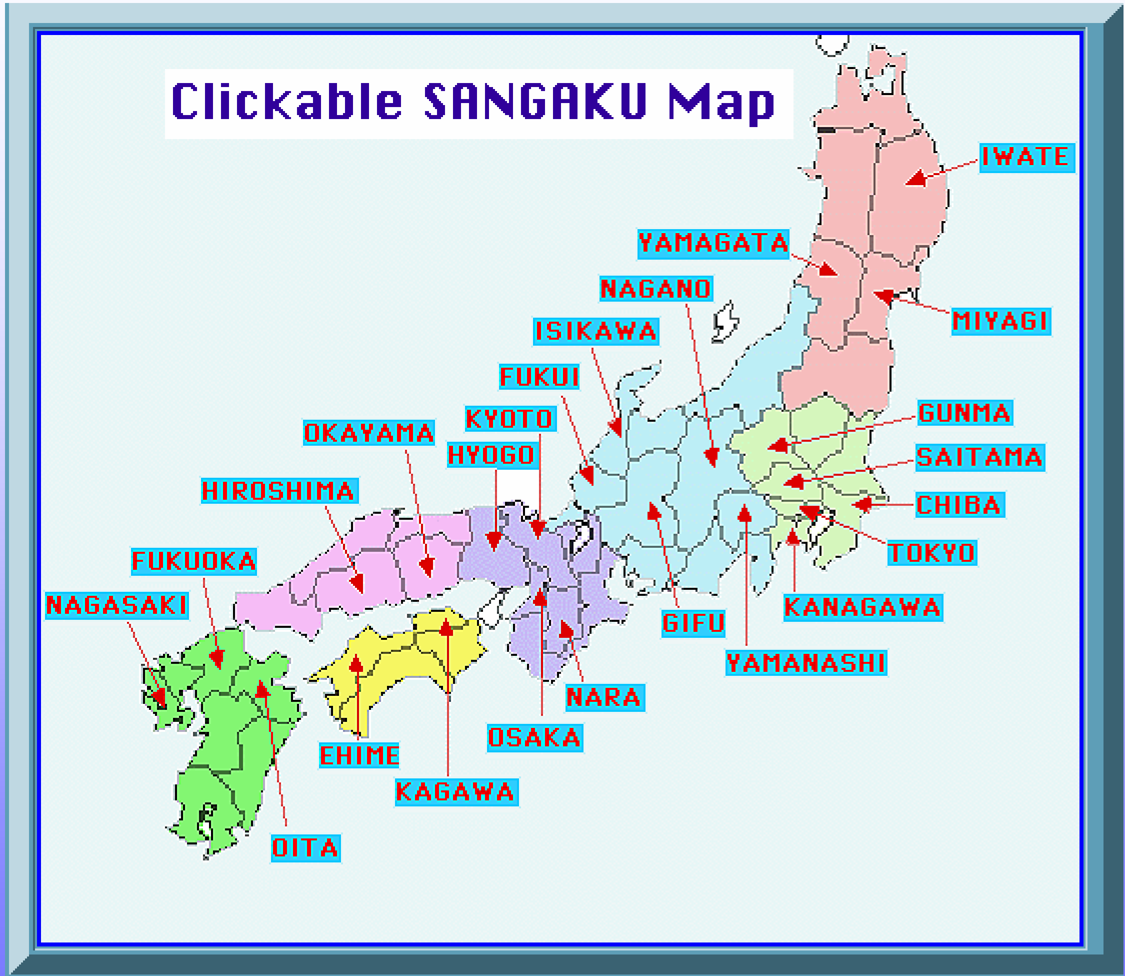

原文原図は古今算鑑(内田恭 天保3 1832)に編載・讃州金刀比羅宮算額を復原奉掲
昭和61年丙寅5月掲額・濱田重工株式会社

Exemples (3/3)



D'après un travail de l'Irem de Poitiers non publié

Où peut-on trouver des sangaku ?



M. GAUD

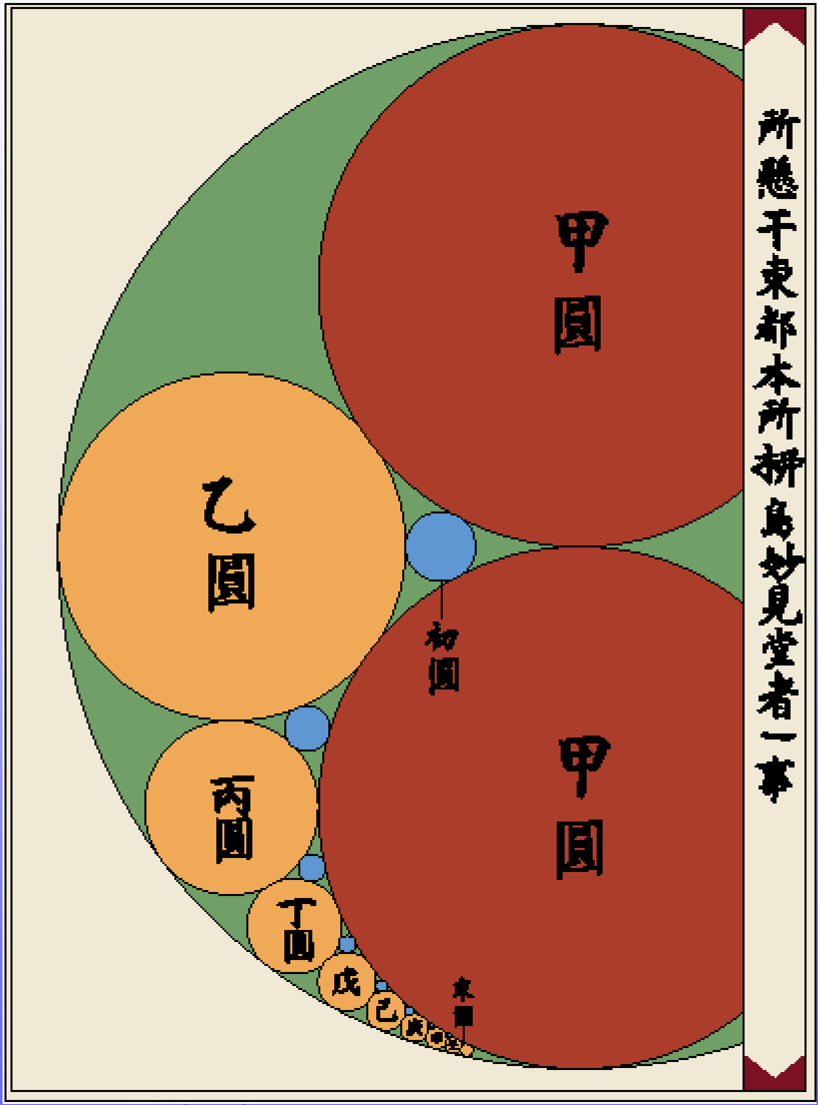
D'après un travail de l'Irem de Poitiers non publié

Des constructions surprenantes et… difficiles

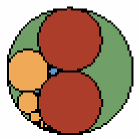
La plupart des sangaku traitent de la géométrie euclidienne mais les problèmes traités sont bien différents de ceux traités en occident: les cercles, les ellipses, les inscriptions de figures à l'intérieur d'autres figures, sont fréquents ainsi que la recherche de relations métriques.
Certains problèmes sont élémentaires d'autres nécessitent des techniques avancées de calcul intégral ou de géométrie affine et certains problèmes provenant d'une élite, utilisent les théories des mathématiciens japonais de l'époque et anticipent des résultats découverts ultérieurement en occident.

La plupart des tablettes sont livrées sans démonstrations..

Cercles inscrits tangents



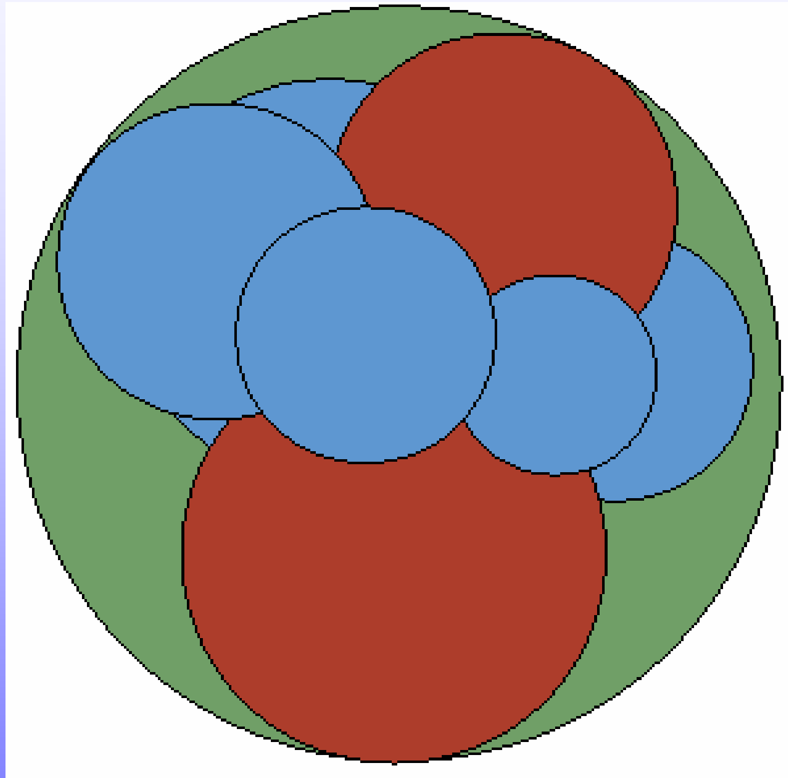
Quel est le rayon du n-ième petit cercle en fonction du rayon du grand cercle ?



Réponse : $r/[(2n-1)^2+14]$. La solution originelle de ce problème fait intervenir à plusieurs reprises la version japonaise du théorème du cercle de Descartes. On peut toutefois utiliser l'inversion, qui était à l'époque inconnue des mathématiciens japonais.

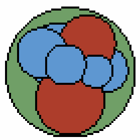
D'après un travail de l'Irem de Poitiers non publié

Théorème des six sphères de Soddy



Quel est le nombre de petites sphères que l'on peut tracer ?

Problème mentionné sur une tablette de1822

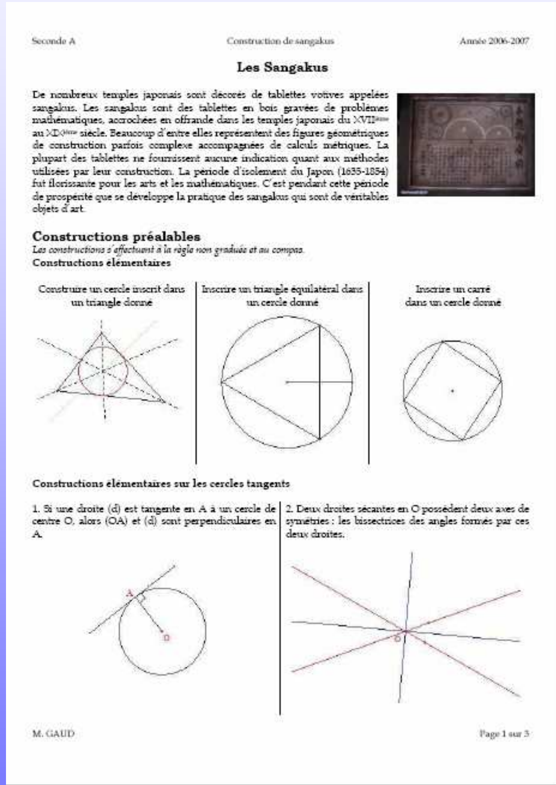


Réponse : Six sphères. Le théorème des six sphères de Soddy stipule que le nombre de sphères est égale à six. Curieusement, les rayons t_1, t_2, ..., t_6 des diverses sphères bleues qui composent le collier sont liés par les relations : $1/t_1 + 1/t_4 = 1/t_2 + 1/t_5 = 1/t_3 + 1/t_6$.

M. GAUD

D'après un travail de l'Irem de Poitiers non publié

Applications dans l'enseignement : des constructions préalables (4ème et plus)



Seconde A — Construction de sangakus — Année 2006-2007

Les Sangakus

De nombreux temples japonais sont décorés de tablettes votives appelées sangakus. Les sangakus sont des tablettes en bois gravées de problèmes mathématiques, accrochées en offrande dans les temples japonais du XVIIème au XIXème siècle. Beaucoup d'entre elles représentent des figures géométriques de construction parfois complexe accompagnées de calculs métriques. La plupart des tablettes ne fournissent aucune indication quant aux méthodes utilisées par leur construction. La période d'isolement du Japon (1635-1854) fut florissante pour les arts et les mathématiques. C'est pendant cette période de prospérité que se développe la pratique des sangakus qui sont de véritables objets d'art.

Constructions préalables

Les constructions s'effectuent à la règle non graduée et au compas.

Constructions élémentaires

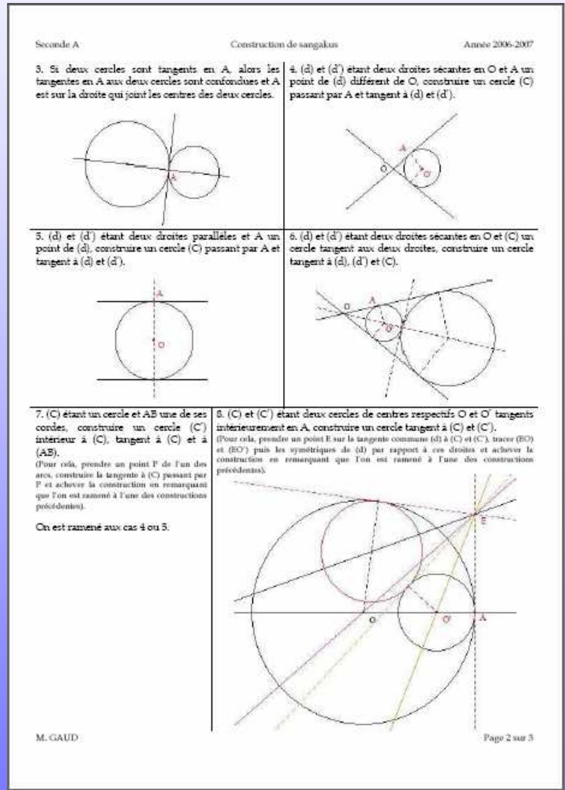
Construire un cercle inscrit dans un triangle donné | Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné | Inscrire un carré dans un cercle donné

Constructions élémentaires sur les cercles tangents

1. Si une droite (d) est tangente en A à un cercle de centre O, alors (OA) et (d) sont perpendiculaires en A.

2. Deux droites sécantes en O possèdent deux axes de symétries : les bissectrices des angles formés par ces deux droites.

M. GAUD — Page 1 sur 3



Seconde A — Construction de sangakus — Année 2006-2007

3. Si deux cercles sont tangents en A, alors les tangentes en A aux deux cercles sont confondues et A est sur la droite qui joint les centres des deux cercles.

4. (d) et (d') étant deux droites sécantes en O et A un point de (d) différent de O, construire un cercle (C) passant par A et tangent à (d) et (d').

5. (d) et (d') étant deux droites parallèles et A un point de (d), construire un cercle (C) passant par A et tangent à (d) et (d').

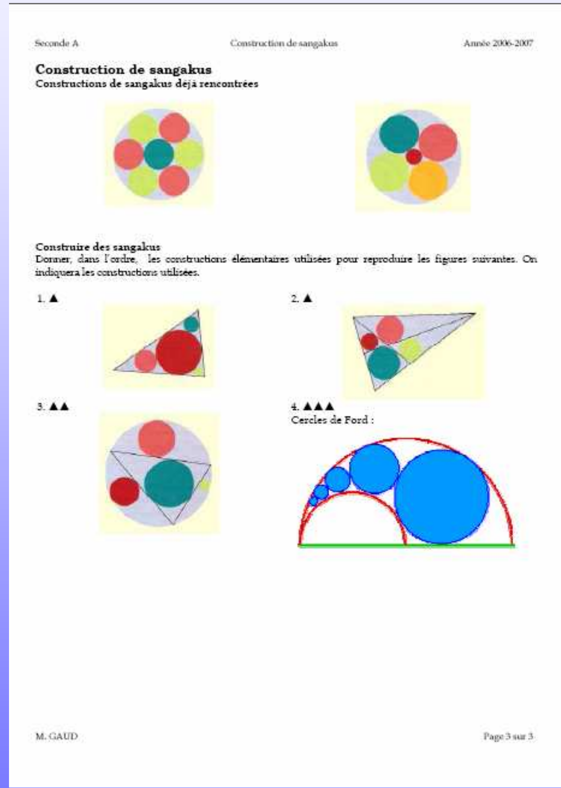
6. (d) et (d') étant deux droites sécantes en O et (C) un cercle tangent aux deux droites, construire un cercle tangent à (d), (d') et (C).

7. (C) étant un cercle et AB une de ses cordes, construire un cercle (C') intérieur à (C), tangent à (C) et à (AB).
(Pour cela, prendre un point P de l'un des arcs, construire la tangente à (C) passant par P et achever la construction en remarquant que l'on est ramené à l'une des constructions précédentes).

On est ramené aux cas 4 ou 5.

8. (C) et (C') étant deux cercles de centres respectifs O et O' tangents intérieurement en A, construire un cercle tangent à (C) et (C').
(Pour cela, prendre un point E sur la tangente commune (d) à (C) et (C'), tracer (EO) et (EO') puis les symétriques de (d) par rapport à ces droites et achever la construction en remarquant que l'on est ramené à l'une des constructions précédentes).

M. GAUD — Page 2 sur 3



Seconde A — Construction de sangakus — Année 2006-2007

Construction de sangakus

Constructions de sangakus déjà rencontrées

Construire des sangakus

Donner, dans l'ordre, les constructions élémentaires utilisées pour reproduire les figures suivantes. On indiquera les constructions utilisées.

1. ▲

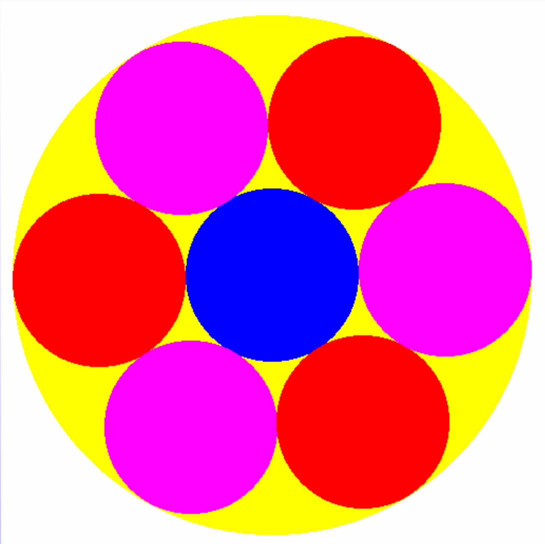
2. ▲

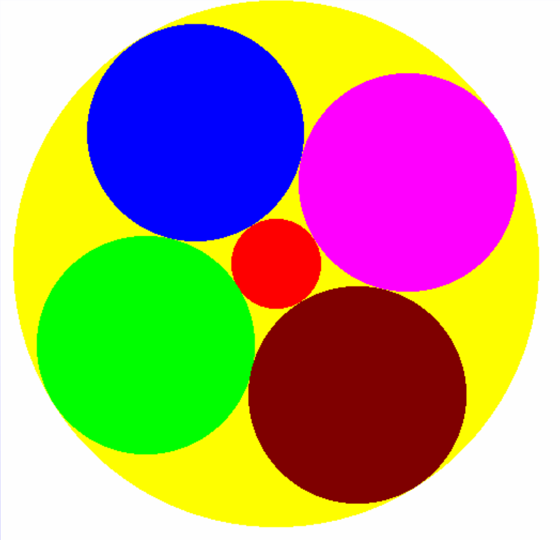
3. ▲▲

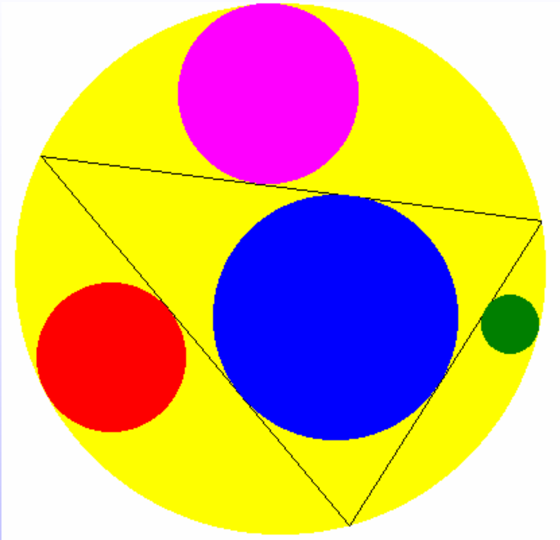
4. ▲▲▲
Cercles de Ford :

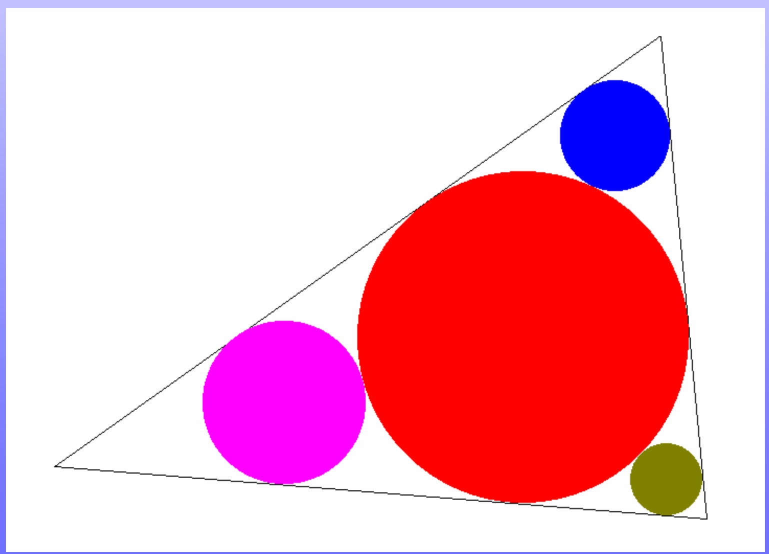
M. GAUD — Page 3 sur 3

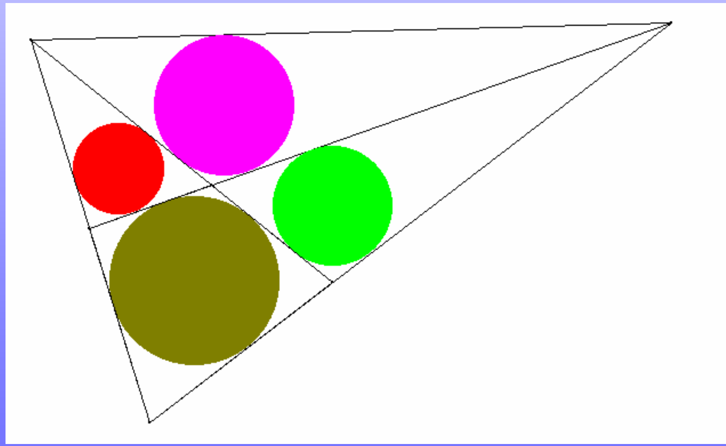
Exemples de sangaku à faire en classe (1/3)





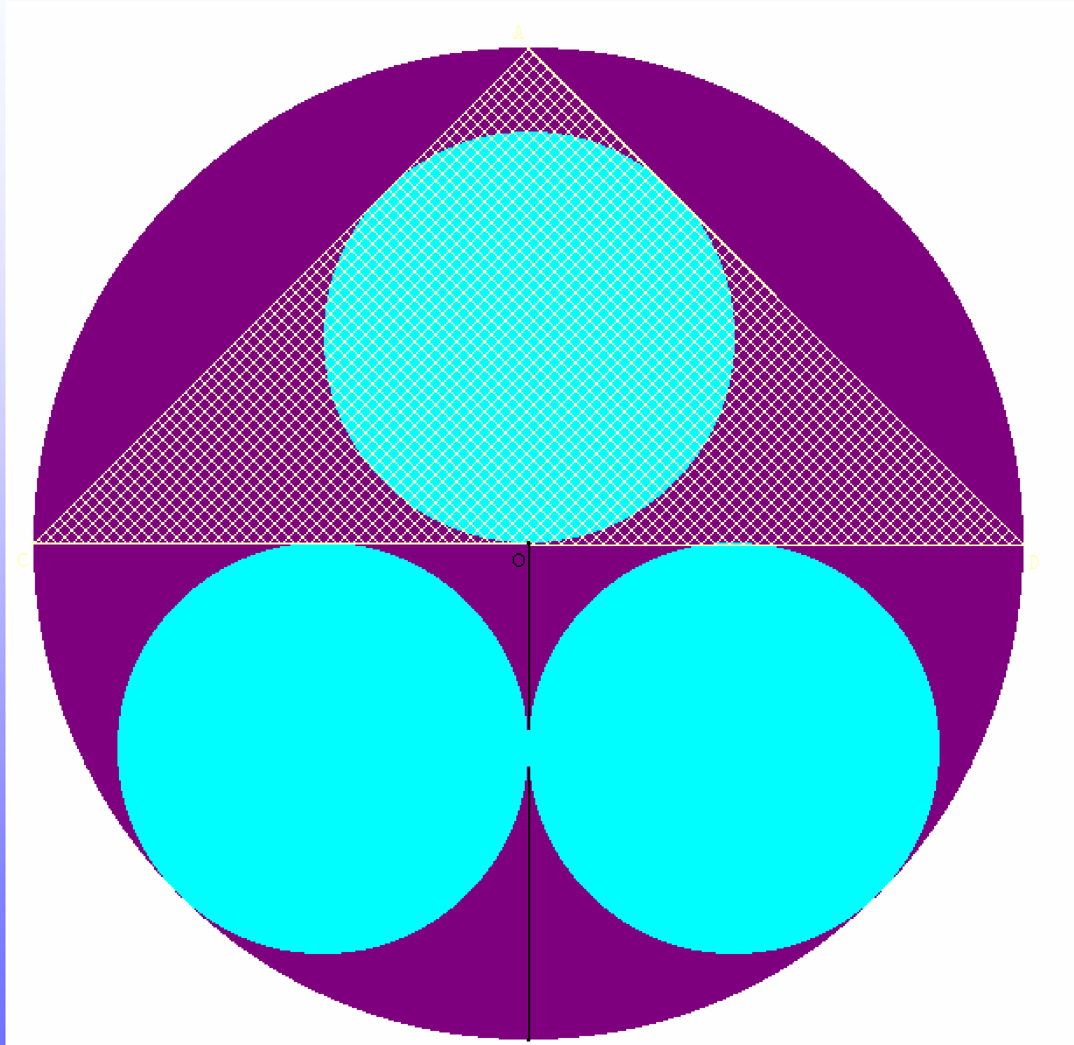






M. GAUD

Exemples de sangaku à faire en classe (2/3)

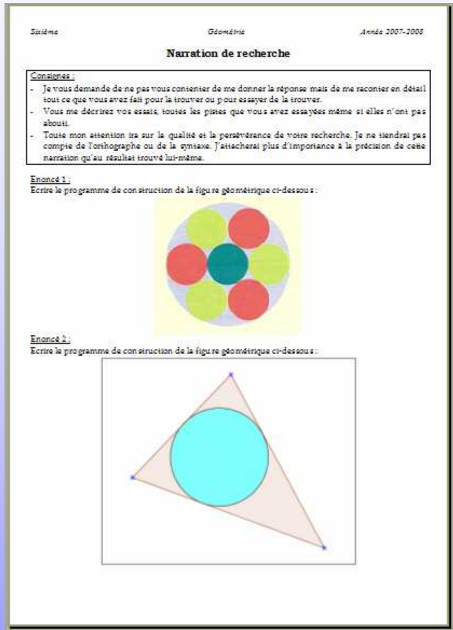


Les trois cercles ont le même rayon.

M. GAUD

Exemples de sangaku à faire en classe (3/3) : narrations de recherche

6 ème



Sixième — Géométrie — Année 2007-2008

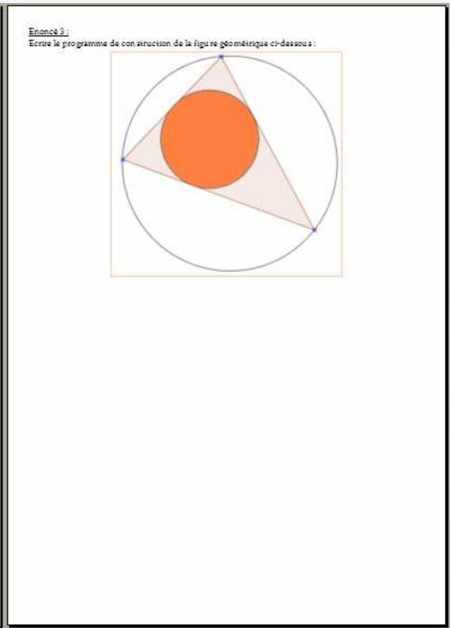
Narration de recherche

Consignes :

- Je vous demande de ne pas vous contenter de me donner la réponse mais de me raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver.
- Vous me décrirez vos essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont pas abouti.
- Toute mon attention ira sur la qualité et la persévérance de votre recherche. Je ne tiendrai pas compte de l'orthographe ou de la syntaxe. J'attacherai plus d'importance à la précision de cette narration qu'au résultat trouvé lui-même.

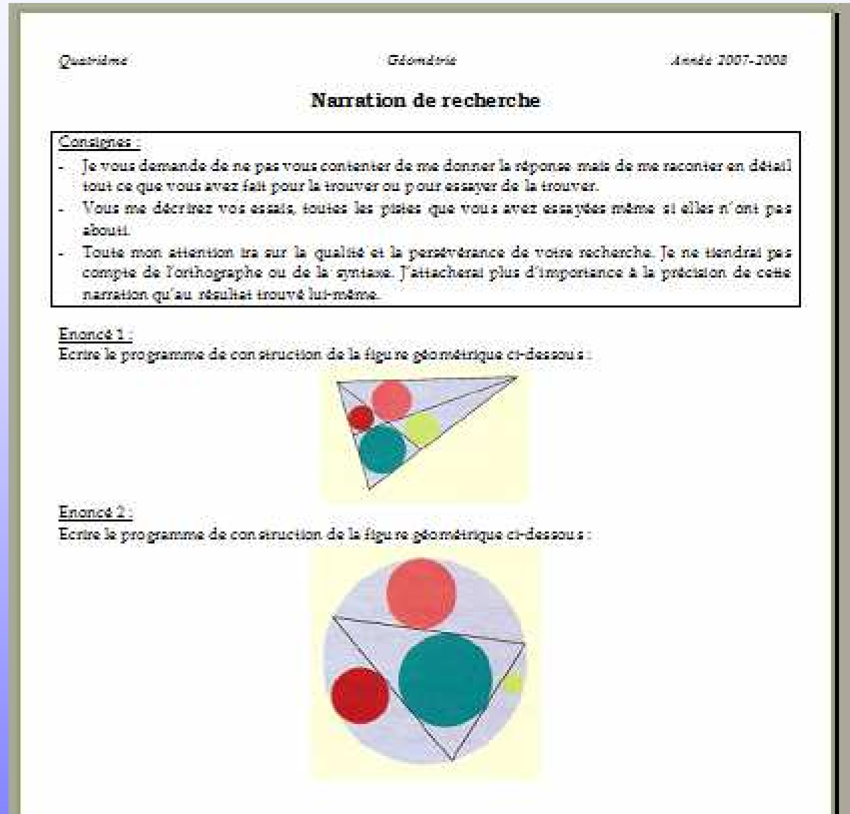
Enoncé 1 :
Ecrire le programme de construction de la figure géométrique ci-dessous :

Enoncé 2 :
Ecrire le programme de construction de la figure géométrique ci-dessous :



Enoncé 3 :
Ecrire le programme de construction de la figure géométrique ci-dessous :

4 ème



Quatrième — Géométrie — Année 2007-2008

Narration de recherche

Consignes :

- Je vous demande de ne pas vous contenter de me donner la réponse mais de me raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver.
- Vous me décrirez vos essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont pas abouti.
- Toute mon attention ira sur la qualité et la persévérance de votre recherche. Je ne tiendrai pas compte de l'orthographe ou de la syntaxe. J'attacherai plus d'importance à la précision de cette narration qu'au résultat trouvé lui-même.

Enoncé 1 :
Ecrire le programme de construction de la figure géométrique ci-dessous :

Enoncé 2 :
Ecrire le programme de construction de la figure géométrique ci-dessous :

Permet aux élèves de prendre du recul sur les notions apprises
Permet d'aborder des notions non vues en cours
Permet une liaison mathématiques/français
Permet une liaison mathématiques/Arts plastiques

M. GAUD

Conclusion

- Narrations de recherche
- Démarche scientifique
- Utilisation de logiciel de géométrie dynamique
- Culture scientifique

Bibliographie

- *« Monsieur, les maths ça sert à quoi ? »*, Matthieu Gaud, Repère IREM, janvier 2008.
- *Géométrie et religion au Japon,* Tony Rothman et Hidetoshi Fukagawa, *Pour la science*, juillet 1998, n°249.
- *Mathématiques et Architecture*, Hors série Tangente, Editions Pole, janvier 2003, n°14.
- *Mathématiques et Arts Plastiques*, Hors série Tangente, Edition Pole, octobre 2005, n°23
- *Mathématiques Bréal 2de* – édition 2004, par une équipe de l'IREM de Poitiers, Edition Bréal, 2004.
- *Les plus belles figures du kangourou*, Patricia et Bernard Hennequin, ACL – Les Editions du Kangourou, 2006.