La parole à

De la synthèse en mathématiques
Un point de vue historique

Karine Chemla

Karine Chemla est directrice de recherche au CNRS. Elle travaille au sein du Laboratoire Sciences-Philosophie-Histoire (SPHERE), université Paris-Diderot/CNRS. Elle est spécialiste en histoire des mathématiques, et en particulier des mathématiques chinoises.[1]

Que ce soit l'éloignement géographique, l'isolement politique ou les différences de milieu social, de multiples circonstances amènent divers groupes d'êtres humains à développer des connaissances mathématiques sans communiquer entre eux. Ils rencontrent alors souvent les mêmes problèmes. Pourtant il arrive que les solutions qu'ils élaborent, elles, diffèrent. De là surgit un ensemble de questions. Tout d'abord : quels rapports ces solutions entretiennent-elles ? S'opposent-elles mutuellement ? Et comment alors rendre compte de leurs différences ? Sont-elles, au contraire, complémentaires ? Les deux configurations se présentent. Deux exemples élémentaires nous le montreront.

Ces situations soulèvent des questions d'un nouvel ordre : qu'advient-il lorsque ces solutions se rencontrent ? Nous verrons que des synthèses surviennent. Ainsi se constituent les objets des mathématiques.

Une telle problématique nous conduit naturellement à adopter une perspective internationale sur l'histoire des mathématiques. Nous voulons suivre comment différentes solutions se distribuent dans le temps et dans l'espace et observer leurs interférences. Chemin faisant, on comprendra pourquoi un modèle qui verrait le développement des mathématiques comme linéaire est manifestement inadéquat. Voici deux exemples où l'on voit alterner des moments de différenciations et des moments de synthèses.

L'assimilation d'une tradition par une autre, ou « une tradition peut en cacher une autre »

Étudions le problème suivant : comment énoncer le résultat d'une division, puis calculer avec lui.

Des documents mathématiques rédigés à des époques et en des lieux divers attestent de solutions distinctes apportées à ce problème.

L'une d'entre elles est devenue familière aujourd'hui sous le nom de « fraction » ; elle propose de donner le résultat d'une division, par exemple de celle de 7 par 4, sous la forme de la somme 1+3/4, un et trois quarts. Le premier texte mathématique connu où on la rencontre est chinois : il ne s'agit plus des *Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques* (*Jiu zhang suan shu*), fruit d'une compilation effectuée en Chine probablement au pre-

[1] Pour une bibliographie concernant Karine Chemla ou en savoir plus sur ses activités de recherche, consulter : http://www.rehseis.cnrs.fr/spip.php?article20

mier siècle de notre ère, comme on l'a cru jusque récemment, mais d'un manuscrit plus ancien trouvé en 1984 dans une tombe scellée vers 186 avant notre ère[2]. Cette solution était très répandue en Chine comme en Inde : le premier texte indien connu aujourd'hui qui en témoigne date du cinquième siècle. Et par commodité, dans la suite de ce texte, nous l'appellerons, avec toutes les précautions qui s'imposent, la « solution asiatique ».

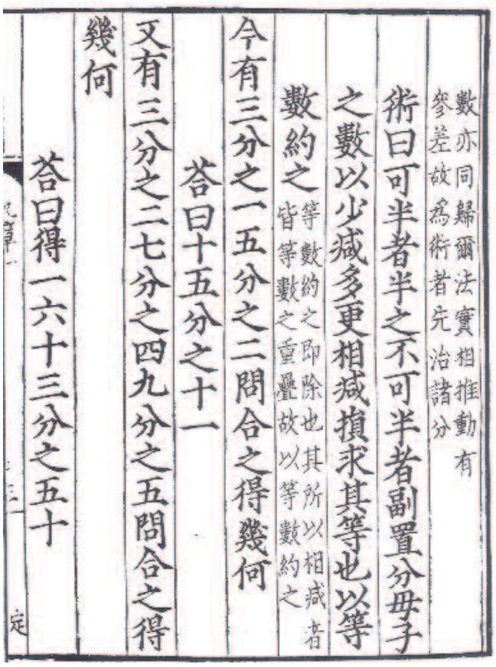
Pourtant le même problème avait déjà reçu d'autres solutions, qu'on peut observer dans des sources mathématiques bien plus anciennes (première moitié du second millénaire avant notre ère). C'est ce dont témoignent les tablettes babyloniennes et les papyrus égyptiens, deux corpus de textes qui proposent chacun la leur.

Les mathématiciens babyloniens fournissent leur solution dans le cadre d'un système de numération comparable au nôtre, à ceci près qu'il est sexagésimal au lieu d'être décimal[3]. Pour la comprendre, il faut préciser qu'à la différence de l'usage courant aujourd'hui, la représentation qu'ils donnent d'un nombre n'en retient que les chiffres significatifs et non l'ordre de grandeur : les trois grandeurs que nous distinguons en écrivant « 0,1 », « 1 » ou « 10 », ils les écrivent toutes « 1 ». A charge pour le lecteur de recourir au contexte pour comprendre comment interpréter ce signe.

De la même manière, ils écrivent tout nombre comme une suite finie de chiffres, sans que soit précisée la valeur réelle qu'il convient de lui attribuer. C'est en mettant en œuvre cette ressource du système de représentation des nombres qu'ils proposent, en réponse à une division du genre de celle de 7 par 4, « 175 » (en transposant l'idée de leur solution en système décimal). Cela correspond à la donnée du résultat sous une forme que l'on qualifierait aujourd'hui de « décimale », comme lorsque l'on écrit « 1,75 », mais la tablette babylonienne n'en fournit que les seuls chiffres significatifs. En un sens, la solution qu'illustrent ces textes et que nous désignerons, par commodité, du qualificatif de « babylonienne » consiste … à éviter les fractions : la notion de nombre retenue par ces mathématiciens est corrélée au fait que l'exécution de pareille divi-

2 Précisons que, si les fractions y apparaissent bien sous les espèces d'un numérateur et d'un dénominateur, seules sont prises en compte les fractions de valeur inférieure à l'unité.

3 Il rappelle le système que nous utilisons pour les durées, quand nous parlons d'heures, minutes, secondes…


數亦同歸爾法實相推動有參差故爲術者先治諸分
術曰可半者半之不可半者副置分母子
之數以少減多更相減損求其等也以等
數約之等數約之即除也其所以相減者皆等數之重疊故以等數約之
今有三分之一五分之二問合之得幾何
荅曰十五分之十一
又有三分之二七分之四九分之五問合之得
幾何
荅曰得一六十三分之五十

Une page de l'impression du XIIIe siècle des *Neuf Chapitres*. Elle traite de la simplification des fractions.

sion ne nécessite pas l'introduction de nombres d'un nouveau genre.

Les papyrus égyptiens, et à leur suite les papyrus grecs, proposent, eux, une solution qui est à même d'énoncer le résultat de la division dans tous les cas. Mais le type de fractions qu'ils développent ce faisant est distinct de celui que l'arithmétique contemporaine a retenu. Pour reprendre l'exemple de la division de 7 par 4, son résultat dans le cadre de la solution que nous qualifierons d'« égyptienne » serait de la forme 1 + 1/2 + 1/4. Il consiste donc en la somme d'un nombre entier et de fractions dont tous les numérateurs vaudraient 1.[4]

Voici donc trois solutions du même problème, nous les appellerons toutes fractions. Elles sont toutes trois représentées comme des configurations de nombres entiers. S'agit-il là d'une simple différence de convention dans la manière de présenter les résultats ou cela renvoie-t-il à des différences plus profondes ?

En réalité, les trois solutions que nous venons de présenter brièvement renvoient à trois manières différentes de travailler avec les nombres. Les mathématiciens babyloniens utilisent les propriétés numériques de la base de leur système de numération, 60. Les Égyptiens se servent essentiellement, dans leurs calculs, des diviseurs des nombres, ce qui les relie à la discipline que l'on appelle aujourd'hui la « théorie des nombres ». Les mathématiciens d'Asie proposent, eux, une arithmétique indépendante de la base du système de numération et des propriétés particulières des nombres impliqués. Leur arithmétique met uniformément en œuvre les numérateurs et dénominateurs qui forment les fractions.

Nous voici donc confrontés à des nombres mis en œuvre par des arithmétiques radicalement différentes. Mais quels rapports entretiennent-ils les uns avec les autres ?

Si l'on reprend la représentation que nous avons donnée du résultat de notre division selon le mode égyptien, à savoir 1 + 1/2 + 1/4, on pourrait être tenté de penser que l'on n'a affaire ici qu'à des cas particuliers de fractions plus générales, qui, comme les fractions d'Asie, peuvent avoir des numérateurs autres que 1. Ce serait confondre les fractions égyptiennes avec la représentation que la langue mathématique contemporaine nous amène à en donner. Certes, pour «comprendre» ce type des fractions, nous avons eu à les traduire dans les termes de la notion que nous utilisons aujourd'hui, à savoir : nous les avons munies d'un numérateur et d'un dénominateur, nous les avons écrites 1/2 + 1/4. Mais cette traduction trahit. Les fractions égyptiennes sont composées d'éléments qui sont les quantièmes. Ils ont une existence indépendante, qui ne doit rien aux autres types de fractions, et constituent un concept à part entière. Nous devons résister à la tentation qui nous pousserait à voir dans une solution la préfiguration de l'autre.

Tentons maintenant, au terme de cette analyse, de tracer les grandes lignes d'une histoire des fractions. Il nous faut, nous l'avons vu, nous démarquer d'une histoire linéaire qui ne serait qu'un artefact produit par le fait de confondre les documents et leur traduction en termes modernes. Les textes originaux laissent voir trois solutions qui ont été apportées en divers endroits au même problème, trois solutions qui semblent s'être développées indépendamment les unes des autres, puis qui se sont rencontrées. Qu'a produit cette rencontre ?

[4] On les a nommées « fractions unitaires » ou « quantièmes ».

L'une des solutions paraît l'avoir emporté sur une autre : il s'agit de la fraction conçue en termes de numérateur et de dénominateur, venue selon toute vraisemblance d'Asie. Elle a tant et si bien supplanté le concept égyptien que celui-ci n'est plus lu, pensé, aujourd'hui qu'au travers de sa traduction sous la forme asiatique. À proprement parler, il n'a survécu que par conversion, transformation en un autre concept. D'où nous réalisons que notre incompréhension de ce qu'il est, fraction unitaire disons-nous, a une histoire mathématique. C'est parce que les fractions égyptiennes n'ont pas subsisté jusqu'à aujourd'hui que la langue mathématique contemporaine ne nous offre pas d'autres moyens de les appréhender. Nous pouvons alors faire le contre-sens, en regardant la solution victorieuse, de penser la solution éliminée comme un état imparfait qui précéderait l'autre. Si nous nous méprenons sur les fractions égyptiennes, c'est peut-être aussi faute d'avoir reconnu ce processus à l'œuvre dans l'histoire des mathématiques : il existe des solutions alternatives mais différentes, et leur rencontre, loin de les amener à se compléter, aboutit parfois à la disparition pure et simple de l'une d'entre elles.

En ce qui concerne maintenant les deux autres solutions, babylonienne et asiatique, on peut voir la poursuite de leur élaboration dans les notions contemporaines de nombre décimal et de fraction quelconque[5]. Elles ont chacune été travaillées à des fins diverses, parfois par des milieux différents. Mais on ne peut manquer de souligner le fait qu'après un temps où elles ont été développées, chacune, comme unique manière de concevoir le nombre, sans alternative, elles ont ensuite été confrontées et articulées l'une à l'autre, rendues complémentaires. Elles ont été comprises comme deux aspects de cette même réalité. Le fait que le nombre se présente à nous sous de multiples aspects est le fruit d'une histoire. Il n'en a pas toujours été ainsi.

Quand et comment les rencontres de ces trois solutions ont-elles eu lieu ? Il semble bien que cela se soit passé dans les textes arabes du Moyen Âge, dans lesquels, à la différence des autres corpus de textes mathématiques, elles sont toutes attestées. Mais leurs liens précis dans ces textes restent à étudier.

Récapitulons. L'exemple des fractions manifeste deux types d'événements susceptibles de survenir à la rencontre de deux solutions : l'assimilation de l'une par une autre ou leur articulation entre elles. Un second exemple nous donnera un cas plus complexe d'un processus d'articulation.

5 Nous envisageons aujourd'hui des fractions de valeur quelconque, indifféremment supérieure ou inférieure à l'unité. Ce point, d'allure anodine, est pourtant important.

Extrait du papyrus Rhynd écrit en 1650 avant notre ère et conservé au British Museum ; il contient de nombreuses informations sur les fractions égyptiennes.

Une synthèse d'éléments divers

Considérons l'équation dite quadratique, que nous pouvons écrire aujourd'hui $ax^2 + bx = c$, et observons la multiplicité des ingrédients qui s'y fondent.

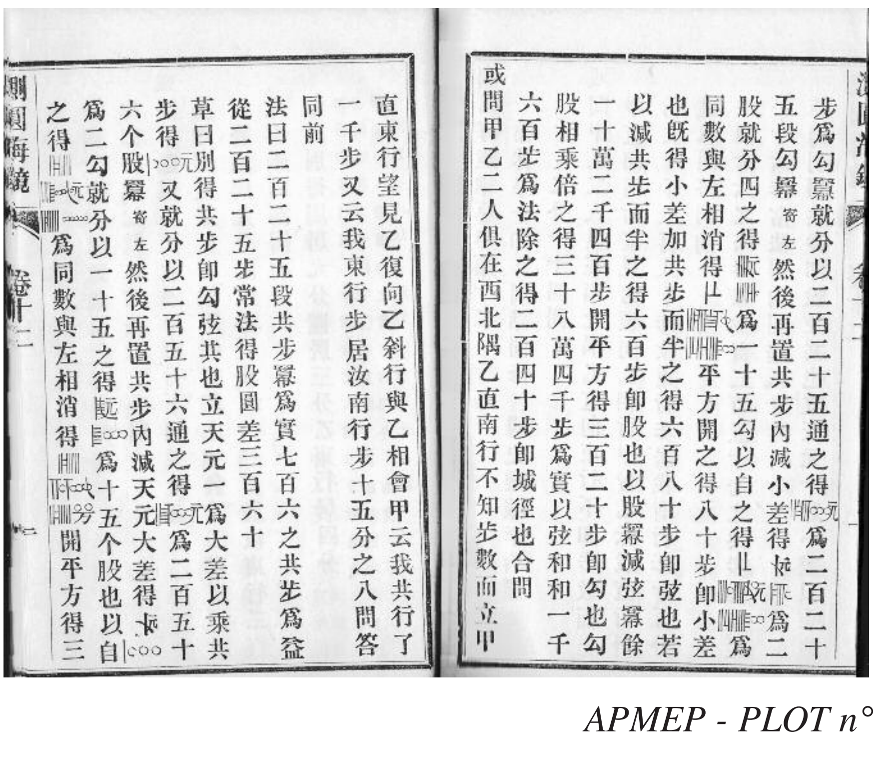
La relation écrite entre des nombres a, b, c, dont il nous appartient de choisir la nature, et une inconnue *x*, met en jeu, outre l'inconnue, le produit de celle-ci par elle-même. Au lieu de désigner ces termes, tous deux indéterminés, par des notations sans rapport l'une avec l'autre, la représentation arrêtée donne à voir la relation qu'ils entretiennent, puisqu'on les note respectivement x et x^2. On utiliserait le même procédé d'écriture si l'équation impliquait des puissances supérieures de *x*. La structure arithmétique des relations entre les inconnues est donc rendue explicite par les notations.

Par ailleurs, cette relation que représente l'équation et qui s'exprime au moyen d'opérations (additions, multiplications…) permet de déterminer les valeurs possibles de l'inconnue selon plusieurs modes. On dispose, entre autres, de formules de résolution dites par radicaux, de procédures (ou algorithmes) de résolution numériques et de procédés de solution graphiques. Notons la variété de textes mathématiques impliqués : formules, algorithmes, procédés graphiques.

Sur un autre plan, on peut voir l'équation comme une *opération*, ce qui met l'accent sur sa parenté avec la division par exemple. Diviser b par c, c'est en effet chercher à déterminer un nombre inconnu par le fait que sa multiplication par b produit c. Cela revient donc à résoudre l'équation $bx = c$. À l'image du calcul d'une division, certains modes de résolution opéreront sur les trois nombres que sont les coefficients de notre équation, à savoir a, b, c, pour produire les inconnues qui y satisferaient.

Mais on peut aussi la voir comme l'*énoncé d'une égalité*, susceptible par conséquent d'être transformé en un autre énoncé de même type. Dire que ax^2 augmenté de bx vaut c, c'est aussi dire que ax^2 vaut c diminué de bx ($ax^2 = c - bx$).

Face à cette combinaison d'éléments de natures diverses, nos questions reviennent : comment s'est formé cet ensemble ? Et comment sa constitution a-t-elle contribué à l'élaboration du concept d'équation ? Ces questions se posent



Une page d'un traité chinois du XIIIe siècle, *Reflets des mesures du cercle sur la mer*. On y voit l'écriture des polynômes et des équations à l'aide desquelles on résout les problèmes contenus dans l'ouvrage.

d'autant plus que l'ensemble ne se présente pas d'emblée constitué. Pour préciser ce point, revenons tout d'abord à différentes formes historiquement attestées de l'énoncé de notre équation. La tablette paléobabylonienne BM 13901 ouvre sur le problème suivant : « J'ai additionné la surface et le côté de mon carré, 45 ». Quand nous traduisons cet énoncé par $x^2 + x = 45$, nous transformons en formule, et donc en la donnée d'une égalité, ce que le texte exprime, lui, de manière procédurale, puisqu'il pose le problème en annonçant ce que produit une addition effectuée sur des termes mettant en jeu l'inconnue[6]. C'est au contraire sous la forme de l'énoncé d'une égalité qu'apparaît l'équation quadratique dans le premier traité, composé entre 813 et 833, qui est consacré à sa théorie : *le livre concis du calcul de l'algèbre et d'al-muqabala* d'al-Khwarizmi. L'auteur exprime l'une des formes fondamentales qu'il en retient comme : « des carrés plus des racines égaux à des nombres ». Le terme « carré » auquel il a recours renvoie à la notion algébrique de multiplication de l'inconnue par elle-même, tandis que l'inconnue est ici, pour sa part, désignée du nom de «racine». Autre différence avec notre énoncé babylonien, al-Khwarizmi parle d'un type abstrait d'équations : il regroupe en une formulation toutes les équations de même forme, qui pourraient constituer, sur une tablette, autant de problèmes différents. La démarcation est plus décisive qu'il n'y paraît puisqu'il peut ainsi traiter du *même pas* les équations similaires, que leurs inconnues renvoient au domaine de la géométrie ou à celui des nombres. De plus, l'introduction de ce type d'énoncé mathématique va de pair avec le fait que l'équation est détachée de tout contexte et considérée pour elle-même. Les modes de résolution n'apparaissent plus uniquement dans le contexte de problèmes particuliers. La solution d'un problème constitue une équation et renvoie à sa résolution.

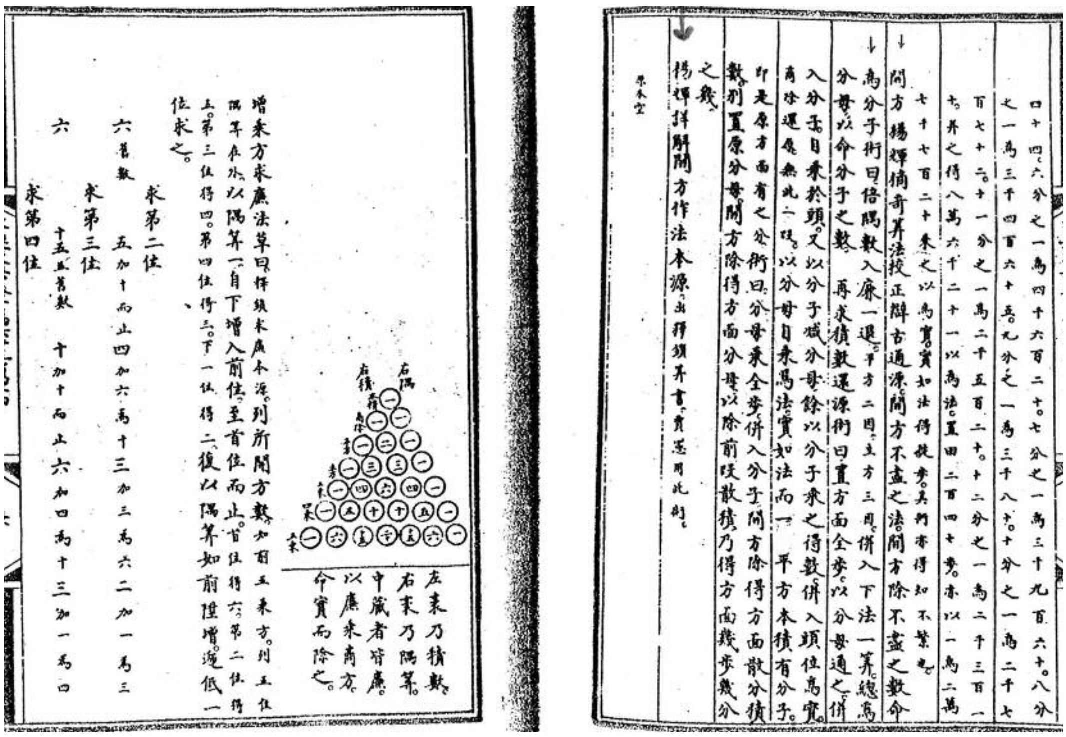
Le fait qu'elle s'énonce comme une égalité n'est pas anodin. En effet, dans notre tablette babylonienne, une fois l'équation énoncée, son expression n'est soumise à aucune réécriture. Par contraste, l'ouvrage d'al-Khwarizmi opère des transformations des énoncés que sont les équations, en tant que tels. Il évoque en cela le traitement que le mathématicien alexandrin du second ou troisième siècle de notre ère Diophante donne d'équations qu'il est amené à considérer dans le domaine de la théorie des nombres. Cependant, par opposition à Diophante chez qui seule la standardisation des expressions montre la systématicité des transformations d'équations utilisées, al-Khwarizmi regroupe ses transformations en deux rubriques très générales qui fournissent le titre de son livre : algèbre et al-muqabala[7].

[6] La généralisation des ordinateurs a familiarisé tout un chacun avec une pratique des mathématiques par procédures. Les historiens ont de ce fait pris conscience de ce que tous les textes mathématiques anciens sont, eux aussi, rédigés de la sorte. Le phénomène y a même une telle extension qu'outre les solutions, les problèmes eux aussi ont la forme de procédures, comme c'est le cas ici. Ce point reste pertinent pour les textes mathématiques chinois.

[7] «Algèbre» désigne les transformations qui font passer un terme d'un membre de l'équation à un autre (comme celle qui fait passer de $ax^2 = c - bx$ à $ax^2 + bx = c$), tandis qu'« al-muqabala » renvoie à l'élimination de termes de même nature de part et d'autre du signe égal (elle rend compte par exemple de la transformation de $x^2 + 20 = 3x + 10$ en $x^2 + 10 = 3x$).

Sur un autre plan, dans le cadre de cette nouvelle théorie des équations, al-Khwarizmi propose les mêmes algorithmes de résolution que ceux présentés sur la tablette babylonienne. L'algorithme général de résolution d'un de ses types d'équation, énoncé dans le cadre de l'exemple $x^2 + 10\,x = 39$, s'y lit : « La règle en cela est que tu divises les racines en deux moitiés, dans ce problème [on obtient] cinq, que tu multiplies par lui-même, on a vingt-cinq, tu l'ajoutes à trente-neuf, on a soixante-quatre ; tu prends sa racine qui est huit, tu en retranches la moitié des racines, qui est cinq, il reste trois, qui est la racine du carré que tu cherches, et le carré est neuf.» On constate donc que le traitement des équations par al-Khwarizmi articule des éléments trouvés jusque-là séparément : cette résolution dite par radicaux, qui produit les inconnues à partir des valeurs des nombres qui interviennent dans l'énoncé de l'équation, et la transformation de l'équation en tant qu'énoncé d'égalité. Cependant, à la différence des écrits antérieurs, il considère — et constitue — l'équation en soi, organise et généralise les opérations qui agissent sur elle et, corrélativement, donne un traitement complet de l'équation quadratique[8].

Si l'on rencontre cette approche, par radicaux, des équations dans les textes babyloniens, on n'y trouve cependant pas de trace de l'approche développée, elle, en Chine, à l'exclusive de toute autre. C'est cette fois-ci bien dans les *Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques*, au premier siècle donc, que l'on découvre les



Le témoignage le plus ancien de l'utilisation du triangle de Pascal en Chine en relation avec l'extraction de racine *n*-ième.

[8] Les ingrédients que nous avons introduits progressivement s'y articulent de la façon suivante : après avoir défini les termes qui entrent dans la composition de toute équation, il énonce les six types fondamentaux possibles, qui en constituent des « représentations standard » et qui déterminent chacun un mode de résolution. De plus, la donnée des transformations générales des équations permet de ramener chacune d'entre elles au représentant standard qui lui correspond, de définir ainsi son type et le mode de résolution qui lui convient.

premiers éléments à l'heure actuelle disponibles de cette autre branche de l'histoire des équations. Déjà la nature de l'objet mathématique y diffère de tout ce que nous avons considéré jusqu'ici : ni algorithme, ni énoncé d'égalité, l'équation est donnée comme une opération arithmétique. De même que résoudre un problème par division revient à déterminer un dividende et un diviseur avant de prescrire d'effectuer la division, la solution d'un problème par équation énonce une procédure pour en calculer les différents termes avant, au moyen d'une expression technique, de renvoyer à l'opération qu'est l'équation. En ce sens, au même titre que la division, l'équation a une existence qui dépasse le contexte de la résolution d'un problème particulier. L'analogie avec la division se poursuit plus loin encore. Le propre de la division telle que nous la pratiquons et telle que les mathématiciens chinois la pratiquaient à l'époque consiste à opérer sur la base de la suite de chiffres qui représente le dividende : on en considère tout d'abord une première tranche à gauche, puis les autres chiffres successivement. De même, le propre de la résolution de l'équation telle que les textes chinois nous la montrent est d'opérer de la sorte sur les chiffres des différents termes, et la procédure de son effectuation est décrite de manière à mettre en évidence sa ressemblance avec le déroulement d'une division[9]. Et c'est exclusivement dans cette perspective que se développera la notion d'équation au fil des ouvrages mathématiques chinois.

Or, si l'on se penche maintenant sur l'ouvrage que Sharaf al-Din al-Tusi rédige en arabe sur les équations, au début du treizième siècle, on y retrouve un traitement des équations, cubiques cette fois-ci, qui se démarque des résolutions du type de celles données par al-Khwarizmi pour présenter les mêmes caractéristiques que celles identifiées dans les textes chinois. Elles y sont ici alliées à un mode de travail géométrique, dont on peut voir les prémices dans des travaux grecs antiques, et le tout se fond dans un cadre dont la généralité renvoie à la tradition algébrique arabe, inaugurée par al-Khwarizmi. On y retrouve par conséquent à nouveau un alliage d'ingrédients, présents à l'état libre dans des textes antérieurs, mais qui constituent bien aujourd'hui certains des plans différents entre lesquels il est possible de jouer pour travailler sur les équations.

Pour récapituler, nous voici donc face à des traditions anciennes qui ont développé des concepts d'équations, des approches, chacune spécifique, à l'exclusion d'autres concepts, d'autres approches. Le fait qu'elles aient laissé des traces nous permettant de décrire ce mode d'existence des équations doit-il nous faire conclure que tel ou tel acquis est le bien de telle ou telle civilisation ? Chacun sait la fragilité de telles assertions quand les sources dont nous disposons sont si lacunaires. Chercher à déterminer la part de chaque groupe humain dans cette histoire nous détournerait d'une tâche, elle beaucoup plus importante pour nos réflexions sur les mathématiques et qui rend la première vaine, celle d'essayer de cerner le phénomène stupéfiant dont ces documents attestent : alors que les sources

[9] L'équation est en fait conçue, dans ce cadre, comme une espèce d'extraction de racine. La suite de remaniements des relations entre extraction de racine et division peut être corrélée au mode de maturation du concept d'équation à laquelle on assiste en Chine entre le premier et le treizième siècle.

connues antérieures ne présentent les équations que selon *une* approche, particulière, les sources arabes d'al-Khwarizmi à al-Tusi *intègrent des aspects auparavant dissociés* ; et chacun de ces auteurs illustre une synthèse d'éléments différents, de telle manière que tous les aspects identifiés dans ce qui précède s'y retrouvent. De l'alternative, ils font complémentarité.

C'est un événement intellectuel, par lequel il nous semble que la face des mathématiques fut changée. Les tablettes babyloniennes n'attestaient que de résolution par radicaux, les textes chinois que de résolution numérique. Les deux approches se sont confrontées dans le monde arabe. Qu'a produit cette rencontre ? Comment a-t-on exploré leur rapport ? Il est en effet frappant de constater que le calcul algébrique, qui naît durant ces siècles, offre un cadre dans lequel des liens se tissent facilement entre ces éléments et qui permet leur comparaison ; c'est en tout cas celui que nous employons à l'heure actuelle. Comment les penser sans disposer de cet outil ? La question se pose donc de savoir quelle relation ce travail de confrontation a eu avec la naissance d'un tel calcul.

Différenciations et synthèses en mathématiques

Il va sans dire que les histoires que nous venons de brosser sont schématiques et incomplètes, à plus d'un égard. Cependant toutes deux mettent en valeur l'existence, pour les mêmes problèmes, d'approches qui semblent rester stables sur des générations — c'est ce qu'on peut appeler une tradition de travail — mais qui sont fondamentalement différentes les unes des autres. Elles attestent aussi de ce que, historiquement et conceptuellement, ces approches en viennent à se rencontrer, à se confronter, à s'articuler les unes aux autres — à moins que l'une n'élimine l'autre —, de telle sorte qu'une synthèse en émerge, différente de chacun des courants antérieurs.

Nous insistons sur le fait que se pencher sur les différences, c'est en fait se munir d'outils pour déterminer la nature des concepts mathématiques et pour en analyser la teneur. Notre but n'est pas de chercher à déterminer la contribution de telle ou telle culture, ou encore sa spécificité. Si différenciations il y a dans le travail mathématique, elles ne sont pas l'effet de «l'esprit d'un peuple». Elles se présentent dès que des circonstances quelconques privent de manière significative un groupe de mathématiciens de contacts avec d'autres. L'histoire contemporaine nous en fournit un exemple avec la découverte récente par la communauté internationale des pistes originales qui avaient été explorées, jusqu'il y a peu en vase clos, par les mathématiciens soviétiques. Différenciations aussitôt résorbées, leurs travaux ont déjà fécondé la littérature internationale.

Ces différences ne peuvent, par ailleurs, s'envisager qu'au regard de synthèses dans lesquelles elles interagissent, travail qui nous a conduits à rejeter un modèle linéaire du développement des mathématiques, au profit d'une conception qui fait place à une alternance de différenciations et de synthèses. L'ensemble de ces aspects souligne que c'est par nécessité intellectuelle que l'histoire des mathématiques ne peut qu'être internationale.

Différenciations et synthèses, ces deux temps que nous montre l'histoire des traditions anciennes se prêtent tout aussi bien à rendre compte d'événements reconnus comme caractéristiques de l'histoire de la mathématique internationale depuis quelques siècles. A la différenciation entre disciplines dont elle a été le lieu, ont fait suite, à cadence redoublée depuis le dix-neuvième siècle, des synthèses de natures diverses entre elles, synthèses qui n'ont cessé d'étonner par leur fécondité.

Ainsi non seulement nous retrouvons, pour les mathématiques, cette nécessité de différenciations et de collaborations qui fait la leçon de *Race et histoire* de C. Lévi-Strauss. Mais nous pouvons aussi, dans le cadre qui est le nôtre, emprunter à cet essai son hypothèse finale : cette alternance est à ce point nécessaire à la dynamique des mathématiques que, lorsque diverses circonstances ont établi un régime mondial pour leur développement, d'anciens mécanismes de différenciation ont été fonctionnellement relayés par un mécanisme de différenciation interne. Ainsi se sont constituées les différentes branches des mathématiques. Dans des cadres momentanément étanches les uns aux autres, elles développent des solutions différentes à des problèmes qui attendent d'être reconnus comme identiques.

Note de l'auteure

Une première version de cet article est parue sous le titre "De la synthèse comme moment dans l'histoire des mathématiques", dans la revue Diogène, 160, 1992, p. 97-114. J'y renvoie pour des références bibliographiques et une argumentation plus développée. L'article original a été retravaillé par Claudie Asselain-Missenard afin qu'il trouve sa place dans PLOT. C'est un plaisir de lui exprimer ici ma reconnaissance.