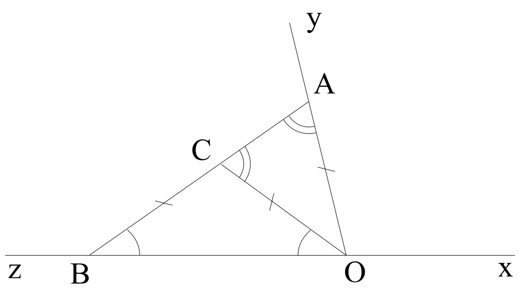
La trisection de l'angle

Henry Plane

Le problème de partager un angle en trois angles égaux, à la règle et au compas, est étudié depuis fort longtemps. La trace en existe chez plusieurs auteurs.

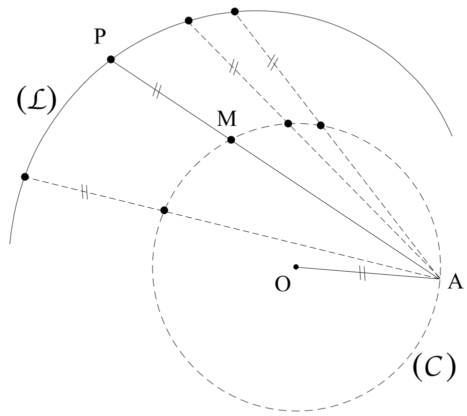
Archimède (3ème siècle avant Jésus-Christ) attirait l'attention sur la figure suivante :



Soient un angle $\widehat{xOy}$ et 3 points A, B et C vérifiant les conditions suivantes :
A sur [Oy),
B sur la demi-droite [Oz) opposée à [Ox),
C sur [AB] tels que AO = OC = CB.
Les triangles OAC et CBO sont isocèles, alors :

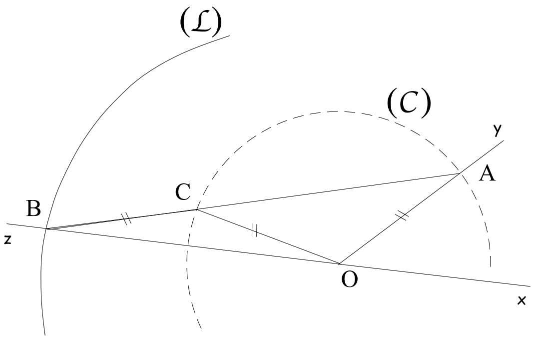
$\widehat{CAO} = \widehat{ACO}$ et $\widehat{COB} = \widehat{CBO}$,
Mais : $\widehat{OCA} = \widehat{OBC} + \widehat{COB} = 2\ \widehat{OBC}$,
$\widehat{OCA}$ et $\widehat{OBC} + \widehat{COB}$ étant deux manières d'exprimer le supplémentaire de $\widehat{BCO}$.
Et : $\widehat{xOA} + \widehat{COB} = \widehat{OCA} + \widehat{OAC}$
car ce sont deux manières d'exprimer le supplémentaire de $\widehat{AOC}$) = 4 $\widehat{OBC}$,
Donc $\widehat{xOA} = \widehat{xOy} = 3\ \widehat{OBC}$.
Mais la construction de la figure, à partir de l'angle donné $\widehat{xOy}$, à la règle et au compas seuls, s'avère impossible (essayez donc !).

Diverses constructions en approchent néanmoins.
Etienne Pascal, le père de Blaise, lorsqu'il vint s'installer à Paris vers 1635, présenta à ses amis du Cercle des Minimes, chez le père Mersenne, la solution suivante :

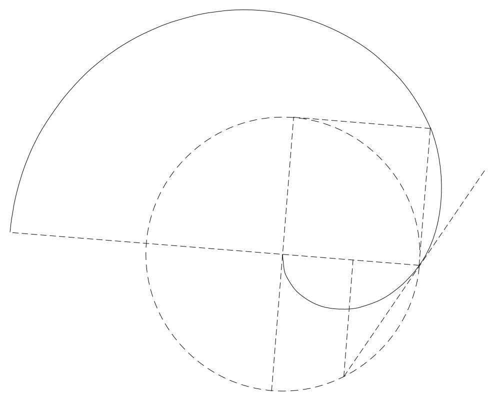


Construire d'abord une conchoïde particulière de cercle ainsi définie : soit le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon OA. Pour tout point M de ($\mathcal{C}$), on prolonge la corde AM d'une longueur MP = OA. On obtient ainsi une courbe ($\mathcal{L}$) que l'on conservera avec son cercle générateur ($\mathcal{C}$) pour apporter réponse au problème de la trisection.

Soit l'angle $\widehat{xOy}$. On place le rayon [OA] du cercle ($\mathcal{C}$) sur [Oy). [Oz) recoupe ($\mathcal{L}$) en B et (AB) recoupe ($\mathcal{C}$) en C.
On a BC = CO = OA



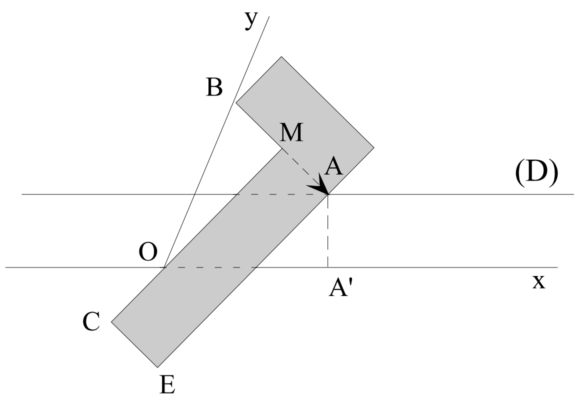
Et donc : $\widehat{OBA} = 1/3\ \widehat{xOy}$ selon la figure d'Archimède.
Ces messieurs du Cercle de Mersenne admirèrent le procédé. Ils poussèrent plus loin le tracé de ($\mathcal{L}$) avec tangentes et points remarquables et lui donnèrent le nom de « Limaçon de Pascal ».



Par la suite, la géométrie analytique s'en empara, mais ceci est une autre histoire…

Les charpentiers et menuisiers abordent, eux, la question autrement. Ils fabriquent un outil en forme de **L** remplissant les conditions suivantes :
MC est la médiatrice de [AB].
Le côté [AE] est parallèle à [MC].

On agit comme suit pour couper en trois angles égaux un angle $\widehat{xOy}$:
Tracer la parallèle (D) à [Ox) à la distance AM. L'outil s'y prête.



Disposer l'outil sur la figure xOy avec A sur (D), B sur [Oy) et O sur [CM].
A' étant la projection orthogonale de A sur [Ox), les trois triangles rectangles OAA', OAM et OBM sont égaux et, par suite, $\widehat{xOA} = \widehat{AOM} = \widehat{MOB} = 1/3\ \widehat{xOy}$.

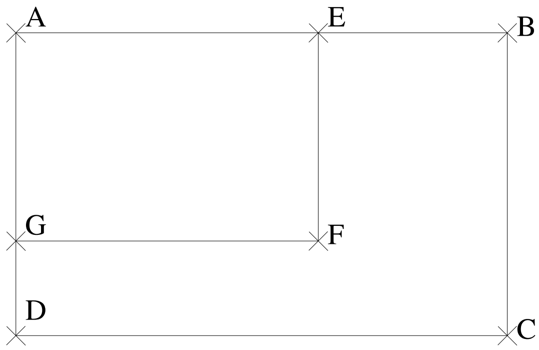
Les professeurs et élèves qui fabriqueront un « **L** » en carton obtiendront des résultats de bonne précision.

NDLR : la brochure APMEP n° 70 « Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle) » est épuisée, mais on la trouve en ligne sur le site de l'APMEP.

Nous avons reçu de Renaud DEHAYE (renaud.dehaye@orange.fr) le texte suivant :

Lecteur fidèle de PLOT depuis le premier numéro, le dernier article d'Henry Plane m'a renvoyé à un exercice que je traite régulièrement dans la formation des professeurs des écoles pour illustrer les passages entre géométrie perceptive, géométrie instrumentée et géométrie déductive.

Le voici :



Reproduire avec précision la figure ci-contre.
ABCD est un rectangle tel que AB = 6,5 cm et AD = 4 cm.
AEFG est un rectangle tel que AE = 4 cm , AG = 2,5 cm,
E est un point de [AB] et G est un point de [AD].
Que peut-on dire des points A, F, C si l'on se place dans :
- la géométrie perceptive ?
- la géométrie instrumentée ?
- la géométrie déductive ?

En fin de maternelle et au début du cycle 2, l'alignement est d'abord perçu à l'aide d'objets (des plots par exemple) placés sur la même « ligne droite » (attention, cercle vicieux !). On s'en sort par un procédé empirique : une visée ou une corde tendue.
Dans la géométrie perceptive, on peut dire que « les points A, F et C semblent alignés ».

Aux cycles 2 et 3, les relations, comme ici l'alignement, doivent être vérifiées à l'aide des instruments habituels de la géométrie. On peut dire ici que les points A, F, C sont alignés car ils se situent tous les trois sur ma règle.

Au cycle 3 et au collège, la géométrie instrumentée doit laisser progressivement la place à la géométrie déductive.

Il y a différents moyens d'attaquer ce problème, je vais utiliser le théorème de Thalès et un raisonnement par l'absurde.

Notons alors :
(P) : les points A, E, B sont alignés dans cet ordre
(Q) : les points A, F, C sont alignés dans cet ordre
(R): les droites (EF) et (BC) sont parallèles
(S) : on a l'égalité $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

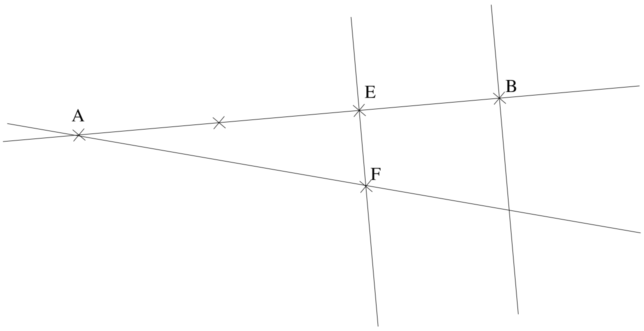
Le théorème de Thalès s'énonce ainsi : (P) et (Q) et (R) impliquent (S).

Or (P) et (R) sont manifestement vraies, c'est donné dans l'énoncé. Cependant, on peut voir que (S) est fausse : $\frac{4}{6{,}5} = \frac{2{,}5}{4}$ équivaut à 4 x 4 = 6,5 x 2,5, ce qui est faux.

Finalement, (Q) est fausse et les points A, F, C ne sont pas alignés.
La réciproque classique du théorème de Thalès est la proposition :
(P) et (Q) et (S) impliquent (R).

L'article d'Henry Plane m'a également inspiré cette autre « réciproque » :
« si l'égalité des deux rapports est vraie, peut-on en déduire que A, F, C sont alignés ? »
Autrement dit : « (P) et (R) et (S) impliquent (Q) » est-elle vraie ?

Supposons (P) : les points A, E, B sont alignés dans cet ordre, on peut fixer par exemple AB = 1,5 x AE.



Supposons (R), en particulier lorsque les deux droites sont perpendiculaires à (AB) et choisissons un point F sur la perpendiculaire passant par E.

Supposons enfin (S), c'est-à-dire $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$.

Question : Le point C est-il nécessairement là où l'on pense ?
Je laisse au lecteur le soin de trouver un point C non aligné avec A et F.

Erratum concernant PLOT 33

Le mieux est l'ennemi du bien... En voulant retravailler la mise en page de l'article « La docimoyenne » de Daniel Reisz de sorte que toutes les fractions soient bien intégrées dans le texte et que la lecture soit agréable à tous, la fine équipe de relecture de PLOT s'est prise les 8 mains dans le tapis de la souris...

Page 13, il fallait lire : « ...la somme classique des deux fractions :
3/5 + 8/15 = 17/15... » (au lieu de 11/20).

Page 14, juste avant **III – Aspects barycentriques**, une partie du texte a disparu rendant énigmatique la conclusion en italique. Voici le texte complet : « *Je propose à votre sagacité la question suivante : la docimoyenne qui se trouve entre α et β peut-elle être située plus précisément entre les moyennes classiques ?* »

Nous présentons toutes nos excuses à l'auteur et nous vous proposons de retrouver cet article sans erreur directement en ligne sur le site de l'APMEP, rubrique PLOT via le sommaire de PLOT 33.