Une trisection d'angle qui peut se traiter en terminale de Lycée

En étudiant le «*Traité des sections coniques* » de Michel. Chasles (publié en 1865), je suis tombé sur une méthode originale de partage d'un angle en trois parties égales. Le texte de Chasles, que l'on trouvera reproduit en fin d'article, utilise une homographie, notion qui n'est pas au programme de lycée. Il y a cependant moyen d' adapter sa méthode aux connaissances d'un élève de terminale scientifique, et je remercie Michel de Cointet de m'avoir aidé à en rédiger une activité pour la classe.

Jean-Pierre Friedelmeyer
Irem de Strasbourg

Énoncé

On donne deux points A et B du cercle trigonométrique (U).
On cherche le ou les poins M de (U) tels que
$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 3(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$, ou encore $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = 2(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})$.

Méthode de résolution (Figure 1**)**

Soit O le centre du cercle (U).
A tout point m de (U), on fait correspondre m' de (U) tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Om'}\right) = 2\left(\overrightarrow{Om},\overrightarrow{OB}\right)$.
La ou les solutions du problème sont données par les points m tels que m = m'.
Traçons les droites (Om) et (Am') et notons X le point d'intersection de ces deux droites. On remarque que le point X coïncide avec m si et seulement si m = m' ; à condition, toutefois d'exclure le cas où m' donc m est en A car, alors, la droite (Am') n'est pas définie.
On est donc conduit à
1.- chercher le lieu (H) du point X lorsque m décrit (U),
2.- déterminer le ou les points d'intersection de (H) et de (U).

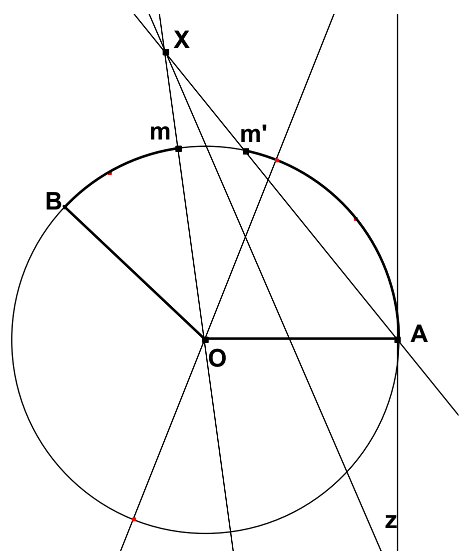

Figure 1

Résolution du problème (Figure 2**)**

1.- Pour simplifier les calculs, en particulier l'écriture des équations des droites (Om) et (Am'), on choisit un repère orthonormal dont les axes sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

Posons $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \varphi$.

On a alors $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \alpha$ et $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$, avec $2\alpha = \varphi$.

a) Posons $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Om}) = t$, avec t $\in [0, 2\pi[$

- Une équation de la droite (Om) est alors x sin t - y cos t = 0.
- Calculons l'angle $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Am'}\right)$ pour écrire l'équation de la droite (Am').

On a :

$$\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Am'}\right)=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Om''}\right)+\left(\overrightarrow{Om''},\overrightarrow{Am'}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{Om},\overrightarrow{OB}\right)+\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{Om},\overrightarrow{Ox}\right)+\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OB}\right)+\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$=\pi-t+k\pi.$$

Une équation de la droite (Am') est donc

x sin t + y cos t = u sin t + v cos t,

où u et v désignent les coordonnées du point A, soit :

u = cos $(\frac{\pi}{4}-\alpha)$

v = sin $(\frac{\pi}{4}-\alpha)$.

b) Les coordonnées de X sont donc solutions du système d'équations :

x sin t - y cos t = 0

x sin t + y cos t = u sin t + v cos t.

- Par élimination de t, on obtient une équation de la courbe décrite par X, en tout ou partie :

2xy –vx –uy = 0 ou encore $y=\dfrac{vx}{2x-u}$.

Les coordonnées de A vérifient ces équations, mais A est à exclure de (H) (voir méthode de résolution).

La courbe est une hyperbole équilatère dont le centre est le milieu du segment [OA] et les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

- En résolvant le système précédent, on obtient des équations paramétriques de (H) :

$$x=\frac{u}{2}+\frac{v}{2\tan t}$$

$$y=\frac{u\tan t}{2}+\frac{v}{2}$$

avec t $\in$ $]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi[$, en tenant compte de la période de la fonction tangente.

Lorsque t parcourt chacun de ces deux intervalles, le point X parcourt chacune des deux branches de l'hyperbole précédente dans son entier.

N.B. On peut vérifier que pour les valeurs de t prises aux extrémités des deux intervalles, les équations paramétriques ne sont pas définies et, par ailleurs, que les droites (Om) et (Am') sont parallèles.

c) une propriété

Une investigation au moyen d'un logiciel de géométrie (ici, cabri géomètre) nous conduit à la conjecture suivante : les droites (Om) et (Am') restent symétriques par rapport à une direction fixe ; autrement dit, les directions des bissectrices des droites (Om) et (Am') restent fixes.

Démontrons cette conjecture.

On sait que le vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{Am'})$ est un vecteur directeur d'une telle direction. Il suffit donc de démontrer que l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Om}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Am'}\right)$ est constant à $k\pi$ près.

D'après les calculs faits précédemment, on peut écrire :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Om}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Am'}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Ox}\right)+\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Om}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Ox}\right)+\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Am'}\right)$$

$$= -2\,(\frac{\pi}{4}-\alpha\,)+\mathrm{t}+\ \pi\ -\mathrm{t}+\mathrm{k}\pi$$

$$= \varphi+\frac{\pi}{2}+k\pi\ .$$

La propriété est démontrée.

2.- Les coordonnées x et y du ou des points M d'intersection de (H) et de (U) sont points solutions du système d'équations

$2xy - vx - uy = 0$
$x^2 + y^2 = 1.$

L'affixe z de M est solution du système

$z^2 - \bar{z}^2 - iv\,(z+\bar{z}) - u\,(z-\bar{z}) - 1 = 0$
$z\bar{z} = 1.$

Et, par conséquent, les affixes des points M sont solutions de l'équation

$z^4 - (u + iv)\, z^3 + (u - iv)\, z - 1 = 0.$

Notons que du paragraphe précédent, il résulte que l'affixe de A est solution de cette équation. on peut donc factoriser le premier membre de cette équation par $z - (u + iv)$.

L'équation s'écrit alors

$(z - (u + iv))\,(z^3 + (u - iv)) = 0.$

(H) et (U) ont donc trois points d'intersection, autres que A : ce sont les points M, N, P, dont les affixes sont les racines cubiques du nombre complexe $-u + iv$, où u et v sont les coordonnées du point A, dont un argument est donc $\alpha\ +\ \frac{3\pi}{4}$.

Autrement dit, ce sont les points M, N et P du cercle trigonométrique dont les affixes ont pour arguments $\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{4}$, $\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}$, où 2α est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

Ce sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

On a bien $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\frac{2\varphi}{3}$, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON})=\frac{2\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}$, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP})=\frac{2\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}$, où φ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et, par conséquent, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=3(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})=3(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OB})=3(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OB})$.

Conclusion

Le problème admet trois solutions. Ce sont les trois points d'intersection, autres que A, du cercle trigonométrique et d'une hyperbole équilatère (H).

Dans un repère orthonormal d'origine O et dont les axes sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, une équation de (H) est $2xy - vx - uy = 0$. Son centre est le milieu du segment [OA] et ses asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

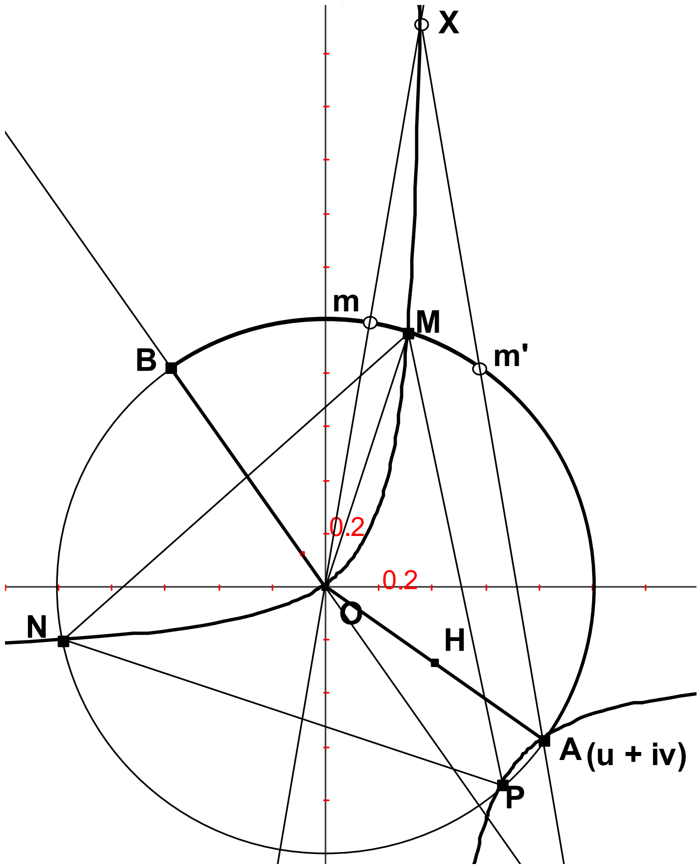

Figure 2

Le texte de Chasles (*Traité des sections coniques*, 1865, § 37, p 36)

37. *Trisection de l'angle.* — On demande de diviser l'angle AOB (*fig.* 19), ou l'arc AB décrit du point O comme centre, en trois parties égales.

Qu'on prenne sur l'arc AB le point m arbitrairement, et le point m' de manière que l'arc Bm' soit double de Am. L'angle AOm est égal à l'angle TBm' que fait la corde Bm' avec la tangente BT. Les deux droites Om, Bm' forment donc, dans leurs positions successives, deux faisceaux homographiques, et leur point d'intersection n décrit une conique qui passe par les extrémités A et B de l'arc à diviser. Il est évident que le point M où cette conique rencontre encore une fois cet arc résout la question, et que l'arc AM sera le tiers de l'arc AB. Car les deux angles AOM, TBM sont égaux; conséquemment l'arc BM est double de l'arc AM, et celui-ci est le tiers de AB.

On reconnaît sans difficulté que la conique, lieu du point n, est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle des deux droites OA, BT et de son supplément.

On sait que ce problème de la trisection de l'angle résolu d'abord par les Grecs, l'a été souvent ensuite, de bien des manières différentes. On peut douter qu'aucune solution soit plus simple et surtout plus élémentaire que la précédente, puisqu'elle dérive immédiatement de la propriété fondamentale relative aux points d'une conique, sans exiger la connaissance d'aucune autre propriété.