Dessiner et colorier des mandalas géométriques
dans des cercles circonscrits aux polygones de 5, 6, 10, 11, 12, 13 et 15 côtés

Compte-rendu de l'atelier M5, animé par Robert VINCENT
le mardi 26 octobre 2004 aux Journées Nationales de l'A.P.M.E.P. à Orléans

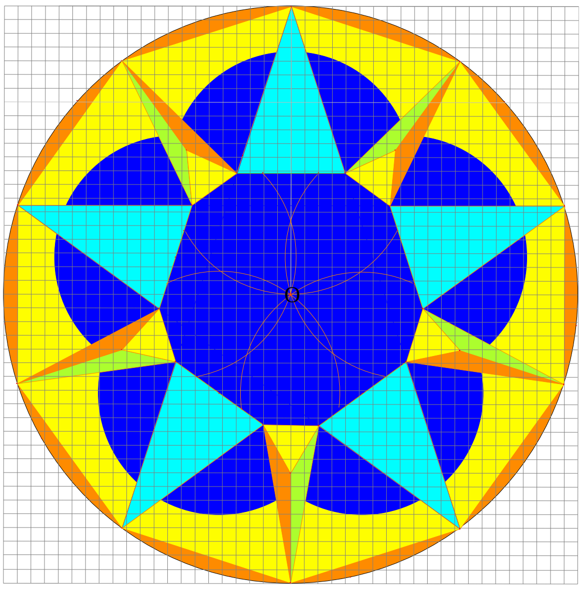
Il s'agit de faire des tracés géométriques simples, accessibles à des élèves d'écoles primaires et de collèges, dessinés sur du papier quadrillé avec utilisation des propriétés de la suite de Fibonacci. C'est une application des Activités géométriques autour des polygones et du nombre d'or de Robert VINCENT, publiées aux Éditions Archimède (2003 et 2004)

Préambule

I Définition d'un mandala

mandala n.m.(mot sanskrit signifiant *cercle*). Dans le bouddhisme et le tantrisme, diagramme géométrique dont les couleurs symboliques, les enceintes concentriques, etc., figurent l'univers et servent de support à la méditation. (Petit Larousse. 1995).

Voici le mandala qui va faire l'objet de notre étude :



II Construction des polygones réguliers

Une nouvelle méthode d'enseignement de la géométrie résulte de mes nombreuses démonstrations dans des classes d'école primaire et de collège. On constate que même les enfants les plus turbulents sont assagis et que tous se découvrent un engouement pour la géométrie.

1. La méthode

- Son origine

Les exigences des élèves pour lesquels l'indication : « Tracez un cercle de rayon quelconque. » suscitait toujours la même question : « Un rayon de combien de carreaux, Monsieur ? » nous ont amenés à utiliser le papier quadrillé dans nos constructions de façon systématique.

- Sa mise en œuvre

a. La suite de Fibonacci

Le point de départ de nos réflexions résulte de la propriété du décagone régulier dont le rapport $\frac{rayon}{\text{c™tŽ}} = \frac{\Phi}{1}$. Dans ce polygone, si le rayon R du cercle est égal à 21 carreaux, le côté du décagone est égal à 13 carreaux. En effet $\frac{21}{13} = 1{,}615 \approx \frac{\Phi}{1}$.

Or, les nombres 13 et 21 utilisés dans les constructions proposées ont été choisis pour leur appartenance à la suite de Fibonacci … 5, 8, 13, 21, 34, …

Cette suite a deux propriétés : i) chaque membre est la somme des deux membres précédents et ii) le quotient de deux membres consécutifs de la suite est sensiblement égal à $\Phi = \frac{1 \quad \sqrt{5}}{2} \quad 1{,}618...$. On vient de voir que $\frac{21}{13} = 1{,}615$, soit Φ à trois millièmes près. De même, $\frac{13}{8} = 1{,}625$, soit Φ à sept millièmes près. L'épaisseur d'une mine de crayon – en général 0,7mm – compense aisément cette approximation.

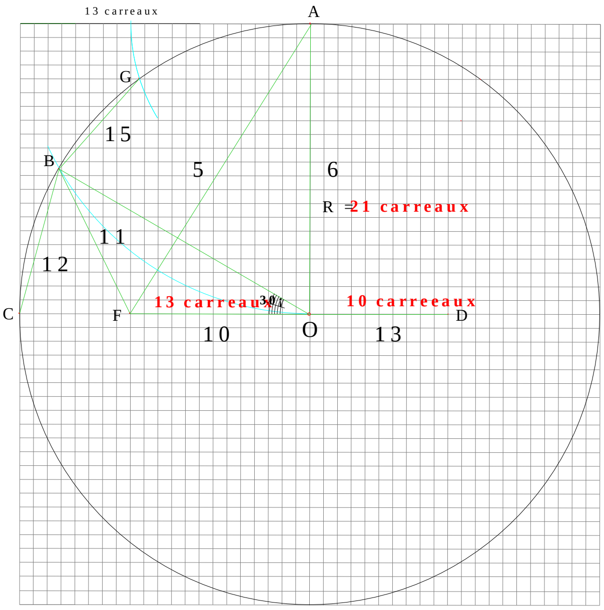
b. La formule d'Al Kaschi

La formule d'Al Kaschi, pour un triangle quelconque ABC, est : $a^2 = \beta^2 + \chi^2 - 2\beta\chi\chi o\sigma A$. Si on applique cette formule à un secteur angulaire d’un polygone régulier quelconque, inscrit dans un cercle de rayon R, on a l’équation : $a^2 = 2P^2(1-\chi o\sigma A)$, où *a* est le côté du polygone régulier, *b* = *c* = R, le rayon du cercle circonscrit, et A l’angle au centre du polygone.

Avec un rayon de 21 unités, on obtient l’égalité : $a^2 = 2 ? (21)^2 ? (1-\chi o\sigma A)$.

- <u>Son application</u>

On en déduit le tracé suivant :



Soit un cercle de centre O, de rayon OA = OC = 21 carreaux. OA et OC sont deux rayons perpendiculaires.

L’arc de centre A, de rayon AO, coupe le cercle en B : $\vee AOB = 60°$ et $\vee BOC = 30°$.

- Sur OC, placer le point F tel que OF = 13 carreaux
- Sur le prolongement de CO, placer le point D tel que OD = 10 carreaux
- L’arc de centre A, de rayon OF = 13 carreaux, coupe le cercle en G : $\vee BOG = \varsigma AOB - \varsigma AO\Gamma = 60° - 36° = 24°$. L’angle au centre d’un pentédécagone est de 24°.

En portant sur le cercle, à partir du point A une corde égale au côté des polygones considérés, on construit simplement, sans calcul, les polygones réguliers suivants :

- **Pentagone** : Porter cinq fois la corde **AF**
- **Hexagone** : Porter six fois la corde **AO = R** = 21 carreaux
- **Décagone** : Porter dix fois la corde **0F** =13 carreaux
- **Hendécagone** : Porter onze fois la corde **BF**
- **Dodécagone** : Porter douze fois la corde **BC**
- **Tridécagone** : Porter treize fois la corde **OD** = 10 carreaux
- **Pentédécagone** (15 côtés) : Porter quinze fois la corde **BG**.

2. Matériel nécessaire

- Feuilles de papier quadrillé (format 24 cm x 32 cm)
- Outils : règle, compas et équerre

3. Connaissances géométriques : niveau école primaire

1. Témoignages d'enseignants

- « Quel plaisir de voir les élèves découvrant l'importance de la précision et du soin à apporter pour réussir la construction et la beauté résultant du coloriage. Même les élèves s'affirmant eux-mêmes « nuls en géométrie » se sont pris au jeu et n'étaient pas peu fiers de leurs chefs-d'œuvre. »
- « Les élèves et les enseignants ont su apprécier l'utilisation d'outils mathématiques <u>concrets</u> (règle et compas, équerre 1/2, corde à nœuds et papier à petits carreaux) et <u>abstraits</u> (Thalès, second degré et suite de Fibonacci .»
- « … intéressant sur le plan pédagogique en mathématiques : … constructions de figures jolies et riches ; chaque figure peut-être point de départ d'un travail en géométrie ; [elle] donne l'occasion d'aborder en géométrie les questions d'approximation et enfin [elle] permet de relier algèbre et géométrie à travers la suite de Fibonacci.»
- …/…

Réalisation d’un mandala géométrique

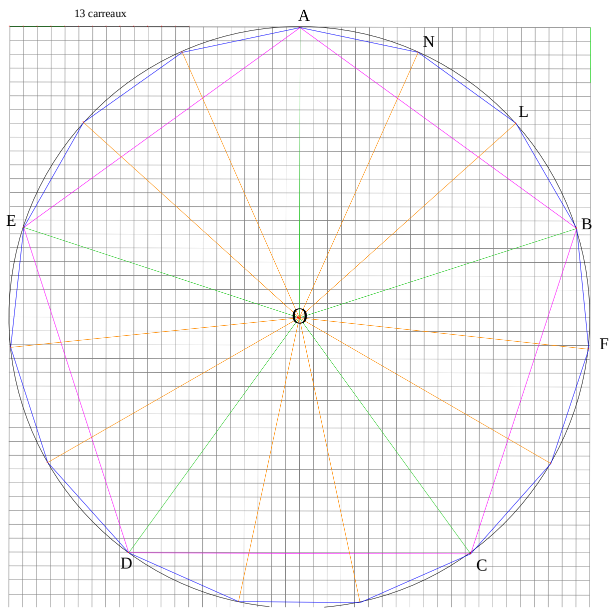
Eu égard au temps imparti pour l’atelier, nous avons privilégié la construction d’un mandala géométrique basé sur le tracé d’un pentagone à partir duquel on obtient un pentédécagone (polygone de 15 côtés) par la trisection des angles des cinq secteurs pentagonaux du pentagone. On trace aussi un décagone.

Nota Bene :

- La trisection d’un angle de 72° et de 54° donne des tracés exacts.
- *L’intersection des trisectrices permet de déterminer cinq triangles équilatéraux égaux, dit de Morley, dans un pentagone régulier. Ceci génère de nombreuses réalisations de mandalas géométriques différents.*[1]

I Construction des triangles de Morley par les trisectrices des angles de 72° et de 54°

Étape 1 : Construction des trisectrices des cinq angles au centre (A = 72°) d’un pentagone

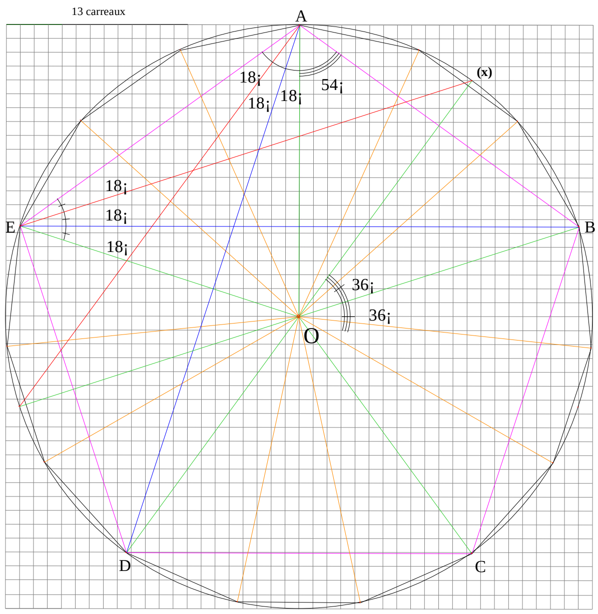


[1] VINCENT, Robert. 2004. Activités géométriques autour des polygones et du nombre d’or. Argenteuil : Éditions Archimède.

- construire un pentédécagone inscrit dans un cercle de centre O $\Rightarrow$ On retrouve le pentagone ABCDE.
- tracer les rayons allant du centre aux quinze sommets de ce pentédécagone
- Ces rayons déterminent des angles de 24° = $\left(\frac{72°}{3}\right)$. Exemple : $\widehat{AON} = \widehat{NOL} = \widehat{LOB} = 24°$.

  [OL] et [ON] sont les deux trisectrices de $\widehat{AOB}$.

Étape 2 : Construction des trisectrices des angles de 54° dans les cinq secteurs pentagonaux du pentagone ABCDE.



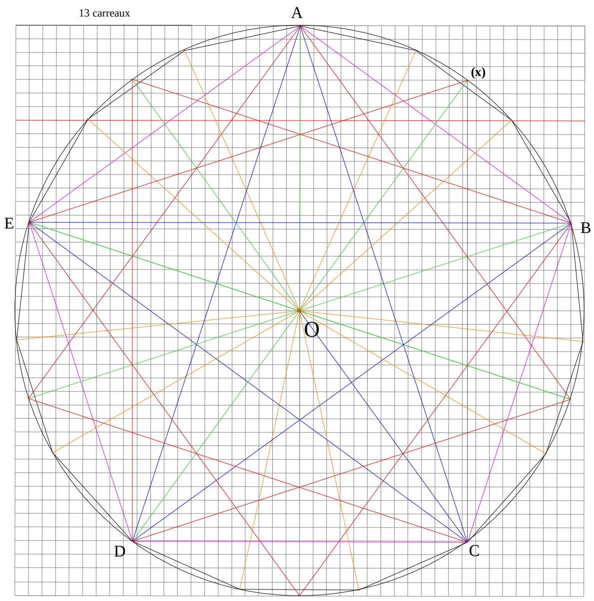
Dans le secteur pentagonal AOE, $\widehat{AEO} = \widehat{EAO} = 54°$.

- $\widehat{AEx}$ est un angle inscrit correspondant à l'angle au centre $\widehat{AOx} = 36°$ $\Rightarrow$ $\widehat{AEx} = 18°$
- Il en est de même pour $\widehat{xEB} = 18°$.
- $\widehat{BEO} = 54° - (18° + 18°) = 18°$

[Ex] et [EB] sont les trisectrices de $\widehat{AEO}$.

Le même raisonnement donnerait les deux trisectrices de $\widehat{EAO}$

Étape 3 : Construction de toutes les trisectrices des angles de 72° et de 54° dans les cinq secteurs pentagonaux

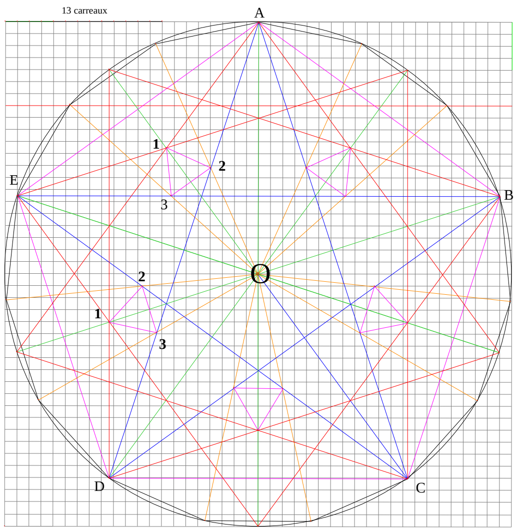


Dans le pentagone régulier :

- tracer le pentagone étoilé
- tracer les bissectrices de chaque secteur pentagonal (par exemple, Ox)
- joindre chaque sommet du pentagone au point d'intersection de la bissectrice des secteurs pentagonaux

On obtient toutes les trisectrices des angles de 72° et de 54° du pentagone ABCDE.

Étape 4 : Tracé des cinq triangles équilatéraux, dit de Morley, dans le pentagone régulier ABCDE

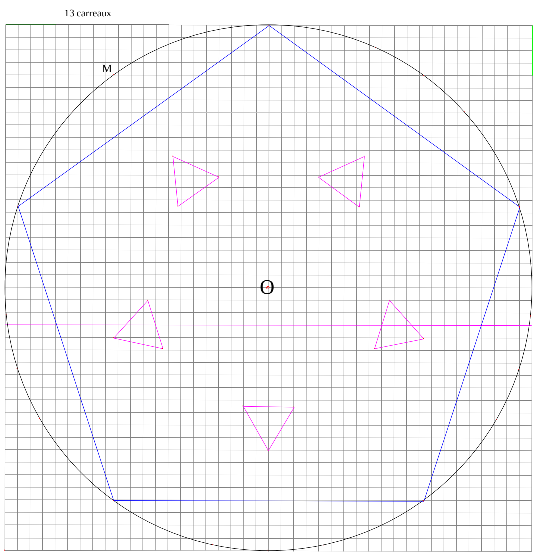


Nota :

- Tous les sommets 1 se trouvent sur la bissectrice de chacun des angles au entre du pentagone ABCDE.
- Les bases 2-3 sont situées sur des parallèles aux côtés du pentagone.

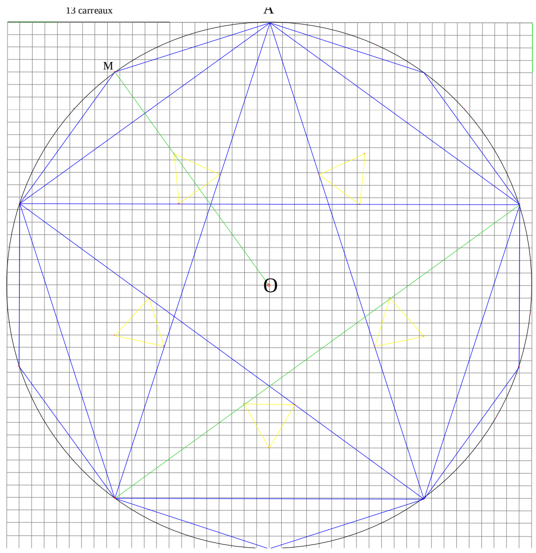
II Mandala réalisé par les participants à l'atelier M5 à Orléans

Point de départ :



Ce tracé correspond au tracé de l'**Étape 4** (ci-dessus) où les lignes de constructions ont été effacées.

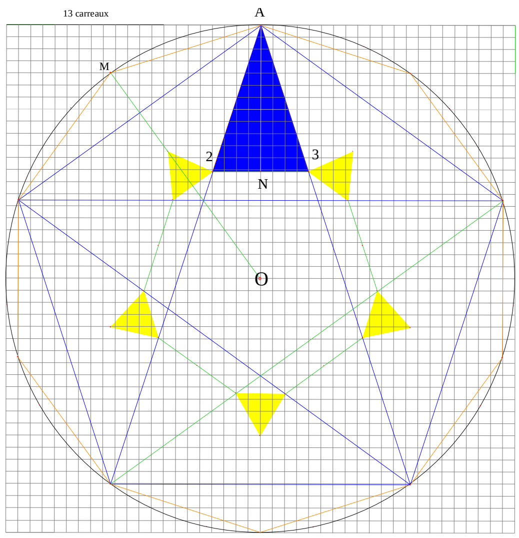
Étape 1 :



- tracer le pentagone étoilé
- déterminer les sommets du décagone

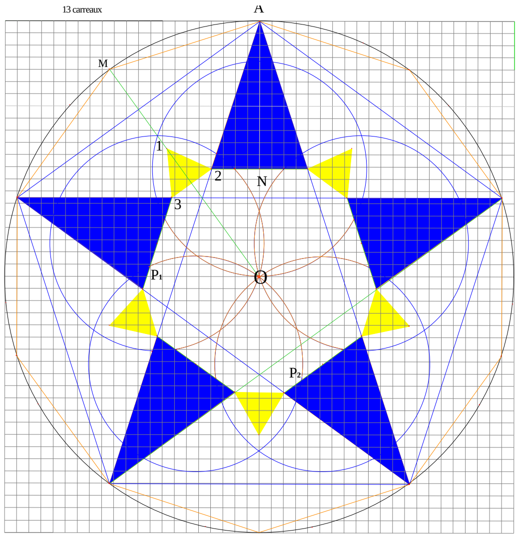
  Les segments passant par le centre O et les points 1 coupent le cercle aux points qui sont des sommets du décagone
- tracer le décagone

Étape 2 :



- joindre les points 2 et 3 ⇒ On obtient les triangles sublimes A – 2 - 3.
- déterminer le point N tel que N soit le milieu du segment [2 - 3]

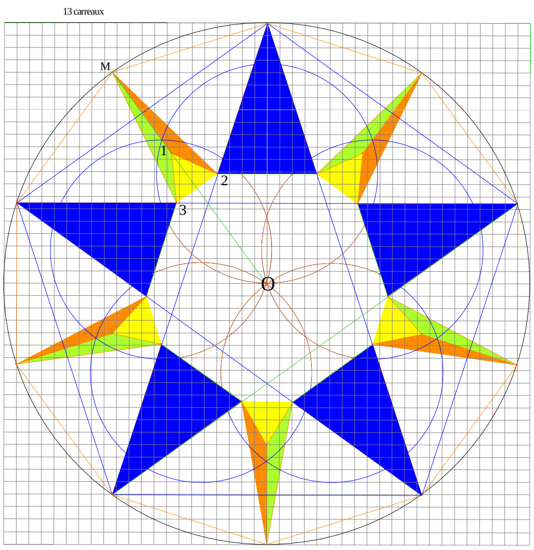
Étape 3 :



- tracer les cercles de centre N, de rayon NO
- placer les points P, points d'intersection de ces cercles avec les segments [2 – 3]

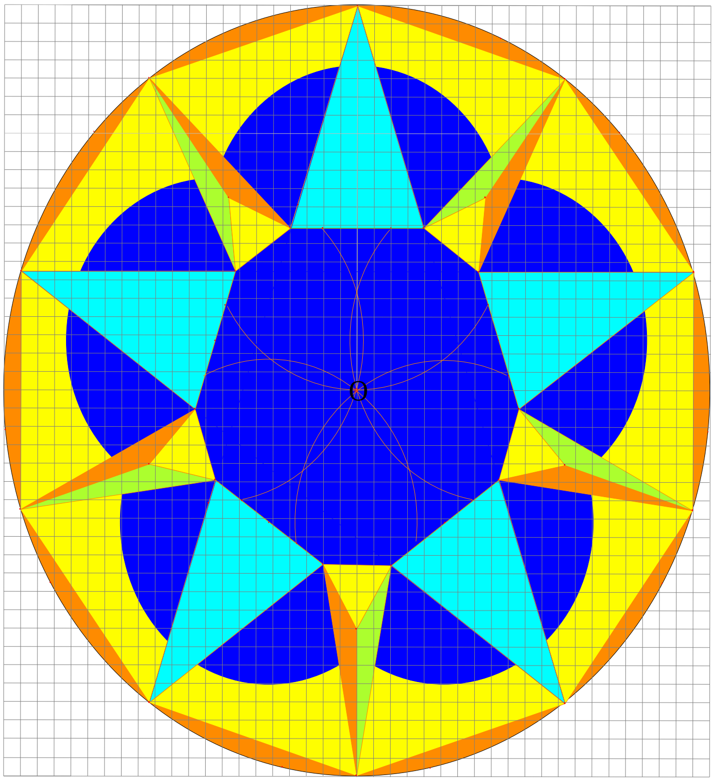
⇒ On obtient les arcs de type P_1OP_2.

Étape 4 :



- tracer les triangles de type « 2 – M – 1 » (en rouge sur la figure)
- tracer les triangles de type « 3 – M - 1 » (en jaune sur la figure

Dernière étape : mandala complet



- colorier selon son goût
- transmettre ses acquis

\- - - - - - - - - - - - -

Bibliographie

VINCENT, Robert. 1999. Géométrie du nombre d'or. Marseille : Chalagam Édition.

VINCENT, Robert. 2001. Nombre d'or et créativité. Marseille : Chalagam Édition.

VINCENT, Robert. 2003. Activités géométriques autour des polygones et du nombre d'or. Tomes I et II. Argenteuil : Éditions Archimède.

VINCENT, Robert. 2004. Activités géométriques autour des polygones et du nombre d'or. Tome III. Argenteuil : Éditions Archimède.