Bac A1, Paris, 1985

Le but de l'exercice est de commenter un extrait de l'article de l'*Encyclopédie Méthodique* écrit par D'ALEMBERT et portant sur les racines d'une équation.

TEXTE

> « C'est une vérité reçue en algèbre, qu'une équation a toujours autant de *racines* qu'il y a d'unités dans la plus haute dimension de l'inconnue ; par exemple, une équation du deuxième degré a deux *racines*, une du troisième en a trois. Au reste, il ne faut pas croire que toutes ces valeurs soient toujours réelles, et toujours positives. On les distingue en vraies, fausses et imaginaires.
>
> *Racine vraie.*Si la valeur de x est positive, c'est-à-dire si x est égale à une quantité positive, par exemple si $x = 2$, la racine est appelée *racine vraie* ou *positive*.
>
> *Racine fausse.* Si la valeur de x est négative, par exemple si x = −5, on dit que la *racine* est *fausse* ou *négative*.
>
> Les noms de *racine vraie* pour désigner une *racine* positive et de *racine fausse* pour désigner une *racine* négative, ne sont plus en usage aujourd'hui. Ce qui a donné lieu à cette ancienne dénomination, c'est que les premiers analystes, qui remarquèrent qu'une équation contenait quelquefois des racines négatives, les rejetèrent comme inutiles pour la solution du problème qui avit conduit à l'équation, et en conséquence les appelèrent fausses ; or c'était une erreur, comme on aura l'occasion de le remarquer plus d'une fois dans cet ouvrage.
>
> Dans une équation quelconque, les racines imaginaires, s'il y en a, sont toujours en nombre pair. Cette proposition assez mal démontrée dans les livres d'algèbre, l'est beaucoup plus exactement dans une dissertation que j'ai imprimée au tome II des *Mém. François de l'Académie de Berlin.* »

On notera que dans le texte précédent :

- est appelée ÉQUATION une équation dans laquelle les deux membres sont des polynômes à coefficients RÉELS ;
- est appelée RACINE IMAGINAIRE une racine complexe non réelle.

QUESTIONS :

1.a. Dégager du texte précédent les énoncés, en langue française contemporaine, des deux théorèmes qui y figurent.

b. Utiliser ces deux théorèmes pour montrer que l'équation d'inconnue z

$$\text{(E) } z^3 + 9z^2 + 27z + 19 = 0$$

a au moins une racine réelle.

2. Montrer que -1 est racine de l'équation (E). Déterminer les autres racines complexes de cette équation (racines que l'on désignera par z_1 et z_2). Quelle relation existe-t-il entre z_1 et z_2 ?

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{u}$ ayant pour affixe 1 et $\overrightarrow{v}$ pour affixe i, on considère le point M image de $z = x + yi$.

Déterminer l'ensemble H des points M tels que $Z = (z - z_1)(z - z_2)$ soit réel. Représenter cet ensemble.