Bac A1, Créteil-Paris-Versailles, juin 1987

Exercice 2 (6 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la probabilité de faire apparaître au moins un 6 lors de lancers successifs d'un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le résultat obtenu permet d'éclairer une phrase de Pascal, extraite d'une lettre à Fermat datée du 29 juillet 1654 :
« Si on entreprend de faire 6 avec un dé, il y a avantage à l'entreprendre en 4 comme de 671 à 625. »
(Publication faite en 1679 dans les Varia Opera mathematica de Fermat)
On lance un dé deux fois de suite. On gagne si on fait apparaître au moins un 6.
a. Déterminer le nombre total de résultats distincts qu'on peut obtenir.
b. Déterminer le nombre de résultats qui ne font jamais apparaître le 6.
c. En déduire le nombre de résultats comportant au moins un 6.
d. Calculer le rapport R du nombre de cas gagnants au nombre de cas perdants (on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible). Calculer la probabilité P de gagner.

2. Reprendre les questions a., b., c. et d. lorsqu'on lance le dé une seule fois, trois fois, quatre fois de suite. On indiquera les résultats dans le tableau suivant qui sera recopié et complété :

Nombre de lancers	1	2	3	4
Nombre total de cas				
Nombre total de cas perdants				
Nombre total de cas gagnants				
Rapport R				
Probabilité de gagner P				

3. Quel est le nombre minimum de lancers tel que $P > \frac{1}{2}$?
4. Comment rédigeriez-vous, en quelques lignes, la phrase de Pascal dans le langage actuel ?

Bac A1, La Réunion, juin 1987.

Extrait de « L'homme devant la science », de Lecomte de Noüy (1946)

Chacun sait que si l'on agite ensemble une poudre noire et une poudre blanche, on obtient finalement un mélange à peu près uniforme qui produira sur notre œil l'impression d'une poudre grise.
Ce résultat obtenu, l'expérience nous enseigne que nous aurons beau prolonger le brassage indéfiniment, nous aurons toujours une poudre grise de même apparence : à notre échelle d'observation le phénomène ne se modifie donc plus, bien que les grains constituant le mélange occupent chaque fois des positions différentes. Le mélange des deux poudres constitue donc, à notre échelle, un phénomène irréversible dont nous allons essayer de pénétrer le mécanisme.
Dans ce but, envisageons une poudre composée seulement de 10 grains blancs et de 10 grains noirs ne différant entre eux que par leur coloration superficielle.Ces grains sont placés au début de l'expérience dans un tube de verre de diamètre à peine supérieur à celui des grains, afin qu'ils soient tous superposés en une seule colonne. Les 10 grains noirs occupent la partie inférieure du tube et les 10 grains blanc la partie inférieure. À notre échelle d'observation, nous dirons que dans cet état initial, le tube est moitié blanc et moitié noir.
Notre tube, fermé à un bout, communique par l'autre avec une sphère creuse en verre. En retournant l'appareil, les grains tombent pêle-mêle dans cette boule et, en le redressant, ils reprennent place les uns au-dessus des autres dans le tube. Si nous faisons cette expérience en agitant l'appareil et en le replaçant dans sa position primitive, les grains auront certainement repris une autre position. Il est extrêmement peu probable que tous les grains noirs se retrouvent ensemble comme ils étaient au début. À distance convenable, suffisante pour que l'œil ne distingue pas individuellement les grains blancs des grains noirs, le tube apparaîtra gris dans toute sa longueur.
Agitons à nouveau l'appareil, puis retournons-le. Nous obtiendrons encore une nouvelle disposition des grains.Mais à l'échelle où nous observons le phénomène, le tube demeure gris : le phénomène ne s'est pas modifié et l'observation nous montre qu'il persiste même si nous prolongeons longtemps ce genre d'expérience.

Les grains sont placé somme au début de l'expérience : les 10 noirs occupent la moitié inférieure du tube et les 10 blancs la moitiés supérieure. On retourne l'appareil, puis on le redresse après avoir agité les grains dans la sphère en verre. On admettra que toutes les répartitions possibles des grains dans le tube sont équiprobables.

1.a. Calculer la probabilité pour que chacune des extrémités du tube soit occupée par un grain blanc.
b. Calculer la probabilité pour que les deux grains qui occupent le fond du tube soient de la même couleur.
2. On désigne par P_{10}, P_9, P_8, P_7, P_6, P_5 les probabilités pour que la moitié inférieure du tube contienne respectivement 10, 9, 8, 7, 6 ou 5 grains noirs exactement.
a. Calculer les valeurs exactes des quotients : $\dfrac{P_9}{P_{10}}, \dfrac{P_8}{P_{10}}, \dfrac{P_7}{P_{10}}, \dfrac{P_6}{P_{10}}, \dfrac{P_5}{P_{10}}$.
b. Dites en quelques lignes si les résultats trouvés au 2.a. vous semblent en accord avec le texte de Lecomte de Noüy.

Bac A1, Lille, Septembre 1985

Cet exercice est inspiré par la question du prince de Toscane à Galilée.

On dispose de trois dés bien équilibrés, les faces de chaque dé étant numérotés de 1 à 6. On lance les trois dés, on lit les trois nombres a, b, c apparaissant sur les faces supérieures et on calcule la somme $S = a + b + c$.

Le prince de Toscane avait observé que la somme 10 était obtenue plus souvent que la somme 9, alors que ces deux sommes se décomposent exactement de 6 manières, par exemple :

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4$$
$$9 = 2 + 3 + 4 = 2 + 2 + 5 = 3 + 3 + 3$$

Que pensez-vous de cette observation ? Justifiez votre réponse. On pourra

1. Calculer le nombre de triplets (a, b, c) possibles.
2. Calculer le nombre de triplets pour lesquels $S = 9$; $S = 10$.

Bac A1, Paris, Septembre 1985

Cet exercice a pour objet le commentaire d'un texte du mathématicien français Émile BOREL (1871 – 1956), extrait de *Probabilité et certitude*, collection « Que sais-je ? », PUF.

« Une première difficulté qu'a résolue PASCAL, dans sa correspondance avec le chevalier DE MÉRÉ, est relative au dénombrement exact des cas. Il s'agissait du jeu de passe-dix, qui se joue avec trois dés ; l'un des joueurs parie que le total des points sera supérieur à 10 et l'autre qu'il sera inférieur ou égal à 10 ; et l'on voit aisément que les chances des deux joueurs sont égales. Mais la difficulté était la suivante : un dénombrement patient avait montré au chevalier DE MÉRÉ que le joueur qui parie pour passe-dix gagne plus souvent avec 11 points qu'avec 12 points ; or, objectait MÉRÉ, on peut obtenir 11 points de six manières différentes (6-4-1 ; 6-3-2 ; 5-5-1 ; 5-4-2 ; 5-3-3 ; 4-4- ») et on peut également obtenir 12 points de six manières différentes (6-5-1 ; 6-4-2 ; 6-3-3 ; 5-2-2 ; 5-4-3 ; 4-4-4) ? La réponse de PASCAL est fort simple : ... »

Questions.

Dans un dé cubique usuel les faces sont numérotées de 1 à 6. La face qui porte 1 est opposée à la face qui porte 6. Il en est de même des faces qui portent 2 et 5, 3 et 4. Lors d'un lancer, la marque est le nombre porté par la face supérieure du dé ; la face opposée sera appelée la face cachée.
Dans ce qui suit, on considère trois dés cubiques usuels non pipés, un dé rouge, un dé vert et un dé jaune. Le résultat d'un lancer simultané de ces trois dés sera noté (r, v, j), r étant la marque du dé rouge, v la marque du dé vert et j la marque du dé jaune. Ainsi (6, 4, 2) sera le résultat d'un lancer dans lequel le dé rouge sera marqué 6, le dé vert 4 et le dé jaune 2.
1. Dénombrer :
   a) Les résultats possibles des lancers simultanés des trois dés ;
   b) Les résultats pour lesquels la somme des marques est 11 ;
   c) Les résultats pour lesquels la somme des marques est 12.
2. Quelle est la somme des marques portés par deux faces opposés d'un dé usuels ? Après un lancer de trois dés, on note s la somme des marques et c la somme des nombres portés par les faces cachées. Calculer $s + c$ et justifier l'affirmation faite dans la ligne 4 : « *on voit aisément que les chances des deux joueurs sont égales* ».
3. Que dénombre le chevalier DE MÉRÉ lorsqu'il indique qu'on peut obtenir 11 et 12 de six manières différentes (lignes 7-9 du texte) ? Utiliser 1.*b* et 1.*c* pour expliquer l'erreur qu'il commet.

Bac A1, Groupe I, Juin 1985

L'objet de cet exercice est d'étudier un texte extrait du *Traité des combinaisons* (1708) de Pierre-Rémond de Montmort. Dans ce texte, il est fait allusion au « Jeu d'ombre », jeu qui se joue avec un jeu traditionnel de 52 cartes auquel on a retiré les 4 dix, les 4 neuf et les 4 huit ; autrement dit, il reste 40 cartes, chaque carte étant caractérisée par sa couleur (pique, cœur, trèfle, carreau) et sa valeur (as, roi, dame, valet, etc.).

PREMIÈRE PARTIE
(n'utilisant pas le texte de Montmort)

On tire successivement et sans remise quatre cartes du paquet utilisé pour le « jeu d'ombre ». Quelles sont :

a) la probabilité p de tirer dans l'ordre les as de cœur, de carreau, de trèfle et de pique ?
b) La probabilité q de tirer les quatre as ?
c) La probabilité r de tirer quatre cartes de même valeur ?

On donnera d'abord les résultats sous forme de fractions irréductibles, puis sous forme décimale approchée comportant deux chiffres significatifs.

DEUXIÈME PARTIE
Texte de Montmort

Pour me faire plus facilement entendre, je me sers d'un exemple, soit supposé que l'on cherche combien il y a à parier que tirant 4 cartes au hasard dans 40, par exemple dans un « Jeu d'ombre », je tirerai les 4 as. Il est évident qu'il m'est permis de supposer que ces 4 as se trouveront dans les 4 cartes du dessus ; puisque j'ai la liberté de les choisir partout où je voudrai. Or il est clair que nommant m *le nombre de tous les arrangements possibles de 40 cartes,j'aurai* $\frac{1}{\mathrm{m}}\times\frac{\mathrm{m}}{40}$ *pour tirer l'as de cœur, puisque cet as* étant à la première place, les 39 autres cartes peuvent avoir tous les arrangements imaginables ; et de même j'aurai $\frac{1}{\mathrm{m}}\times\frac{\mathrm{m}}{40.39}=\frac{1}{40.39}$ *pour que l'as de cœur se trouvant à la première place, l'as de carreau soit à la seconde, puisque, l'as de cœur étant à la première, et l'as de carreau à la seconde, les 38 autres cartes peuvent être arrangées diversement en autant de façons qu'exprime d'unités un nombre composé de 38 produits des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.*

NOTA : on notera que l'expression « combien il y a à parier que » est synonyme de l'expression moderne « probabilité que ».

a) On bat le jeu et on tire successivement les quatre cartes du dessus. Montrer que la probabilité q_1 de tirer ainsi les quatre as est égale à la probabilité q calculée en 1°)*b*). Citer la phrase du texte de Montmort par laquelle ce dernier entend justifier l'égalité $q_1 = q$.
b) On tire cette fois les deux cartes du dessus. Quelle est la probabilité de tirer l'as de cœur puis l'as de carreau ? P.-R. De Montmort obtient cette probabilité sous la forme $\frac{1}{m}\times\frac{m}{40.39}$; quel raisonnement fait-il, et, en particulier, quelle interprétation donne-t-il de $\frac{m}{40.39}$?