Les tribulations d'un barycentre sur une droite AB

G. Mison

Essai de mise en situation de recherche en Seconde

Nous sommes en octobre dans une classe de Seconde. En début d'heure, le problème suivant est soumis aux élèves :

> Deux points A et B sont respectivement affectés des coefficients 2 et b . Suivant les valeurs de b , étudier l'existence et la position du barycentre G de (A,2) et (B,b).

1. Quelques réactions immédiates (conséquences du cours précédent)

— $b \neq -2$

— G est un point de la droite AB

— $\vec{AG} = \frac{b}{b+2}\vec{AB}$.

2. Je demande alors aux élèves, seuls ou par groupe de deux, d'écrire toutes les questions qui leur viennent à l'esprit. Après 15 minutes de recherche, on fait oralement le tour des questions que les élèves se sont posées !

On peut les classer en trois catégories :

Type 1 : un exemple "Où est G si $b>0$?"

Type 2 : un exemple "Pour quelles valeurs de b, G est-il un point du segment [AB] ?"

Type 3 : un exemple "Que se passe-t-il lorsque b se rapproche de -2 ?"

Les questions des deux premiers types sont de loin les plus nombreuses. Un seul groupe s'est posé des questions du type 3. On s'occupe d'abord des questions 1 et 2.

3. Après discussion, il est décidé que les questions du type 1 ne sont pas très intéressantes.

Pourquoi choisir $b=0$ plutôt que $b=19$... ?

Comment savoir si l'on a fait intervenir toutes les valeurs intéressantes pour b ?

On décide alors de s'intéresser uniquement aux questions de type 2. On pourra répondre ensuite aux questions de type 1.

4. On écrit au tableau les questions dictées par les élèves.

[1] Pour quelles valeurs de b , G est-il le milieu de [AB] ?
[2] Pour quelles valeurs de b , G est-il un point du segment [AB] ?
[3] Pour quelles valeurs de b , G est-il hors du segment [AB] ?
[4] Pour quelles valeurs de b , G est-il à droite de A ?
[5] Pour quelles valeurs de b , G est-il à gauche de B ?
[6] Pour quelles valeurs de b , G est-il en A ?
[7] Pour quelles valeurs de b , G est-il en B ?
[8] Pour quelles valeurs de b , G est-il le symétrique de B par rapport à A ?

Une dizaine de questions du genre de la question [8] (une position précise de G) sont posées. Elles se ressemblent toutes et on ne les écrit pas.

5. Je demande alors ce qu'il faudrait faire pour répondre à chacune des questions écrites au tableau.

Par exemple , pour [1], on écrit : résoudre l'équation $\frac{b}{2+b} = \frac{1}{2}$

Pour [2], résoudre les deux inéquations : $0 \leqslant \frac{b}{2+b} \leqslant 1$

Pour [3], on n'écrit rien, car la réponse à [2] donnera la réponse à [3]...

6. On commence alors la résolution du problème.

a) Les élèves pensent qu'il faut d'abord résoudre les équations, ce qui est plus facile que de résoudre des inéquations.

Conduisent à des équations les questions [1], [6], [7], [8].

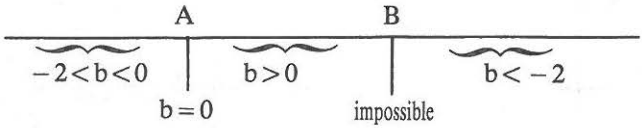
Pour [1], les élèves trouvent $b=2$.
Pour [6], on trouve $b=0$.
Pour [7], c'est impossible .
Pour [8], on trouve $b=-1$.

b) C'est l'occasion d'apprendre à résoudre des inéquations du type

$$\frac{b}{2+b} < 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{2+b} < 1$$

- Etudier le signe de b , de $2+b$, de $\frac{b}{2+b}$ (tableau).
- Etudier le signe de $\frac{b}{2+b} - 1$.

A la fin de cette étude, on est conduit à la conclusion :



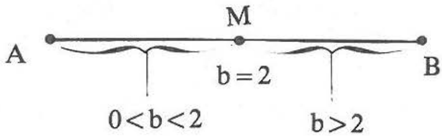
7. Reprenons alors les questions du type 3.
On écrit au tableau les questions dictées par les élèves :
[1] Que se passe-t-il si b devient très grand ?
[2] Que se passe-t-il si b devient très petit ?
[3] Que se passe-t-il si b est voisin de (-2) ?

Question [1] :

On calcule $\frac{b}{b+2}$ pour $b=10$; $b=100$; $b=1000$; ... ; $b=10^6$; ...
On trouve successivement $\frac{10}{12}$; $\frac{100}{102}$; $\frac{1000}{1002}$; ... dont on donne des valeurs approchées à l'aide d'une calculatrice.

Les élèves montrent d'abord que $\frac{b}{b+2}$ est positif, que le numérateur reste inférieur au dénominateur, que lorsque b augmente, la différence 2 paraît "de plus en plus petite" par rapport à b, donc $\frac{b}{b+2}$ se "rapproche de 1" tout en restant inférieur à 1. Ainsi, sur le segment [AB], G se rapproche de B, à gauche de B, sans atteindre B...

Si b augmente de 0 à 2, G décrit [AM] (M : milieu de [AB]) et si b décrit $[2;+\infty[$, G décrit le segment [M,B[... sans atteindre B.



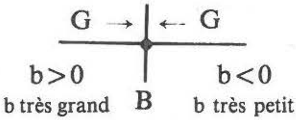
Question [2] :

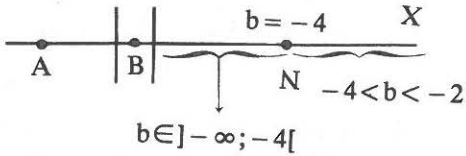
On calcule $\frac{b}{b+2}$ pour $b=-10$; $b=-100$; $b=-1000$; ... ; $b=-10^6$; ... On trouve :

$$\frac{-10}{-8} \; ; \; \frac{-100}{-98} \; ; \; \frac{-1000}{-998} \; ; \ldots$$

Ces rationnels sont encore positifs, mais le numérateur est supérieur (en valeur absolue) au dénominateur, donc $\frac{b}{b+2}$ est supérieur à 1 et "se rapproche" de 1 lorsque b devient "de plus en plus petit". Le point G se "rapproche de B" à droite de B, sans atteindre B.

On a remarqué que, pour $b = -4$, G est en N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB}$. Lorsque b diminue à partir de (-4), alors G décrit le segment [NB[, sans atteindre B...





Question [3] :

On remarque d'abord que, pour b , il y a "deux façons de se rapprocher" de (-2) :

"à gauche" (par valeurs inférieures) : -3 ; $-2{,}5$; $-2{,}1$; $-2{,}01$; $-2{,}001$;...
"à droite" (par valeurs supérieures) : -1 ; $-1{,}5$; $-1{,}9$; $-1{,}99$; $-1{,}999$;...

On calcule chaque fois : $\dfrac{b}{2+b}$.

b	-3	$-2{,}5$	$-2{,}1$	$-2{,}01$	$-2{,}001$	-2	$-1{,}999$	$-1{,}99$	$-1{,}9$	$-1{,}5$	-1
$\dfrac{b}{2+b}$	3	5	21	201	2001		-1999	-199	-19	-3	-1

(I) (II)

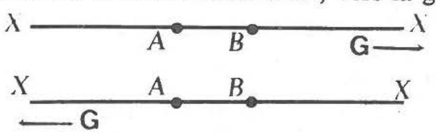
Dans la *situation I*, b et $2+b$ sont négatifs ; $\dfrac{b}{2+b}$ est positif.

Le numérateur (en valeur absolue) est "voisin de 2" ; quant au dénominateur il devient (en valeur absolue) de plus en plus petit.

$\dfrac{b}{2+b}$ est donc un rationnel de plus en plus grand.

G décrit la demi-droite BX, vers la droite... et de plus en plus vite...

Dans la *situation II*, $\dfrac{b}{2+b}$ est négatif et de plus en plus grand en valeur absolue. G décrit la demi-droite AX′, vers la gauche.



8. Sollicités par le professeur, les dessinateurs de la classe préparent une bande dessinée avec un point G qui se promène sur la droite AB. Ce "point G" a des jambes et court de plus en plus vite ou de plus en plus lentement, avec quelque problème de représentation lorsque "b franchira la valeur (-2)".