APMEP
Groupe “Problématiques Lycée”

Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au Lycée

Tome 1
En référence privilégiée à des contenus

Brochure n° 150 - N° ISBN : 2-912846-26-9

APMEP

Présentation

Jean-Paul Bardoulat
Président de l'APMEP

S'il fallait une preuve de la vitalité de l'APMEP, de sa volonté et de sa capacité à mener à bien une réflexion de fond sur l'évolution de l'enseignement des mathématiques, cette brochure en serait une. Au début des années 80, un groupe de l'APMEP avait produit deux documents: « Mathématiques au collège. Pour un renouvellement : dix problématiques » (supplément n°1 au bulletin n° 345, octobre 84) et une plaquette portant sensiblement ce même titre en janvier 85. Ces travaux ont influencé les programmes du collège des années 90 et ont contribué à l'évolution des pratiques pédagogiques.

Poursuivre ce travail pour le lycée relevait du défi. Une équipe, constituée et animée par Régis Gras, déjà membre du groupe collège, l'a relevé, tout en intégrant la réflexion, les travaux et les expérimentations menés par l'autre groupe dont il était responsable, « Prospective bac ». Le supplément au bulletin n° 401 de décembre 1995, « Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle » et quelques articles du bulletin vert rendaient compte de l'état d'avancement de la brochure présente.

Cette brochure montre à la fois que les grandes classes de problèmes au lycée sont les mêmes qu'au collège et l'intérêt qu'il y a d'aborder les programmes par les problèmes. Un enseignement des mathématiques qui privilégie les démarches et les activités introduit davantage de cohérence entre les contenus et les méthodes, donne plus de sens aux concepts étudiés et favorise le développement des compétences visées. La modélisation et la formalisation y deviennent des activités naturelles, incontournables. Les mathématiques n'apparaissent plus alors seulement comme de simples outils mais comme une discipline contribuant à la structuration de la pensée car les notions à enseigner répondent à des questions « qui posent problème » au lieu d'être des injonctions de programmes . C'est ce que les auteurs de cet ouvrage ont essayé de faire avec succès.

Qu'il me soit permis ici de les remercier vivement pour leurs efforts, leur persévérance, leur détermination et leur talent. Ce document devrait contribuer efficacement à l'évolution de l'enseignement des mathématiques, à une meilleure formation des lycéens, à l'amélioration de l'image de notre discipline et au rayonnement de l'APMEP.

SOMMAIRE

LE GROUPE « PROBLÉMATIQUES LYCÉES » de l'A.P.M.E.P.

Animé par Régis Gras

Avec : Philippe Bardy
Bernard Parzysz
Michèle Pécal
Jean-Pierre Richeton

Avec la participation de :
Marc Bailleul, Henri Bareil, Elisabeth Busser, Michèle Fabregas-Bechler, Annie Larher, Michel Magnenet, Daniel Vagost, Christiane Zehren.

Remerciements à :
Michel Bovani, Jacqueline Croguennec, Marie-Agnès Egret, Lise Heilbronner, Robert Rocher, *pour leur relecture attentive et leurs remarques constructives.*

Jean Barbier
pour sa patience à satisfaire nos exigences d'auteurs, sa mise en page soignée et la qualité de ses graphiques.

Préface

par Jean-Pierre Kahane[1]

La réflexion sur l'enseignement des mathématiques se mène de toutes parts. Ce peut être à partir de la classe, des difficultés des professeurs et des élèves; ou de la participation au baccalauréat, aux examens et aux concours; ou des activités périscolaires, des clubs, des rallyes, des compétitions, de toutes les manifestations d'animation mathématique; ou du rôle et de l'évolution des sciences mathématiques dans l'ensemble des sciences et de la société.. Ce peut être le fait des enseignants, des élèves et de leurs parents, des inspecteurs d'académie et des inspecteurs pédagogiques régionaux, de l'Inspection Générale, du Conseil National des Programmes et de ses Groupes d'Experts et commissions, comme de la commission officielle, créée à l'initiative des associations représentatives des mathématiciens et professeurs de mathématiques, qui a pour objet de préparer des propositions pour le long terme et qui a publié en 2002 ses premiers rapports. Cette réflexion se mène depuis longtemps dans les IREM et actuellement dans les IUFM, et les éditeurs y ont leur part. Reste que les associations professionnelles ont un rôle majeur dans l'élaboration et la fourniture de documents à tous les niveaux des mathématiques et de leur enseignement.

Voici donc une initiative de l'APMEP. Après "Problématiques collèges", qui date de 1985, "Problématiques lycées". Il s'agit de problèmes, et de réflexion sur les problèmes.

Les problèmes ont une longue tradition en mathématiques. Georges Polya considérait les Eléments d'Euclide comme une collection de problèmes (une succession d'énoncés et de solutions). Lui-même, avec Gabor Szegö, a produit, sous le titre Exercices d'analyse, une collection graduée de problèmes qui était sans doute, à l'époque, la meilleure introduction à l'analyse mathématique, et qui reste de grand intérêt. Ses ouvrages didactiques, qui méritent d'être revisités, tournent autour de la résolution de problèmes. Inutile d'insister sur le rôle des problèmes ouverts dans la recherche mathématique.

Dans cet ouvrage il s'agit de problèmes à l'intention et à la portée des élèves. Cela ne veut pas dire que ce sont des problèmes sans intérêt. Certains sont très stimulants, même pour les professeurs. On trouvera d'excellents problèmes d'arithmétique et de géométrie, des exercices de mise en route pour des notions de

---

[1] Jean Pierre Kahane : Délégué de la section Mathématiques de l'Académie des Sciences ; Président de la **C**ommission de **R**éflexion sur l'**E**nseignement des **M**athématiques.

calcul, d'estimations, de probabilités et de statistiques, des textes écrits en utilisant les symboles mathématiques et d'autres en langue naturelle, des articles de journaux ou des publicités à critiquer, et bien d'autres choses intéressantes et savoureuses. Les auteurs ont beaucoup travaillé, ils se sont sûrement beaucoup amusé aussi. On aurait envie de participer avec eux au choix des sujets.

A fortiori le lecteur éprouvera le désir de trouver des solutions autres que celles proposées par les auteurs. Cela va dans le sens qu'ils impriment à ce recueil: non pas "problème et solution", mais "problème et solutions". Non pas une méthode, mais plusieurs. Sur chaque sujet, thème et variations.

Les présentations et commentaires occupent une grande place, et correspondent au titre de "problématiques". Leur rédaction s'inspire des méthodes et du style de la didactique mathématique contemporaine. Selon le goût du lecteur il est possible de commencer ou de terminer par eux. Ils apportent à l'ouvrage, de manière explicite, la composante de réflexion sur l'enseignement des mathématiques que j'évoquais au départ.

La lecture et la consultation sont facilitées par la répartition en grands chapitres qui portent sur les sujets suivants: repérage, configurations et mesures, dynamique des notions élémentaires, mesure et approximation, dénombrements et statistique, procédés et algorithmes, changements de registres, critiques de textes, modèles, conjectures, réfutations et preuves. Les titres des chapitres sont parfois plus explicites, parfois moins. Naturellement, toutes ces rubriques communiquent entre elles, et on pourrait imaginer d'autres classements.

On peut aussi imaginer d'autres développements, une poursuite de cette problématique vers d'autres champs: les notions et les questions venant d'autres disciplines, le traitement des données tel qu'il se présente réellement en statistique, l'explicitation des algorithmes dans l'esprit de l'informatique, les mathématiques discrètes qui font une entrée dans l'enseignement. Mais cela nécessite une maturation. L'enseignement des mathématiques ne peut progresser et se renouveler que dans une vision d'avenir solidement nourrie de l'expérience acquise par des générations de professeurs et d'élèves.

Ainsi cet ouvrage appelle le lecteur à l'utiliser, à le prolonger, à le dépasser. C'est un appel à l'air du large, en même temps qu'un bon instrument pour le pilotage de la classe. Une fois de plus, l'APMEP témoigne de son importance pour la bonne marche et l'avenir de notre enseignement mathématique.

UNE APPROCHE DES CONTENUS D'ENSEIGNEMENT DU LYCÉE PAR DES PROBLÉMATIQUES

Avant propos…

Que propose ici le groupe "Problématiques Lycée" ?

… le fruit d'un travail commencé il y a une dizaine d'années, faisant suite à une réflexion relative aux programmes du 1er cycle et à leur enseignement, menée de façon analogue, dans le même cadre de l'A.P.M.E.P., au cours des années 80. Cette réflexion était restée cependant d'ambition plus modeste quant à la production de textes.[2] Le travail effectué dans ce groupe Lycée s'est renforcé des réflexions, travaux et expérimentations en œuvre dans le groupe ***"Prospective Bac"*** *qui vise lui-même un renouvellement du contenu et des modalités de l'examen. En effet, on ne peut isoler enseignement et évaluation, tant l'influence de celle-ci sur le travail des élèves, sur les méthodes pédagogiques et sur les choix didactiques est fondamentale[3]. Il apparaît ainsi clairement, mais de façon regrettable, qu'en réalité l'état actuel des connaissances acquises par la majorité des élèves à la fin du 2ème cycle se réduit le plus souvent à ce qui leur est justement conseillé dans la préparation du bac et renforcé, pour l'essentiel, par les problèmes qui y sont donnés. La stratégie la plus payante pour l'élève, de façon à peine caricaturale, se ramène à : « par sécurité, algorithmisons nos connaissances, pour nous assurer la "moyenne", ne vous écartons pas du chemin qui nous conduit pas à pas à la solution, segmentons notre savoir comme le sont les questions du problème, ne perdons pas de temps à comprendre ses relations avec les autres disciplines, à changer de cadre lorsque ce n'est pas demandé, etc. » Il est hors de question de condamner en cela les enseignants qui, pour des raisons déontologiques, doivent assurer, à travers la réussite maximale aux examens, un*

[2] " Mathématiques au collège. Pour un renouvellement ", supplément n°1 au BV de l'APMEP n°345, et " Pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au Collège ", janvier 1985

[3] http://www.apmep.asso.fr/bac.html

contrat social vis-à-vis de l'institution, des élèves et de leurs parents. Mais l'acrobatie pour échapper à la dérive "algorithmique" que nous dénonçons se nourrit actuellement de certaines illusions sur l'atteinte des objectifs généraux de l'enseignement secondaire et ne peut que se renforcer dans la diminution des horaires d'encadrement des élèves car il faudra bien « ne pas perdre(?) de temps dans le temps d'apprentissage ».

Notre proposition au sujet de la méthode de conception et de lecture d'un programme, sans être révolutionnaire, veut se construire, de façon originale, à partir de grandes classes de problèmes, de "problématiques", qui inscrivent objectifs, compétences et contenus plus en ***système*** *qu'en une suite éclatée de chapitres de cours. Selon un principe constructiviste, les contenus doivent apparaître comme une issue et un moyen incontournables pour résoudre des problèmes significatifs et non comme une fin en soi[4]. C'est un renversement épistémologique par rapport à ce qu'un programme classique propose où le concept est d'abord introduit et où les problèmes d'application et de réinvestissement apparaissent ensuite.*

Certes les libellés actuels de programme décrivent, en amont des contenus, des intentions générales, des lignes directrices, des objectifs, des capacités attendues. Particulièrement, le projet de programme de 1ère S présente une structuration des contenus qui, bien que timide, ne déclinant pas suffisamment ceux-ci des démarches attendues et oubliant de relier les mathématiques aux autres disciplines, montre cependant l'effort du G.E.P.S.[5] de mathématiques à coordonner "objectifs-capacités-contenus". Mais la présentation linéaire des autres programmes ne permet pas d'en voir les articulations qui en assureraient la cohérence et surtout ne décrit pas de façon aisément opérationnalisable des situations favorisant l'approche des connaissances visées, ni les démarches attendues des élèves, eu égard aux objectifs et aux capacités déclarés. Elle évoque bien quelques situations pluridisciplinaires ou environnementales, mais généralement plus comme alibi et de façon incantatoire, que comme lieu de conflits, de quêtes ou de défis, condition nécessaire à l'éveil de la curiosité et du plaisir de faire des mathématiques. Notre ambition est de construire, autour des problématiques majeures de tout l'enseignement des mathématiques du secondaire, un système cohérent qui, ***en faisant plus de place à la formation scientifique qu'à***

[4] cf. en particulier les travaux de Guy Brousseau à ce sujet
[5] **G**roupe d'**E**xpert pour les **P**rogrammes **S**colaires

la culture mathématique *sans la reléguer, coordonne trois composantes indissociables :*

- ***des situations où l'activité de l'élève trouve sa place, situations suffisamment significatives pour que l'élève s'approprie le problème posé, pour qu'il y engage un coût cognitif ni trop élevé, ni dérisoire,***
- ***des démarches, des attitudes scientifiques attendues de lui, satisfaisant les objectifs généraux et spécifiques des mathématiques,***
- ***des savoirs visés à organiser en fonction de l'approfondissement défini par le niveau de la classe, par le rythme adopté par certains élèves, etc. Par suite, un même contenu pourra être enseigné ou "visité" plusieurs fois, mais à des niveaux ou dans des cadres différents.***

Ainsi, un programme à notre sens devrait comporter dans son écriture, à chaque niveau scolaire, des préalables qui, à la suite des objectifs visés et des compétences attendues, distingueraient selon les dix problématiques que nous avons identifiées, les trois composantes énoncées ci-dessus[6]*. On pourra remarquer, qu'à des détails de rédaction près, ce sont sensiblement les mêmes que celles que nous avions dégagées pour l'enseignement dans le Collège. Cette similitude devrait nous conforter dans le sentiment que les mathématiques enseignées ou à enseigner forment un tout, cimenté par les problèmes qu'elles permettent de résoudre en complexifiant peu à peu et au besoin leurs outils de résolution.*

[6] On trouve une approche comparable dans certains libellés de programmes où une présentation en trois colonnes associe dans l'ordre : contenus, exemples de situations, compétences. Mais cette présentation ne traverse pas toutes les filières, loin s'en faut. De plus, l'énoncé préalable des contenus démontre bien la centration sur ceux-ci et, par suite, annonce les dérapages didactiques où seront minorées les autres composantes.

Voici les titres de ces problématiques pour le Lycée :

Tome 1

En référence privilégiée à des contenus :

1- *Repérage.*

2- *Représentations figurales et/ou graphiques. Propriétés des modèles associés.*

3- *Dynamique des points, des figures et des nombres.*

4- *Mesure de grandeurs avec précision, approximation ou incertitude.*

5- *Traitement et représentation de données statistiques.*

Tome 2

En référence privilégiée à des objectifs méthodologiques :

6- *Techniques algorithmiques.*

7- *Changement de registres et de cadres.*

8- *Recueil, traitement, consultation et communication de l'information.*

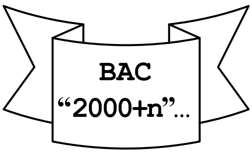
9- *Construction ou choix opportun et optimal des modèles, des outils et des méthodes dans des situations sous contraintes pluridisciplinaires.*

10- *Conjectures, preuves, réfutations et validations.*

La lecture critique, et éventuellement comme nous le souhaitons, la mise en œuvre dans la classe de nos suggestions ni fermées, ni exhaustives, doit conduire à un enrichissement continu des textes qui vont suivre.

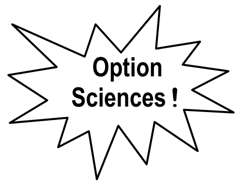
En guise d'introduction…

Pour chaque problématique, nous indiquons, a priori, le niveau où certains exercices proposés nous semblent pouvoir être abordés. Cependant, cette indication n'est donnée qu'à titre indicatif car elle dépend bien entendu des contenus des programmes, du niveau des classes et des choix jugés opportuns par l'enseignant eu égard à ses objectifs. D'autres exercices sont sans indication de niveau car considérés d'un abord plus difficile et/ou hors des contenus présents et donc hors du champ des compétences actuelles de la plupart de nos lycéens, même en TS. Outre le fait qu'ils ont pour nous valeur d'exemples pour la problématique concernée, la présence et le choix de ces exercices trouvent également leur légitimité à nos yeux par le fait qu'ils représentent le type même d'exercices que nous pensons utile de voir aborder à plus ou moins long terme dans nos classes.



Ceci à condition, il va de soi, d'intégrer la pratique ***"d'exercices avec prise d'initiative"*** *dans notre enseignement et donc dans nos évaluations (cf. le rapport de la commission baccalauréat de mathématiques – présidée par M. Paul Attali, IG de mathématiques – remis à la DESCO en juillet 2000*[7]*.*

Certains exercices sont étiquetés ***"option Sciences"*** *car ils ont été expérimentés dans cette option ou sont tout désignés à l'être selon nous)… (cf. le site de l'APMEP*[8] *ou le site du lycée Jean Monnet de Strasbourg)*



Certes ces exercices devraient avoir leur place à part entière dans notre enseignement mais faute de temps et vu la très grande hétérogénéité des classes actuelles, ils risquent de disparaître de fait des activités des élèves. D'où la revendication récurrente de l'A.P.M.E.P. d'obtenir la création d'une option Sciences et de retrouver des horaires décents en mathématiques respectant le temps d'apprentissage des élèves eu égard *aux objectifs affichés par l'institution et le rôle reconnu et universel des mathématiques dans le monde actuel.*

[7] http://www.apmep.asso.fr/bac.html
[8] http://www.apmep.asso.fr/OptSci1.html

Certains des exercices proposés tout au long de notre brochure sont "classiques" mais ils ont été retenus pour des raisons d'adéquation à la logique des **" problématiques "**. *D'autres sont plus originaux et élaborés en fonction du rôle que nous voulions leur faire remplir. Des pistes de solutions, voire des solutions, ainsi que des remarques didactiques les accompagnent le plus souvent. Une ou deux situations dites* **" didactiques développées "** *clôturent la suite d'exercices liés à la problématique, afin de rendre compte, plus amplement, de celle-ci à travers une véritable activité de classe.*

Les auteurs de programmes pourront toujours nous objecter que leurs commentaires plaident pourtant clairement en faveur d'un tel enseignement à l'image de ceux du programme de Seconde entrés en application en septembre 2000 : « Prendre du temps pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes - en respectant toutes les étapes relatives à ce type de recherche (conjectures et expérimentations, recherche de preuves, mise en forme d'une démonstration...) »… Mais comme pour les programmes précédents, où figuraient notamment les huit moments de l'activité mathématique (« formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence au regard du problème posé »), ces directives risquent fort, le plus souvent, de rester à l'état de vœux pieux… En effet, la réduction drastique des horaires de mathématiques entamée depuis le collège ces dernières années, et, par voie de conséquence, le manque chronique de temps dont nous disposons ne permettent pas à l'élève de réinvestir ses connaissances… sans compter que les sujets actuels du baccalauréat n'incitent guère à ce type de travail basé sur la recherche de problèmes !

Nous ne pouvons que le déplorer tout en espérant que cette brochure apportera une aide aux collègues et saura ***convaincre l'institution à s'engager enfin dans une voie dont l'objectif ne serait pas tant les contenus à peine survolés que la capacité à mettre en œuvre une démarche scientifique.***

PROBLÉMATIQUE N ° 1

REPÉRAGE

GÉNÉRALITÉS

Dans la langue commune, “repérer” c’est “placer par rapport à...” et donc fournir les éléments décrivant de façon non équivoque une certaine position. En mathématiques, à la notion, voire au champ de notions, “repérage” sont associées couramment des activités mathématiques et plus ou moins quotidiennes s’exprimant par les verbes :

localiser, situer, décrire, représenter, etc.

Les objectifs spécifiques d’une activité mathématique faisant référence à cette problématique se condensent selon quatre axes principaux :

- *rendre objectives des positions* dans un but d’accord intersubjectif (vers la reconnaissance d’un certain repère commun, non ambigu, consensuel) ;
- *relativiser des positions et les moyens* de les repérer, visant à placer selon un certain “point de vue” ou à changer opportunément de “ point de vue ” pour des raisons d’efficacité ou d’optimalité ; savoir ainsi distinguer repère absolu et repère relatif ;
- *rechercher les propriétés invariantes d’une situation mathématique particulière,* c’est-à-dire celles qui, intrinsèques, sont indépendantes du repère
- *décrire le statique et surtout le dynamique* (instantanéité du repère) afin de pouvoir prévoir et anticiper.

Les démarches développées, à travers les situations-problèmes introductives et applicatives, accorderont aux concepts visés un statut d’outil, respectivement en amont puis en aval de leur étude didactique, conduite elle-même en tant que visant des objets de savoirs. Ceux-ci en tant que tels seront institutionnalisés (c’est-à-dire décontextualisés et décrétés comme faisant partie du patrimoine culturel de la classe). Les principales démarches sont donc les suivantes :

- *définir* un ou des *systèmes de référence* et des *modes de représentation* dans ces systèmes ; les modes retenus devront avoir une vertu de généralité pour être utiles dans de multiples situations, et d’efficience pour mériter leur apprentissage ;
- *paramétrer les objets* (points, figures, trajectoires,…) ; démarche qui permet de passer alternativement du géométrique à l’algébrique ou au topologique ;

- *numériser* pour décrire et anticiper en optimisant le mode et la complexité de calcul, la numérisation apparaissant comme une contrainte liée au problème donné où le repérage qualitatif ne suffit plus ;
- *dégager les propriétés invariantes* dans un changement de repère ;
- *lier de façon duale* des variétés du plan et de l'espace (droites et points, par exemple).

<u>Les situations-problèmes</u> devront, le plus souvent, partir du réel ou de situations extra-mathématiques et y revenir, afin de convaincre des nécessités d'appel aux concepts mathématiques et de l'efficacité de leur fonctionnement. Elles devront faire une large place à la représentation graphique et, dans ce cadre, conduire à des conflits socio-cognitifs.

Situations – Démarches – Contenus

L'essentiel, à travers cette problématique, est de faire prendre conscience aux élèves de l'aspect arbitraire et relatif du choix du repérage d'un point où doivent être cependant optimisées et conciliées l'objectivité de l'information sur ce point, l'unicité du placement et l'opérativité du système de représentation choisi. Les situations proposées et les démarches attendues des élèves le sont à titre illustratif et indicatif. L'exploitation didactique doit conduire à l'appropriation de certains contenus d'enseignement sous l'angle de cette problématique. Cette appropriation ne peut donc pas être considérée comme totale et définitive. D'autres situations pourront la conforter et l'enrichir.

Notons qu'il serait d'ailleurs maladroit d'espérer traiter séparément chacune des problématiques énoncées : elles ont toutes plus ou moins partie liée, et on peut, au cours de problèmes, en rencontrer plus d'une. La problématique "Repérage" est par exemple indissociable de " Représentation… " (n°2), de " Changements de registres et de cadres " (n°7) et " Choix opportun… " (n°9). On ne pourra s'empêcher de voir en " Traitement et représentation de données statistiques " (n°5) une de ses applications privilégiées. Les exemples choisis ici le seront toutefois pour illustrer plus particulièrement les notions de " Repérage ".

Situations	Démarches	Contenus
♦ Description ou traduction d'une promenade sur un réseau maillé. ♦ Description de certaines régions de la droite, du plan ou de l'espace contraintes à des conditions vérifiées par les coordonnées usuelles de leurs points.	♦ Associer les cadres numérique, géométrique et graphique. ♦ Associer les registres formel et graphique. ♦ Identifier ou distinguer des points par des propriétés partagées par leurs coordonnées.	♦ Coordonnées cartésiennes. Coordonnées d'un vecteur, de la somme de deux vecteurs. ♦ Révision du mode de repérage de points dans un repère cartésien orthonormé du plan ou de l'espace. Coordonnées polaires et cylindriques. ♦ Equation de domaine plan.

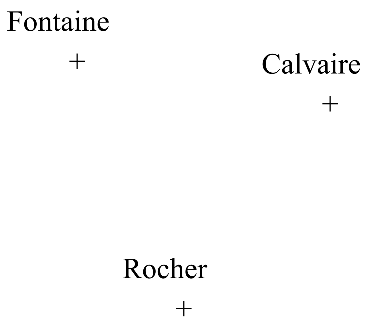
♦ Traduction d'une carte en une portion du plan repéré et description mathématique d'itinéraire nécessitant un choix ou un changement d'origine ou/et d'axes.	♦ Passer du réel au mathématisé en changeant de point de vue de référence. Se départir de son égocentrisme.	♦ Orientation du plan et de l'espace. Changement de repère par translation ou symétrie des axes.
♦ Description d'une trajectoire à partir d'une équation horaire ; recherche de positions à des moments donnés.	♦ Considérer des relations entre coordonnées de façon dynamique.	♦ Cinématique de points définis par leurs coordonnées paramétriques : $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $\rho = \varphi(\theta)$.
♦ Représentation de positions et déplacements par rapport à des repères et unités de mesure variés et variables	♦ Choisir de façon opportune un système de coordonnées. Relativiser un mouvement.	♦ Changement de mode de représentation ; repère absolu, repère relatif.
♦ Quelques problèmes historiques de génération de courbes ou de surfaces.	♦ Se cultiver… Comparer ainsi l'origine de méthodes et leur opérativité.	♦ Exemples d'équations de lignes, courbes, surfaces simples définies par des conditions.
♦ Description d'un itinéraire sur la sphère terrestre à partir des données d'un voyage.	♦ Maîtriser une certaine actualité et des informations des médias ou de nature pluridisciplinaire.	♦ Coordonnées sphériques. Projection sur des plans.
♦ Repérage de points massiques dans un système fini dans des situations de sciences physiques ou humaines.	♦ Identifier vecteurs et points auxquels on associe des coefficients. Prendre en compte la pondération. ♦ Relier les notions de moyenne arithmétique et de barycentre.	♦ Barycentres ; coordonnées barycentriques.
♦ Recherche d'une condition de cocyclicité de points.	♦ Etablir dans le cercle une correspondance entre angle et arc.	♦ Angle inscrit et arc capable.

Quelques situations – problèmes

2nde

✳✳✳ 1 ✳✳✳
recherche d'un trésor

Vous venez de découvrir un vieux document sur lequel vous pouvez lire ceci :



“ Pour retrouver le trésor, partez du vieux chêne en direction de la fontaine et parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare le vieux chêne de la fontaine. Puis vous vous dirigez vers le calvaire et de la même manière vous parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare votre changement de direction du calvaire. Puis de nouveau vous changez de direction pour vous diriger vers le rocher en forme de pyramide et, toujours de la même manière, vous parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare votre dernier changement de direction du rocher.

Le trésor est maintenant à mi-chemin entre le vieux chêne et vous à 5 pieds sous terre. ”

Malheureusement le vieux chêne a disparu depuis très longtemps. Mais il reste la fontaine, le calvaire et le rocher. Retrouverez-vous le trésor ?

Remarques :

1° Sous une forme ludique, le problème – un classique – vise à traduire un texte en un cheminement sur un plan où la modification du repère entraîne un changement fréquent de point de vue. Cette situation correspond à celle communément rencontrée lorsqu'il s'agit de reporter sur un plan de ville des indications orales d'un parcours.

2° On peut aussi résoudre ce problème uniquement avec les milieux d'un quadrilatère. Ce peut être l'occasion de voir l'intérêt ou non d'un repérage, sa nécessité ou non.

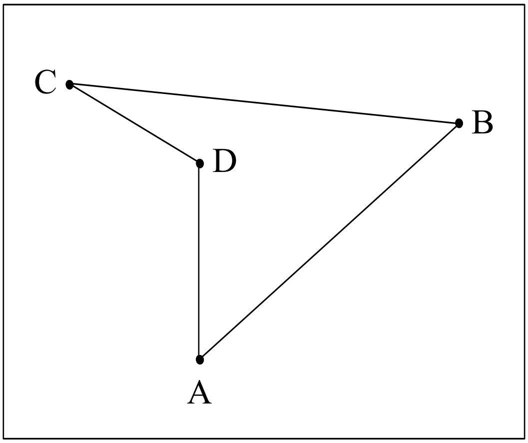
2nde

✳✳✳ 2 ✳✳✳

Le quadrilatère ABCD ci-dessous a été dessiné dans un repère orthonormé qui a disparu.

Le retrouver à partir de la donnée des coordonnées, dans ce repère, des points suivants:

A (-4 ; 2) B (2 ; -6) C (3 ; 6) D (1 ; 2)



Remarque : *Cette situation s'appuie sur une compréhension réversible de la notion de repère cartésien. Elle nécessite, en particulier, de faire d'intéressantes remarques sur la spécificité des données qui permet de resserrer la recherche.*

Variations et prolongements sur ce thème :

1° Pour faire prendre conscience que le repère est à l'articulation de la connaissance des positions respectives des points du plan, nous demandons de le définir pour lui faire jouer un rôle opératoire dans le problème qui suit :

" Le point I étant construit comme intersection des droites (AD) et (BC), quelles sont ses références par rapport au repère définissant A, B, C et D ? "

Cette nouvelle définition " libère " le point I de sa définition géométrique par une propriété d'incidence.

2° On peut :

- *d'une part, faire rechercher le nombre minimal d'informations (points donnés par leurs coordonnées) en fonction du problème posé (détermination du repère ou détermination d'un élément du plan repéré) ;*
- *d'autre part, faire varier le type d'information : repère orthogonal ou repère affine quelconque, etc.*

3° Le problème peut se présenter comme la mathématisation d'une situation concrète. Par exemple:

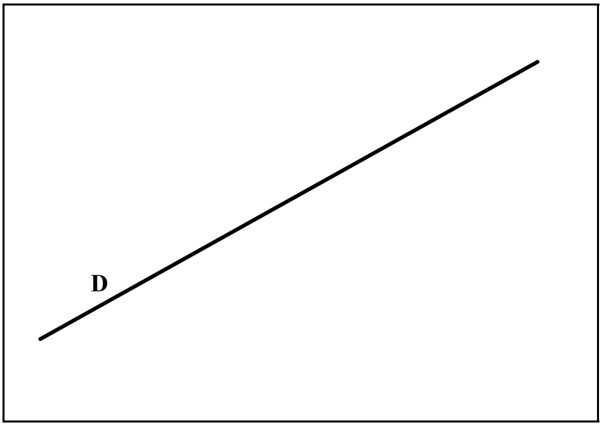
- *retrouver sa position dans un système repéré tel que parking, ville quadrillée, ..., à partir de quelques "endroits" (points de repère !) précis ;*
- *retrouver la position d'un autre objet dans de tels systèmes ;*
- *élargir ces recherches de position à des problèmes de l'espace (astronomie, par exemple).*

4° On peut envisager de proposer ce genre d'exercice sous forme de jeux de groupes :

- *les groupes construisent une figure dans un repère, la reproduisent sur papier calque ;*
- *les groupes échangent les calques et doivent retrouver les repères ;*
- *temps de synthèse, quel est le nombre minimal de renseignements nécessaires pour retrouver le repère ?*

2nde

✱✱✱ 3 ✱✱✱



Retrouver, dans le cadre ci-contre un repère orthonormé dans lequel la droite (**D**) a pour équation : $3x + y - 4 = 0$.

Remarques :

1° Il y a une infinité de solutions, en fonction de l'orientation choisie, et par homothétie.

2° Ce problème proposé à des élèves de Seconde a conduit à différents types de solution et...à beaucoup d'échecs. On relève 2 solutions typiques :

- *l'une très dynamique où les propriétés sont utilisées en acte et la construction est menée selon un programme justifié : représenter le coefficient directeur, construire l'axe des ordonnées, puis celui des abscisses,*

- *l'autre très calculatoire où on détermine successivement les paramètres de l'équation de* (**D**)*, puis la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle défini à partir des intersections de* (**D**) *avec les axes, puis l'angle de* (**D**) *avec [Ox, ...*

Variante : *dans une phase exploratoire, on peut travailler avec papier calque, en construisant un repère orthonormé, et la droite (**D**), puis en reportant ce repère sur la figure initiale. On cherche alors d'autres repères convenant.*

Voir les copies d'élèves pages suivantes.

Option Sciences !

2nde

✳✳✳ 4 ✳✳✳

Il est 17 h 30 aujourd'hui 14 janvier à Paris. Quel jour est-on et quelle heure est-il, au même moment, respectivement à Honolulu, à Bangkok et à Sydney ? Et à Darwin, en décalage horaire d'une demi-heure par rapport à Sydney ? Et à Perth en décalage horaire de 2 heures par rapport à Sydney ? Et à Papeete en décalage de 4 heures par rapport à Sydney ? Comparer avec Honolulu.(1)

Un avion part de Sydney le 12 janvier à 19 heures locales. Après quelques escales, le voyage se termine à Paris le 13 janvier à 21 heures 30 locales. Combien de temps réel a duré le voyage ?

(1) Il faut savoir que la ligne de changement de date est située entre Papeete et Sydney.

Remarque : *Cet exercice montre tout l'intérêt de se reporter à une origine, c'est-à-dire au temps universel défini par le méridien de Greenwich et par rapport auquel, au mois de janvier, l'heure de Paris est à +1 heure.*

De plus, nécessitant pour la grande majorité des élèves la consultation d'une mappemonde, il présente un intérêt culturel non négligeable.

Indications :

Honolulu est à – 10h de Greenwich, donc – 11h de Paris. On est donc le 14 janvier à 6 h 30. Bangkok est à + 7 h de Greenwich, donc + 6 h de Paris. On est donc le 14 janvier à 23 h 30.

Sydney est à + 10 h de Greenwich, donc + 9 h de Paris. On est donc le 15 janvier à 2 h 30.

Darwin est à – 2 h de Sydney. On est donc le 15 janvier à 0 h 30.

<u>Suite et fin du problème page 26</u>

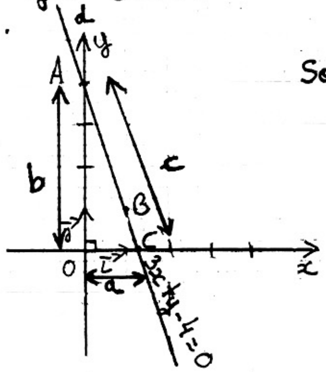
équation de d : $3x + y - 4 = 0$

càd $y = -3x + 4$

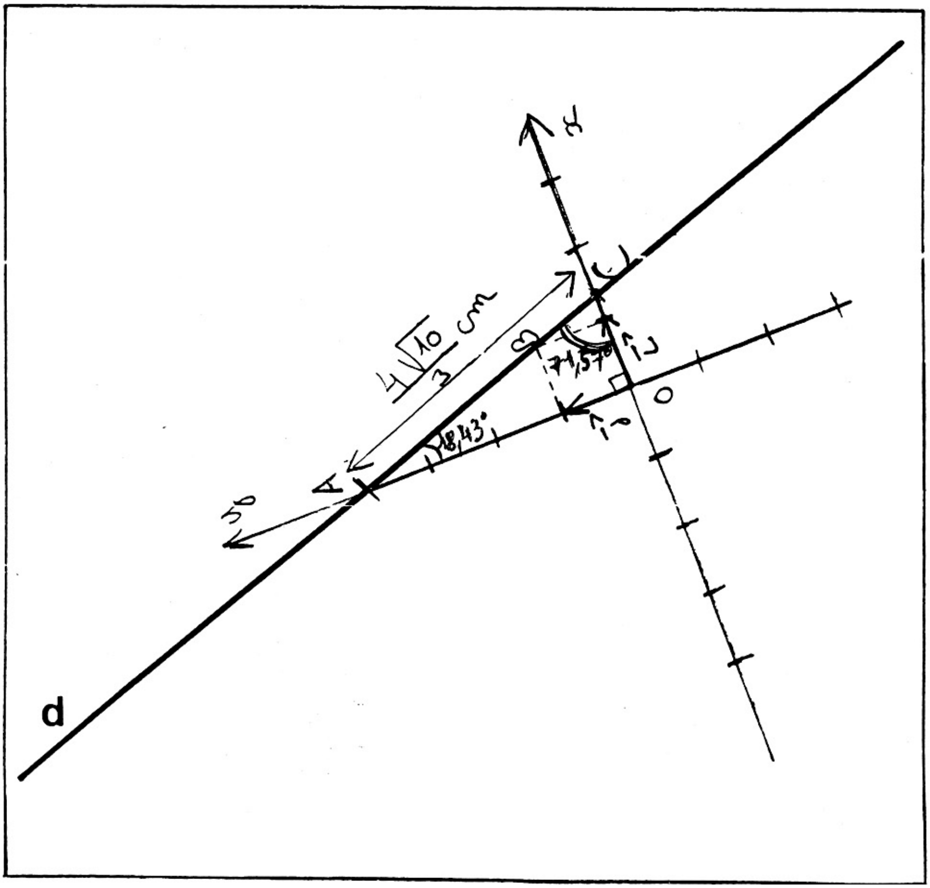
allure générale.

$A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



Soit : $OC = a$
$OA = b$
$AC = c$



On a donc :

$\boxed{b = 4}$

calcul de a : on résout $y = 0$ càd $-3x + 4 = 0$

$-3x = -4$

$x = \frac{4}{3}$

càd $\boxed{a = \frac{4}{3}}$

calcul de c : D'après Pythagore, dans le triangle abc, on a

$c^2 = a^2 + b^2$

$= \frac{16}{9} + 16$

$= \frac{160}{9}$

$c = \sqrt{\frac{160}{9}}$

$= \frac{\sqrt{160}}{3}$

$\boxed{c = \frac{4\sqrt{10}}{3}} \simeq 4,2$

Calcul des angles $\widehat{OCA}$ et $\widehat{OAC}$:

$\tan \widehat{OCA} = \frac{OA}{OC} = \frac{b}{a} = 4 \times \frac{3}{4} = 3$

On a donc $\widehat{OCA} = 71,56505°$

$\boxed{\widehat{OCA} \simeq 71,57°}$

Comme le repère est orthonormal, on a :

$\widehat{OAC} = 90 - 71,56505$

$= 18,43495....$

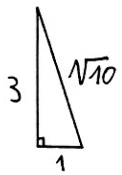
$\boxed{\widehat{OAC} \simeq 18,43°}$

Pour tracer le repère on trace d'abord, sur d, AC de longueur $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ dm càd environ 4,2 cm. On trace ensuite l'angle $\widehat{OAC}$ d'environ 18,43° puis l'angle $\widehat{OCA}$ d'environ 71,57°. Le point d'intersection entre OA et OC est l'origine du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour trouver l'unité, on divise OA par 4 puisque $OA = b = 4$

Mathématiques

Je choisis une unité : le cm.
puis $3x+y-4=0$ càd $y=-3x+4$
La pente est négative donc il faut tourner la feuille de 90° pour que la droite ~~est~~ ait une pente négative.

représentation graphique du coefficient directeur :
le repère est orthonormé d'où

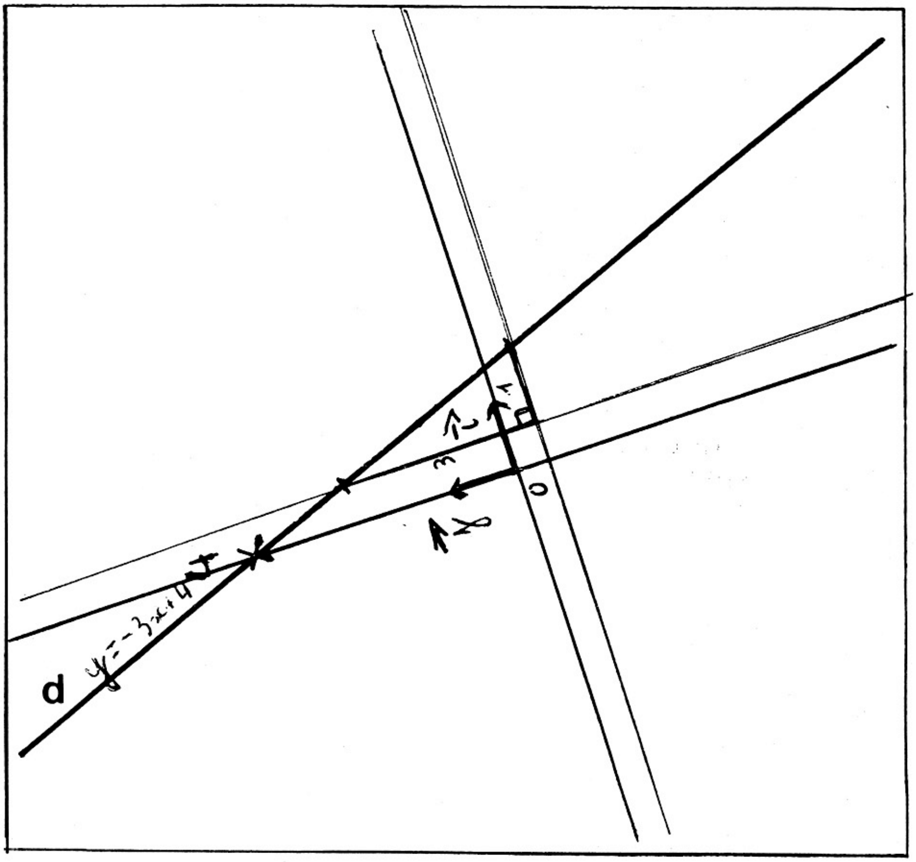


(d'après Pythagore)

Ensuite je reporte $\sqrt{10}$ (du dessin) sur la droite d et la représentation du coefficient directeur.
Ainsi j'obtiens une parallèle à l'axe des abscisses et une parallèle à l'axe des ordonnés.

Je place l'ordonné à l'origine sur d et trace la parallèle à l'axe des ordonnés passant par l'ordonnée à l'origine. J'obtiens l'axe des ordonnés.

Comme l'ordonnée à l'origine vaut 4, le point O en est distant de 4 cm sur l'axe des ordonnés.
Puis il faut tracer la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point O et indiquer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.


d
y = -3x + 4
3
1
0

Papeete est à + 4 h de Sydney. On est donc le 14 janvier à 6 h 30 (à cause du changement de date).

Pour le voyage en avion, il a duré 30 heures 30.

2nde

✳✳✳ 5 ✳✳✳

Un avion vole le long du 50ème parallèle Nord en reliant Winnipeg et Vancouver. A quelle vitesse se déplace-t-il sachant que l'on voit en permanence le soleil sur la même ligne d'horizon ?

Remarque : *Plusieurs objectifs se retrouvent dans cet exercice :*

- *se documenter sur l'existence et la position des villes citées,*
- *se rendre compte des mouvements respectifs de la terre et de l'avion par rapport au soleil,*
- *mathématiser la situation afin de parvenir à la mesure de la portion du parallèle parcourue par l'avion en une heure,*
- *critiquer éventuellement le résultat numérique trouvé.*

Variante : *On peut proposer avec des objectifs comparables le problème sous la forme suivante :*

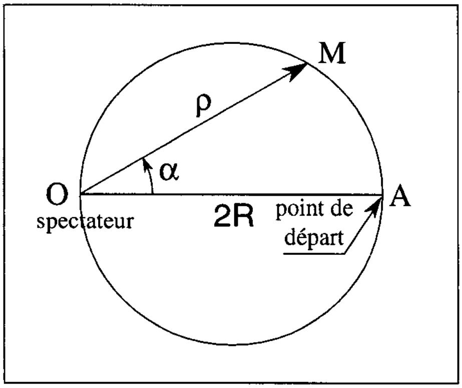
"Dans l'avion qui vole à la vitesse constante de 834 km.h^{-1}, le pilote regarde le coucher du soleil. Pendant tout le trajet qui dure 8 heures, sa grosse boule rouge reste posée curieusement sur l'horizon, immobile. Sachant que l'avion ne survole qu'un seul pays, quelles grandes villes l'avion relie-t-il ? "

Indications : *si le soleil est apparemment immobile, c'est que l'avion a la même vitesse que la vitesse tangentielle de la Terre en ce point. Un peu de trigo dans un cercle nous montre que la longueur du 50ème parallèle est R.cos(50°), où R est le rayon de la Terre, ce qui fait environ 25 700 km. On trouve une vitesse de 1071 km.h^{-1} environ.*

Avec le même raisonnement, dans la variante, 834 km.h^{-1} correspond au 60ème parallèle. 8 heures de vol correspondent à un tiers de tour de Terre. Seule la Russie permet, à cette latitude, un tel survol d'un seul pays. Les villes peuvent être St Petersbourg et Magadan.

1ère

✳✳✳ 6 ✳✳✳



Un spectateur d'un cirque est placé sur le bord de la piste de diamètre 2R pour observer le déplacement d'un monocycle roulant sur la lice. On souhaite exprimer la distance à laquelle il voit le motocycliste en fonction de l'angle dont celui-ci a tourné pour l'observateur et mesuré à partir de son point de départ diamétralement opposé.

Remarques :

1° Le problème "habille" la détermination d'une représentation polaire du cercle. Elle permet cependant de donner un sens dynamique à la fois à l'angle et au rayon polaires.

On trouve bien entendu la relation :

$$\rho = 2R\cos(\alpha) \qquad \text{pour } \alpha \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$$

On pourra comparer cette équation à celles obtenues dans un repère orthonormé et travailler sur le passage de l'une à l'autre (selon les données de départ).

2° On pourra, pour donner du sens à la notion de coordonnées polaires, amener les élèves à se poser des questions, par exemple comme lire et repérer des points sur un écran radar (joli TPE en perspective).

On pourra proposer de travailler sur des feuilles "quadrillées" par une famille de cercles concentriques et une famille de droites concourantes au centre des cercles. Ceci permettra la mise en parallèle avec le quadrillage habituel des repères cartésiens.

T^{le} S

✳✳✳ 7 ✳✳✳

Positions d'un point par rapport à d'autres points

Deux points F et F' sont fixés dans le plan et tels que FF' = 2*c*. Des points mobiles M décrivent une partie du plan.

1° Quel est l'ensemble de ces points M qui restent à la même distance de F ?

2° Quel est l'ensemble de ces points M qui restent à égale distance de F et de F' ?

3° Quel est l'ensemble de ces points M qui restent à des distances de F et de F' dans un rapport constant ? (MF / MF' = *e*).

Aide : on peut choisir un repère tel que F et F' appartiennent à l'axe *x'x* et soient symétriques par rapport à l'origine O. Représenter la trajectoire des points M pour *e* = 0,5 , 2 et 3 et pour *c* = 2.

Remarques :

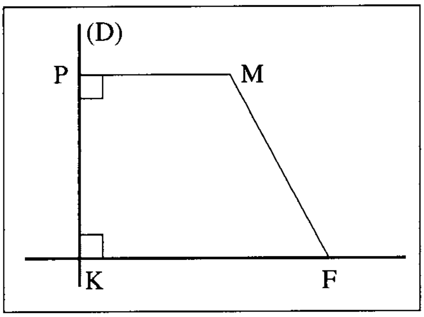
1° Cet exercice vise à replacer des connaissances déjà acquises dans un contexte de positions relatives et où les ensembles de points cherchés sont envisagés dans un cadre cinématique. Il présente, en outre, l'intérêt de faire percevoir l'ellipse et l'hyperbole définies par leur excentricité, comme relevant d'une famille des coniques où figurent déjà des êtres géométriques connus : la droite et le cercle.

2° Dans une phase exploratoire, on pourra proposer de travailler sur des feuilles "cerclées" par deux familles de cercles centrés en F et F' , de rayons variant par pas de 0,5. Ceci permettra la mise en parallèle avec le quadrillage habituel des repères cartésiens.

T^{le} S

✳✳✳ 8 ✳✳✳

BAC "2000 +n".



Positions d'un point par rapport à un autre point et à une droite

Un point F et une droite (D) sont fixés dans le plan et distants de 2*d*. Des points M sont mobiles dans le plan mais conservent une certaine relation par rapport à F et à (D).

1° Quel est l'ensemble de ces points M qui restent à égale distance de F et de (D) ?

Aide : on pourra chercher l'équation de cette trajectoire en choisissant un repère convenable (origine : milieu de [FK] ; $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{KF}$; $\vec{j}$ colinéaire à $\overrightarrow{PK}$). Représenter la trajectoire dans ce repère.

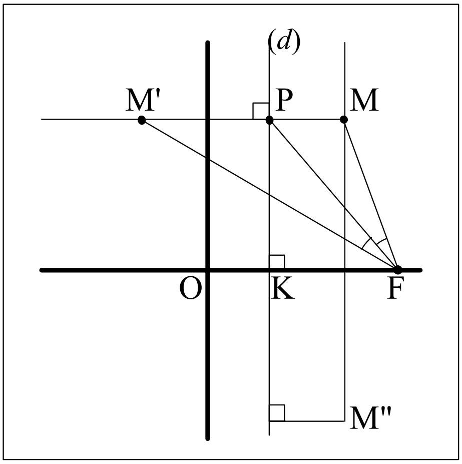
2° Quel est l'ensemble de ces points M qui restent à des distances de F et de (D) dans un rapport constant ? (MF / MP = *e*).

Aide : on pourra chercher l'équation de cette trajectoire en choisissant un repère convenable, et la représenter dans ce repère, pour *e* = 0,5 et *e* = 2.

Remarques :

*1° Dans une phase exploratoire, on pourra proposer de travailler sur des feuilles "quadrillées" par une famille de cercles centrés en F et une famille de droites parallèles à (*D*). Ceci permettra la mise en parallèle avec le quadrillage habituel des repères cartésiens.*

2° Il s'agit du choix délibéré d'une présentation des coniques par une définition foyer-directrice. La représentation que peuvent s'en faire les élèves est influencée par l'exercice précédent : il s'agit toujours d'examiner dynamiquement les positions possibles d'un mobile qui doit respecter une condition "d'éloignement" par rapport à un point et une droite. D'autres conceptions seront construites à travers d'autres problématiques.



Eléments de solution :

Il n'existe qu'un autre point M' sur (MP) tel que

$\frac{\text{MF}}{\text{MP}}$ = e. Si e >1, M et M' sont de part

Si e <1, M et M' sont du même côté de (d).

On pourra alors faire remarquer que, dans le premier cas (e >1), FP est la bissectrice intérieure de l'angle formé par les deux rayons MF et M'F (cf. figure ci-contre) puisque $\frac{MF}{MP} = \frac{M'F}{M'P}$.

Dans le second cas (e >1), FP en est la bissectrice extérieure.

Cette remarque permet de faire apparaître un axe de symétrie de la conique, outre évidemment la droite (KF).Ce sont ces axes que l'on pourra adopter pour définir un repère convenable.

1ère S-T^{ale} S

✶✶✶ 9 ✶✶✶

Soit un triangle ABC n'ayant pas d'angle obtus. Les mesures de ses côtés sont a = BC, b = AC et c = AB. On souhaite charger les points A, B et C de coefficients respectifs α, β, γ de telle façon que leur barycentre soit suivant les cas :

1° le centre de gravité du triangle ;

2° le centre du cercle inscrit ;

3° l'orthocentre ;

4° le centre du cercle circonscrit.

Comment choisir ces coefficients ?

Remarque et éléments de réponse :

Cet exercice vise trois objectifs :

1° montrer la nature relative de la notion de barycentre ;

2° faire appliquer la définition dans des circonstances variées ;

3° faire revoir les définitions des points dits remarquables du triangle.

Les coefficients trouvés sont déterminés à une constante multiplicative près.

Dans le premier cas, on trouvera : $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Dans le second : $\alpha = a$; $\beta = b$; $\gamma = c$ *(utiliser la propriété métrique des bissectrices par rapport à la mesure des côtés).*

Dans le troisième : $\alpha = \tan \widehat{A}$; $\beta = \tan \widehat{B}$; $\gamma = \tan \widehat{C}$ *(utiliser les relations liant les projections des côtés, la hauteur et les angles du triangle).*

Dans le dernier cas : $\alpha = \sin \widehat{A}$; $\beta = \sin \widehat{B}$; $\gamma = \sin \widehat{C}$ *(multiplier scalairement la relation attendue successivement par* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$*, puis résoudre un système linéaire de 3 équations).*

T^{le} S

✶✶✶ 10 ✶✶✶

On considère n points A_i de l'espace, munis de coefficients respectifs a_i. Soit M un point quelconque et G le barycentre de ces n points massiques.

Démontrer la formule de Leibniz :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i GA_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\right) MG^2$$

Exprimer cette relation en termes de moments d'inertie.

Remarque 1 :

Ce problème peut être, dans une première approche, de type didactique, à savoir, montrer que :

** l'on connaît et sait utiliser la relation définissant le barycentre de n points,*

** l'on sait utiliser le produit scalaire,*

** l'on sait utiliser la forme contractée de la somme de n valeurs.*

Il est bien évident que si cette difficulté est trop grande on peut substituer au système de n points celui d'un système à 3 points, par exemple.

Cette formule permet de donner un sens au rôle fondamental et général (cf. problématique 5) que joue le barycentre G de points : une certaine information métrique (quadratique) de ces points A_i par rapport à ce barycentre et ce type d'information concentrée au seul barycentre par rapport à un point référent (M) quelconque " transporte" l'information métrique des points par rapport à ce point référent.

Pour obtenir la formule de Leibniz, il suffit, pour tout i, d'élever au carré scalaire la relation $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$.

Cette formule s'exprime de la façon suivante en termes de moment d'inertie :

"Le moment d'inertie d'un système de points massiques en un point quelconque M est égal au moment d'inertie de ce système au centre de gravité G + le moment d'inertie en M de ce centre G porteur de toute la masse. "

Un échange avec le professeur de Science Physique serait des plus fructueux.

Remarque 2 :

Une question d'optimisation peut alors être posée : en quel point M de l'espace peut-on minimiser le moment d'inertie (ou la forme $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$ *).*

La réponse est alors évidente compte tenu de la formule établie : c'est au point G.

Suggestion *: une version plus simple et plus problématisée pourrait être la suivante.*

On appelle moment d'inertie d'un point A de masse α par rapport à un point M, le nombre αAM^2 (voir signification physique avec le professeur de Physique).

Le moment d'inertie par rapport à M d'un système de plusieurs points massifs est la somme des moments d'inertie par rapport à M de chacun des point massif.

1° On a deux points A et B de masses respectives α et β.

Pour quel point M a-t-on le moment d'inertie minimal pour le système formé des deux points ? (on le nommera G).

Exprimer le moment d'inertie du système par rapport à un point M en fonction du moment d'inertie de ce système par rapport à G. Observer le rôle de ce point G.

2° Mêmes questions avec quatre points massifs.

✳✳✳ Situation didactique développée ✳✳✳

Naviguer à l'estime

Le vocabulaire du mousse

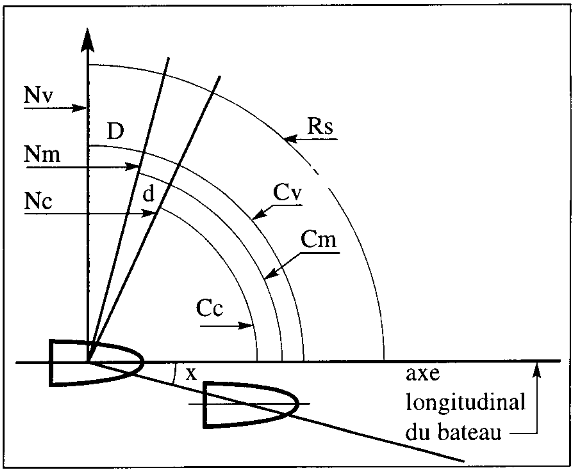
"L'estime consiste à évaluer à partir du cap suivi, de la distance parcourue, de la dérive et du courant, la route effectuée par le bateau depuis sa dernière position connue". (Nouveau Cours de Navigation des Glénans)[1].

Imaginons-nous en train de naviguer sur un voilier n'ayant pas une grosse informatique embarquée, où les opération de contrôle du "point" se font encore de façon très artisanale.

Ne pas perdre le Nord

La construction ci-contre résume bien les diverses définitions :

Nv Nord vrai
Nm Nord magnétique
Nc Nord compas
Rs Route surface
Cv Cap vrai
Cm Cap magnétique
Cc Cap compas
X Dérive-vent
D déclinaison
d déviation



---

[1] BIBLIOGRAPHIE

- Nouveau cours de navigation des Glénans (Ed. Seuil)
- Conduite d'une croisière côtière (J. Harand, Ed. Arthaud)
- GALION-THEMES : "La navigation à vue de terre" (Ed.Aléas).

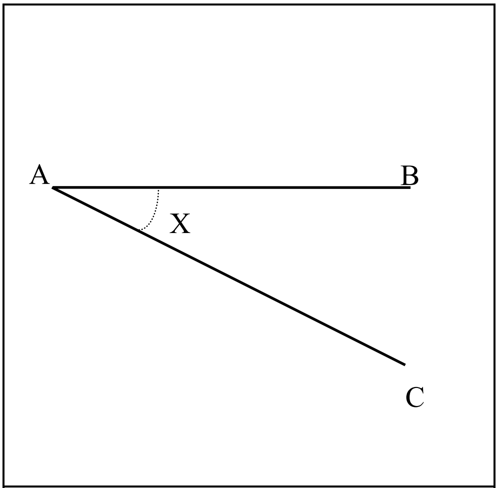
Au gré des vents

Plusieurs éléments vont venir perturber notre route, le premier étant la dérive due au vent, la “dérive-vent” comme on dit.

On part de A pour aller vers B ; en fait, on arrive en C.

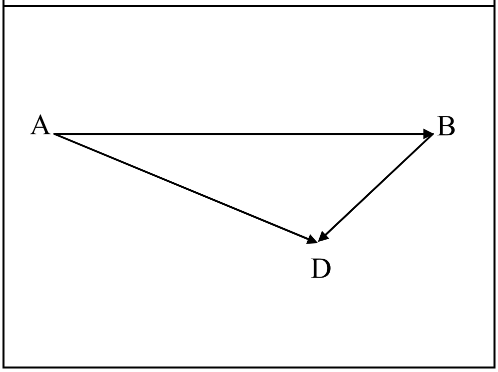
Pour aller en B, nous aurions dû afficher :

Cc = 90° – X



Au fil du courant

Un second élément perturbateur est le courant, qui correspond au déplacement de la masse d’eau sur laquelle on évolue, et occasionne la “dérive-courant” illustrée ci-contre, et qui s’explique de la manière suivante :



Si, un jour sans vent, un bateau à moteur, sur un plan d’eau fixe (lac), part de A pour aller vers B, le segment [AB], orienté de A vers B, représentera donc aussi bien la route du bateau par rapport à la surface (route-surface) que sa route par rapport au fond (route-fond), et sa vitesse par rapport à la surface est égale à sa vitesse par rapport au fond.

Si maintenant, toujours un jour sans vent, un bateau à moteur sur un plan d’eau mobile (mer), part de A pour aller vers B, il se retrouve, à cause du courant, en D. Sa route-surface est alors différente de sa route-fond, ce qu’on illustre par le triangle des positions ABD. Construire ce triangle revient d’ailleurs (proportionnalité oblige !) à construire le *“triangle de vitesses”*, $\overrightarrow{AB}$ représentant la vitesse du bateau par rapport à la mer (vitesse relative), $\overrightarrow{BD}$ la vitesse du courant (vitesse “d’entraînement”), $\overrightarrow{AD}$ la vitesse du bateau par rapport au fond (vitesse-fond ou vitesse absolue). N'avons-nous pas ici une magnifique illustration de la loi de composition des vitesses :

Vit. absolue = Vit. relative + Vit. d'entraînement ?

N.B. : le vocabulaire de la navigation tolère, certainement plus que les mathématiques, les abus de langage. Il désigne, par exemple, par le même terme l'angle que fait la Route-surface avec le Nord vrai et le tracé de celle-ci… Ils 'agit donc pour vous d'utiliser les mots selon leur contexte.

Imaginons maintenant que vous soyez mousse sur l'un de ces bateaux, et que vous soyez chargé d'établir la position du bateau compte tenu de tous ces éléments. Il vous faudra savoir calculer, mesurer, construire…

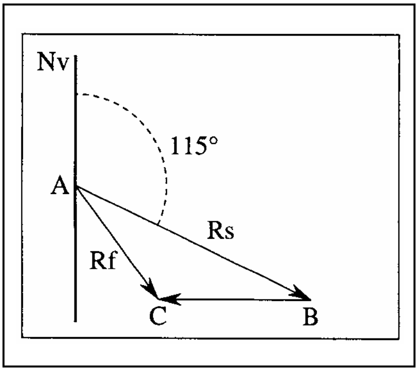
Les calculs du mousse

D'après ce qui précède, Rs = Cc + D + d + X. Si, par exemple Cc = 117°, D = – 7° (*on convient que la déclinaison Ouest est comptée négativement, la déclinaison Est positivement, de même pour d*), d = 3°, X = 2° "droite" (*vers la droite*). Calculez l'angle Rs, et tracez la direction de la Route-surface du bateau.

Les tracés du mousse

Le diagramme des vitesses

Si la vitesse relative du bateau (mesurée par le *speedomètre*), est de 8 *nœuds*, ou 8 *milles* à l'heure, et que nous subissons un courant de 4 nœuds *"au 270°" (N'oubliez pas qu'on compte les angles à partir du Nord vrai)*, le tracé se fera de la manière suivante :



AB représente la *"vitesse-surface"*, BC la vitesse du courant, AC la vitesse-fond. On en déduira le tracé de la route-fond.

Vous voici (presque) armé pour partir en croisière "hauturière". Vous avez à bord compas de navigation, cartes marines et tout ce qu'il faut pour mettre en application vos premières connaissances de marin…

Le mousse est perplexe

Nous faisons maintenant route de PROPRIANO vers BONIFACIO, pointe Sud de la Corse, selon la carte ci-jointe (fournir une carte marine de la région aux élèves). A 3h30, le navigateur fait un point qui situe le bateau à 1,2 milles au Nord de la **Roche Blanche**. La mer est belle, le vent stable, la visibilité est bonne ; il décide d'aller se coucher sans tracer la route.

Le barreur continue à naviguer, et porte sur le livre de bord les indications suivantes *(le “**loch**” indique, en milles nautiques, la distance parcourue par le bateau depuis le point de départ, ici, en l’occurrence, Propriano)* :

Heure	cap	loch	X estimée
3 h 30	240°	6	+3°
4 h 30	210°	12	+2°
5 h 30	160°	18	-2°
6 h 30	130°	24	-3°
7 h 30	140°	30,5	+1°
8 h 30		36	nulle

A 8h30, la brume tombe brusquement. Plus aucun repère ! Nous devrions être en vue de l’Ile des Moines.

Saurez-vous aider notre mousse ?

• Tracer sur la carte la **Route-surface** à partir de la dernière position connue du bateau.

La route-surface, ça c’est facile, mais voilà que nous avons eu, les deux premières heures, un courant de 1 nœud au 275° ; l’heure suivante, un courant de 2 nœuds au 170°, la dernière heure, un courant de 3 nœuds au 310°.

• Il s’agit donc maintenant de tracer la **Route-fond**. On peut, pour se faciliter la tâche, faire la correction due aux courants globalement à la fin, puisqu’il s’agit de faire une addition de vecteurs.

• Sachant qu’il y a toujours une **zone d’incertitude** (fonction du barreur, de l’état de la mer, etc.), d’un rayon égal à 10% de la distance parcourue, placer sur la carte le **disque dans lequel se trouve réellement le bateau à 8h30**. Peut-être pourrez-vous répondre à l’angoissante question : **Est-ce possible qu’on ne perçoive pas encore le signal du Phare des Moines ?!**

✴✴✴ Situation didactique développée ✴✴✴ et comptes rendus d'expériences

1 – Enoncé : une façon optimale de gérer ses notes d'examen...

Dans son année scolaire, un étudiant passe en maths et en physique un partiel par trimestre (il y en a trois) et un examen terminal. Dans chaque matière, ces devoirs ont pour coefficients : 2, 3, 3 et 4. Pour avoir la validation de son année, il doit obtenir dans chaque matière une moyenne coefficientée supérieure ou égale à 10, ou deux moyennes supérieures ou égales à 8 dont la somme soit supérieure ou égale à 21.

Partie 1

1° voici les notes de trois élèves. Leur année est-elle validée ?

Alain	**tri.1 (2)**	**tri.2 (3)**	**tri.3 (3)**	**exa. (4)**
maths	11	12	10	8
physiq.	9	9	13	12

Béatrice	**tri.1 (2)**	**tri.2 (3)**	**tri.3 (3)**	**exa. (4)**
maths	12	13	10	6
physiq.	11	11	11	11

Cédric	**tri.1 (2)**	**tri.2 (3)**	**tri.3 (3)**	**exa. (4)**
maths	11	12	10	8
physiq.	9	9	13	12

2° Voici les notes des trois trimestres d'un élève. Quelles notes peut-il avoir à l'examen pour obtenir son année ?

Denis	**tri.1 (2)**	**tri.2 (3)**	**tri.3 (3)**	**exa. (4)**
maths	10	7	9	
physiq.	10,5	9	12	

3° Et pour cette autre élève ?

Eve	**tri.1 (2)**	**tri.2 (3)**	**tri.3 (3)**	**exa. (4)**
maths	10	4	8	
physiq.	16	11	13	

Partie 2

Dans cette partie, on se propose de reprendre les questions de la partie 1, mais en faisant une représentation graphique des différentes situations. Comme on a été amené à le faire dans la partie 1, on va représenter les notes de maths et de physique sur deux axes (repère orthonormé). Pour un élève donné, chaque trimestre sera représenté par le point dont les coordonnées sont les notes obtenues au cours du trimestre. De même pour l'examen et pour les moyennes.

1° Pour chacun des trois premiers élèves, représenter sur trois graphiques différents les points T_1, T_2, T_3 et E correspondant aux trois trimestres et à l'examen.

Qu'est-ce que le point M (moyenne finale) pour les points T_1, T_2, T_3 et E ? Le construire pour chacun des trois élèves. Vérifier avec les calculs de la partie 1.

2° Pour le quatrième élève, représenter les points T_1, T_2, T_3. Construire, sans calcul, le point A correspondant aux moyennes des trois trimestres. Placer quatre points M (moyennes finales) qui permettraient à Denis d'obtenir sa validation (on les notera M, M', M" et M‴).

Construire dans chacun des cas le point E correspondant aux notes d'examen (on les notera E, E', E" et E‴).

Comment généraliser à toutes les situations de succès ?

3° Application : refaire le même travail avec les notes d'Eve. Comparer avec la méthode analytique.

Remarque : *Ce problème peut trouver sa place à deux moments différents de l'activité didactique :*

** ou bien en introduction guidée de la notion de moyenne et barycentre*

** ou bien en application de ces deux notions à titre de synthèse.*

Il vise essentiellement deux objectifs :

** mettre en place ou utiliser de façon opératoire les deux notions précédentes, et les types de repérage (numérique, graphique) qui y sont liés,*

** mettre en œuvre un changement de cadre algébrique-graphique afin de montrer et exploiter les limites et l'intérêt de chacun des deux cadres.*

2 – Compte rendu d'expérience en classes de 1ère ES

L'activité

<u>1. Prérequis</u>

☞ Moyenne pondérée.

☞ Résolution graphique d'inéquations du premier degré à deux inconnues.

☞ Définition et construction d'un barycentre (éventuellement uniquement avec des coefficients positifs).

☞ Définition et propriété de l'homothétie.

2. Déroulement de l'activité

☞ Une séance d'une heure pour la phase 1.

☞ Une séance d'une heure pour la phase 2.

3. Gestion de la classe

☞ Travail individuel, avec confrontation des résultats avec le voisin, pour la phase 1.

☞ Travail en groupes (3 ou 4 élèves) pour la phase 2.

☞ Prévoir suffisamment de papier millimétré pour éviter la perte de temps des tracés.

***Quelques observations*.**

1. Activité qui démarre bien, puisque le début est très accessible à tous.

2. La fin de la partie 1 surprend certains élèves qui n'avaient pas perçu qu'il s'agissait d'une traduction de contraintes, et qui n'attendaient donc pas des inéquations.

3. A la question 2 de la partie 2, on obtient dans pas mal de groupes des idées intéressantes, souvent incomplètes, plutôt orientées "équilibre", ou plutôt "vectorielles".

Il est intéressant de les laisser s'exprimer, se développer, voire se compléter. L'enseignant doit donc naviguer subtilement entre une attitude d'institutionnalisation (synthèse des idées) et une ouverture permanente.

Ce n'est qu'après un temps assez long d'appropriation des différentes idées qu'il faut passer réellement à la synthèse globale, montrant l'intérêt du travail géométrique (barycentre, vecteurs, homothéties), la richesse de la notion de barycentre (aspect vectoriel, "équilibre", moyenne pondérée), et l'efficacité de va-et-vient entre les cadres analytique et géométrique.

4. La dernière question sert à convaincre de l'efficacité de l'outil barycentre, et à vérifier l'appropriation par les élèves de la synthèse faite précédemment. D'ailleurs plusieurs prolongements ont eu lieu (différents les deux années), à l'initiative des élèves, en partant de situations "extrêmes" : notes de trimestre très faibles, ou très fortes, y a-t-il des cas où ce n'est plus la peine de passer l'examen car c'est déjà "foutu", ou au contraire déjà "gagné" ?

Mise en regard avec la problématique.

Cette activité peut se faire très tôt après un cours minimal sur les barycentres. Elle en montre l'intérêt, et permet aux élèves de fixer des images mentales de certaines propriétés.

L'appel à un calcul vectoriel simple, à une utilisation abordable de l'homothétie[1] peut redonner à beaucoup d'élèves de cette série le goût pour la géométrie qu'ils avaient perdu en pratiquant des exercices trop "gratuits".

Comme indiqué dans la description de la problématique n°1, cette activité est bien centrée sur les verbes **représenter, décrire, localiser**. De même, cette activité permet bien de "partir du réel, y revenir, afin de convaincre des nécessités d'appel aux concepts mathématiques et de l'efficacité de leur fonctionnement". Elle fait aussi "une large place à la représentation graphique et, dans ce registre, conduit à des conflits socio-cognitifs".

De plus, elle contient, de manière intéressante, deux théorèmes en action : l'associativité de la barycentration (de façon évidente), et la linéarité des coefficients (d'ailleurs, la deuxième année, plusieurs groupes d'élèves m'ont proposé de remplacer le système [(A(8), E(4)] par le système [(A(2), E(1)]). Il est alors bien plus facile de les institutionnaliser par la suite dans le cours.

Cette activité pourrait aussi, un peu remaniée, servir à définir la notion même de barycentre.

3 – Compte rendu d'expérience en classes de 1ère S

$\boxed{\text{Compte rendu 1998/1999}}$

Une fois l'énoncé distribué, les élèves semblent intéressés par cette façon de "moyenner". Au vu de ce que j'ai pu observer, je dirais que la problématique posée par cet exercice comporte à n'en pas douter un côté motivant.

Les premières difficultés surgissent au moment de traduire les conditions sur x et sur y du type $Ax + By + C > 0$ (pour Denis et pour Ève, questions 2° et 3° de la première partie). La résolution de ce type d'inéquations linéaires à deux inconnues ne revient pas d'elle-même et je suis obligé de donner un petit coup de pouce pour les remettre sur les rails et pour qu'ils envisagent une résolution graphique. Cette

[1] L'image d'un seul point suffit pour obtenir le tracé complet si on utilise le parallélisme et les distances.

partie du programme de 2^{nde} ne semble donc pas acquise pour beaucoup et a sans doute été trop vite survolée comme le sont de nombreuses notions en 2^{nde} faute de temps suffisant.

Par contre, mais c'est bien compréhensible en $1^{ère}$ S, la piste barycentre est assez vite envisagée. Il y a cependant des hésitations car certains trouvent les constructions trop imprécises (« pour "faire" 1/3 par exemple… »). Mais leur satisfaction était évidente d'avoir pu ''mettre un nom'' sur cette activité qui est vite devenue "l'activité barycentre"…

A ce stade, il faut noter également le défaut de réinvestissement de la méthode des barycentres partiels qui ne vient pour ainsi dire pas à l'esprit des élèves. Il s'en suit alors des écritures vectorielles "lourdes" faisant intervenir tous les point T_1, T_2, T_3, E et M….

D'où mon deuxième coup de pouce en suggérant d'alléger tout cela…. Finalement, la traduction du point A comme barycentre de $\{(T_1\,;2),(T_2\,;3),(T_3\,;3)\}$ s'est faite mais non sans mal.

Mis à part ma déception face à ce début de "fiasco" collectif, cet exemple semble avoir beaucoup apporté à ces élèves au niveau de la compréhension et de l'utilisation de barycentres partiels. Cela rejoint sans doute ce que les didacticiens appellent une phase de déséquilibre où il faut que l'élève rencontre un obstacle pour qu'il constate, voire se persuade, que ses connaissances ne fonctionnent plus, ou pas si bien, et intègre de nouvelles connaissances ou intègre mieux celles qu'il pensait dominer.

Un autre problème a surgi lors de la correction de cette activité : de nombreux élèves ont fait des intersections d'ensembles solutions au lieu d'en faire des unions. Cela m'a permis de faire une séance complète sur le ET et le OU en mathématiques, suivi d'une séance sur condition nécessaire et/ou suffisante…

A noter également une "erreur" ou plutôt une réponse inadaptée d'un élève qui avait trouvé, lors de ses premières recherches, qu'il fallait 22 en math. sans penser pour autant à dégager une première contrainte ("passée à la trappe" par presque tous mes élèves), à savoir que x et y ne peuvent dépasser 20 !

Enfin pour le calcul de la moyenne de physique de Béatrice, j'ai trouvé un peu affligeant que plus de la moitié de la classe fasse le calcul…

<u>Commentaire de fin d'activité</u> :

Avant de donner cette activité dans ma classe de $1^{ère}$ S option math., j'avais une petite appréhension car ce sujet est "très math" par rapport aux exercices que je donne habituellement en option dans cette classe. Mais cela a été largement compensé par le fait que ces élèves ont dans l'ensemble assez apprécié de pouvoir ainsi mettre en œuvre un nouvel outil comme le barycentre.

Compte rendu 1999/2000

Dans la première partie, pour Denis et Ève, la plupart des élèves essayent et proposent des valeurs convenables pour la note d'examen de fin d'année en math. et en physique. Certains tentent de rechercher les valeurs "extrêmes" mais pratiquement aucun ne pense à introduire des inconnues, démarche pourtant fortement suggérée par le 1^er^ paragraphe de la deuxième partie (cf. annexe 1, où l'on peut noter de plus une confusion entre moyenne et note à l'examen, et annexe 2). Il faut avouer que cela est assez décevant alors que l'an passé ce manque d'initiative était plutôt marginal.

➯ Il faudrait sans doute rendre l'énoncé de la question 2° de la première partie plus explicite en demandant par exemple *: Trouver l'**ensemble** des notes qu'il doit avoir à l'examen pour réussir son année ?*

Une fois les élèves remis sur la ''piste'' des inconnues x et y, ils ne sont pas sur des rails pour autant… certains rechignent manifestement à traduire les conditions de réussite en terme d'inéquations pour se contenter d'équations, mais de toute façon la plupart sont incapables de poursuivre : comme l'an passé, ils ne savent plus comment résoudre un système d'inéquations du 1^er^ degré à deux inconnues. J'ai même pu observer des tentatives de résolution de l'inéquation $4x + 4y \geq 100$ du style : $4x \geq \dfrac{100}{4y}$ ... !

Il est vraiment accablant pour notre enseignement de voir que de bons élèves qui étaient "performants" en seconde ''dans le cadre du chapitre système" pour résoudre ce genre de questions en sont aujourd'hui incapables hors contexte clairement identifié. Mais j'y vois là une raison supplémentaire de continuer à proposer ce genre de problème ne serait-ce que pour répondre aux détracteurs trop nombreux qui pensent que les math ne servent à rien..!

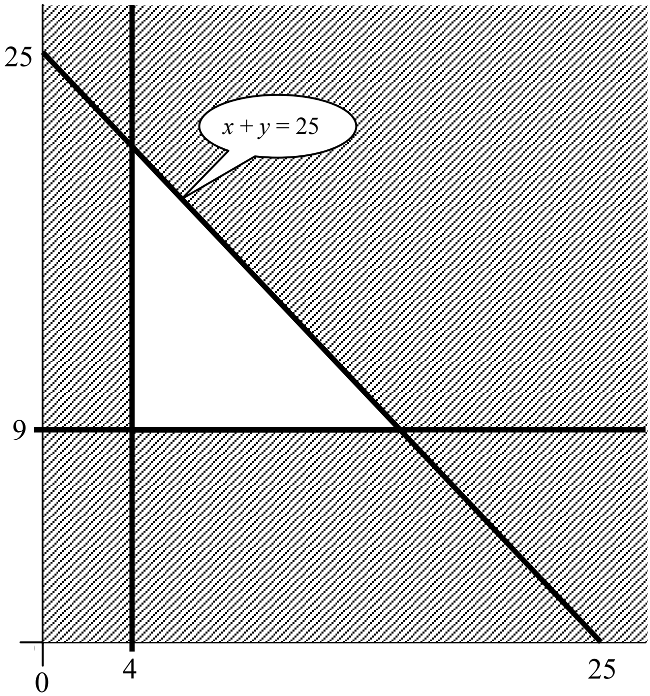
Cette année encore, il y a eu bon nombre d'erreurs concernant la traduction des conditions de réussite et/ou la résolution des systèmes obtenus[2]. Ainsi pour un

[2] Voir éléments de réponse en fin de compte rendu

groupe d'élèves, résoudre le système $\begin{cases} x > 13 \\ y > 9 \end{cases}$, qui traduit l'une des possibilités pour que Denis réussisse son année, revient à résoudre l'inéquation $x + y > 22$ (à nouveau, une séance sur condition nécessaire et/ou suffisante ne sera donc pas du luxe…), puis ce même groupe en traduisant la deuxième possibilité "oublie" de tenir compte du fait que les deux moyennes de mathématiques et de physiques doivent être supérieures ou égales à 8 pour ne retenir que la condition sur leur somme et n'avoir que l'inéquation $x + y \geq 25$ à résoudre. Renseignement pris, il semble que ces élèves aient confondu les deux possibilités et comme dans le système précédent, x et y sont tous les deux supérieurs ou égaux à 8, il n'y avait pas lieu pour eux de faire apparaître cette condition. Il ne faut pas s'étonner alors que ces élèves ramènent le cas de Denis au système $\begin{cases} x + y > 22 \\ x + y \geq 25 \end{cases}$ …

Un autre groupe ramène le cas de Denis au système $\begin{cases} x > 13 \\ y > 9 \\ x + y \geq 25 \end{cases}$ sans doute pour des raisons similaires au groupe précédent, puis cherche à tout prix à avoir une zone solution convenable, mais comme il est parti sur l'idée d'une intersection des solutions, cela l'amène à "tricher" ou à bricoler pour que cela reste crédible…(cf. annexe 3 et graphique page suivante). On retrouve ici des comportements bien répertoriés qui me font souvent dire que nous faisons de nos élèves des "escrocs malgré eux"[3]…

[3] Cf. préface du supplément au Bulletin n°414 de l'A.P.M.E.P. : BAC MATHÉMATIQUES HORIZON 2000 - Contribution du groupe de travail de l'APMEP ''Prospective Bac''



Sur cet exemple, on peut en effet constater que ces élèves qui ont correctement hachuré le “bon” demi-plan pour l’inéquation $y > 9$, hachurent le “mauvais” demi-plan de frontière la droite d’équation

$x + y = 25$

alors que manifestement l’origine ne convient pas ! et se trompent en plus pour x en traçant la droite d’équation $x = 4$ au lieu de $x = 13$ qui là aussi devait sans doute les gêner…

Quel que soit le mode de résolution envisagée, tous ont cependant pensé cette année à ne pas dépasser 20 pour x et y…

Enfin, un seul groupe ayant compris qu’il s’agissait de l’union des solutions de deux systèmes, cela confirme bien la nécessité de travailler dans nos classes scientifiques sur le ET et le OU en mathématiques …

Dans la deuxième partie, les contenus s’appauvrissent considérablement et l’on peut constater à quel point les élèves maîtrisent assez mal le calcul vectoriel. Peu d’élèves pensent à prendre l’initiative de rendre les constructions demandées plus aisées et du coup plus précises.

➭ Faut-il aller jusqu’à le suggérer dans l’énoncé ?
(*Trouver une construction aisée du point M ?*)

Comme l’an passé, les élèves mettent assez vite un nom sur ‘‘l’outil’’ mathématiques à utiliser ici mais le font en général assez mal, ce qui est somme toute assez normal car le calcul barycentrique est tout nouveau pour eux. Ainsi, toutes les rédactions comportent un flou important, ce qui donne par exemple :

« *D'après la formule du barycentre on a* » :

$$\overrightarrow{GM} = \frac{2\overrightarrow{GT_1} + 3\overrightarrow{GT_2} + 3\overrightarrow{GT_3} + 4\overrightarrow{GE}}{12}$$

sans préciser que ceci est vrai **pour tout point G du plan**…, puis :

« *on pose* » :

$$G = T_1 \qquad \overrightarrow{T_1M} = \frac{3\overrightarrow{T_1T_2} + 3\overrightarrow{T_1T_3} + 4\overrightarrow{T_1E}}{12}$$

Encore, ici, ces élèves ont judicieusement pris un point G, mais dans plusieurs copies c'était le point O (origine des repères sur leurs figures ? on ne sait trop…) que l'on débaptisait T_1 ou E ensuite…

Ce n'est pas tant la disparition des quantificateurs qui est à mettre en cause ici mais surtout le fait que l'on ait “fini” par accepter ou tolérer ce type de rédaction ! Certes, ce n'est pas facile pour tous nos élèves mais je crois qu'il ne s'agit pas ici uniquement de rigueur, “rigueur indispensable” diront certains, ou au contraire excès de rigueur diront d'autres car “avec les élèves qu'ils ont c'est bien trop demander” … Pour moi l'enjeu est bien plus important. Je suis en effet persuadé qu'il y a un côté très formateur à faire réfléchir nos élèves sur ce genre de formulation et que les mathématiques ont leur rôle à jouer comme d'apprendre à ne pas généraliser à partir d'un cas particulier ou au contraire de savoir particulariser une situation générale…

En ce qui concerne les constructions proprement dite, nombreuses sont celles qui sont peu exploitables. Par exemple, question 1°, de nombreux groupes se sont contentés de correctement placer les points T_1, T_2, T_3 et E ainsi que le point M mais sans indiquer comment le **construire** ou alors en donnant une égalité vectorielle mais sans l'exploiter pour la construction. Par exemple :

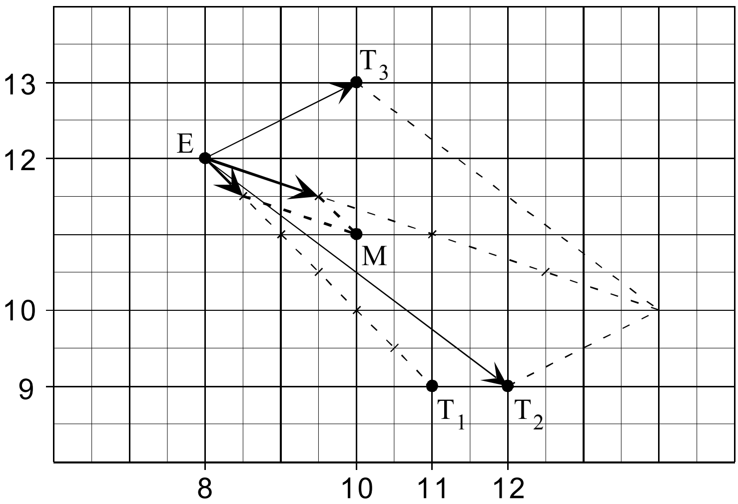
On utilise le barycentre pour trouver le point M.

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ET_3} + \frac{1}{4}\overrightarrow{ET_2} + \frac{1}{6}\overrightarrow{ET_1} \quad \left(\overrightarrow{EM} = \frac{3\overrightarrow{ET_3} + 3\overrightarrow{ET_2} + 2\overrightarrow{ET_1}}{12}\right)$$

Il en va de même pour trouver le point M de Béatrice et de Cédric.

aurait très bien pu s’exploiter pour obtenir une construction relativement aisée comme ci-dessous :

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{ET_3} + \overrightarrow{ET_2}) + \frac{1}{6}\overrightarrow{ET_1}$$



Il en est de même pour la question 2° où l’on place correctement les points T_1, T_2, T_3 ainsi que le point A mais sans indiquer comment le **construire**.

➯ La question posée n’est-elle pas assez précise dans ce que l’on “exige” des élèves ? Autrement dit, faut-il préciser de construire le point A *autrement qu’à l’aide de ses coordonnées*..?

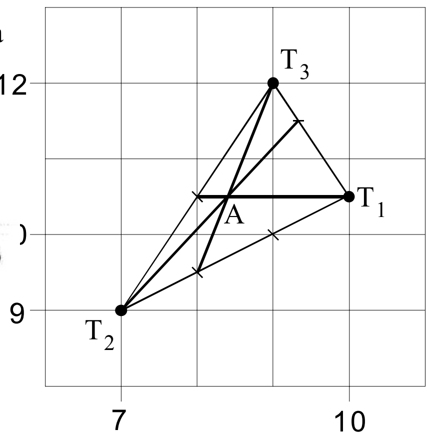
De plus, parmi les rares **constructions proposées**, on en rencontre malheureusement trop qui ne reposent que sur de vagues bricolages erronés comme dans l’exemple ci-dessous :

Graphique de Denis :

$$T_1A = \frac{3\overrightarrow{T_1T_2}+3\overrightarrow{T_1T_3}}{8}.$$

le point A est à $\frac{3}{8}T_1T_2$ et $\frac{3}{8}T_1T_3$ à partir de $\overrightarrow{T_1}$

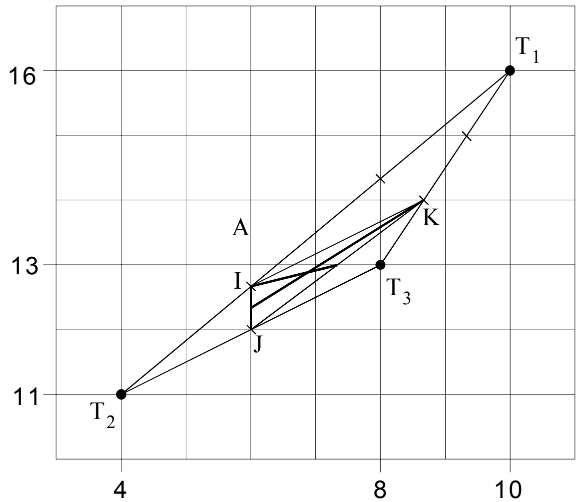
ou encore question 2°, pour Denis, la construction ci-contre avec pour commentaires ceci :



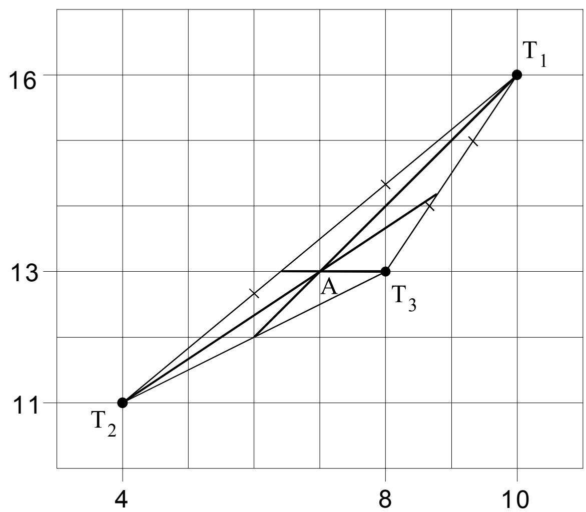
On divise $[T_2T_3]$ en deux car T_1 est coefficient 2
On divise $[T_1T_3]$ et $[T_1T_2]$ en trois car T_2 et T_3 sont coefficient 3

construction qui semble “coller” au vu des coordonnées “attendues” pour A (8,5 ; 10,5)…

mais en gardant cette “méthode” pour Ève, cela ne “colle” plus aussi bien car les coordonnées attendues pour A devraient être (7 ; 13)…



Du coup ces élèves tels des “escrocs” (malgré eux.. ?), sont amenés à “tricher” comme indiqué ci-contre ..!



Il faut cependant admettre que “placer des points M puis construire le point E correspondant” semble une tâche trop difficile – sur quel critère placer M ? - et que le “bon” ordre aurait été sans doute de demander de placer des points E (grâce à la première partie) puis d'en déduire le point M correspondant.

Pour conclure…

Si l'on rajoute que cette année, pratiquement tous les élèves ont posé le calcul pour la moyenne de physique de Béatrice… ce manque de “lucidité” semblant être vraiment une constante chez nos élèves, cela ne peut que nous conforter encore davantage dans le fait qu'il nous faut à tout prix modifier nos types d'exercices, guidés avec micro-ascenseurs intégrés, que nous leur donnons l'habitude de résoudre, et leur donnant régulièrement des problèmes qui leur permettent de chercher, d'expérimenter - jusqu'à plusieurs pistes en sachant revenir parfois en arrière - de formuler des conjectures et les soumettre à la preuve, de faire montre d'un minimum d'esprit critique et contrôler la validité des solutions proposées, etc. et de modifier nos critères d'évaluations en conséquence.

DENIS : éléments de réponse

Avec E(x ; y) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{68+4x}{12} > 10 \\ \dfrac{84+4y}{12} > 10 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{68+4\text{x}}{12} \geq 8 \quad \text{et} \quad \dfrac{84+4\text{y}}{12} \geq 8 \\ \dfrac{152+4x+4y}{12} \geq 21 \end{cases}$$

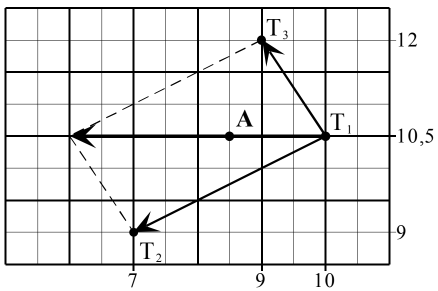
$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} x > 13 \\ y > 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \geq 7 \quad \text{et} \quad y \geq 3 \\ x+y \geq 25 \end{cases}$$

Si l'on considère $T_1(10 ; 10{,}5)$, $T_2(7 ; 9)$ et $T_3(9 ; 12)$, le point A est le barycentre de

$$\{(T_1 ; 2), (T_2 ; 3), (T_3 ; 3)\}$$

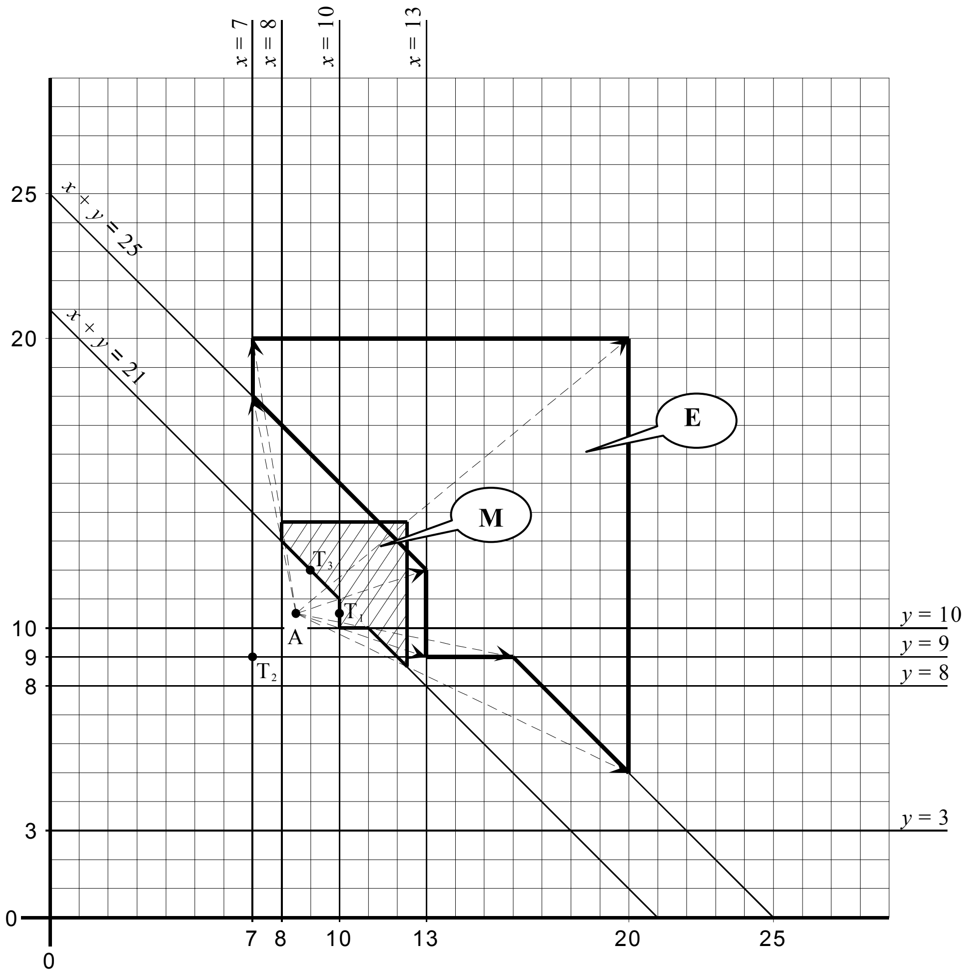
et $\overrightarrow{T_1A} = \dfrac{3}{8}\left(\overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{T_1T_3}\right)$.

Coordonnées de A : (8,5 ; 10,5).



Le point M est le barycentre de $\{(A\,;8),(E\,;4)\}$ d'où $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et donc E a pour image M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$.

avec les notes de Denis, il est aisé de ‘‘ prendre les $\frac{3}{8}$ ’’ …



EVE : éléments de réponse

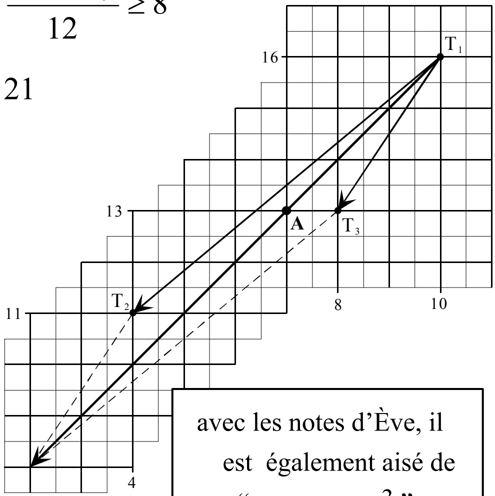
Avec E(x ; y) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{56+4x}{12} > 10 \\ \dfrac{104+4y}{12} > 10 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{56+4x}{12} \geq 8 \quad \text{et} \quad \dfrac{104+4y}{12} \geq 8 \\ \dfrac{160+4x+4y}{12} \geq 21 \end{cases}$$

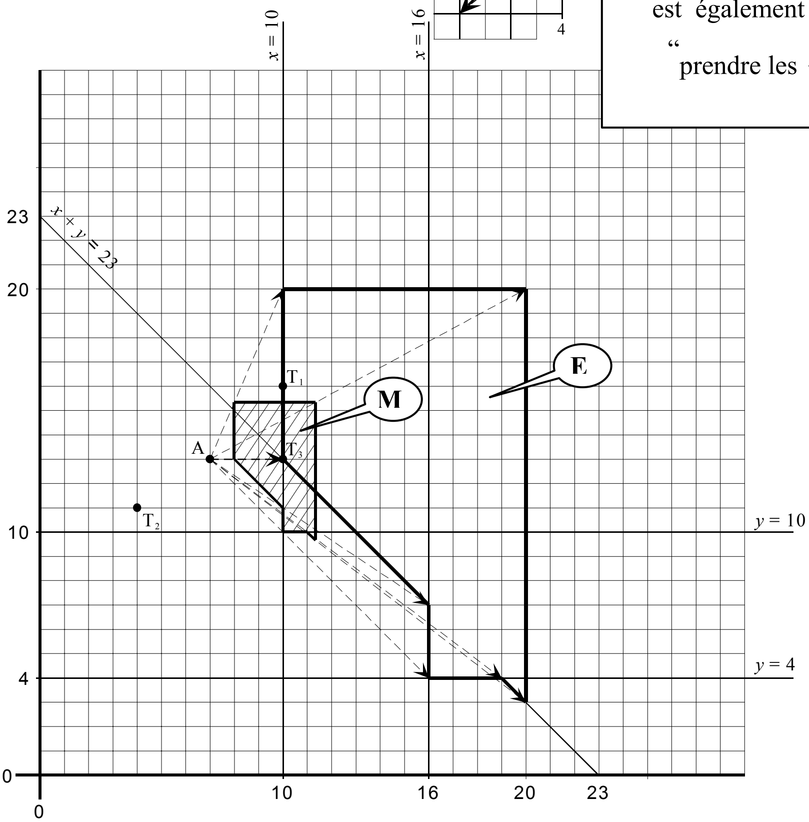
C'est-à-dire :

$$\begin{cases} x > 16 \\ y > 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \geq 10 \quad \text{et} \quad y \geq -2 \\ x + y \geq 23 \end{cases}$$

On considère $T_1(10 ; 16)$, $T_2(4 ; 11)$ et $T_3(8 ; 13)$.
Coordonnées de A : (7 ; 13).



avec les notes d'Ève, il est également aisé de "prendre les $\frac{3}{8}$" …



Annexe 1

2°) Denis: $\frac{120 - (2\times10 + 3\times7 + 3\times9)}{4} = 13$ (pour les maths)

Le nombre 120 représente la somme des moyennes pondérées égale à 10 $(2\times10 + 3\times10 + 3\times9)$.

Physique : $\frac{120 - (10{,}5\times2 + 3\times9 + 3\times12)}{4} = 9$

Pour réussir son année, Denis doit obtenir à son examen de fin d'année.

3°) Ève : maths : $\frac{120 - (10\times2 + 3\times4 + 3\times8)}{4} = 16$

Physique: $\frac{120 - (16\times2 + 11\times3 + 13\times3)}{4} = 4$

confusion entre moyenne et note à l'examen

Le chiffre 4 ne peut pas être accepté comme moyenne de Physique. Pour que Ève réussisse son année, il faut que ses 2 moyennes pondérées soient supérieures ou égales à 8.
Or $4 \leq 8$ donc Ève est obligé d'obtenir au moins un 8 à l'examen de fin d'année en Physique.
Pour réussir son année, Ève doit obtenir à son examen de fin d'année.

Généralisation:

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et compris entre 0 et 20.

Soit x la moyenne pondérée en maths.

Soit y la moyenne pondérée en physique

$$\begin{cases} x = \dfrac{120 - (2a + 3b + 3c)}{4} \\ y \geqslant 21 - x \end{cases}$$

Exemple. $a = 11 \quad b = 12 \quad c = 10$

$a' = 9 \quad b' = 9 \quad c = 13$

$$x = \frac{120 - (22 + 36 + 30)}{4} = 8$$

$$x + y \geqslant 21$$

$$y \geq 21 - x \geq 21 - 8 \geqslant 13$$

$$y \geqslant 13$$

Annexe 2

(2) $10 \times 2 + 7 \times 3 + 9 \times 3 + 4x = 12 \times 9{,}5$

$x = 11{,}5$

Si Denis a un 11,5 à la fin de l'année en maths il aura une moyenne de 9,5 et aura besoin de 11,5 de moyenne en physique avec la note $x = (12 \times 11{,}5 - 2 \times 10{,}5 + 9 \times 3 + 12 \times 3) \div 4 = 13{,}5$

Si Denis a un 11,5 en maths et un 13,5 en physique (ce qui semble le plus probable) il réussira son année.

Annexe 3

(3) Si Eve a un 10 en maths et un 13 en physique (ce qui semble le plus probable par stabilité des notes) elle réussira son année

Dans le second cas, c'est à dire si il a une des moyennes comprises entre 8 et 10*, il faut que la somme des 2 moyennes soit supérieure ou égale à 21.

* inclus

$$\left(\frac{2\times10 + 3\times7 + 3\times9 + 4x}{12}\right) + \left(\frac{2\times10{,}5 + 3\times9 + 3\times12 + 4y}{12}\right) \geqslant 21$$

$$\frac{152 + 4x + 4y}{12} \geqslant 21$$

$$\frac{38 + x + y}{3} \geqslant 21$$

$$38 + x + y \geqslant 63$$

d'où le système : $\boxed{x + y \geqslant 25}$

$$\begin{cases} x > 13 & \Rightarrow \text{droite d'équation } x = 13 \\ y > 9 & \Rightarrow \text{droite d'équation } y = 9 \\ x + y \geqslant 25 & \Rightarrow \text{droite d'équation } y = -x + 25 \end{cases}$$

Toutes les valeurs présentent dans le triangle sur le graphique sont solutions du système.

PROBLÉMATIQUE N° 2

ÉTUDE DE CERTAINES CONFIGURATIONS PLANES OU SPATIALES

REPRÉSENTATION ET MESURES ASSOCIÉES

Généralités

Aux activités relatives à cette problématique sont associés des contenus de natures très variées. Les activités sont repérées par des verbes d'action à référence mathématique comme :

représenter, conjecturer, justifier, calculer.

La signification des activités sur les configurations (assemblage organisé, structuré d'objets mathématiques élémentaires) est donc de plusieurs ordres et correspond à plusieurs objectifs spécifiques :

- connaissances (incontournable) d'objets socio-culturels de base,
- fonctionnement dialectique du raisonnement déductif et du contrôle perceptif, par une anticipation fiable et efficace,
- apprentissage d'outils de représentation et de description de morphologies géométriques.

Dans la recherche mathématique actuelle, les méthodes géométriques interviennent avantageusement tant en algèbre que, par exemple, en analyse, en statistique, en biologie, en économie, en physique théorique, en chimie. En même temps, dans les enseignements secondaire et supérieur, l'usage du cadre graphique se limite surtout à une fonction de représentation et de lieu d'apprentissage, puis d'évaluation de techniques et d'algorithmes. S'il sert quelquefois d'appui heuristique et intuitif à la découverte puis à la preuve, il n'intervient que très rarement pour contrôler l'existence de propriétés ou pour justifier des conjectures sous prétexte d'illégitimité. Ceci contribue à maintenir mutuellement étanches les cadres géométrique et algébrique.

Cependant, en particulier dans le fonctionnement professionnel du mathématicien, le cadre graphique a un pouvoir capable d'expliquer et de convaincre, comparable à celui de la démonstration canonique. Ceci pourrait être bien souvent vrai dans notre pratique enseignante. C'est pour cela qu'à travers cette problématique, nous essayons de relier différents cadres (cf. également problématique n°6) en insistant sur le passage légitime et fructueux du niveau de la prévision à celui de la justification.

Mais, en outre, l'usage de plus en plus répandu des calculatrices avec ou sans écran (cf. problématique n°7) rend dérisoires et obsolètes certaines preuves ainsi que la multiplication des calculs et tracés à la main. Certes, il ne s'agit pas de les éliminer de l'enseignement sinon le sens des objets manipulés et des résultats disparaîtrait. Par contre, l'intégration de la puissance des outils informatiques dans l'activité mathématique devrait libérer du temps, favoriser de nouvelles démarches, particulièrement des changements de cadre salutaires à une compréhension approfondie et plus personnalisée, et le passage entre les deux niveaux prévision-justification.

Pour toutes ces raisons, nous envisageons cette problématique relative à l'étude des configurations, comme classe de problèmes où se mêleront, intimement, les cadres géométrique, graphique et algébrique et où le cadre informatique interviendra transversalement pour substituer à des activités algorithmiques traditionnelles des activités favorisant la conjecture et des formes nouvelles de validation.

Situations-Démarches-Contenus

Les listes qui suivent ne prétendent pas être exhaustives quant aux situations et aux contenus. Elles nécessitent d'être élargies, précisées et spécifiées à des niveaux de classe du second cycle ainsi qu'à ses différentes filières. Elles vont nécessairement associer les cadres géométriques, graphiques et algébriques.

Situations	**Démarches**	**Contenus**
♦ Constructions de figures planes (triangles ou quadrilatères en particulier) à partir de la donnée de paramètres ou d'éléments de la figure.	♦ Coordonner et assembler des données élémentaires en une configuration ayant une signification en géométrie plane.	♦ Rappels de propriétés des éléments “remarquables” du triangle et de la classification des quadrilatères selon les critères de directions, d'angles, de longueurs. Vecteurs.
♦ Travaux d'exploration sur le cercle: ses parties, leurs relations, leurs propriétés.	♦ Observer, conjecturer, valider, calculer sur une conception géométrique du cercle.	♦ Invariants du cercle. Invariants métriques caractérisant un angle. Trigonométrie.
♦ Représentations sur la feuille de papier ou sur écran de figures planes et de solides (perspective cavalière).	♦ Opérer avec soin et précision. Désigner les éléments géométriques visibles ou non. Changer de point de vue.	♦ Solides usuels. Propriétés de la sphère, du prisme, de la pyramide, du cylindre et du cône.
♦ Construction et développement de solides (réels ou/et simulés) Recherche de relation surface-volume	♦ Retrouver les relations déjà connues, de nouvelles et utiliser correctement les algorithmes associés. En déduire de nouveaux.	♦ Rappels de longueurs, aires de surfaces, volumes de quelques solides.

♦ Analyse de situations cinématiques simples débouchant sur sinusoïdes, coniques, chaînette, hélice, cycloïde, cardioïdes, franges d'interférences, paraboloïde,...	♦ Etude de courbes ou surfaces définies si possible à partir de phénomènes physiques. Formaliser pour anticiper et valider expérimentalement si possible	♦ Equation cartésienne de certaines courbes, de certaines surfaces et leur représentation à partir d'une relation explicite (ex.: $y=f(x)$, $z=f(x,y)$) ou implicite (ex.: $f(x,y)=0$) ou de relations paramétriques (ex.: $x=f(t)$, $y=g(t)$).
♦ Recherche de l' équation d'une courbe dont on donne des points d'intersection avec les axes ou d'autres éléments en nombre suffisant ou non.	♦ Passer d'un système de représentation à un autre en fonction d'un type de donnée et de question posée.	♦ Autres types de définition en coordonnées semi-polaires, polaires, cylindriques
♦ Passage à la limite de l'intersection au contact	♦ Approximer une fonction par une application linéaire.	♦ Equation de tangentes, de plans tangents.
♦ Etude de familles de courbes vérifiant certaines conditions, familles de droites passant par un point, faisceaux de cercles.	♦ Dégager des invariants parmi les objets géométriques rencontrés. Générer alors des familles de tels objets et étudier des propriétés plus globales	♦ Puissance d'un point par rapport à un cercle. Courbes et droites dépendant d'un ou de deux paramètres.
♦ Représentation d'un ordre et d'un préordre partiels. Recherche d'un chemin dans un graphe.	♦ Associer la liaison entre 2 objets ou 2 sujets à un arc fléché. Traduire les propriétés de la relation en jeu par des propriétés sur un ensemble d'arcs (symétrie, transitivité, cyclicité, pondération, ...)	♦ Notions sur les graphes : sommets, arcs, chemins,...

QUELQUES PROBLÈMES

Contrôler la maîtrise des connaissances sur les quadrilatères

2nde

✳✳✳ 1 ✳✳✳

On donne 2 baguettes de bois (morceaux d'allumette, par exemple) de longueurs respectives a et b.

Construire sur le papier des quadrilatères dont ces deux baguettes seraient des réalisations matérielles des diagonales. Les classer dans un tableau suivant leurs propriétés. Examiner le cas particulier où $a = b$.

Remarque :

Il s'agit d'une situation suffisamment ouverte pour que l'imagination des élèves soit stimulée et que, corrélativement, une révision des figures quadrangulaires soit conduite par réexamen de leurs propriétés. Le contrôle physique peut être mené de concert avec le dessin ce qui permet de valider ou invalider des propositions. La demande de tableau permet d'expliciter une classification après exhaustion. Le problème peut être présenté dès le début de la classe de seconde et présuppose la connaissance des propriétés des quadrilatères particuliers.

2nde

✳✳✳ 2 ✳✳✳

Option Sciences !

On donne cette fois 3 baguettes de longueurs a, b et c. On les articule bout à bout dans cet ordre de façon à obtenir la réalisation matérielle d'une ligne brisée.

1° A quelles conditions peut-on construire sur le papier un triangle, matérialisé par la ligne fermée et dont les côtés auraient pour longueurs a, b et c ? Examiner tous les cas particuliers, les représenter et dresser un tableau de tous les cas possibles.

2° Peut-on construire un triangle dont a et b seraient les mesures de deux des côtés et c serait celle d'une hauteur ? En discuter l'existence et le nombre de solutions.

Remarque :

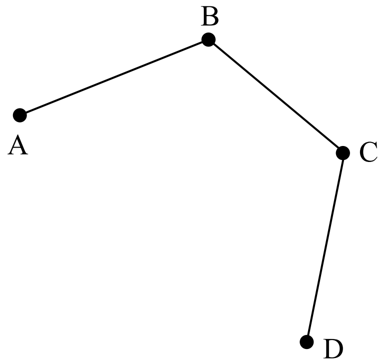
Les objectifs sont ici comparables aux précédents et accessibles encore dès la classe de seconde. Les discussions qui doivent accompagner abondamment la résolution permettront la critique des propositions et l'établissement d'un tableau où les critères d'entrée peuvent varier. `

2nde – 1ère

✷✷✷ 3 ✷✷✷

Option Sciences !

On dispose de trois “baguettes articulées bout à bout”, [AB], [BC] et [CD] comme indiqué ci-contre.



1°) Quels types de quadrilatères convexes peut-on construire à partir de ces trois baguettes par adjonction d’une 4ème baguette librement choisie ? Les représenter. Examiner tous les cas particuliers, les conditions sur les angles et/ou sur les longueurs.

Représenter tous les cas recensés et en dresser un tableau récapitulatif.

2°) Les points A, B et C étant fixés, peut-on espérer en placer les 4 extrémités A, B, C et D sur un même cercle ? A quelles conditions ?

3°) Examiner les contraintes à imposer à une 4ème baguette d'extrémités D et E pour que le quadrilatère convexe associé se referme, E coïncidant avec A.

Trouver une condition géométrique nécessaire mais aussi suffisante et relative aux angles du quadrilatère formé afin que ce dernier cas soit réalisable.

Remarque :

Les élèves doivent, par une réalisation physique ou par une simulation sur écran d'ordinateur, simplement constater que la 3ème baguette [CD] par exemple doit avoir une longueur inférieure au diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

La réponse à la dernière question présuppose l'acquisition préalable des propriétés des angles inscrits dans le cercle et des mesures des arcs interceptés

En rapprochant les exercices 2 et 3, on remarquera que la donnée des trois côtés du triangle ne permet d’en obtenir qu’un seul (à une isométrie près), alors *que la donnée des côtés d'un quadrilatère ne « bloque » pas la forme du quadrilatère.*

Cercles, angles et tangentes aux cercles

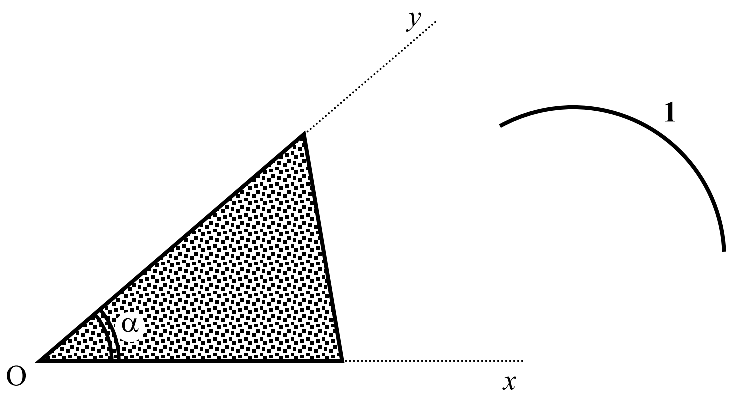
Option Sciences !

2nde

✶✶✶ 4 ✶✶✶

On donne une plaque ayant la forme de secteur angulaire d'angle au sommet noté $x\widehat{O}y$, de mesure α et une tige en forme d'arc de cercle de longueur l.

Peut-on construire sur le papier un cercle tel que l'angle $x\widehat{O}y$ y soit inscrit et intercepte l'arc donné ? Discuter la réalisation papier de cette construction.



Remarque :

Ce problème vise à revoir et renforcer la propriété fondamentale des angles inscrits dans le cercle et une des propriétés des arcs. L'arc de cercle détermine le centre du cercle, le rayon, l'angle au centre, et donc l'angle inscrit. Cependant le contrôle physique de la solution, quand elle existe, conduit à une validation d'une autre nature que celle à laquelle la démonstration conduit. Elle conforte une méthode critique permettant de vérifier la vraisemblance d'un résultat tout autant qu'une heuristique conduisant à une conjecture plus assurée.

2nde

✳✳✳ 5 ✳✳✳

Disposant, comme dans l'exercice 3, de baguettes articulées bout à bout, peut-on espérer trouver un quadrilatère qui a un cercle inscrit. Trouver une condition nécessaire et suffisante (relative aux côtés du quadrilatère).

Ce problème ne nécessite que la propriété relative à la longueur des segments de tangentes à un cercle issues d'un point extérieur au cercle. Il peut être proposé très tôt, par exemple après avoir vu (ou revu) que tout triangle a un cercle inscrit : « Et un quadrilatère ? Qu'en pensez-vous ? ». Les élèves pensent tout de suite au carré et au rectangle (dont ils s'aperçoivent qu'il ne satisfait pas à la condition) et cherchent souvent un critère sur les diagonales, c'est pourquoi « relative aux côtés » a été mis entre parenthèse dans l'énoncé, cette précision pouvant être donnée ou non suivant que l'on souhaite poser le problème de façon plus ou moins ouverte.

2nde

✳✳✳ 6 ✳✳✳

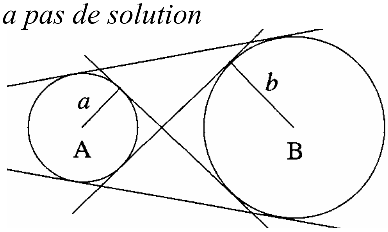
Pour séparer deux pays belligérants, on veut construire une frontière située aux distances respectives a et b de leurs capitales A et B. Est-ce toujours possible ? Si oui donner une ou des solutions.

Remarque *Ce problème peut être proposé dès la classe de seconde à des élèves ayant déjà rencontré des tangentes communes à deux cercles. La notion de distance d'un point à une droite y est rencontrée sous une forme concrète. Il peut permettre de motiver les élèves et surtout, de conduire à des discussions collectives.*

En effet : si $a + b > AB$, on obtient 4 solutions, dont 2 seulement sont compatibles avec le problème de séparation en 2 demi-plans différents pour A et B.

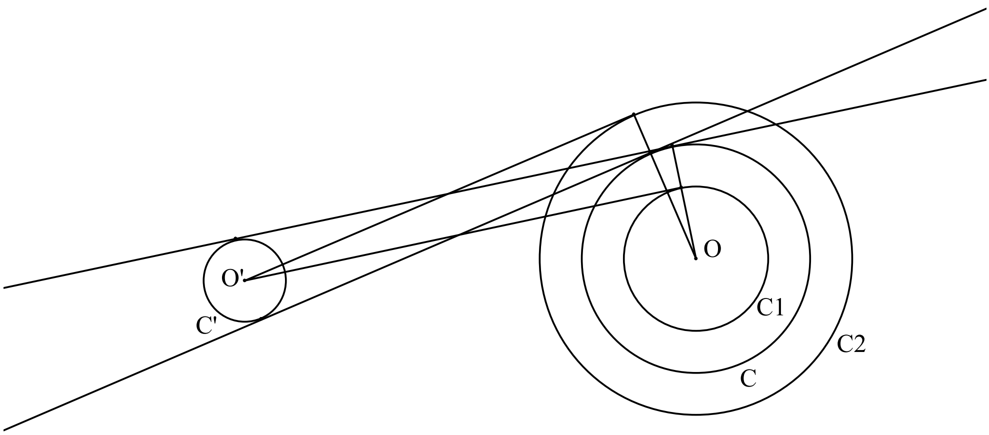
Si $a + b = AB$, il n'y a qu'une solution

Si $a + b < AB$, il n'y a pas de solution



La construction à la règle et au compas des tangentes communes aux deux cercles présente tout de même quelques difficultés, au moins en classe de seconde. Une construction est basée sur les centres d'homothétie, elle n'est plus abordable en seconde, en première si on a assez de temps... Une autre découle de la construction des tangentes à un cercle passant par un point extérieur à celui-ci, elle est abordable plus tôt. Nous en rappelons ici la méthode :

On souhaite construire les tangentes communes aux cercles C (de centre O et de rayon R) et C' (de centre O' et de rayon r). On trace le cercle C_1 de centre O et de rayon R-r, et le cercle C_2 de centre O et de rayon R+r. Les tangentes communes « extérieures » aux cercles C et C' sont parallèles aux tangentes à C_1 passant par O'. les tangents communes « intérieures » aux cercles C et C' sont parallèles aux tangentes à C_2 passant par O'.



2^nde^ – T^ale^

✷✷✷ 7 ✷✷✷

Option Sciences !

Deux pièces de monnaie de valeurs différentes (*interprétons : de tailles différentes*) sont posées sur la table.

Où dois-je placer mon œil dans le plan de la table pour voir ces deux pièces sous le même angle α ?

Variante de l'énoncé de la question, déjà mathématisée :

Trouver l'ensemble des points du plan de cette table d'où ces deux pièces sont « vues » sous un même angle.

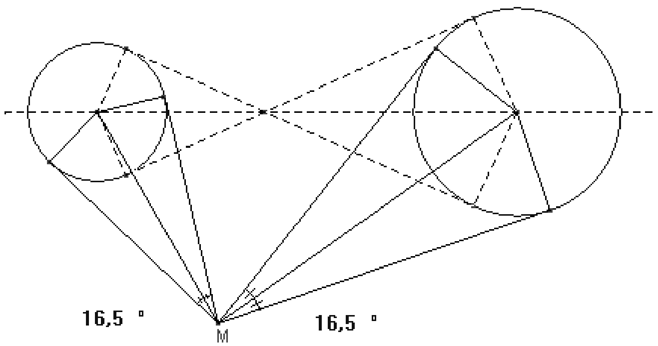
Indication et remarque :

La remarque que deux positions évidentes correspondent aux centres d'homothétie échangeant les cercles permet de choisir un repère dans lequel la résolution analytique est plus simple. Dans le repère d'origine le centre d'homothétie intérieur des cercles de rayon R et r, supposés différents, si a et b sont les abscisses respectives de leurs centres, on obtient l'équation des points satisfaisant la condition. Il suffit d'écrire le sinus des angles $\frac{\alpha}{2}$ *pour chacun des deux cercles. On obtient le cercle d'équation :*

$x^2 + 2\left(\frac{ar^2 - bR}{R^2 - r^2}\right)x + y^2 = 0$ *pour lequel :* $a^2r^2 = b^2R^2$ *en raison de l'homothétie à l'origine.*

Si les pièces étaient identiques, l'ensemble cherché serait l'axe de symétrie échangeant les deux pièces dans le plan.

Il n'est pas nécessaire de mettre en œuvre l'homothétie, le théorème de Thalès suffit. La difficulté dans la résolution de ce problème réside donc dans la modélisation et non dans les connaissances à mettre en œuvre. Il est probable que des élèves n'ayant jamais travaillé sur la configuration des tangentes communes à deux cercles ne feront pas la conjecture nécessaire. C'est pourquoi nous le proposons dans le cadre de l'option sciences ou de séances encadrées par le professeur qui orientera éventuellement la recherche des élèves, ou pourra poser ce problème après avoir fait rechercher les tangentes communes à deux cercles, et remarquer que de deux points de la droite des centres on « voit » les deux cercles sous le même angle.



des problèmes d'optimisation

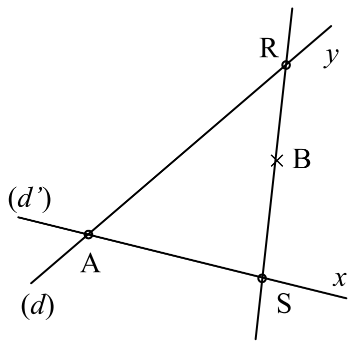
1ère

✶✶✶ 8 ✶✶✶

Deux sentiers rectilignes mènent à une maison forestière A. Comment tracer un nouveau sentier croisant les deux précédents et passant par une seconde maison forestière B de telle façon que le circuit ainsi constitué soit le plus court possible.

Version purement géométrique :

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en un point A, et B un point n'appartenant pas à ces droites, mais au secteur angulaire xAy comme indiqué ci-contre. Chercher une droite contenant B et déterminant avec Ax et Ay un triangle de périmètre minimum.



Remarque

Ce problème de construction se réfère à des propriétés géométriques du triangle. La minimisation demandée fait intervenir le cercle exinscrit dans l'angle A du triangle ARS, la tangente issue de A dont la longueur est égale au demi-périmètre de ce triangle. Le demi-périmètre - donc le périmètre - est minimum lorsque B est le point de contact du cercle et de la tangente SR. On est donc ramené à la construction d'un cercle tangent aux droites (d) et (d') et passant par B. Une méthode pour effectuer cette construction est l'abandon provisoire de la contrainte « passe par B », puis la mise en œuvre d'une homothétie .de centre A.

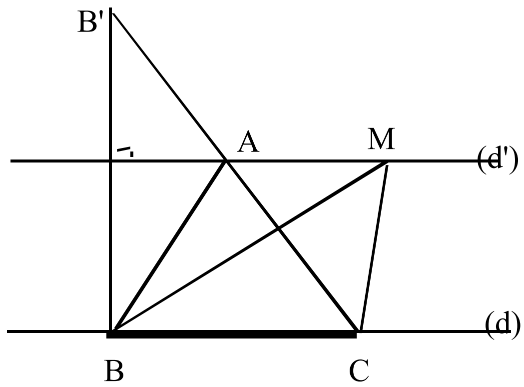
Proposable dès la classe de première, ce problème, riche, a donc la vertu de mobiliser de multiples notions et d'en montrer le caractère outil.

Il serait intéressant d'étudier son extension à l'espace ou tout au moins de demander aux élèves la formulation qu'elle induirait.

2nde

✶✶✶ 9 ✶✶✶

On considère la famille de triangles ayant même base [BC] et même aire. Comment déterminer parmi eux un triangle de périmètre minimum



Remarque

Ce problème vise à réviser des propriétés de périmètre et d'aire d'un triangle dans une situation dynamique et d'optimisation. De plus, une propriété de la symétrie orthogonale, revue dans la problématique 3, est mise en valeur par son apport décisif.

En effet, si B' est le symétrique de B par rapport à (d'), lieu des sommets de MBC de même aire, alors le périmètre est minimum lorsque C, M et B' sont alignés. Dans ce cas, le triangle ABC obtenu est isocèle.

(D'autres exemples de cette utilisation de la symétrie sont proposés dans l'exercice 23 prime de cette problématique, et dans la problématique 3 ;)

un réinvestissement de la trigonométrie dans une situation d'interdisciplinarité

1ère

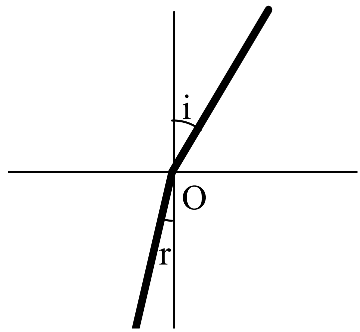
✶✶✶ 10 ✶✶✶

Option Sciences !

Réflexion sur la réfraction

Un rayon lumineux tombe sur une surface en O passant d'un milieu d'indice de réfraction 1 à un milieu d'indice de réfraction $n > 1$.

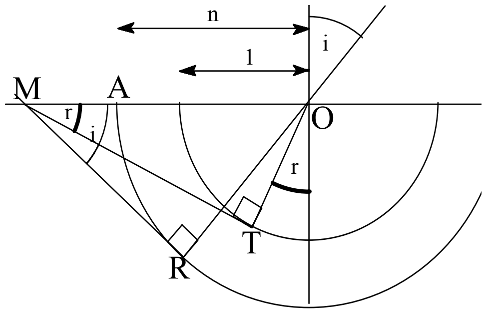
Construire le rayon réfracté quand on connaît le rayon incident, conformément à la loi de Descartes.



Remarque

Les élèves rencontrent en physique cette situation dont on enrichit le sens en l'associant à un problème de construction géométrique. La recherche de la construction proposée repose sur l'exploitation de la loi de Descartes : sin i = n sin r.

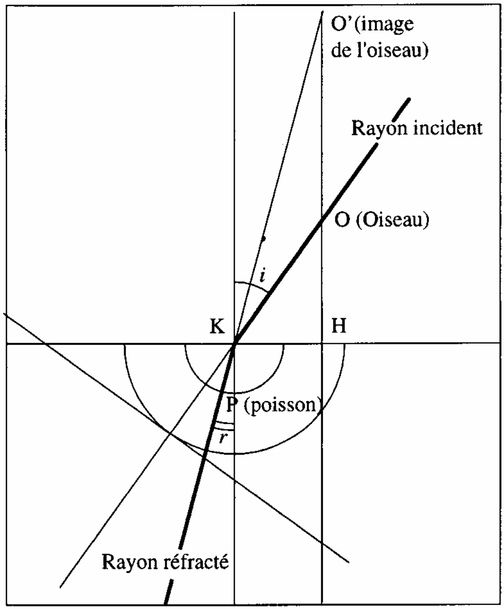
Il s'agit donc de faire apparaître les deux sinus dans des triangles rectangles convenablement choisis (cf ci-contre)



Dans le cadre d'un travail interdisciplinaire, on peut poser l'exercice suivant :

Un poisson nage tout près de la surface de l'eau. Un oiseau vole à 1 m au-dessus de l'eau. Il aperçoit le poisson lorsqu'il est à 10 m de la verticale du poisson. A ce moment, à quelle hauteur le poisson croit-il que l'oiseau se trouve ?

L'image de l'oiseau est à l'intersection de deux rayons lumineux : le rayon réfracté étudié précédemment et la verticale du lieu où il se trouve. Un petit calcul de trigonométrie dans des triangles rectangles montre que l'image de l'oiseau est à près de 9 m de haut.



$\sin i = n \sin r$, *donc* $\cos \widehat{OKH} = n \cos \widehat{O'KH}$, d'où on déduit : $KO' = nKO$ et $KO'^2 = n^2 KO^2$.

Le calcul suivant :

$$HO'^2 = n^2(OH^2 + KH^2) - KH^2, \; d'où \; HO'^2 = 1{,}33^2 \times (1+100) - 100 \approx 78{,}66$$

conduit à $HO \approx 8{,}87$ et donc l'image de l'oiseau est environ à 9 mètres de haut. Il faudrait peut-être expliquer la loi de Descartes aux petits oiseaux pour leur apprendre à se méfier des prédateurs…

Des problèmes pour la représentation mentale dans l'espace.

Toutes classes

✶✶✶ 11 ✶✶✶

On peint les faces d'un cube en bois, puis on découpe ce cube en 1000 cubes identiques à l'aide de traits de scie parallèles aux faces. Combien y a-t-il de petits cubes qui ont au moins une face enduite de peinture ?

Remarque :

Ce problème permet de faire un retour sur le volume du cube et sur une de ses représentations mentales. Le contexte proposé est suffisamment "concret" et doté d'un enjeu pour que les élèves y trouvent une situation favorisant l'approche heuristique. Une solution simple consiste à envisager la propriété contraire de celle qui définit les cubes admettant une face peinte.

Indication de solution :

Les cubes qui n'auront aucune face peinte forment un cube de 8×8×8 = 512 petits cubes. Il y a donc 1000 - 512 = 488 cubes qui ont au moins une face enduite de peinture.

1ère – 2nde

✶✶✶ 12 ✶✶✶

Option Sciences !

Dans une boîte cubique d'arête unité sont enfermées 2050 mouches. Montrer qu'il existe à tout moment une boule sphérique de rayon 1/9 où se trouvent au moins 5 mouches.

Remarque :

Cette situation favorise encore l'approche heuristique tout en nécessitant une représentation mentale des relations d'inclusion entre sphère et cube. Elle permet également de faire un retour sur les volumes respectifs de la sphère et du cube. De plus, enchaîné au problème précédent, de problème voit sa solution facilitée et gratifie la méthode employée. Enfin, la solution proposée montre la qualité opératoire de la notion de moyenne, rarement en œuvre dans les problèmes où elle est plutôt descriptive.

Indication de solution :

Construisons une partition du cube en 8×8×8 = 512 cubes dont le côté mesure 1/8 d'unité. Dans l'ensemble de ces cubes, il y a, en moyenne : 2050 : 512 : 4,004 mouches. Donc un cube au moins contient 5 mouches. Les 512 cubes de cette partition sont recouvrables respectivement par 512 sphères de rayon : $\frac{1}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}1082 < \frac{1}{9}$. *Ainsi, a fortiori, toute sphère de rayon 1/9 peut recouvrir un petit cube. L'une d'entre elles au moins contient au moins 5 mouches.*

2nde

✶✶✶13 ✶✶✶

Option Sciences !

Peut-on construire un tétraèdre régulier à l'aide d'un patron qui a la forme d'un triangle équilatéral de côté 2a ? Si oui, comment faire ? Si non, pourquoi ?

Remarque :

Cet exercice de niveau élémentaire vise à revoir des propriétés de figures particulières planes et de l'espace, puis de reconstruire un solide à partir de son patron. Il suffira de choisir une valeur pour a. L'élève doit concevoir le patron (pas seulement le recopier) qui permettra de construire le solide.

2nde

✶✶✶14 ✶✶✶

Des problèmes de recherche de plus courte distance à la surface d'un solide donnent lieu à des approches heuristiques intéressants, et se résolvent simplement à partir de la construction d'un patron.

Comme dans l'exercice précédent, concevoir et construire le patron d'un solide, soit qu'on a matériellement devant les yeux, soit dont on a une représentation en *perspective cavalière, mobilise les connaissances et les représentations mentales des élèves au sujet des objets de l'espace.*

Quel est le plus court chemin à la surface d'un parallélépipède entre des points situés sur des faces adjacentes : M est sur la face ABCD et P sur la face BCC'B'.

Même problème, les points étant sur des faces non adjacentes.

On peut imaginer des habillages variés… : fourmi attirée par une miette, etc…

Remarquons que le plus court chemin entre deux points de deux surfaces adjacentes n'est pas toujours sur le segment de droite qui coupe l'arête commune. Après avoir étudié le cas le plus fréquent (le plus court chemin coupe l'arête commune), on peut proposer une situation où ce n'est pas le cas. Dans le dessin ci-dessous, les cotes sont données pour un cube de côté 8.

Les élèves sont alors conduits à réaliser plusieurs patrons du parallélépipède pour déterminer par quelle autre face passe le chemin.

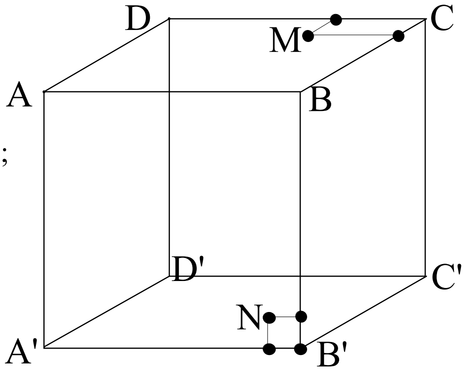
On peut aussi faire utiliser le logiciel Cabri pour chercher où placer des points qui réalisent le cas où le plus court chemin entre deux faces adjacentes ne coupe pas l'arête commune.

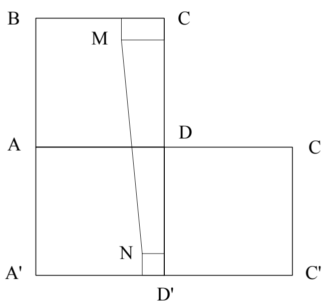
On peut aussi demander le plus court chemin à la surface du parallélépipède entre deux points situés sur des faces non adjacentes.

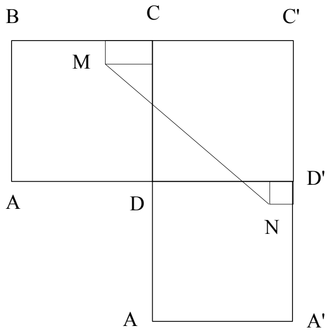
ABCDA'B'C'D' est un cube de 8 cm de côté.

M est à 3 cm de (DC) et à 1 cm de (BC) ;

N est à 1 cm de (AD) et de (DD').







2^{nde}

✳✳✳ 15 ✳✳✳

Un tétraèdre régulier de côté a cm doit être posé sur une face entre deux étagères espacées de 3/4 a cm. Est-ce possible ? Représenter en vraie grandeur la hauteur de ce tétraèdre.

Remarque :

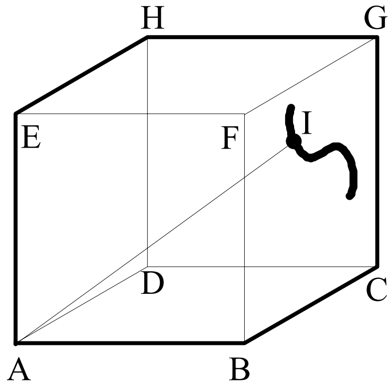
L'exercice nécessite l'application de propriétés de géométrie de l'espace, notamment d'orthogonalité. Les propriétés du triangle rectangle permettent de le résoudre complètement.

2^{nde} + option en $1^{ère}$ L

✳✳✳ 16 ✳✳✳

On considère le cube ci-contre. Le point I matérialise un mobile qui décrit la face BCGF. Afin de suivre son mouvement, on veut construire le segment [AI] en vraie grandeur, pour une position quelconque donnée.

Comment s'y prendre ?



Remarque :

Il s'agit ici de maîtriser la géométrie du cube, puis l'application du théorème de Pythagore suffit. Cet exercice s'intègre tout à fait dans l'enseignement optionnel en série L, dans le cadre des nombres constructibles.

2^{nde}

✳✳✳ 17 ✳✳✳

Une capsule sphérique flotte sur la mer. On peut accéder à des mesures de la calotte émergée, en l'occurrence, son rayon et sa flèche. Ces informations suffisent-elles à trouver le rayon de la capsule ?

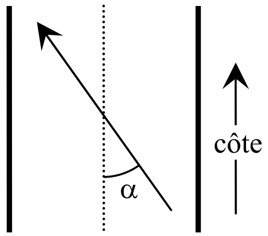
Remarque :

Dès lors que la représentation de la situation est acquise, un simple calcul à l'aide du théorème de Pythagore suffit.

1ère - T^{ale}

✶✶✶ 18 ✶✶✶

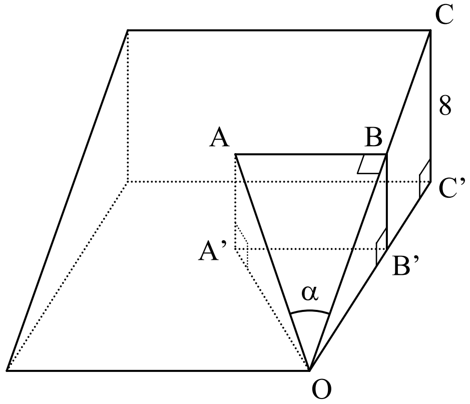
Je monte à bicyclette une côte à 8% (élévation de 8 m pour 100 m sur le plat) sur une route bien droite. Sous quel angle a par rapport à l'axe de la route dois-je choisir ma trajectoire afin de ne plus monter cette côte qu'à 5% ?



Remarque et résolution

L'intérêt et la difficulté de cet exercice résident dans la géométrisation dans l'espace, c'est pourquoi nous l'avons classé au niveau d'une classe de première ou de terminale. La résolution ne nécessite alors que des connaissances de base : théorème de Pythagore et lignes trigonométriques dans le triangle rectangle et on peut envisager de poser ce problème à des élèves de seconde dans une séance type option sciences et même dès le collège si l'énoncé est accompagné de la figure ci-dessous.

On trouvera que l'angle de la trajectoire à choisir avec l'axe de la route est 51,22°.



Sur la figure ci-contre, OC' = 100 = OA' ; d'où : OB'/100 = 5/8 et donc OB' = 62,5.

OB = $\sqrt{3931{,}25} \approx 62{,}7$ *; OA* = $\sqrt{10025} \approx 100{,}125$

cos α = OB/OA ≈ 0,626 d'où α ≈ 51,23°

Remarque : en prenant OA = OC = 100, on trouverait OB = 62,5 et alors $\cos \alpha = 0{,}625$ *d'où* $\alpha \approx 51{,}32°$.

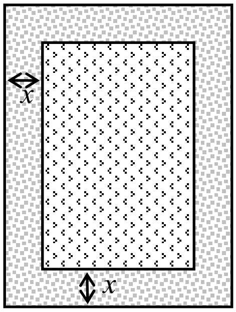
Des problèmes conduisant à des équations du second degré

De nombreux problèmes de géométrie peuvent être modélisés par une équation, une inéquation, un système ou une fonction. On en trouve de nombreux dans les manuels. A la fin de ce chapitre, dans le paragraphe « situations didactiques développées » nous proposons une activité, qui peut être posée en classe sous différentes formes et permet aussi bien la résolution d'une situation géométrique qu'un travail sur le second degré

1ère

✶✶✶ 19 ✶✶✶

Un jardinier se voit proposer un terrain rectangulaire d'aire déclarée 750 m^2. Le métreur prétend que s'il pose une clôture intérieure totale de 10 cm de largeur, il ne perdra que 11 m^2 de surface cultivable. A propos, quelles sont les dimensions du terrain ?



Remarque :

Le problème mathématisé se ramène à la recherche des racines d'une équation dont on connaît la somme et le produit, il est donc abordable dès le début de la classe de première dans différentes séries.

En effet, si x et y sont les dimensions cherchées, on a à résoudre le système : $x\,y = 750$ *et* $0{,}2(x + y) = 11{,}04$

La résolution de l'équation du second degré $X^2 - 55{,}2\,X + 750 = 0$ *permet de trouver les dimensions cherchées : 24,17 m et 31,03 m (valeurs approchées).*

1ère

✶✶✶ 20 ✶✶✶

Option Sciences !

Un prolongement du problème précédent :

1°) Quelle est la largeur de la bande qui permet de partager un champ rectangulaire en deux parties de même aire ?

2°) Certains paysans avaient une solution simple, à savoir : « Le quart de la différence entre le raccourci pour traverser le champ et ce qui longe le champ. ». Commenter cette solution en la comparant à la réponse obtenue au 1°).

Remarque et indication :

1°) En notant L et l la longueur et la largeur du champ, on obtient l'équation $(L-2x)(l-2x)=\dfrac{Ll}{2}$*, équation du second degré d'inconnue x et dont le discriminant est strictement positif. Il reste à éliminer une des racines en tenant compte du fait que x doit être inférieur à l/2 et donc à L/2. La solution est donc* $\dfrac{L+l+\sqrt{L^2+l^2}}{4}$*, ce que l'on peut traduire par : « soustraire la diagonale de la somme des côtés et diviser le résultat par 4 ».*

2°) Traduction : « le raccourci » représente « la diagonale » et « ce qui longe le champ », le demi-périmètre », ou encore « la somme des deux côtés » !

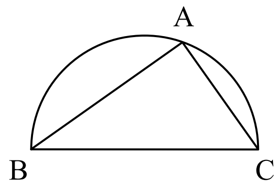
1ère

✶✶✶ 21 ✶✶✶

Option Sciences !

On considère un demi-cercle de diamètre [BC] et de rayon R et soit *p* un réel strictement positif.

Est-il possible d'inscrire dans ce demi-cercle un triangle ABC de périmètre 2*p* ?



Remarque :

Une solution algébrique, facile à démarrer car les contraintes ne font intervenir que le théorème de Pythagore, conduit à des calculs littéraux assez longs (second degré). Les élèves, dans la mesure où ils sont motivés pour résoudre le problème acceptent de se lancer dans des calculs.

Indications de solution *: Appelons x et y les longueurs des côtés AB et AC.*

Les conditions se traduisent par :

$$\begin{cases} x^2+y^2=4R^2\,(\text{théorème de Pythagore dans le triangle } ABC) \\ x+y+2R=2p\,(\text{périmètre du triangle } ABC) \end{cases}$$

Par substitution, ou en faisant intervenir la somme et le produit des racines d'une équation du second degré (les conditions sont ici symétriques par rapport à x et y), on aboutit à une équation du second degré, dont le discriminant est

$\Delta = 4(R^2 + 2pR - p^2)$. *Ce discriminant est positif . En choisissant comme inconnue auxiliaire p/R, on obtient* $\Delta \geq 0$ *pour p/R appartenant à l'intervalle* $\left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$. *D'autre part, p/R doit être supérieur ou égal à 2 (inégalité triangulaire). On obtient donc la condition sur p et R pour laquelle la construction est possible.*

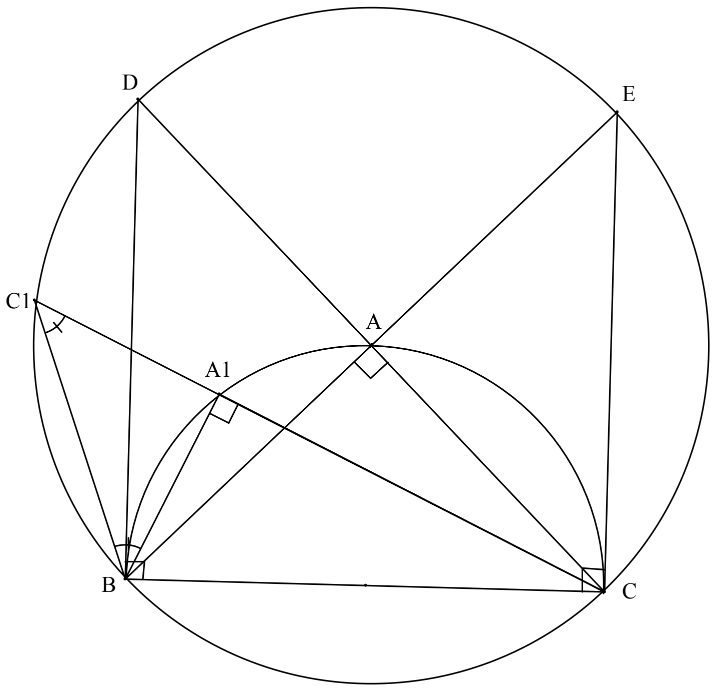
Une solution géométrique *est abordable. Cette construction, dans la solution que nous proposons, utilise la réciproque du théorème l'angle inscrit. On peut être plus ou moins exigeant sur les réciproques suivant le niveau de la classe…*

Supposons le problème résolu et soit A_1 *un point du demi-cercle de diamètre BC et satisfaisant la condition. On prolonge* CA_1 *d'une longueur égale à* A_1B. *On obtient* $CC_1=BA_1+A_1C=2p-2R$. *Le triangle* C_1A_1B *est rectangle et isocèle de sommet* A_1. C_1 *se trouve donc sur le cercle de centre* A_2 *qui passe par BC (arc capable de 45° qui intercepte BC).* $2p=BC+CC_1=2R+CC_1$.

La valeur minimale de 2p est donc 4R (A_1 *en B)*

La valeur maximale est obtenue lorsque CC_1 *est maximal, c'est-à-dire quand c'est la diamètre du cercle de centre* A_2, *soit* $2R\sqrt{2}$. *Cette valeur maximale de 2p est donc* $2R + 2R\sqrt{2}$.

On retrouve la condition sur p/R trouvée précédemment.



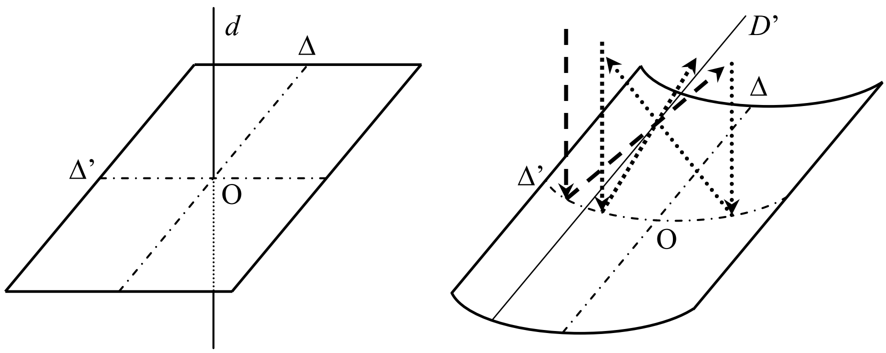
un problème concret conduisant à une équation différentielle.

T[ale]

✶✶✶ 22 ✶✶✶

On dispose d'une plaque rectangulaire souple et réfléchissante. On désigne par Δ et Δ ' les axes médians de la plaque et par D l'axe perpendiculaire à la plaque au point d'intersection O de ses deux axes médians. On la plie selon Δ . Tout faisceau lumineux parallèle (rayons parallèles) à D et incident à la plaque se réfléchit, pour une courbure particulière de celle-ci, en se concentrant selon des points alignés sur une droite D' parallèle à Δ .

L'arc de la courbe selon laquelle se plie Δ ' paraît circulaire. Est-ce vrai ?



Remarque :

Plusieurs objectifs concernent cet exercice :

- se souvenir des lois de la réflexion,

- géométriser cette situation,

- résoudre un problème mathématique où une équation différentielle apparaît :

$$2x = \frac{y}{y'} - y'\,y$$

pour conduire à une solution paraboloïde.

Plutôt que de donner nos indications de solution, nous reproduisons ici une copie d'élève

Voir pages suivantes.

n°4

Maths-

29/11/91

Problème

Enoncé : On se donne une plaque métallique le but est de la plier de sorte à ce qu'un faisceau de rayons parallèles focalise sur une droite après s'être réfléchi sur elle-

---

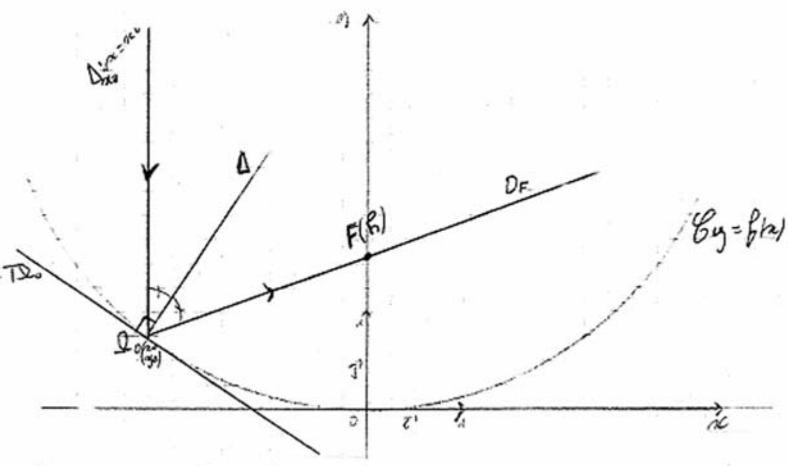
Idées principales et démarche

— on peut penser que la forme sera :

(la droite est parallèle à la plaque et equidistante de 2 points symétrique par rapport au milieu de la plaque, pour simplifier).
On peut faire une coupe pour étudier plus facilement en étudiant la courbure de la plaque en la mettant dans un repère orthonormé.

— Comment se réfléchissent les rayons sur une courbe

Les 2 rayons sont symétriques par rapport à la droite orthogonale à la tangente à la courbe au point où le rayon frappe.



Plan de résolution:

- Sachant que le point F est fixe et que les 2 rayons sont symétriques par rapport à Δ, déterminer l'équation de la tangente pour tout x_0, puis, par intégration déterminer l'équation de $\mathcal{C} : y = f(x)$.

$R_{ON}(O;\vec{i};\vec{j})$

* Déterminer un vecteur directeur de D_F, Δx_0 et en déduire un vecteur directeur de Δ.

- $\Omega_0 \binom{x_0}{y_0} \in D_F$, $F\binom{0}{h} \in D_F$ donc $\vec{\Omega_0 F}\binom{-x_0}{h-y_0}$ est un vect. dir. de D_F

- $\vec{v}\binom{0}{y_0}$ ——— Δx_0

(Je choisi arbitrairement y_0 pour faciliter les calculs par la suite

- $\vec{u}\binom{x}{y}$ est un vecteur directeur de Δ.

Δx_0 et D_F sont symétriques orthogonalement par rapport à Δ donc : $x = \dfrac{-x_0 + 0}{2}$

et $y = \dfrac{(h-y_0)+y_0}{2} = \dfrac{h}{2}$

donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{x_0}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix}$

* Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en Ω_0.
$T\Omega_0$ a pour vecteur directeur $\vec{n}\binom{x}{y}$

$\Delta \perp T\Omega_0 \iff \vec{n}.\vec{u}=0$

$\iff \frac{x(-x_0)}{2} + y\frac{h}{2} = 0$

$\iff y = x.\frac{x_0}{h}$

donc un vecteur directeur de $T\Omega_0$ est $\vec{n}\binom{1}{\frac{x_0}{h}}$

On sait que l'équation de la tangente est de la forme $y = ax$ où a est le coefficient directeur. $\vec{n}\binom{1}{\frac{x_0}{h}}$ est un vecteur directeur de cette tangente donc $a = \frac{x_0}{h}$

* En déduire une équation de $\mathscr{C}$.
Le coefficient directeur est précisément le nombre dérivé de f en x_0.

Donc $f'(x_0) = \frac{x_0}{h}$

d'où $f(x_0) = \frac{x_0^2}{2h}$

* Conclusion.

La plaque devra donc être pliée de sorte à ce que, vue en coupe, elle décrive une parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2h}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où $O\binom{0}{0}$ est la base de la parabole, et où h est la hauteur O au point $F\binom{0}{h}$, sur lequel les rayons focalisent

Quelques problèmes de géométrie paramétrique ou polaire.[1]

Le repérage polaire apparaît dans le programme de première S (rentrée 2001). D'autre part, les coordonnées polaires et paramétriques permettent d'obtenir facilement de belles courbes, variées, ce qui peut facilement motiver les élèves, peut-être lassés des cercles et des droites…. En tous cas, en terminale et même dès la classe de première, un exemple simple peut permettre de donner du sens et donc de favoriser une meilleure compréhension de ces questions de repérage.

Liés à la trajectoire d'un mobile, ces questions peuvent aussi se rencontrer dans des TPE.

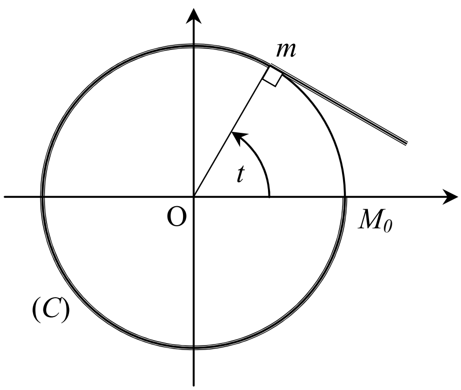
T^ale S

✶✶✶ 23 ✶✶✶

Un fil est enroulé autour d'un cercle. Une extrémité du fil étant fixée, quelle est la courbe décrite par l'autre extrémité du fil, supposé tendu (c'est à dire qu'on fur et à mesure que l'on déroule le fil, le morceau ainsi *développé* constitue une tangente au cercle).

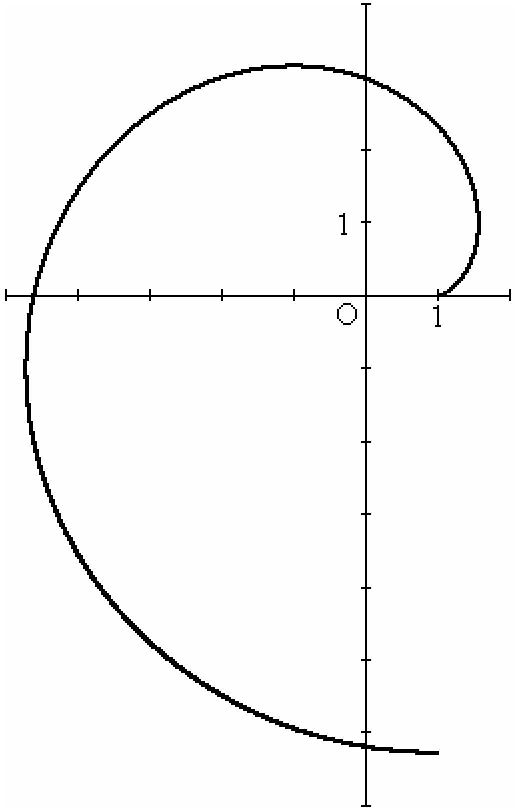
Remarque :

L'un des objectifs de l'exercice est de géométriser la situation. L'exercice pourrait s'accompagner, si nécessaire, d'une manipulation permettant de comprendre la traduction du déroulement et de contrôler le résultat obtenu. Cette traduction de la condition donnée est la suivante : la longueur de l'arc M_0m est égale à celle de l'arc M_0M où M est la position de l'extrémité du fil, M_0 sa position initiale. et m le point correspondant sur le cercle :



---

[1] *On trouvera de nombreux exemples dans la brochure Courbes mathématiques, du Palais de la Découverte, diffusé par l'APMEP)*



On rapporte le plan à un système d'axes orthonormés. R est le rayon du cercle. t est l'angle polaire de m sur le cercle.

Dans ce système, l'équation de la courbe (Γ) décrite par M est :

$$\begin{cases} x = R(\cos t + t\sin t) \\ y = R(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

Cette courbe est appelée développante du cercle.

T^{ale} S – 1ère S

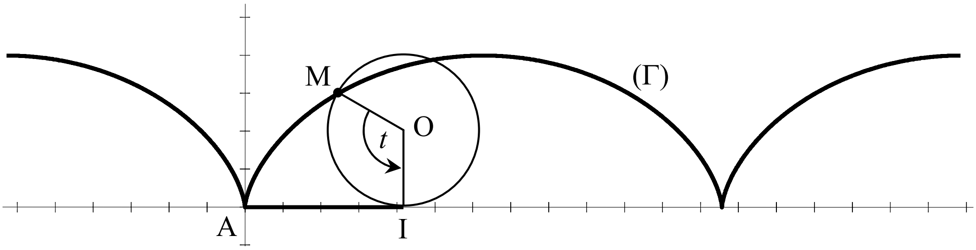
Option Sciences !

✶✶✶ 24 ✶✶✶

Dans un dessin animé, on voit une roue de rayon R qui, dans un plan vertical, roule sans glisser sur un plan horizontal suivant une trajectoire rectiligne. Un petit personnage est fixé en un point de la roue. Peut-on prévoir la trajectoire suivie par ce personnage au cours du mouvement ?

Remarque :

Cette fois encore, dans un cadre ludique, la traduction géométrique de l'énoncé s'exprime en termes d'égalité d'une longueur d'arc et d'une distance parcourue sur le plan.



On a donc si I est le point de contact avec le plan : $AI = \overset{\frown}{MI}$

d'où les équations de la courbe (Γ*) :*

$x = R(t - \sin t)$

$y = R(1 - \cos t)$

Cette courbe, très connue, est appelée cycloïde, encore appelée trochoïde ou roulette. Elle a été étudiée au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, notamment par Pascal :

« La roulette est une courbe si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde, qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on ne trouve rien : car ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que le clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre , après un tour achevé, supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou, un point de sa circonférence, et la terre parfaitement plane ».

$\mathrm{T}^{\mathrm{ale}}$

✷✷✷ 25 ✷✷✷

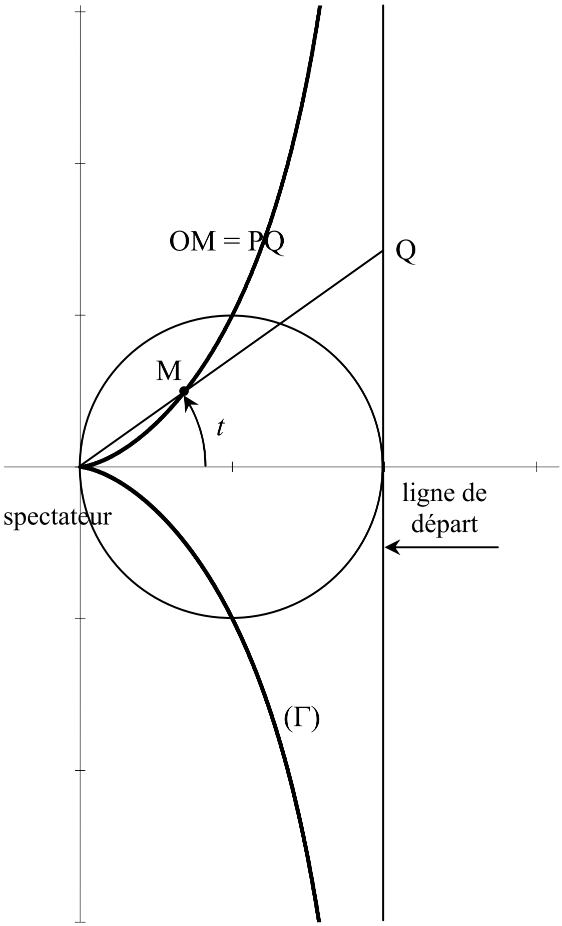
Un spectateur d'une course à pied voit simultanément un coureur sur une piste circulaire et un autre sur une piste rectiligne tangente à la première au point diamétralement opposé au spectateur et correspondant à leur départ simultané. Le premier ayant effectué une rotation $\alpha = \frac{\pi}{4}$, le spectateur voit alors ces deux coureurs parfaitement alignés sur sa ligne de visée.

1° Quelle est la distance séparant les deux coureurs à cet instant ?

2° Si cette situation se prolongeait, quel serait le lieu des points M obtenus en reportant cette distance à partir du spectateur sur la ligne sur laquelle apparaîtraient les deux coureurs (cf figure ci-dessous) ?

Remarque :

Afin de plonger cet exercice dans le cadre de la géométrie analytique, ***donnons-nous un repère polaire de pôle O et d'axe*** $\overrightarrow{OA}$



L'équation polaire du cercle de diamètre 2R est alors : $\rho = 2R\cos\alpha$ *pour* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$,

Dans le triangle OAQ, on a : OQ = $\dfrac{2R}{\cos\alpha}$ *d'où : PQ =* $\dfrac{2R}{\cos\alpha} - 2R\cos\alpha$.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$*, on obtient donc PQ = 2R*$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

L'équation du lieu (Γ*) de M tel que OM = PQ est donc :*

$\rho = \dfrac{2R}{\cos\alpha} - 2R\cos\alpha = 2R\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

La courbe (Γ*) est appelée* ***cissoïde de Dioclès***

T^ale S

✶✶✶ 26 ✶✶✶

Sur un plan horizontal, un observateur O reçoit un signal d'un mobile M qui décrit une droite (D) distante de la longueur a du point O. On sait que le signal ne permet d'évaluer la distance précise OM qu'avec une erreur sur cette distance égale à l (l < a) de part et d'autre de M.

On repère le mouvement de M à partir de son point de départ situé en M_0 projection de O sur (D) par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$.

A un certain moment, connaissant la valeur de $\alpha = \frac{\pi}{3}$ on veut estimer la fourchette de distances dans laquelle se situe la distance de l'observateur au mobile. Comment faire ?

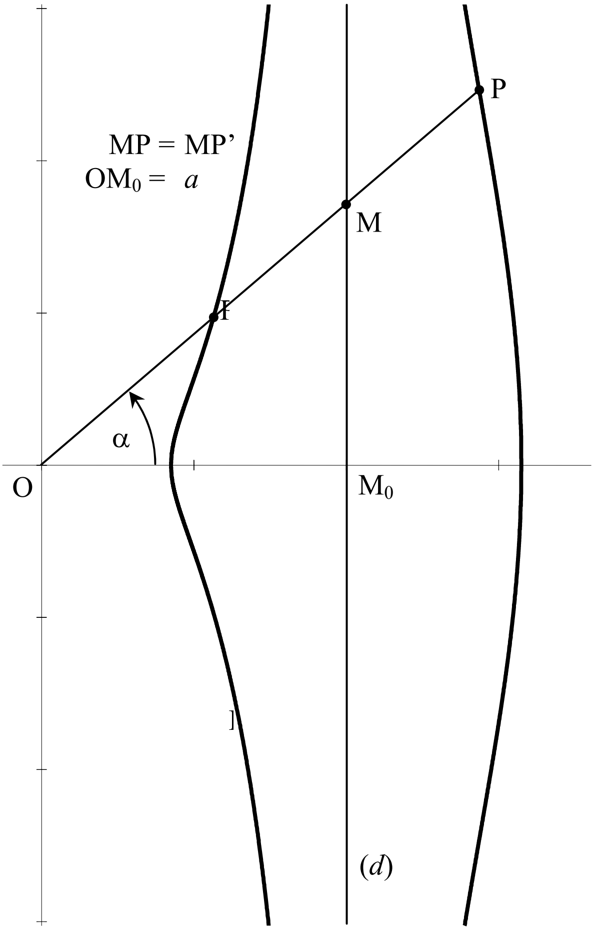
De façon plus générale, déterminer les courbes entre lesquelles on peut situer approximativement le mobile M.

Remarque :

L'habillage de cet exercice vise encore à donner un sens dynamique à une courbe appelée conchoïde de droite(vient de "coquille" à cause de sa forme).

Il prend un aspect naturel si, de plus, nous y associons la notion d'ordre de grandeur d'une observation.

On a dans le triangle OM_0M *: OM=* $\dfrac{a}{\cos\alpha}$



D'où, dans le repère polaire de pôle O et d'axe $\overrightarrow{OM_0}$*, l'équation des courbes* (Γ) *et* (Γ') *qui délimitent les positions estimées de M pour* $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ *:*

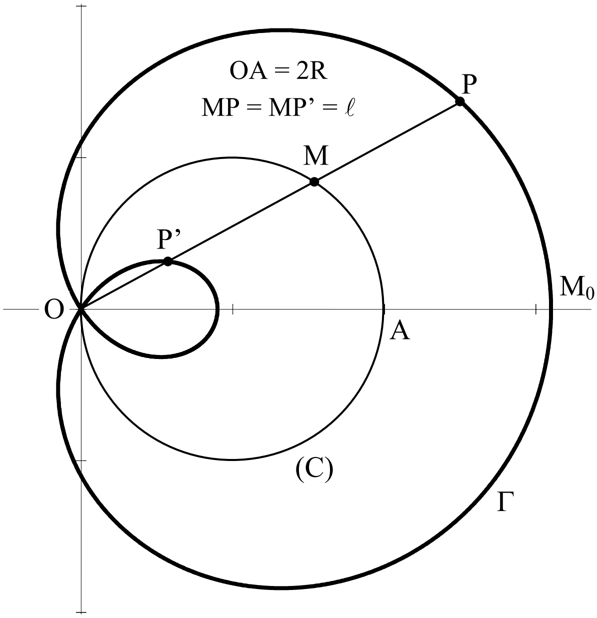
$\rho = \dfrac{a}{\cos\alpha} \pm l$ *(conchoïde de Nicomède)* ***Pour*** $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $\rho = 2a \pm l$

On pourrait assortir les données de conditions variées comme l > a ou l = a. On obtiendrait des courbes différentes, mais gardant la même forme générale.

Tale S

✶✶✶ 27 ✶✶✶

Même situation que précédemment en remplaçant la droite (D) par le cercle (C) passant par O et de rayon R. Ainsi le mobile M parcourt le cercle et envoie des signaux à O qui estime la distance OM à la longueur l près.



Remarque :

L'angle polaire de $\overrightarrow{OM}$ *étant toujours* α*, on a :* $\rho = 2R \cos \alpha \pm l$ *pour* $\alpha \in [0, 2\pi]$

La courbe Γ *obtenue est appelée* ***limaçon de Pascal***[1] **.**

Lorsque l = 2R, ce limaçon porte le doux nom de ***cardioïde.***

---

[1] Il s'agit du père de Blaise Pascal.

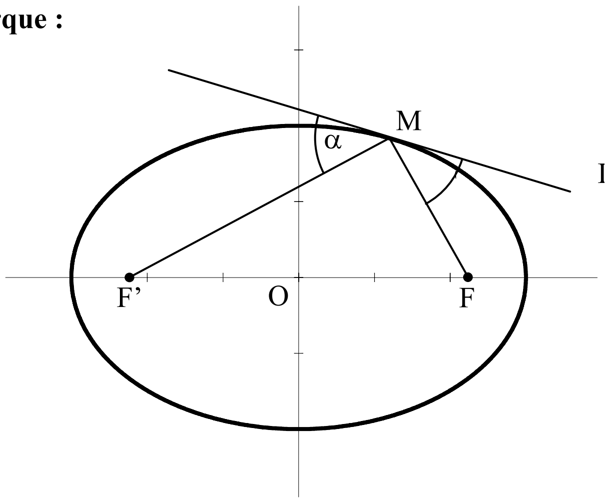
Une propriété de l'ellipse

T^{ale} S

✷✷✷ 28 ✷✷✷

Au Palais de la Découverte ainsi qu'au Musée de la Villette, une expérience curieuse est proposée. Dans une galerie de forme elliptique, deux personnes placées à une distance non négligeable mais à des endroits particuliers peuvent s'entendre fort bien alors qu'elles n'ont que chuchoté. Etes-vous capable d'expliquer ce phénomène curieux ?

Remarque :



Il s'agit ici d'une propriété de la tangente à l'ellipse qui est "également inclinée" sur les rayons focaux. Ainsi un son émis d'un foyer se réfléchit en M sur le mur elliptique et est renvoyé sur l'autre foyer. Les foyers sont donc les positions adoptées par les deux interlocuteurs.

Cette propriété de l'ellipse a été utilisée de diverses façons comme des billards elliptiques, ainsi que dans des expositions mathématiques. Dans l'une d'elles était présentée une table de forme elliptique, entourée d'un rebord métallique, et où une lampe avait été placée à l'un des foyers. Le visiteur, promenant sa main sur la table, ne pouvait que constater une concentration de chaleur à l'emplacement de l'autre foyer. Cette propriété de l'ellipse se rencontre parfois dans d'anciennes salles voûtées, ou dans certaines stations de métro…

Des graphes

Dans les programmes de lycée, les graphes apparaissent en 2002 en Terminale ES (spécialité maths). Nous avions abordé ce sujet dans la première description des Problématiques en 1995.

Le réseau des transports en commun d'une ville, celui de la distribution d'électricité ou du courrier dans un pays, un arbre généalogique, un circuit imprimé ou le réseau des neurones, voilà autant d'exemples de graphes. Qui n'a pas aussi cherché des chemins « sans repasser sur le même trait et sans lever le crayon » pour reproduire quelques dessins ?

Le premier texte traitant de ce qui allait devenir une théorie abstraite vers le milieu du XX^{ème} date de 1736 et est dû à Euler : chacun connaît le problème des ponts de Königsberg, modélisé par un graphe où chacun des quartiers de la ville est un sommet.

Les premiers exemples de graphes apparaissent comme des jeux, des petites énigmes. Il est intéressant de compliquer un peu pour montrer l'intérêt de cette modélisation, de la représentation matricielle, et de donner ainsi du sens à ce nouveau chapitre du cours dès la Terminale ES…

Voici quelques exemples simples, à partir desquels chacun pourra laisser libre cours à son imagination.

T^{ale} ES

✶✶✶ 29 ✶✶✶

Cinq camarades de classe coopèrent plus ou moins bien sur le plan du travail scolaire. Notons-les a, b, c, d et e. On observe les relations suivantes : a aime bien travailler avec b et c, b avec c et d, c avec b, e avec c. On représentera ces relations par un tableau à double entrée, puis chacune des relations par une flèche d'origine le premier nommé et d'extrémité celui avec lequel il aime bien travailler. Construire un schéma avec l'ensemble de toutes les flèches correspondantes (*graphe orienté*).

Remarque :

Cette introduction à la théorie des graphes vise à munir les élèves de modes plurielles de représentations d'une relation binaire : le tableau à double entrée (ou matrice) et le graphe. A cette occasion, ils prennent conscience des conventions nécessaires à une traduction univoque. Par exemple, le tableau sera lu d'un *élément-ligne vers un élément-colonne, soit en désignant par une croix* **X** *l'existence d'une relation :*

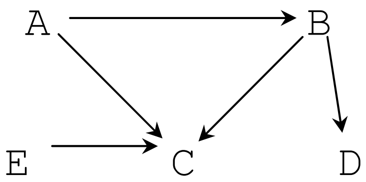
aime	A	B	C	D	E
A		**X**	**X**		
B			**X**	**X**	
C		**X**			
D					
E			**X**		

→

aime	A	B	C	D	E
A	0	**1**	**1**	0	0
B	0	0	**1**	**1**	0
C	0	**1**	0	0	0
D	0	0	0	0	0
E	0	0	**1**	0	0

A la place de la croix, on peut aussi bien écrire **1** *dans les cases vides on écrira* 0 *(matrice booléenne).*

Quant au graphe, il peut être représenté de la façon suivante :

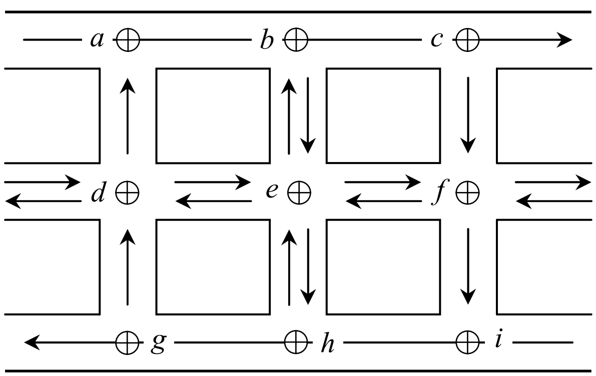


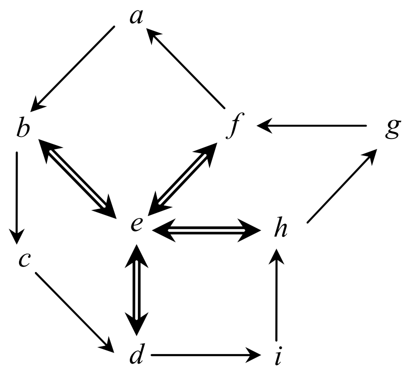
Les mots "sommet", "arête", "origine", "extrémité" peuvent être introduits à l'occasion par une simple ostension, en disant par exemple : la flèche, encore appelée arête ab, qui va de a vers b, part du sommet origine a et est dirigée vers le sommet extrémité b.

T^{ale} ES

✶✶✶ 30 ✶✶✶

Voici l'extrait schématisé d'un plan d'une ville :





Les flèches indiquent l'existence ou non d'un sens unique. Donner une autre représentation de ce plan à l'aide d'un graphe et écrire des chemins allant de *a* à *g*.

Remarque :

Les chemins parcourus de a à g : (a, b, e, h, g), (a, b, c, d, i, h, g), (a, b, c, d, e, h, g), (a, b, e, d, i, h, g).

Cet exercice vise à passer d'une représentation familière à celle d'un graphe et à employer le vocabulaire de la théorie de façon correcte. A cette occasion, le terme de "chemin" peut être introduit à son tour, par exemple le chemin (a, b, e, h, g) alors que, dans cet exercice, le quadruplet (g, f, e, a) n'a pas le sens de chemin.

T^{ale} ES

✷✷✷ 31 ✷✷✷

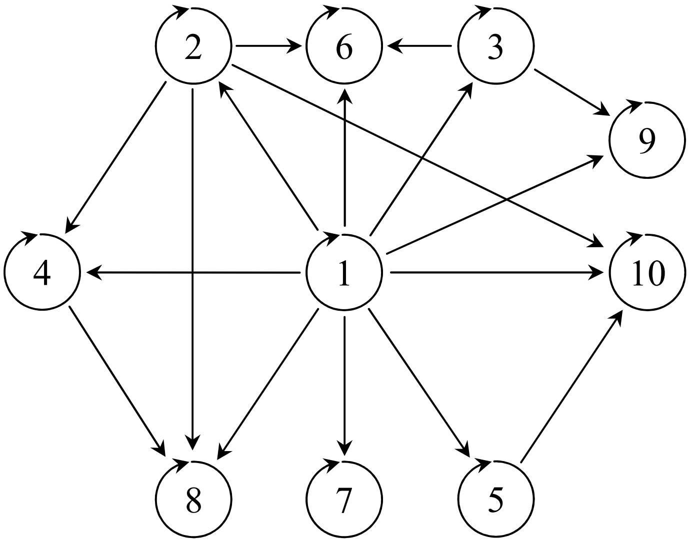
E est l'ensemble des 10 premiers entiers non nuls. Représenter par une matrice booléenne puis par son graphe la relation définie sur E par : *x* R *y* si et seulement si *x* divise *y*.

Remarque :

Cette fois la relation est réflexive et cette propriété se traduira dans la matrice par une diagonale chargée de 1 et, dans le graphe, par des boucles.

On pourra souligner la propriété de transitivité de cette relation en constatant sur le graphe qu'elle permet de "transiter" par un sommet pour atteindre un autre qui lui est relié.

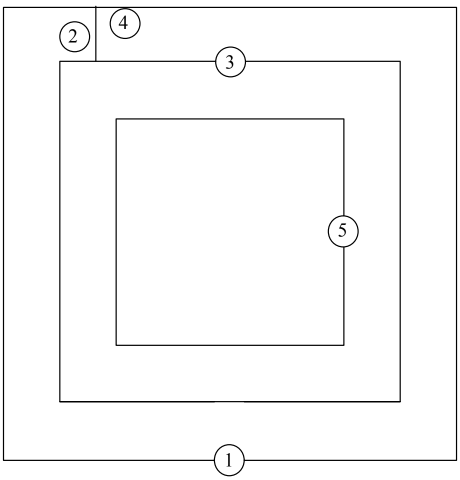
Des produits de matrices sont ainsi utilisés en recherche opérationnelle pour voir s'il existe des chemins transitifs permettant d'atteindre un certain but.

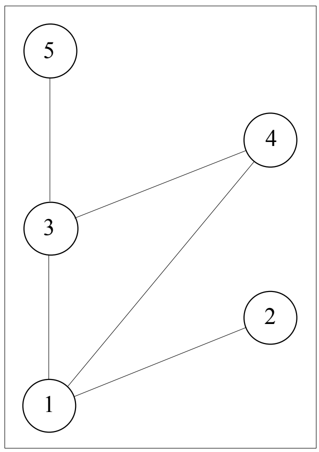


T^{ale} ES

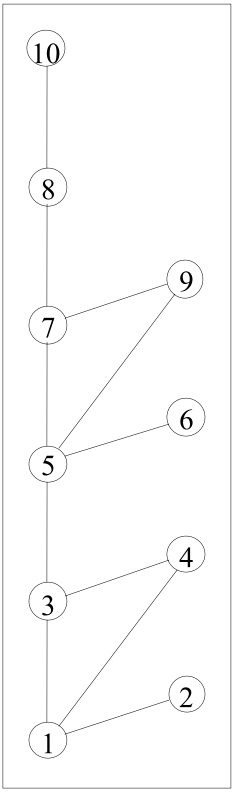
✶✶✶ 32 ✶✶✶

On donne ci-dessous deux représentations d'un labyrinthe : le plan et un graphe. Les points marqués 1, 3 et 5 sont des portes, ceux marqués 2 et 4 sont des culs-de-sac.

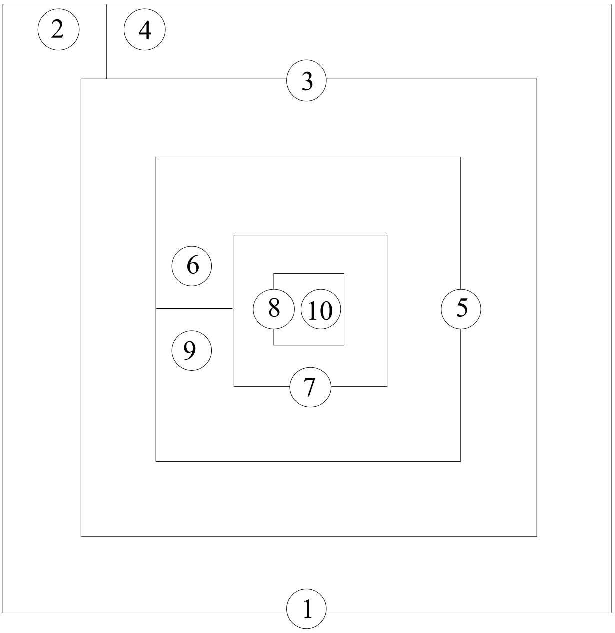




Construire un labyrinthe correspondant au graphe suivant.



Voici une solution possible



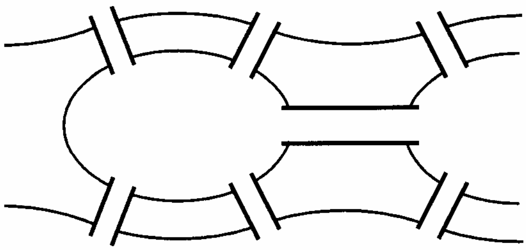
Remarque :

Il s'agit certes de changement de registre mais, en même temps, les élèves rencontrent deux modes de représentation d'une situation. L'utilisation du graphe permet de trouver un parcours qui fasse passer de la porte1 à la porte 10 ou inversement, ou même de trouver un parcours qui fasse passer une fois au moins par chacun des sommets, culs-de-sac compris. Réciproquement, on peut donner un graphe de ce type et demander aux élèves de reconstituer le labyrinthe qui lui correspond.

Et quelques problèmes bien connus dont certains ont fait date :

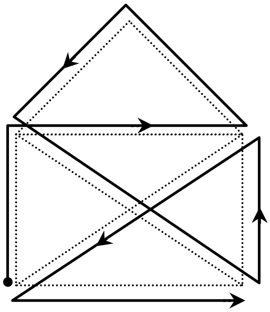
Le problème des Ponts de Königsberg

Il n'est pas possible de trouver un chemin fermé passant une fois et une seule sur chaque pont. Euler démontra que si tous les sommets sont de degré pair, alors il y a une solution, or ici il y a quatre sommets de degré impair, et donc pas de solution.

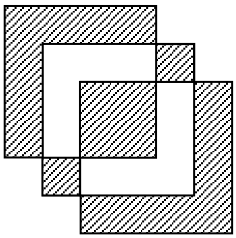


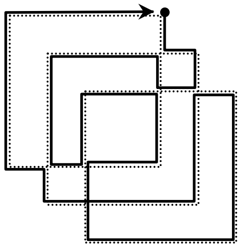
Le problème de l'enveloppe :

Dans le problème bien connu de l'enveloppe, il y a deux sommets d'ordre impair, on peut donc trouver un chemin partant de l'un des deux et aboutissant à l'autre sans repasser sur le même trait (ni lever le crayon).

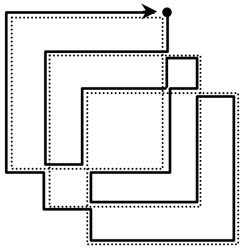


Le problème des trois carrés, de Lewis Carroll





avec croisement



sans croisement

Il s'agit de tracer les trois carrés sans passer deux fois sur le même segment.

On peut de plus interdire les croisements. Une méthode de résolution de ce type de problème consiste à colorier une région sur deux. Les chemins apparaissent alors.

Le problème du voyageur de commerce :

Est-il possible de faire un voyage, passant par 20 villes, ne repassant jamais par une ville déjà visitée ?

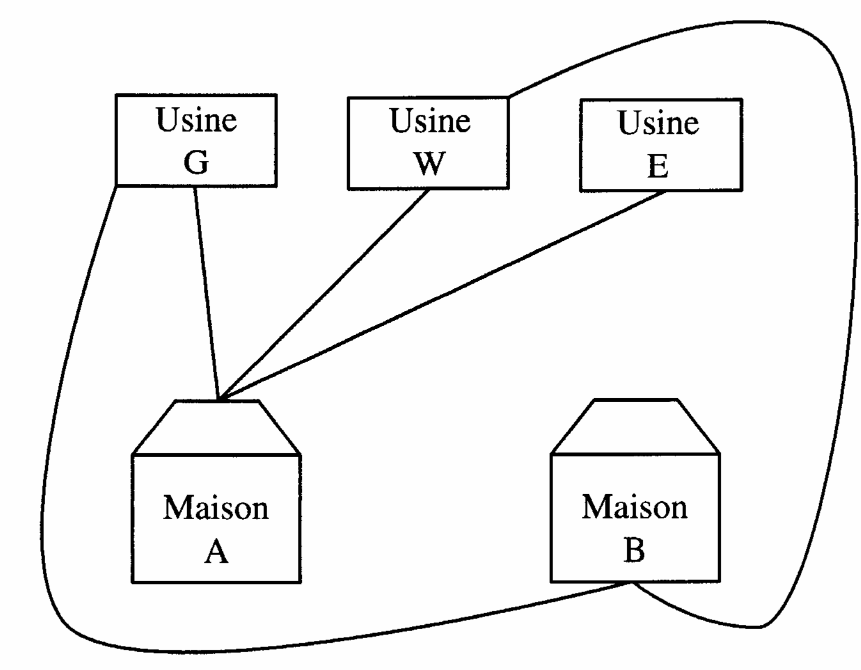
Ce sujet a été étudié par Hamilton au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Un chemin hamiltonien passe un fois seulement par chaque sommet du graphe.

Le problème des canalisations :

Voici le « problème des canalisations », dû à H. E. Dudeney en 1917 . Peut-on relier trois maisons A, B et C aux trois usines de distribution du gaz, de l'eau et de l'électricité, par un système de canalisations plan, sans que les conduites se coupent ? En modélisant par un graphe, on voit qu'il n'est pas possible de trouver une région du plan où placer la maison C de façon qu'elle soit reliée aux trois usines de distribution de gaz (G), d'eau (W), d'électricité (E). si le réseau de distribution est plan..

Dans un tel graphe, appelé *graphe planaire* deux arêtes quelconques (lignes reliant deux sommets) ne sont pas sécantes.



✳✳✳ Situations didactiques développées ✳✳✳

A) Le problème des trois vases

Ce problème a pour objet de résoudre graphiquement le casse-tête suivant :

Deux hommes ont un vase de 8 ℓ, plein d'un liquide qu'ils veulent partager en deux portions égales. Ils disposent, pour ce faire, de deux vases vides de contenances respectives 5 ℓ et 3 ℓ. Comment peuvent-ils procéder ?

Ce problème de transvasement, qui fut étudié par Tartaglia au XVIème siècle, présente un caractère ludique de casse-tête propre à motiver les élèves. Des représentations graphiques permettent d'accéder à des méthodes transférables, qui dépassent l'aspect anecdotique de la résolution d'un casse-tête.

Remarque :

Les élèves auxquels a été proposé ce problème commencent par l'examen exhaustif des triplets satisfaisant la contrainte d'une somme égale à 8ℓ (ℓ = louches). Ils sont intéressés par son aspect ludique et le défi qu'il contient. La stratégie qu'ils adoptent spontanément consiste à procéder par tâtonnements : passage de l'état initial 8ℓ, 0ℓ, 0 ℓ à l'état final 4 ℓ, 4 ℓ, 0 ℓ.

Les échecs plus ou moins nombreux rencontrés au cours de la recherche conduisent à l'avantage sinon à la nécessité de mettre au point une méthode rigoureuse, infaillible, et si possible reproductible. Des remarques et une conjecture s'imposent en effet très rapidement :

" Il semble que le nombre minimal nécessaire de transvasements soit 7 et que toutes les solutions comportant plus de 8 étapes soient des variantes des solutions à 7 ou 8 étapes."

Mais comment faire la preuve de cette conjecture, autrement que par une argumentation dialectique plus ou moins convaincante ?

Une approche graphique de la résolution du problème paraît assez naturelle :

"chaque état des trois vases peut en effet être représenté par le triplet (x,y,z) des quantités de liquide contenues, dans l'ordre, dans les récipients de 8 l, 5 l et 3 l ; les nombres x, y et z doivent obéir à certaines contraintes parmi lesquelles la relation : x+y+z = 8, qui écarte la représentation trop complexe dans un repère de l'espace".

Pour exploiter cette situation comme prototype d'une situation générale, on peut chercher tout d'abord les solutions aux questions suivantes :

1° Soit E l'ensemble des triplets (x,y,z) de nombres réels vérifiant $x + y + z = k$ où k est une constante non nulle donnée. Soit A, B et C trois points non alignés du plan. A tout élément (x,y,z) de E, on associe le point M barycentre de A, B et C affectés des coefficients respectifs x, y et z. Pourquoi est-ce possible ?

Démontrez que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{k}\left(x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}\right)$. Quelles sont alors les coordonnées de M dans le repère (C ; $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$) ? (voir la figure ci-dessous)

2° On fait varier y et z, x restant fixe (avec toujours $x + y + z = k$). Montrer que le point M décrit une portion de droite parallèle à la droite (BC). Que peut-on dire de M lorsque x et y varient, z restant fixe, ou lorsque x et z varient, y restant fixe ?

3° On pose maintenant $k = 8$ et on considère **E'** le sous-ensemble des éléments (x,y,z) de **E** tels que $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 5$, $0 \leq z \leq 3$.

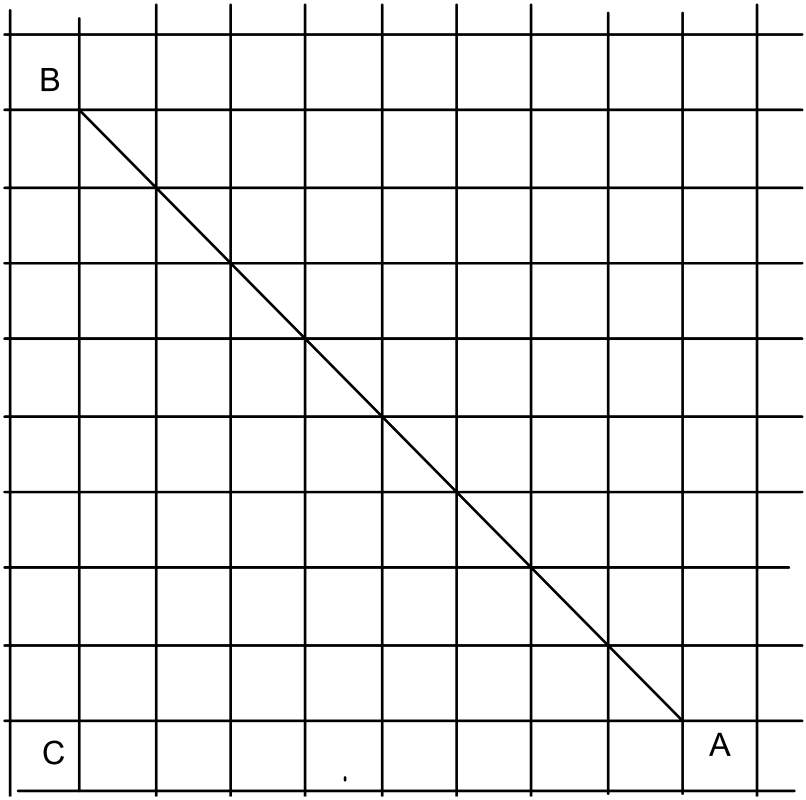
Représentez sur le dessin l'ensemble des points correspondants du plan.

4° On considère maintenant la question posée au début de cet exercice. Comment varient les quantités (x,y,z) de liquide de chaque amphore lorsque l'on verse le liquide d'une amphore dans une autre ? Comment varie le point M correspondant ?

Donnez graphiquement une solution en 7 étapes et une autre en 8 étapes.

Indications :

Les droites de directions AB, AC et BC sont les lignes de niveau des contenus de chacun des trois vases : respectivement z, y et x . Se déplacer parallèlement à AC laisse le contenu du vase de 5 litres invariant, se déplacer parallèlement à AB, celui du vase de 3 litres, et parallèlement à BC celui du vase de 8 litres. Seuls les points à coordonnées entières du parallélogramme non grisé correspondent à des états possibles. Enfin on ne peut se déplacer autrement qu'en allant « buter » sur un des côtés du parallélogramme.

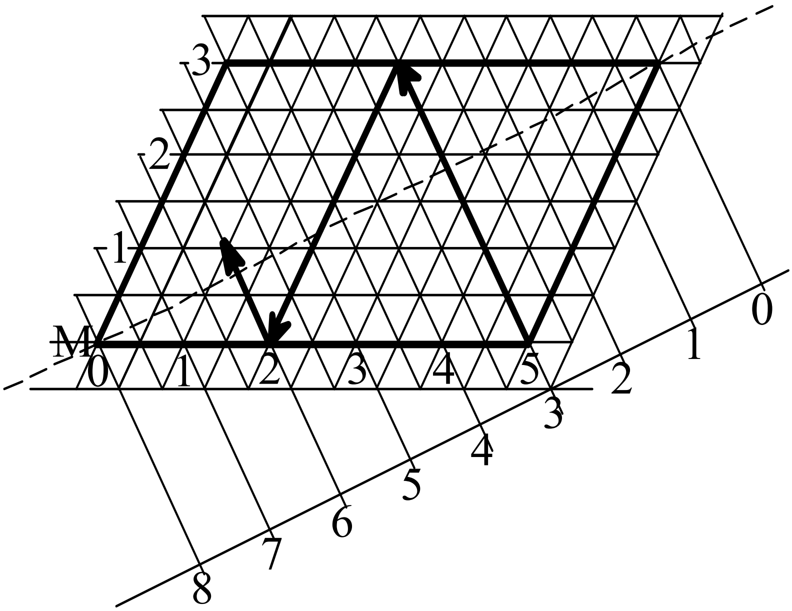


Autres représentations :

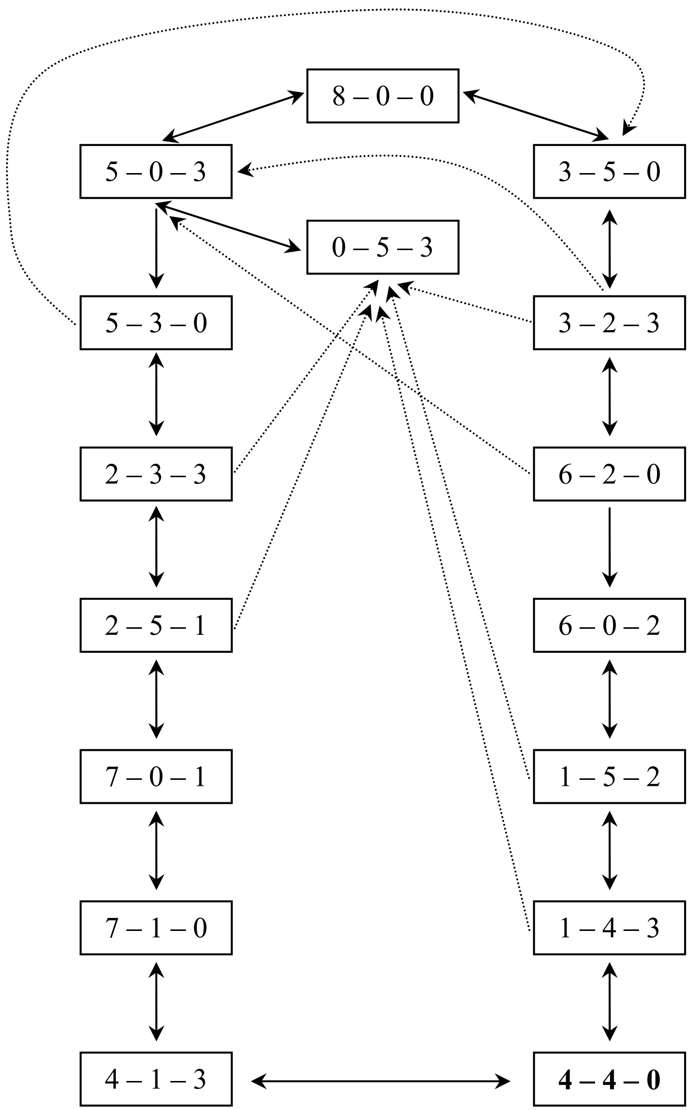
Une autre représentation utilise un réseau triangulaire. Les deux vases de 5 et 3 litres étant représentés par deux des directions du réseau, et le troisième par la grande diagonale. Un déplacement parallèle à MN laisse *z* inchangé, un déplacement parallèle à MP laisse *y* inchangé, et un déplacement parallèle à la troisième direction du réseau laisse *x* inchangé. Les symétries du graphique font que tout se passe comme si une balle, partant de M, rebondissait sur les côtés du parallélogramme. Deux solutions sont alors immédiates, selon que le premier trajet est MN ou MP.

L'un donne la solution en 7 transvasements, citée précédemment. L'autre, en 8 transva-sements, est 800, 533, 530, 233, 251, 701, 710, 413, 440

Tous les problèmes de transvasements utilisant au maximum 3 récipients peuvent être représentés de cette façon et permettre alors de trouver à coup sûr une solution, s'il en existe. On peut même choisir d'autres contenances pour les récipients, le plus grand n'étant pas nécessairement la somme des deux autres.



On peut donner une lecture de la solution graphique sous forme d'un graphe où on s'interdit de revenir à une ancienne position (voir page suivante).


8 – 0 – 0
5 – 0 – 3
3 – 5 – 0
0 – 5 – 3
5 – 3 – 0
3 – 2 – 3
2 – 3 – 3
6 – 2 – 0
2 – 5 – 1
6 – 0 – 2
7 – 0 – 1
1 – 5 – 2
7 – 1 – 0
1 – 4 – 3
4 – 1 – 3
4 – 4 – 0

PROBLÉMATIQUE N°3

DYNAMIQUE DES POINTS, DES FIGURES ET DES NOMBRES

GÉNÉRALITÉS

D'emblée, précisons que, par transformation, nous entendons toute application de l'espace réel ou complexe, numérique ou géométrique, ou d'une partie de cet espace dans lui-même, application bijective ou non, sur des objets signifiés par des figures, des relations algébriques, le tout relativement à un cadre géométrique ou à un cadre algébrique.

L'enseignement dans le premier cycle met l'accent (doit mettre) sur la fonction outil des transformations géométriques, par rapport aux objectifs suivants :

- examen de leur effet sur des configurations simples (droites, segments, cercles, polygones, etc.),
- anticipation perceptive de leurs effets (où devrait se trouver l'image, quelle devrait être sa forme, son sens, quels éléments devraient coïncider avec leur image ? ...),
- considération "dynamique" de concepts inertes (médiatrice, bissectrice $\Rightarrow$ symétrie orthogonale, angle $\Rightarrow$ rotation, vecteur $\Rightarrow$ translation, proportionnalité $\Rightarrow$ homothétie, milieu, moyenne $\Rightarrow$ symétrie centrale, ...).

De la même façon, il est possible de concevoir les applications algébriques, par exemple de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de deux façons tout aussi dynamiques :

ou bien lorsque la variable x décrit un segment de la droite réelle (ou toute la droite), son image $y = f(x)$ décrit également un segment (ou la droite), sans que la correspondance ne soit nécessairement bijective ni continue,

ou bien un point de coordonnées $(x ; f(x))$ décrit le graphe de la fonction f lorsque x décrit un segment de la droite réelle (ou toute la droite).

Certes, cette conception répond plus à des arguments didactiques qu'épistémologiques, le concept d'application ne présupposant pas de cinématique sous-jacente. Il sera possible de la dépasser au cours du second cycle sans totalement effacer le recours intuitif qu'elle permet.

En prolongement de ces objectifs, qu'il s'agit de continuer à viser et renforcer avec esprit critique en second cycle, nous dégageons deux fonctions de nature différente, à pondérer d'une filière à l'autre en importance et en nature, particulièrement en géométrie :

- une fonction dite objet où, cette fois, les transformations sont étudiées en tant que tel à travers leurs propriétés et, en particulier, leurs invariants ponctuels ou figuraux. Des classifications variées peuvent prêter à une synthèse au moyen de critères différents (invariants, représentations analytiques, ...) et par examen rapide de transformations qui ne font pas l'objet d'enseignement approfondi. Mais, ces dernières (par exemple, affinité orthogonale, inversion,...) par leurs propriétés particulières, différentes des autres donneront un sens à des propriétés jugées triviales par les élèves (conservation de la forme, par exemple). Nous sommes conscients que la composition des transformations nécessite, pour la pensée, de s'élever à un niveau immédiatement supérieur à celui des objets géométriques ou numériques habituels. Son étude sera donc progressive et toujours illustrée par son fonctionnement direct et inverse (décomposition) sur des configurations simples. La recherche de classifications sur l'ensemble des transformations prendra un nouveau sens par la constatation de la stabilité interne de classes de transformations. L'anticipation, sans cesser de faire appel à la perception, deviendra de plus en plus une action rationnelle de la pensée ;

- <u>une fonction outil</u> où, au-delà de leur rôle culturel et conceptuel, évoqué ci-dessus, les transformations apparaissent et, peu à peu, fonctionnent comme de véritables outils de pensée déductive. C'est la prise de conscience progressive de leur puissance et leur efficacité qui doit faire accepter aux élèves un surcoût par rapport aux moyens jusqu'alors efficaces (auxquels ces nouveaux outils se substituent), mais de plus en plus laborieux en temps et en longueur discursive. Ce n'est que si l'élève perçoit pour lui-même cet aspect économique et souvent élégant, qu'il s'engagera dans un investissement qui donne tout son sens opératoire aux transformations. Le problème didactique consistera à trouver les bonnes situations où le passage par les transformations est incontournable, mais ni artificiel, ni décourageant.

Enfin, cette problématique présentera, en outre, un ensembles de situations et de tâches où les changements de registres, en particulier numérique $\Leftrightarrow$ graphique $\Leftrightarrow$ figural, prouvent également leur efficacité sur les objets géométriques, grâce à la plasticité des représentations induites par leurs définitions, comme de leurs propriétés : la recherche d'une conjecture, l'exposé d'une preuve peuvent tirer un grand bénéfice du traitement d'un problème dans un certain registre qui favorise et renforce ces représentations.

Situations – Démarches – Contenus

A travers cette problématique où les éléments de base sont les nombres et les points de l'espace ordinaire, où vont donc apparaître trois grands volets des contenus mathématiques : algèbre, analyse et géométrie, nous cherchons à montrer la nécessité, l'intérêt, l'efficacité et la pertinence des transformations sur ces éléments. Aussi bien pour étudier les propriétés de leur image par une application que pour découvrir certaines de leurs propriétés invariantes ou pour remplacer une configuration numérique ou géométrique par une autre qui lui soit équivalente mais dont l'étude des propriétés soit plus accessible. On associera fréquemment les cadres géométriques et numériques.

Situations	**Démarches**	**Contenus**
♦ Une figure simple étant donnée sur la feuille, tracer son image obtenue par une des transformations géométriques enseignées au 1er cycle.	♦ Faire fonctionner les algorithmes de construction en identifiant les invariants, les points doubles, les images réciproques.	♦ Révision des transformations géométriques planes : symétries, translation, rotation. Introduction de l'homothétie.
♦ Étude du mouvement uniforme d'un mobile, puis de son mouvement uniformément accéléré supposé donné.	♦ Formaliser le mouvement uniforme, étudier l'équation dans le cas uniformément accéléré, puis représenter graphiquement les 2 relations.	♦ Révision des applications linéaires, affines et du second degré. Leurs représentations dans un système d'axes orthonormé.
♦ Étude de la vitesse instantanée d'un point en mouvement uniforme puis en mouvement uniformément accéléré. Étude de la “vitesse” de cette vitesse instantanée.	♦ Formaliser la notion de vitesse instantanée comme une limite. Concevoir ainsi provisoirement la dérivée comme la “vitesse” des variations d'une fonction.	♦ Premières approches par la cinématique des notions de limite, de dérivée, de vitesse et d'accélération.
♦ Division homographique des points M(x) de (D) et M'(x') de (D') conduisant à l'étude des variations de fractions rationnelles. Positions-limites.	♦ Relier dynamiquement un problème géométrique à un problème algébrique.	♦ Étude algébrique et graphique des fractions rationnelles. Leurs asymptotes. Interprétation géométrique. Involution d'une relation.

Situations	Démarches	Contenus
♦ Transformation de dessins par homothétie, relation avec la multiplication vectorielle. ♦ Les transformations comme outils de recherche de solution d'un problème de géométrie. ♦ Projection d'ombres solaires. Scannerisation. ♦ Recherche d'ensembles de points satisfaisant des conditions de liaison. ♦ Recherche d'un modèle géométrique de l'escalier en colimaçon. ♦ Développement arithmétique et géométrique d'une population conduisant à des suites numériques.	♦ Dessiner et effectuer des changements de mesure. Reconnaître perceptivement une homothétie. ♦ Reconnaître une situation où une transformation peut être en jeu. ♦ Étudier une situation complexe dans l'espace par des coupes affines conservant une information maximale. ♦ Anticiper des positions successives, puis prouver une conjecture. ♦ Concevoir et modéliser un mouvement hélicoïdal comme composé de deux déplacements dans l'espace. ♦ Mathématiser une situation de correspondance entre un rang *n* et la valeur prise par un phénomène à ce rang.	♦ Multiplication vectorielle dans le plan et l'espace. ♦ Symétries, homothétie, rotation dans le plan. ♦ Passage de “3 D” à “2 D” par projection parallèle. ♦ Lieux géométriques. ♦ Déplacement hélicoïdal comme composition d'une rotation et d'une translation dans l'espace. ♦ Suites arithmétiques et géométriques. Sommes partielles. Valeurs limites. Suites récurrentes.

Quelques problèmes

2nde

✳✳✳ 1 ✳✳✳

On connaît les milieux des 3 côtés d’un triangle quelconque. Retrouver ses sommets.

Remarque et indication :

Ce problème peut trouver sa place dans le premier cycle et, a fortiori, en classe de Seconde. En effet, il ne nécessite que la connaissance de la propriété liée aux “droites des milieux” d’un triangle.

2nde

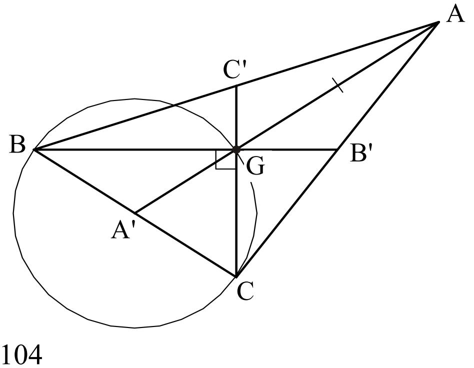
✳✳✳ 2 ✳✳✳

Construire un triangle ABC dont les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires.

Trouver, dans de tels triangles, l’expression de $AB^2 + AC^2$ en fonction de BC^2.

Remarque et indication :

La même remarque initiale donnée dans le problème précédent peut être faite ici. En effet, il ne nécessite que la connaissance de la propriété liée à la position du centre de gravité G d’un triangle sur chacune des médianes après avoir choisi arbitrairement un point G sur le cercle de diamètre [BC].



En notant A’, B’ et C’ les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB], on obtient :

$$GC'^2 + GB^2 = BC'^2 \qquad ①$$

$$GB'^2 + GC^2 = CB'^2 \qquad ②$$

$$GB^2 + GC^2 = BC^2 \qquad ③$$

D'où à partir de ① : $\dfrac{1}{4}GC^2 + GB^2 = \dfrac{1}{4}AB^2$

ou encore : $GC^2 + 4\,GB^2 = AB^2$.

De la même façon, avec ②, on montre que :

$$GB^2 + 4\,GC^2 = AC^2$$

Finalement, avec ③, on obtient : $AB^2 + AC^2 = 5\,BC^2$.

2nde

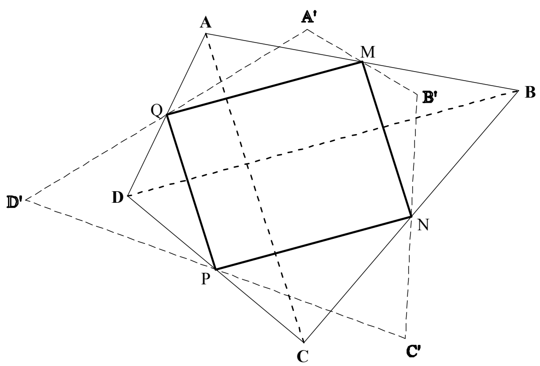
✶✶✶ 3 ✶✶✶

On connaît les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe. Retrouver, dans la mesure du possible, les 4 sommets.

Remarque et indication :

Ce problème qui pourrait également trouver sa place dans le premier cycle est a fortiori abordable en classe de Seconde où l'on pourra donner une expression plus vectorielle du processus de construction.

Au préalable, les élèves doivent cependant remarquer que le quadrilatère des milieux MNPQ est un parallélogramme (démonstration en utilisant des "droites des milieux" ou des relations vectorielles comme : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *). On peut donc faire aussi bien référence à la translation de vecteur* $2\overrightarrow{MN}$ *pour transformer* ***un point A choisi de façon arbitraire*** *(ce qui ici peut représenter en soi une difficulté de mise en œuvre pour des élèves de Seconde) en C, etc.*



Ou bien... choisissant A à l'extérieur de MNPQ, les symétries de centres successifs M, N, P transforment A en B, B en C et C en D. La composée de ces 3 symétries est la symétrie de centre Q qui transforme D en A.

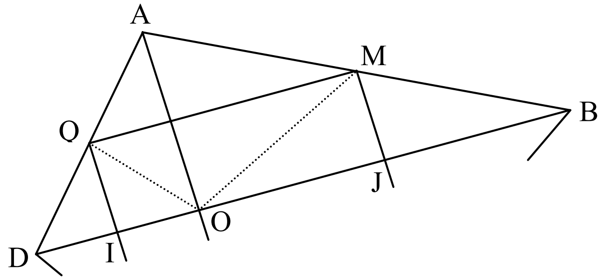
***Prolongements** :*

1. *On pourra étudier le rôle de la figure initiale MNPQ dans l'obtention des quadrilatères ABCD (si MNPQ est un rectangle, alors les diagonales de ABCD seront perpendiculaires ; si MNPQ est un losange, alors les diagonales de ABCD auront la même longueur, ...).*

On pourra demander aux élèves quel type de généralisation ils pourraient proposer au problème précédent. En voici une :

Un polygone $A_1, A_2, \cdots A_n$ est donné($n > 2$). On choisit un point B du plan et on construit le symétrique B_1 de B par rapport à A_1, le symétrique B_2 de B_1 par rapport à A_1, ... le symétrique B_n de B_{n-1} par rapport à A_n. A quelle(s) condition(s) a-t-on $B_n = B$?

2. *On pourra faire démontrer que l'aire du parallélogramme MNPQ est la moitié de celle du quadrilatère ABCD (par exemple : l'aire de DQI est égale à celle de OQI, celle de AQM à celle de OQM, etc.)*



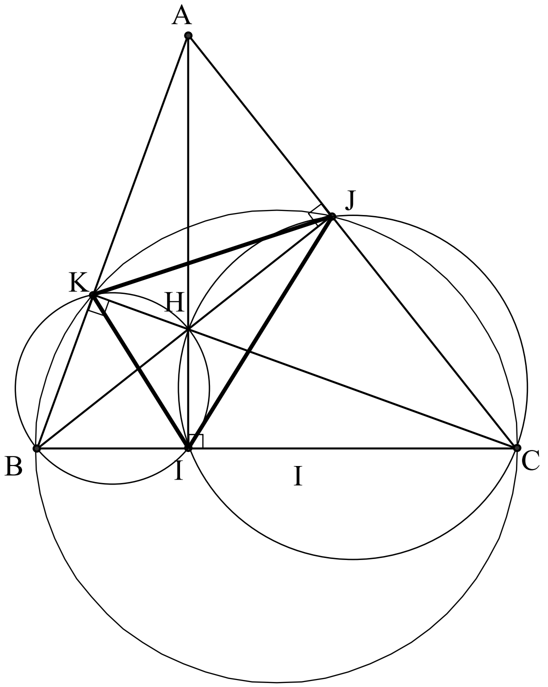
2^{nde}

✶✶✶ 5 ✶✶✶

Soit H le point d'intersection des hauteurs d'un triangle ABC et I, J et K les projections orthogonales respectives de A, B et C sur les droites (BC), (AC) et (AB). Quelle position particulière occupe H dans le triangle (dit ***triangle orthique***) IJK ?

Remarque et indication :

La forme ouverte de la question oblige l'élève à des initiatives, comme de faire plusieurs cas de figures soignées et, de toute façon, l'oblige à formuler une conjecture. Un travail en groupe serait donc particulièrement indiqué dans ce cas et/ou une simulation avec un logiciel tel que CABRI-géomètre. Le problème peut être proposé dès la classe de Seconde. Le résultat présente un certain intérêt puisqu'il relie par une propriété remarquable des droites particulières d'un triangle.

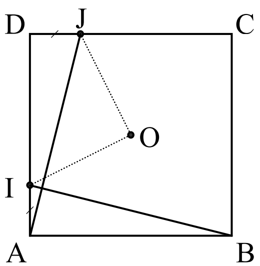


La présence d'angles droits peut mettre sur la piste de points cocycliques (cf. figure ci-contre). Le théorème de l'angle inscrit appliqué successivement dans les trois cercles ci-contre permet alors de conclure.

Par exemple : $\widehat{HBK} = \widehat{HIK}$ *d'une part ainsi que* $\widehat{HIJ} = \widehat{HCJ}$ *et comme* $\widehat{JBK} = \widehat{KCJ}$ *d'autre part, on en déduit que* $\widehat{HIK} = \widehat{HIJ}$ *et donc que (IH) est l'une des bissectrices intérieures du triangle IJK. En procédant de façon similaire, on montre qu'il en est de même des droites (JH) et (KH). D'où le résultat : H est le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle IJK.*

2nde **/ 1**ère

✶✶✶ 6 ✶✶✶



On considère le carré ABCD (cf. figure ci-contre) de centre O. On place sur les côtés AD et DC respectivement des points I et J tels que : AI = DJ.

Démontrer que (AJ) et (BI) sont orthogonales

Remarque et indication :

Le dessin permet de conjecturer que l'angle $\widehat{IOJ}$ *est droit et que l'on passe du triangle BAI au triangle ADJ par une rotation qui, amenant B sur A, A sur D est d'angle de mesure 90°. Ainsi dans cette rotation I a pour image J et l'angle* $\widehat{IOJ}$ *a* *pour mesure 90°. La droite (BI) a donc pour image la droite (AJ) et ces droites sont ainsi orthogonales.*

Cette solution a le mérite d'être rapide et élégante, valorisant ainsi le concept de rotation.

Complément :

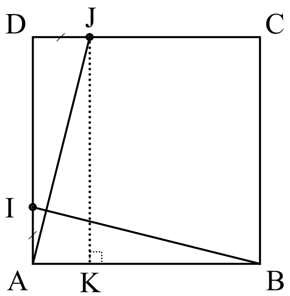
Cet exercice a été donné sous forme plus ouverte (sans référence au centre O du carré, que ce soit dans l'énoncé ou sur la figure), à des élèves de Seconde et de Première de J-P Richeton (en option Sciences).

Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer :

1. *L'utilisation de considérations angulaires (de loin la plus fréquente…) ;*

2. *L'utilisation d'un repère :*

- *parfois sans le préciser : en faisant intervenir des coefficients directeurs, ainsi le coefficient directeur de la droite (AJ) est* $a = \dfrac{AD}{DJ} = \dfrac{1}{\alpha}$, *celui de (BI) est* $a' = -\dfrac{AI}{AB} = -\alpha$...



- *en le précisant, par exemple, dans le repère* $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$: $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\\alpha\end{pmatrix}$…

3. *En $1^{ère}$, si cet exercice est donné postérieurement à l'étude du produit scalaire, on trouve alors de nombreuses solutions le faisant intervenir, comme par exemple :*

Le point K étant la projection orthogonale du point J sur [AB] :

$$\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI})\bullet\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{AD}$$

$$= -BA \times AK + AI \times AD \ \ldots$$

Cette solution est également rapide et valorise bien le concept de produit scalaire défini par projection orthogonale…

***4°** Enfin, pour "espérer" voir des élèves utiliser un quart de tour de centre le point O, centre du carré, sans pour autant être obligé de faire figurer ce point au préalable sur la figure, il faut pour cela que les élèves aient été habitués à chercher en mathématiques et à se poser des questions ... Il vient alors des solutions du genre :*

$$\left.\begin{aligned} AI &= DJ \\ AB &= AD \end{aligned}\right\} \text{donc}\, AJ = IB \ \textit{(en utilisant le théorème de Pythagore)}$$

d'où l'idée de **chercher une isométrie** *transformant :*

A en I et J en B (1)

ou : A en B et J en I (2)

Par élimination, on conjecture très vite que cette isométrie ne peut être qu'une rotation, qui plus est d'angle 90°, c'est pourquoi, a priori, le cas (2) est préférée au cas (1) car on peut alors en déterminer le centre : sur la médiatrice de [AB] et sur le cercle de diamètre [AB]…d'où la conjecture que le centre du carré est centre de cette rotation… il reste alors à justifier que cette rotation $\mathcal{R}$ (de centre O et d'angle 90°) qui amène A en B amène bien J en I. Par exemple :

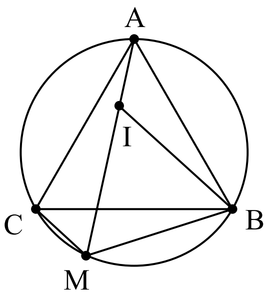
$$\mathcal{R}: \begin{aligned} A &\mapsto B \\ C &\mapsto D \\ D &\mapsto A \end{aligned}$$

d'où J appartenant à [CD] a pour image **le** *point J' du segment [DA] tel que DJ = AJ' ce qui permet de conclure que J' = I…*

2nde / 1ère — **✳✳✳ 7 ✳✳✳** — **Option Sciences !**

ABC est un triangle équilatéral. On choisit un point quelconque M sur le petit arc $\widehat{BC}$. Démontrer que MA = MB + MC.

Remarque et indication :



Ce petit problème sert de prétexte à l'emploi efficace de la rotation. Pour engager les élèves dans la démonstration, il est bon de leur faire remarquer que cette propriété est indépendante de la position a priori de M sur l'arc $\widehat{BC}$.

La preuve suivante peut être avancée :

Soit I le point de [AM] tel que M soit équidistant de I et de B. Un tel point existe puisque MA > MB. Le triangle MBI est équilatéral et donc la rotation d'angle $\pi/3$ et de centre B transforme I en M et A en C. Donc IA = MC et MB + MC = IM + IA = MA.

La difficulté réside ici en la prise d'initiative de placer le point I (ou J tel que MJ = MC…) sur [AM]. Une telle initiative ne peut s'envisager qu'avec des élèves habitués à chercher des problèmes non stéréotypés, l'égalité MB + MC = MA pouvant alors, par association d'idée, les amener sur la piste de "l'inégalité triangulaire" dans le cas particulier où il y a égalité ("relation de Chasles" pour les longueurs). D'où l'idée de chercher à introduire un point I sur [AM], donc tel que MI + IA = MA, puis ***de faire en sorte que****, par exemple, MI = MB,* ***ce qui ramène le problème à*** *devoir démontrer que IA = MC…*

Solution "calculatoire"[1] *:*

$$AB^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = AM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{MB}$$

Or

$$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{MB} = AM \times MB \times cos\,(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}) = -AM \times MB \times cos\,(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{1}{2}AM \times MB$$

D'où : $AB^2 = AM^2 + MB^2 - AM \times MB$

De même, on a : $AC^2 = AM^2 + MC^2 - AM \times MC$

et $CB^2 = CM^2 + MB^2 + CM \times MB$

On en déduit :

$$2CB^2 - AB^2 - AC^2 = (MB + MC)^2 + AM \times (MB + MC) - 2AM^2 = 0$$

C'est à dire, pour tout point M du petit arc $\overparen{BC}$ *:*

$$AM\,(MB + MC - AM) + (MB + MC - AM)(MB + MC + AM) = 0$$

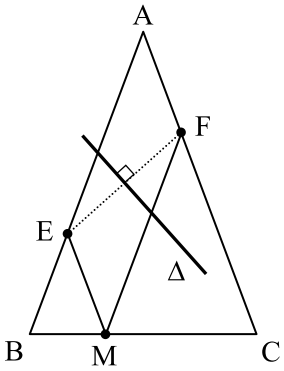
soit encore : $(MB + MC - AM)(2AM + MB + MC) = 0$

ce qui implique, pour tout point M du petit arc $\overparen{BC}$*, que* $MB + MC - AM = 0$ …

1 Proposée par Jean-Pierre Kahane

2nde / 1ère

✶✶✶ 8 ✶✶✶



Le triangle ABC est isocèle en A.

On choisit un point quelconque M sur [BC] et on construit le parallélogramme MEAF tel que E ∈ [AB] et F ∈ [AC].

Soit Δ la médiatrice de [EF]. Démontrer qu'elle pivote autour d'un point fixe quand M décrit le segment [BC].

Remarque et indication :

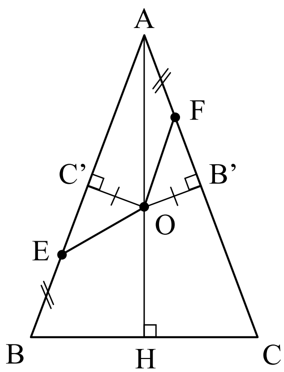
La rotation est encore la transformation qui permet, élégamment, de résoudre le problème.

En effet, soit O le point de concours des médiatrices de ABC (cette conjecture sur O peut être obtenue suite à une simulation avec un logiciel tel que CABRI-géomètre par exemple). La rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *transforme A en B, C en A et donc F en E puisque AF = EM = EB.*

Par suite OE = OF et O appartient à la médiatrice Δ de [EF].

Variante au niveau Seconde *(avec un programme permettant l'utilisation des cas d'isométrie) :*

Un triangle isocèle est un triangle qui admet au moins un axe de symétrie. Partant de là, on peut penser à introduire le point de concours O des médiatrices de ABC qui est sur l'axe (AH) de ce triangle et qui est donc équidistant des côtés [AB] et [AC], d'où OB' = OC', où B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB]. Par hypothèse, quels que soient les cas de figures, il vient que FB' = EC' d'où l'on déduit que les triangles rectangles OB'F et OC'E sont isométriques et donc que OF = OE…



1$^{\text{ère}}$

Option Sciences !

✶✶✶ 9 ✶✶✶
À la manière de Martin Gardner…

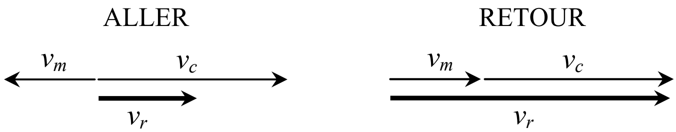
Le cortège des invités au mariage se rend à la mairie, à vitesse constante, sans presser le pas. Il mesure 100 mètres. Le chien du futur marié placé en queue de cortège, quitte son maître pour rejoindre, en tête, la mariée, mais en arrivant à sa hauteur, rappelé par son maître, il revient en queue de cortège qui a, entre temps, parcouru 100 m. En supposant que le chien effectue son parcours aller-retour à vitesse constante, peut-on savoir quelle distance il a parcourue ?

Remarque et indication :

Les objectifs de ce problème sont doubles :

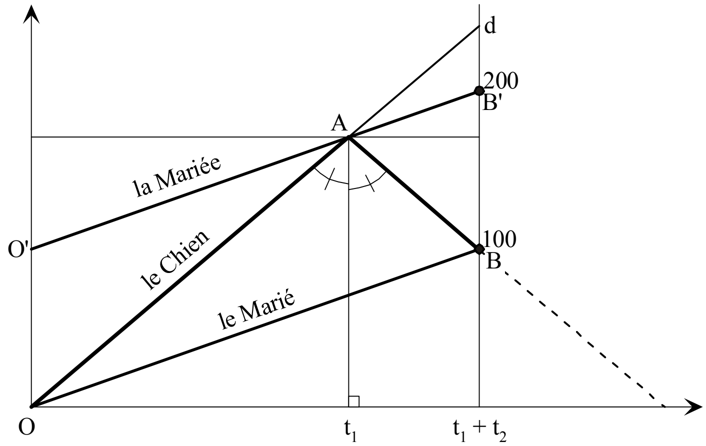
- *mettre en équations une situation de cinématique, (éventuellement, se servir de la représentation géométrique pour réduire la difficulté cinématique)*
- *savoir « s'arrêter à temps » quand on a répondu à la question posée…*

Une représentation dans un repère cartésien (cf. ci-dessous) permettrait en effet, d'accéder plus simplement à la notion de vitesse relative. En effet, la distance parcourue par le chien est fonction de la vitesse qu'il a par rapport au cortège. Leurs vecteurs vitesse respectifs (vitesse absolue v_C du chien et vitesse d'entraînement v_m du cortège) se retranchent à l'aller et s'ajoutent au retour (penser aux trains qui se croisent) pour définir la vitesse relative $v_r = v_C \pm v_m$ du chien par rapport au cortège. C'est celle-ci qui donnera la distance parcourue par le chien en passant de la queue à la tête du cortège.



Posons :

- ♦ *t_1 et t_2 les durées respectives de l'aller et du retour du chien,*
- ♦ *d la distance totale parcourue par le chien,*
- ♦ *v_C et v_m les vitesses respectives absolues du chien et du cortège de mariage.*



Graphiques horaires :

- *du chien O-A-B*
- *de la tête du cortège O'-B'*
- *de la queue du cortège O-B*

Les coefficients directeurs des droites (OA) et (AB) sont opposés vu que la vitesse du chien est constante à l'aller comme au retour.

Remarque : il n'est pas interdit de penser pouvoir proposer cet exercice dès la Seconde, en option Sciences, en se limitant à en demander une interprétation géométrique.

Scénario possible en s'aidant d'un logiciel tel que CABRI-géomètre ou GEOPLAN, par exemple : représenter la figure ci-dessus en définissant le point A comme "point libre" sur le segment [O'B'] puis tracer les segments [AO] et [AB] ainsi que la bissectrice de $\widehat{OAB}$. Positionner le point A pour que cette bissectrice soit "verticale", puis conjecturer une valeur approchée de la distance parcourue par le chien… (on peut tout aussi bien faire afficher les coefficients directeurs de (AO) et (AB) et positionner le point A pour qu'ils soient opposés)

On a les équations :

① $(v_C - v_m)\, t_1 = 100$ *(longueur du cortège en m), vitesse relative du chien à l'aller,*

② $(v_C + v_m)\, t_2 = 100$ *(longueur du cortège en m), vitesse relative du chien au retour,*

③ $v_C\, (t_1 + t_2) = d$*, distance totale, en m, parcourue par le chien,*

④ $v_m\, (t_1 + t_2) = 100$*, distance parcourue, en m, par le cortège.*

D'où :

- *d'une part* (① – ②) *:* $(v_c - v_m)t_1 - (v_c + v_m)t_2 = 0$ *soit :*

$v_c(t_1 - t_2) - v_m(t_1 + t_2) = 0$ *d'où :* $t_1 - t_2 = \dfrac{100}{v_c}$

♦ *d'autre part* (① + ②) *:* $(v_c - v_m)t_1 + (v_c + v_m)t_2 = 200$ *soit :*
$v_c(t_1 + t_2) - v_m(t_1 - t_2) = 200$

$$d\text{'où : } d - v_m \times \frac{100}{v_c} = 200$$

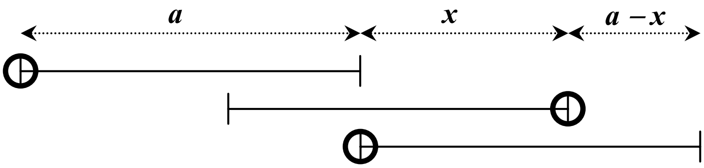
♦ *comme on a aussi* (④/③) *:* $\frac{v_m}{v_c} = \frac{100}{d}$ *, on obtient* $d - \frac{10000}{d} = 200$ *ou encore :*

$$\boxed{d^2 - 200d - 10000 = 0}.$$

D'où la racine convenable en mètres : d = $100(1+\sqrt{2}) \approx 241{,}42$ ...

Solution "directe"[1] :

Au cours du temps, les distances parcourues par le cortège et par le chien sont proportionnelles. La longueur du cortège étant a, et la distance qu'il parcourt quand le chien arrive en tête étant x, il parcourt successivement les distances x et a – x tandis que le chien parcourt les distances a + x et x. Donc $\frac{x}{a-x} = \frac{a+x}{x}$*, d'où* $2x^2 = a^2$ *et* $d = a + 2x = a(1+\sqrt{2})$ ...



Tale

✷✷✷ 10 ✷✷✷

BAC
"2000+*n*"...

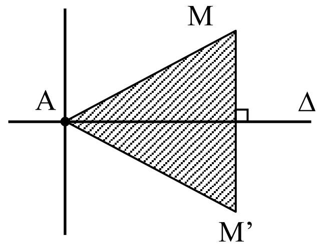
Un point A est fixe sur une droite Δ. Soit M un point variable du plan et son symétrique M' par rapport à Δ. Quel est le lieu des points M tels que l'aire du triangle MAM' soit constante et égale à k ?

[1] Proposée par Jean-Pierre Kahane. Voir aussi Olympiades de mathématiques, classe de Première "la fourmi ravitailleuse"…

Remarque et indication :

Les objectifs de cet exercice sont les suivants :

- *placer la situation dans le plan convenablement repéré,*
- *constater et apprendre une propriété intéressante de l'hyperbole équilatère.*



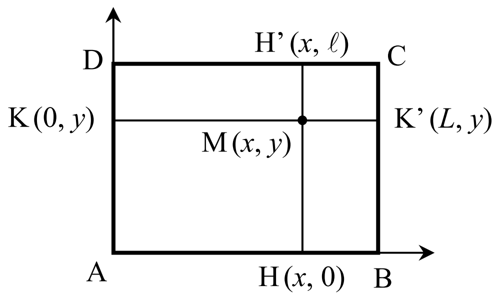
En effet, si l'on rapporte le plan à une origine en A, des axes orthonormés dont Δ serait l'un d'eux, le lieu de M est l'hyperbole équilatère dont l'équation serait xy = k dans le repère choisi. Les axes de l'hyperbole sont ceux du repère.

✶✶✶ 11 ✶✶✶

A l'intérieur d'un rectangle, un point mobile M est assujetti à la propriété suivante : le produit des distances de ce point à 2 côtés parallèles est égal au produit des distances aux 2 autres côtés.

Sur quelle courbe se déplace le point M ? Que se passe-t-il si le rectangle est un carré ?

Remarque et indication :



Si l'on repère le plan comme ci-contre, et si l'on note L et ℓ sont les dimensions respectives du rectangle, on a $0 \le x \le L$, $0 \le y \le \ell$ et la condition MK×MK' = MH×MH' se traduit par $x(L - x) = y(\ell - y)$ ou encore :

$x^2 - xL - (y^2 - y\ell) = 0$, d'où après factorisation :

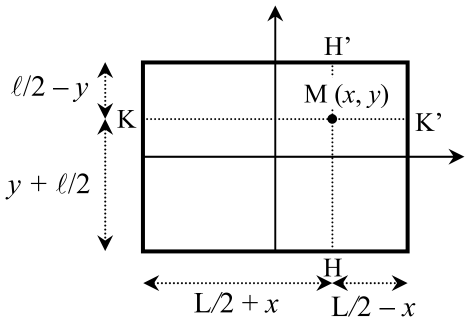
$$\frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-\frac{\ell}{2}\right)^2}{a^2}=1, \text{ où } a^2=\frac{L^2-\ell^2}{4}.$$

Le point M se déplace donc sur l'hyperbole équilatère de centre le centre du rectangle et d'asymptotes les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$, les *branches étant limitées au contour du rectangle. Ces droites constituent le lieu de M dans le cas où le rectangle est un carré.*

Depuis quelques temps déjà, les élèves ne sont plus entraînés au traitement d'équations du type $Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$ et maintenant que les coniques ne sont plus étudiées, même en spécialité, ce problème est donc actuellement hors programme mais sait-on jamais ! Son intérêt est de manipuler une factorisation et de faire apparaître l'hyperbole comme solution d'un problème simple (dans son énoncé) puis de la rapporter ensuite à des axes auxquels par symétrie on aurait pu penser (cf. additif) : à nos yeux, il a donc toute sa place dans cette problématique...

Variante :

En se plaçant directement dans un repère d'origine le centre du rectangle :



$$-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2} \text{ et } -\frac{\ell}{2} \le y \le \frac{\ell}{2},$$

$$\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(\frac{L}{2}+x\right)=\left(\frac{\ell}{2}-y\right)\left(\frac{\ell}{2}+y\right)$$

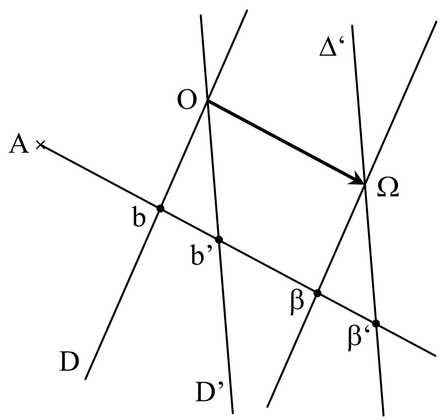
c'est à dire : $\left(\frac{L}{2}\right)^2 - x^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - y^2$

ce qui se réduit à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, *où* $a^2 = \frac{L^2 - \ell^2}{4} \ldots$

2^nde

✶✶✶ 12 ✶✶✶

Un point A et deux couples de droites parallèles (D, D') et (Δ, Δ') (D parallèle à Δ, D' parallèle à Δ') sont donnés dans le même plan. Est-il possible de mener de A une droite qui coupe les deux couples selon deux segments de même longueur ?



Remarque et indication :

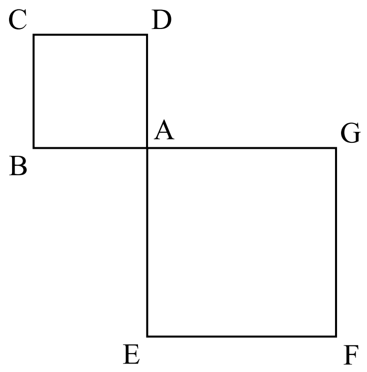
Cet exercice peut également être proposé en Seconde à titre de révision *de la translation. Il nécessite cependant une certaine créativité de la part de l'élève, aidée par la construction supposée acquise.*

La translation qui à O fait correspondre Ω transforme le couple (D, D') en le couple (Δ, Δ') (cf. figure ci-contre). La droite passant par A et parallèle à (OΩ) coupe les deux couples de droites en des points b, b', β et β' qui se correspondent deux à deux par cette même translation : b $\mapsto$ β et b' $\mapsto$ β'.

On a donc : bb' = $\beta\beta'$.

2^nde^

✶✶✶ 13 ✶✶✶



ABCD et AEFG sont deux carrés (cf. figure ci-contre)

1° Les droites (DG) et (CF) se coupent en I.

Que peut-on dire des points I, B et E ?

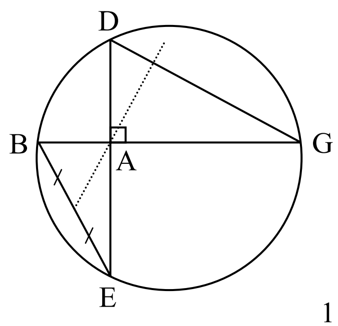
2° La médiane de EAB et la hauteur de ADG passant par A semblent confondues. Est-ce vrai ?

Remarque et indication :

1° *Cette question fait appel, sans le déclarer, à l'homothétie, enseignée maintenant en Première, mais il est résoluble plus tôt, en faisant référence à la symétrie axiale. L'élève doit retrouver une configuration qui le conduise à utiliser l'une de ces transformations.*

Cet exercice avait été proposé au départ avec une question préliminaire pour s'assurer de l'alignement des points C, A et F. Tel quel il offre ainsi un intérêt supplémentaire pour entraîner les élèves à ne pas se contenter à prendre pour argent comptant ce qu'ils voient sur une figure mais à prendre l'initiative de le justifier…

2° *La dernière question ouverte vise à éprouver le conflit éventuel entre la perception sensible et de la raison. Elle ne nécessite que des connaissances de propriétés du collège comme de savoir que dans un triangle rectangle, « le*

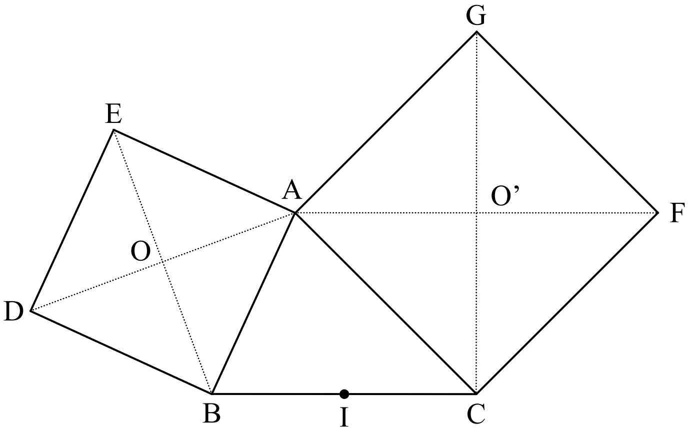


milieu de l'hypoténuse est équidistant des trois sommets », d'où des triangles isocèles, puis des égalités d'angles, etc. jusqu'à conclure avec des angles complémentaires.

Cet exercice est un cas simple d'un cas plus général faisant intervenir la propriété des angles inscrits comme indiqué sur la figure ci-contre.

2nde

✶✶✶ 14 ✶✶✶



On considère un triangle quelconque ABC. Sur les côtés [AB] et [AC] on construit les carrés respectifs : ABDE et ACFG. Soit O et O' les centres respectifs de ces carrés et I le milieu de [BC].

Démontrer que I est équidistant de O et O' et que les droites (IO) et (IO') sont orthogonales.

(à titre d'entraînement, on peut envisager de ne fournir dans l'énoncé que les triangles rectangles ABD et ACF au lieu des carrés)

Remarque et indication :

Montrer que IO = IO' peut inciter à vouloir utiliser une isométrie et étant donnée la figure de l'énoncé, la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ *n'est pas très difficile à exhiber. Cette rotation transforme E en B, C en G et donc le segment [EC] en [BG] d'où l'on déduit que ces segments sont orthogonaux et de même longueur. Or [IO] joint les milieux de côtés du triangle EBC et [IO'] les milieux de côtés du triangle BGC. Donc IO =* $\frac{CE}{2} = \frac{BG}{2}$ *= IO' et [IO] et [IO'] sont orthogonaux car respectivement parallèles à [CE] en [BG].*

Ce problème permet donc de faire fonctionner la rotation comme outil de preuve et de faire ainsi ressentir l'efficacité des transformations. Mais, il est fort possible que les élèves ne s'engagent pas d'emblée dans cette voie.

Depuis le "retour" des triangles isométriques dans les programmes de Seconde en 2000, les élèves peuvent aussi considérer les triangles AEC et ABG, montrer qu'ils sont isométriques (un angle de même mesure compris entre des côtés deux à deux de même longueur) puis conclure de la même façon en utilisant la propriété bien connue de la droite des milieux d'un triangle…

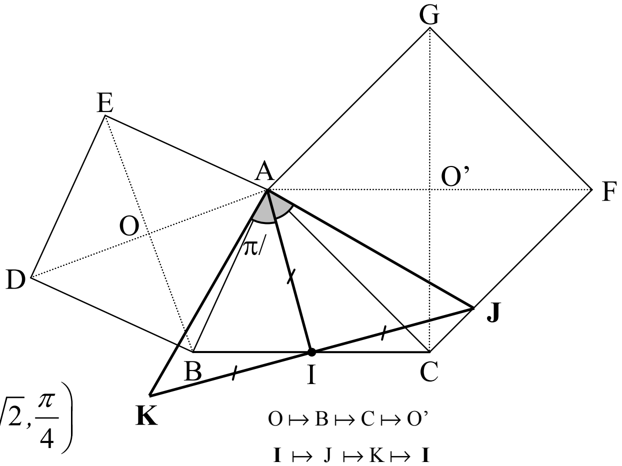
En terminale, la maîtrise des nombres complexes permettra de résoudre le problème dans un autre cadre. En revanche, la similitude ne permet pas de résoudre simplement le problème posé.

On peut cependant utiliser

$$S\left(\mathrm{A},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right)\circ S_{\mathrm{I}}\circ S\left(\mathrm{A},\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$$

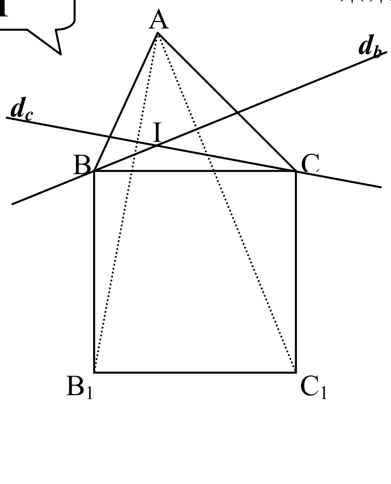
qui n'est autre que

$$S\left(\mathrm{I},1,\frac{\pi}{2}\right)=R\left(\mathrm{I},\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$



1ère

✶✶✶ 15 ✶✶✶



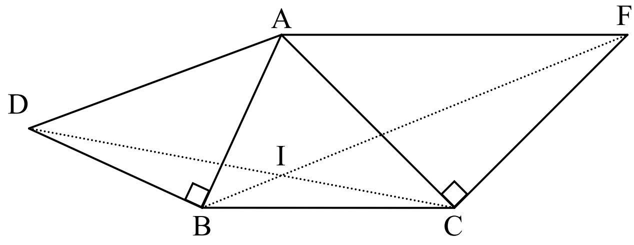
1° Le triangle ABC étant donné, on a construit :

- le carré BCC_1B_1, à l'extérieur de ce triangle,
- la droite $\boldsymbol{d_b}$ passant par B et perpendiculaire à (AC_1),

- la droite $\boldsymbol{d_c}$ passant par C et perpendiculaire à (AB_1).

Le point I est le point d'intersection des droites $\boldsymbol{d_b}$ et $\boldsymbol{d_c}$.La droite (AI) semble perpendiculaire à la droite (BC). Qu'en est-il vraiment ?

2° Le triangle ABC étant donné, on a construit, à l'extérieur de ce triangle, les triangles rectangles isocèles ABD et ACF. Le point I est le point d'intersection des droites(CD) et (BF).



Même question qu'en **1°**…

Remarque et indication :

1° *Régulièrement, les premières tentatives amènent les élèves à vouloir démontrer que I est un orthocentre. Mais tout aussi régulièrement, ils se placent dans le triangle AB'C' où B' et C' sont les intersections respectives de (AB_1) et (AC_1) avec (BC)… Ils ont même souvent beaucoup de mal à accepter que les droites* $\boldsymbol{d_b}$ *et* $\boldsymbol{d_c}$ *ne sont pas des hauteurs de ce triangle… Il leur faudra pas mal d'essais infructueux jusqu'à avoir l'idée d'utiliser la translation de vecteur* $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ *et considérer le triangle AB_1C_1… C'est pourquoi il est conseillé de donner cet exercice avec pour consigne claire de rechercher une transformation adaptée au problème posé, ce qui permettra de limiter les impasses tout en lui conservant sa qualité de bon exercice de recherche.*

Une fois cette translation exhibée, il reste à transformer les droites $\boldsymbol{d_b}$ *et* $\boldsymbol{d_c}$ *respectivement en* $\boldsymbol{d_b'}$ *(passant par B_1 et perpendiculaire à (AB_1) car par une translation l'image d'une droite lui est parallèle) et* $\boldsymbol{d_c'}$ *(passant par C_1 et perpendiculaire à (AC_1)). Comme le point d'intersection H des droites* $\boldsymbol{d_b'}$ *et* $\boldsymbol{d_c'}$ *est l'image de I par cette translation, on en déduit que* $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BB_1}$ *et donc que (IH) est perpendiculaire à (BC)… Pour ne pas conclure trop hâtivement que le problème est résolu, il reste encore à utiliser le fait que H est l'orthocentre du triangle AB_1C_1 ce qui prouve que (AH) est également perpendiculaire à (BC)… donc que A, I, H sont bien alignés… d'où $(AI) \perp (BC)$!*

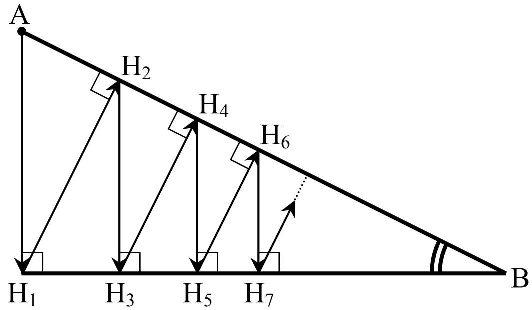
2° *La figure peut faire penser à celle de la figure 1°… d'où l'idée de compléter la figure par les points B_1 et C_1 tel que BCB_1C_1 soit un carré… puis de montrer que la droite (BF) et (CD) ne sont autres respectivement que les droite* $\boldsymbol{d_b}$ *et* $\boldsymbol{d_c}$ *. L'intervention des rotations de centre respectifs B et C et d'angle* $+\dfrac{\pi}{2}$ *y pourvoiront…*

T^ale

✶✶✶ 16 ✶✶✶

BAC
"2000+*n*"...

On veut calculer la longueur de "rebonds" successifs entre les deux murs indiqués en gras sur la figure ci-contre.



Un mobile "rebondit" donc, à partir de A, selon le chemin indiqué sur cette figure. Les angles au contact en H_0, H_1, H_2, ... sont droits.

On suppose donnés un angle et un côté du triangle rectangle ABH_1, par exemple : $AB = a$ et $\widehat{B} = b$.

Calculer $AH_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} H_kH_{k+1}$. Que devient cette somme lorsque n tend vers $+\infty$?

Remarque et indication :

L'objectif est de tirer une formule de récurrence pour définir chaque longueur de segment du type H_kH_{k+1} puis de calculer la somme d'une suite géométrique de raison inférieure à 1 et enfin, d'envisager le cas où n tend vers $+\infty$.

Un calcul simple donne : $AH_1 = a \times \sin b$ et, quelque soit k = 1 à n,
$BH_k = a \times (\cos b)^k$, d'où :

$$H_kH_{k+1} = BH_k \sin b = a \times \sin b \times (\cos b)^k$$

On en déduit la longueur du chemin jusqu'à H_{n+1} :

$$AH_1 + \sum_{k=1}^{k=n} H_k H_{k+1} = a \times \sin b \times (1 + \cos b + \cos^2 b + \ldots + \cos^n b)$$

$$= a \times \sin b \frac{1-\cos^{n+1} b}{1-\cos b}$$

Lorsque n tend vers +∞, la longueur du chemin tend vers $\dfrac{a \times \sin b}{1-\cos b}$.

Additif : *Un exercice de calculs trigonométriques pourrait être adjoint à ce problème : demander la longueur pour n = 6, par exemple.*

T^{ale}

BAC
"2000+*n*"...

✶✶✶ 17 ✶✶✶

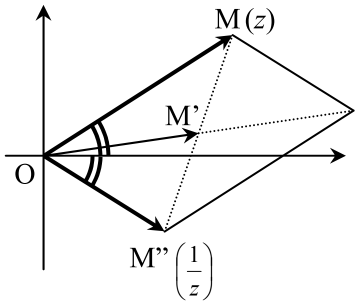
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, on associe à tout point M d'affixe z, $z \neq 0$, le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1° Définir géométriquement le point M'.

2° Définir l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe réel.

3° Si M est astreint à parcourir le cercle centré à l'origine, de rayon 2, quelle courbe décrit M' ?

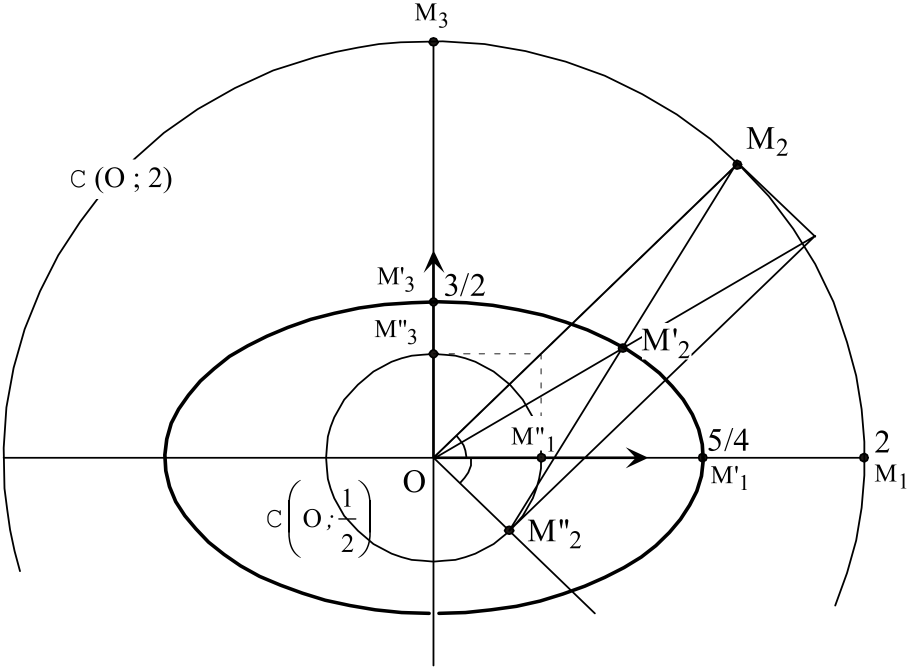
Remarque et indication :



1° *Ce problème vise à utiliser le plan complexe pour résoudre une situation qui aurait pu être présentée sous un habillage physique. En effet, M' est le centre du parallélogramme des forces représentées par* $\overrightarrow{OM}(z)$ *et* $\overrightarrow{OM''}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, *dont les directions sont symétriques par rapport à l'axe réel.*

2° *Si M' décrit l'axe réel, on démontre, éventuellement en passant par la forme z= x + iy, où l'on trouve* $z' = \dfrac{1}{2(x^2+y^2)}\left((x^3+xy^2+x)+iy(x^2+y^2-1)\right)$, *que le lieu de M est la réunion de l'axe des réels privé de l'origine (y=0 et $x \neq 0$) et du cercle centré en O de rayon 1($x^2 + y^2 = 1$).*

3° *Si M décrit le cercle centré en O et de rayon 2, le point M' décrit une ellipse centrée en O. On le démontre aisément en utilisant la forme trigonométrique : $z = 2e^{i\theta}$ qui amène z' = $\frac{1}{4}(5\cos\theta + 3\sin\theta)$… d'où l'équation réduite $\dfrac{x^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$ (ellipse d'excentricité $\frac{4}{5}$).*



1ère L « Math.-Info

✳✳✳ 18 ✳✳✳

EVOLUTION DEMOGRAPHIQUE DU CANTON DE BRUZ ENTRE 1990 ET 1999

COMMUNES	RECENSEMENT		Progression	Progression en %	Progression par an	Où sont les nombreux habitants
	1990	1999				
BRUZ	8 114	13 167	5 053	62.3%	6.92%	52%
PONT-PÉAN	2 011	3 217	1 206	60.0%	6.66%	12%
NOYAL-CHATILLON	4 313	5 638	1 325	30.7%	3.41%	14%
SAINT-ERBLON	1 708	2 229	521	30.5%	3.39%	5%
CHARTRES-DE-BRETAGNE	5 543	6 467	924	16.7%	1.85%	10%
BOURGBARRÉ	2 004	2 322	318	15.9%	1.76%	3%
ORGÈRES	2 537	2 876	339	13.4%	1.48%	3%
CANTON	**26 230**	**35 916**	**9 686**	**36.9%**	**4.10%**	**100%**

1° A la suite du dernier recensement de1999, le document ci-dessus nous apprend que le nombre d'habitants de la ville de Bruz est passé de 8 114 habitants en 1990 à 13 167 en 1999.

Le taux constant de progression annuelle est-il bien celui indiqué dans la colonne "Progression par an" ? Si non quel est-il ?

Quel serait celui de la ville de Rennes qui est passé de 197 536 en 1990 à 205 865 en 1999 ?

2° Le document ci-dessus était, entre autres, accompagné du commentaire ci-contre. Quelle signification lui accorder ?

> - une croissance exponentielle des communes de Bruz (+62.3%, ce qui la place en tête des communes de Bretagne).

Remarque et indication :

1° *L'objectif premier de cet exercice est de rompre avec le modèle spontané de la proportionnalité auquel certains élèves ne manqueront pas de faire référence.*

Après le choix adéquat du modèle géométrique de développement démographique, on obtient avec la calculatrice 5,53% pour Bruz et 0,46% pour Rennes.

2° *Il s'agit ici d'une croissance exponentielle au sens "journalistique"... car dans le langage courant, où on dit "croissance exponentielle" pour "rapide"...*

Du point de vue des mathématiques, on parle de croissance exponentielle pour une suite géométrique c'est-à-dire une ***suite à taux d'accroissement constant****… avec deux termes cela n'a donc aucun sens de parler de croissance exponentielle…*

Mais ce type de confusion est fréquent !

✳✳✳ Situations didactiques développées ✳✳✳

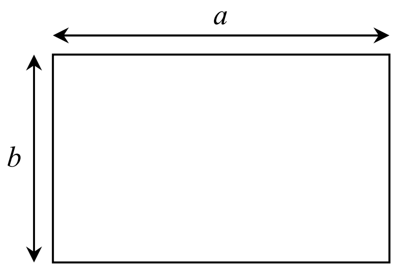
A - Variantes autour du nombre d'or

Nous donnons ci-dessous les grandes lignes d'une situation classique où le nombre d'or tient la plus grande place, sert de support, mais aussi de "prétexte" à la résolution d'un problème de géométrie. Cependant, le nombre d'or fournit des variantes de situations également très riches autant en analyse qu'en géométrie. Nous y reviendrons. Une exploitation de ce thème peut également être conduite en liaison avec le professeur de dessin ou avec tout enseignant ayant des compétences et de l'intérêt pour l'art : musique, peinture, architecture, en particulier.

Énoncé :

Depuis des siècles, en architecture et en dessin notamment, une proportion est considérée comme particulièrement esthétique : celle qui caractérise les rectangles dits "dorés" :

« Il y a de la petite partie à la plus grande le même rapport que la grande au tout ».

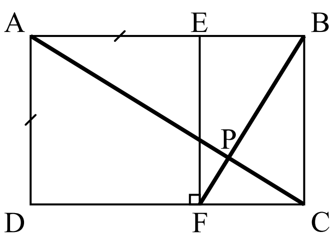


1° Écrire, en fonction de la longueur a et de la largeur b d'un rectangle "doré", la proportion qui se cache derrière cette phrase.

2° Calculer le rapport $r = \dfrac{a}{b}$.

3° Comment pourrait-on construire un rectangle "doré" en ne disposant que d'une règle et d'un compas ?

4° À l'intérieur d'un rectangle "doré" ABCD, on construit le rectangle BCFE obtenu en enlevant à ABCD le carré ADFE.



a) Démontrer que BCFE est un rectangle “doré” et que les diagonales [AC] et [BF] sont perpendiculaires.

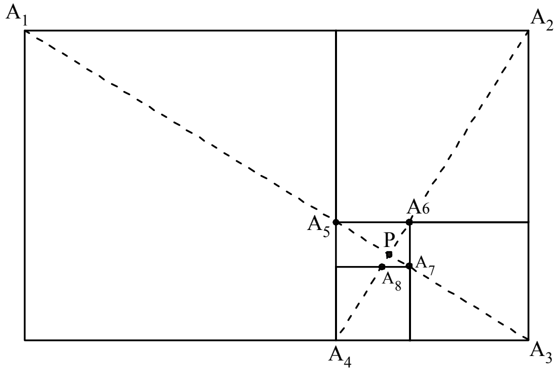
b) Démontrer que leur intersection P vérifie : $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PB}{PF} = r^2$

c) Quelle transformation géométrique associe ABCD à BCFE ?[1]

5° On itère le processus de soustraction d’un carré au rectangle obtenu. Ainsi, au rectangle BCEF, on enlève un carré, au rectangle restant, on enlève un carré, etc.

Généralisons...

Préciser la nature des transformations successives : $A_1 \mapsto A_2 \mapsto A_3 \mapsto \cdots \mapsto A_{n+1}$ ainsi que la composée : $A_1 \mapsto A_{n+1}$. Mettre en évidence une courbe sur la quelle s’inscrivent les différents points A_i.



Remarque et indication :

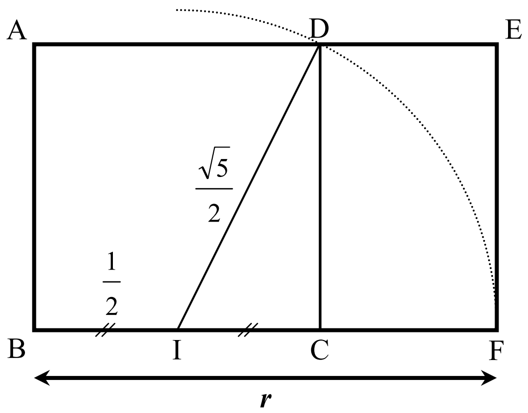
1° $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{a+b}$.

2° *De l’égalité trouvée en 1° on déduit* $r^2 = r + 1$. *La seule racine positive de* $x^2 - x - 1 = 0$, *est* $r = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *qui est le nombre d’or.*

3° *Voici les phases successives d’une construction d’un rectangle “doré” :*

– *partir d’un carré de côté pris pour unité,*

– *joindre le milieu I d’un côté à un sommet opposé,*



[1] Question à formuler différemment (en faisant référence à des triangles semblables) pour des élèves n’ayant pas la similitude à leur programme.

– *au compas tracer l'arc de cercle de centre I et de rayon le segment précédent comme indiqué sur la figure ci-contre…*

4° a) *Il suffit de calculer le rapport des mesures des côtés du nouveau rectangle. On obtient* $\frac{a-b}{b} = r-1 = \frac{1}{r} = \frac{b}{a}$.

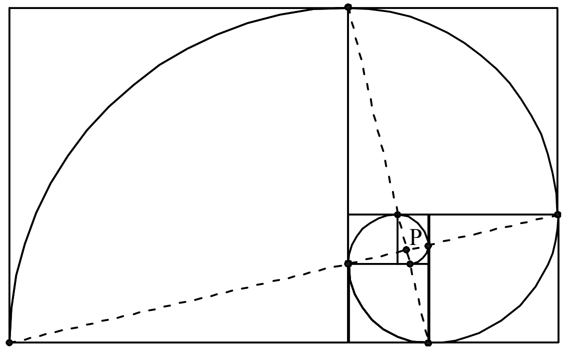
Les triangles ABP et CBF ont deux angles de mesures respectivement égales. Par suite, ABP est un triangle rectangle et les diagonales [AC] et [BF] sont perpendiculaires.

b) $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PF} = \frac{AB}{FC} = \frac{a}{a-b} = \frac{r}{r-1} = r^2$ …

c) *On en déduit que la similitude de centre P, d'angle* $-\frac{\pi}{2}$ *et de rapport* $\frac{1}{r}$ *transforme le rectangle ABCD en le rectangle BCFE de telle façon que* $A \mapsto B$, $B \mapsto C$, *etc.*

5° *Les transformations successives sont des similitudes de même centre P, de même angle* $-\frac{\pi}{2}$ *et de même rapport* $\frac{1}{r}$. *Par suite, l'angle et le rayon polaires du point* A_{n+1} *s'écrivent en fonction de ceux de* A_1 *lorsque l'on choisit P comme origine et* $\overrightarrow{PA_1}$ *comme axe polaire.*

En posant $k = PA_1 = \left(\frac{r^2}{r^2+1}\right)\sqrt{a^2+b^2}$, *alors le rayon polaire* ρ *de* A_{n+1} *a pour mesure* $k\left(\frac{1}{r}\right)^n$ *et son angle* θ *est* $n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. *En éliminant n entre les deux relations, on obtient une équation polaire de la forme* $\rho = ke^{c\theta}$, *avec* $c = \frac{2}{\pi}\ln r$, *qui est celle d'une spirale logarithmique. Cette spirale s'enroule autour de P qui est la position limite de* (A_n) *lorsque n tend vers l'infini.*



2nde / 1ère

B - Introduction simultanée de l'homothétie et de la multiplication vectorielle[1]

I. La séquence prévue

I.1 Documents joints : Quatre feuilles de dessins (voir en annexe).

Feuille 1 : 10 dessins numérotés de 1 à 10 (neuf d'entre eux sont directement inspirés de J. LAURENT dans « Suivi Scientifique 86-87 », nouveaux programmes de 5ème)

Feuille 2 : 6 dessins numérotés de 1 à 6

Feuille 3 : 7 dessins numérotés de 7 à 13

Feuille 4 : 4 dessins numérotés de 14 à 17

I.2 Gestion de la classe : petits groupes de trois à quatre élèves.

I.3 Déroulement de la séquence : quatre phases.

Phase 1 :

- support : feuille 1
- consigne : « *Classez ces dessins en deux groupes et donnez vos critères de classement.* »
- objectifs :
  1) Familiariser les élèves avec une activité de classement avec argumentation à l'appui.
  2) Vérifier l'"ancrage" de la notion d'isométrie.
- discussion possible : conservation de la forme / conservation des longueurs.

Phase 2 :

- support : feuille 2 et 3
- consigne : « *Classez ces 13 dessins et donnez vos critères de classement.* »
- objectifs :

[1] Cette séquence d'apprentissage a été expérimentée par notre collègue Marc Bailleul du temps où l'homothétie figurait encore au programme en classe de Seconde. Depuis la rentrée 2000, une telle séquence n'a plus sa place en tant que telle en Seconde, l'étude de l'homothétie ayant été reportée en classe de Première. Le double objectif proposé ici garde cependant tout son intérêt en Première vu que la multiplication vectorielle n'aura été la plupart du temps qu'à peine abordée en Seconde et qu'il est donc plus que recommandé d'y revenir pour en permettre une bonne assimilation. Cette séquence peut donc permettre de « *faire d'une pierre deux coups* » même en Première.

1) Évaluation diagnostique : vérifier la persistance des notions de symétrie axiale, de rotation (y compris symétrie centrale) et de translation.
2) Apprentissage : la notion d'homothétie.

– analyse préalable :

- dessin n°1 : rotation
- dessin n°2 : symétrie axiale
- dessin n°3 : symétrie axiale
- dessin n°4 : translation
- dessin n°5 : symétrie centrale ou rotation
- dessin n°6 : autre
- dessin n°7 : autre
- dessin n°8 : rotation
- dessin n°9 : symétrie centrale ou rotation
- dessin n°10 : autre
- dessin n°11 : symétrie axiale
- dessin n°12 : translation
- dessin n°13 : autre

Le classement attendu est donc :
$G_1 = \{4 ; 12\}$, $G_2 = \{1 ; 5 ; 8 ; 9\}$, $G_3 = \{2 ; 3 ; 11\}$, $G_4 = \{6 ; 7 ; 10 ; 13\}$.

Phase 3 :

➢ **Temps 1 :**
– support : les dessins des groupes G_1, G_2 et G_3.
– consigne : « *Identifiez les éléments caractéristiques des différentes transformations à l'œuvre dans chacun de ces groupes de dessins.* »
– objectifs : remettre en mémoire les notions d'axe de symétrie, de vecteur de translation, de centre et d'angle d'une rotation. (possibilité offerte à l'enseignant de recueillir des éléments d'information utilisables au cours des modules).

➢ **Temps 2 :**
– support : les dessins du groupes G_4.
– consigne : « *Identifiez les éléments caractéristiques des différentes transformations à l'œuvre dans ce groupe de dessins.* »
– objectifs : faire identifier par les élèves les notions de centre et de rapport de l'homothétie.

➢ **Temps 3 :**
– support : feuille 4.
– consigne : « *Les transformations qui agissent dans ces dessins sont-elles de la même nature que celles des dessins du groupe G_4 ?* »

– objectifs : utiliser en tant qu'outil les notions qui ont émergé dans le temps 2 pour répondre à la question posée et pour les consolider avant de faire de leurs définitions et propriétés les règles qui seront par la suite en vigueur dans la classe.

À ce niveau de la séquence peut intervenir une première synthèse tentant de dégager une définition géométrique de l'homothétie.

Phase 4 :

– support : un des dessins où il y a une homothétie.
– consigne : « *Les éléments caractéristiques de cette transformation ont été trouvés du point de vue géométrique. Et si maintenant on essayait d'en parler en utilisant le langage des vecteurs...* »
– objectifs :
1) Faire vivre aux élèves un changement de cadre (géométrique vectorielle) en le leur disant.
2) Faire ressentir l'utilité de ce choix : "lourdeur" de la définition de l'homothétie dans le cadre géométrique / simplicité de cette définition dans le cadre vectoriel.
3) Multiplication d'un vecteur par un réel[2].

C'est après cette quatrième phase qu'aura lieu une véritable institutionnalisation de la définition vectorielle de l'homothétie et de ses propriétés.

II. Quelques observations en classe

1° La première chose que l'on peut noter est une "<u>mise au travail</u>" de tous les élèves, y compris des "plus faibles".

2° <u>Les variables didactiques en jeu</u> :

– *les consignes* : dans l'activité de la première feuille de dessins, le fait de demander un classement en **deux** familles oblige les élèves à ne pas étiqueter les transformations par de simples mots récupérés en mémoire. La situation est d'ailleurs différente pour la phase suivante où c'est la réaction inverse qui est attendue par l'enseignant.

[2] "découverte" et mise en place d'un nouvel outil lors de l'expérimentation de Marc Bailleul en Seconde ;
"révision" et réinvestissement d'une notion antérieure en Première.

– *la présence d'un quadrillage* dans le dessin 13 est bien évidemment censée favoriser l'utilisation des mesures et du rapport de proportionnalité.

– *les cadres* qui entourent les dessins, et qui n'avaient qu'une fonction de délimitation de l'espace, ont parfois joué un rôle négatif dans l'activité, certains élèves ne s'autorisant pas à tracer des droites (MM') hors de ce cadre. Ils ne pouvaient alors pas déterminer le centre de l'homothétie, c'est le cas du dessin 6 par exemple.

3) <u>Les stratégies d'élèves</u> : dans la phase 3, temps 2, qui est le premier moment clé de cette séquence, trois stratégies sont, a priori, possibles :

– l'une *numérique* qui permettra la mise en évidence du rapport d'homothétie, coefficient d'agrandissement ou de réduction (aide du quadrillage),

– l'autre *géométrique* qui mènera au centre de cette homothétie par le tracé des droites (MM') et le constat qu'elles sont sécantes,

– une autre qui est *mixte* consistant en un va-et-vient entre les deux précédentes. C'est celle qui est la plus efficace.

La consigne « *définir ces transformations* » est coûteuse pour l'élève qui s'y essaie en utilisant le cadre géométrique. Le cadre vectoriel prend sa puissance et montre sa pertinence comme outil économique.

On constate effectivement que ces trois stratégies apparaissent, certains groupes d'élèves ne pouvant, après en avoir mis une première en œuvre, s'en défaire pour mobiliser la seconde. L'enseignant joue alors un rôle important à travers la façon dont il régule les échanges entre groupes, dans l'objectif de permettre à tous une mobilité entre les stratégies pour mettre en évidence les deux éléments caractéristiques de l'homothétie.

Le deuxième moment clé est celui de la phase 4, quand, comme il est prévu ici, la multiplication vectorielle n'a pas encore été vue par les élèves. Dans les deux classes où nous avons expérimenté ce scénario, l'idée de multiplier un vecteur par un scalaire est venue d'élèves dans une des deux classes, l'enseignant devant fortement suggérer dans l'autre. Il faut noter qu'une fois cet outil proposé, il est d'emblée adopté et utilisé sans difficultés majeures.

III. Mise en regard avec la problématique n°3

Utilisé suffisamment tôt dans l'année, voire comme première leçon de géométrie, eu égard au caractère d'évaluation diagnostique que, d'une certaine façon, on peut lui attribuer, ce scénario est, dans l'esprit, un trait d'union entre le collège et le lycée (phase 1, phase 2, phase 3 – temps 1) et par suite entre "Collège + Seconde"[3] et la classe de Première. En ce sens, il relève bien du deuxième paragraphe de la problématique 3.

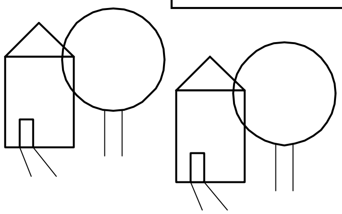
La fonction outil de l'homothétie apparaît clairement ici, sa transformation en objet "culturel", étant de la responsabilité de l'enseignant au cours des moments de synthèse, à la fin de la phase 3, et d'institutionnalisation à la fin de la phase 4. L'introduction de la notion "multiplication d'un vecteur par un nombre" permet, dans cette culture mathématique, de démontrer certaines propriétés apparues au cours des manipulations qui ont précédé. Une phase "exercices" suivra nécessairement cette séquence.

Enfin, et bien évidemment, cette séquence est particulièrement propice à des changements de registres.

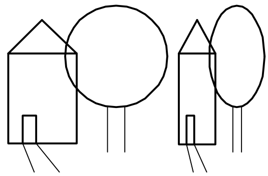
[3] Ne dit-on pas souvent que la classe de Seconde indifférenciée n'est autre que la 5ème année de collège… ?

Feuille 1

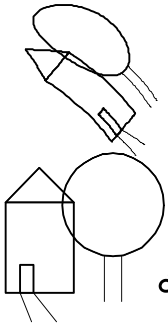
Pour des raisons de mise en page, les figures ont été réduites de 24%.



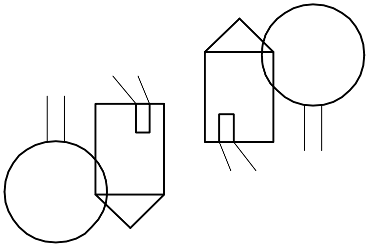
dessin 1



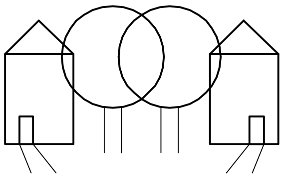
dessin 2



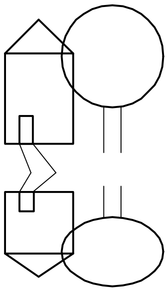
dessin 3



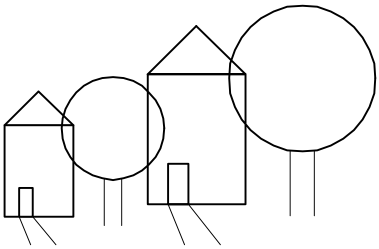
dessin 4



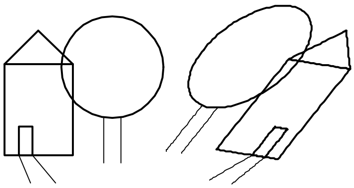
dessin 5



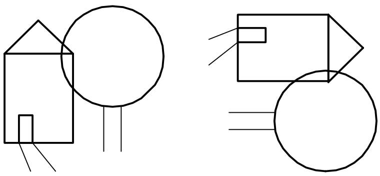
dessin 6



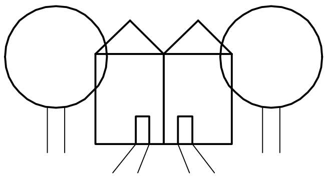
dessin 7



dessin 8

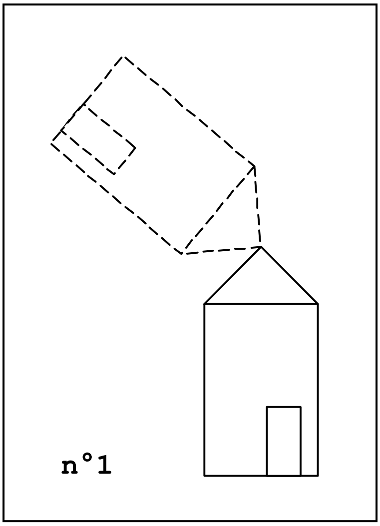


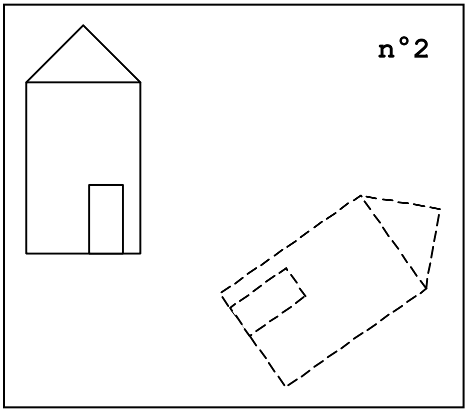
dessin 9

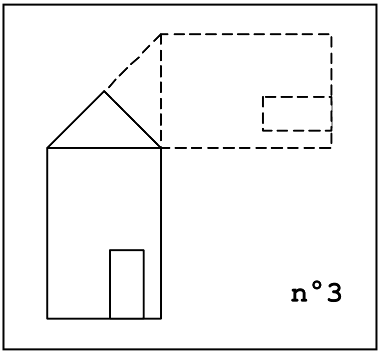


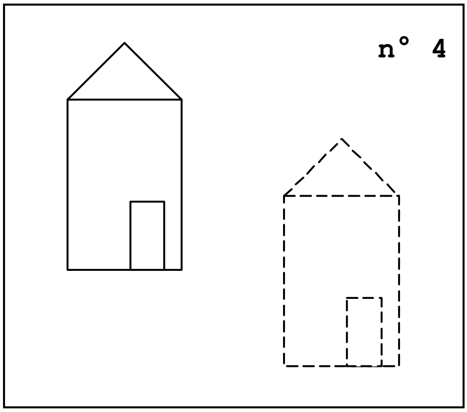
dessin 10

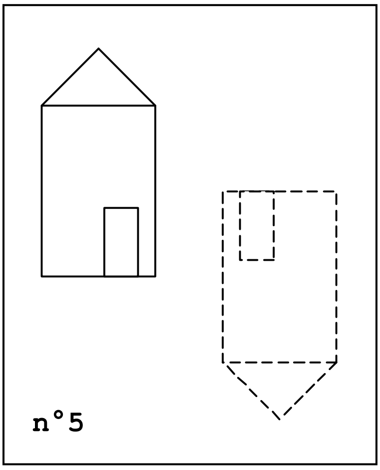
Feuille 2

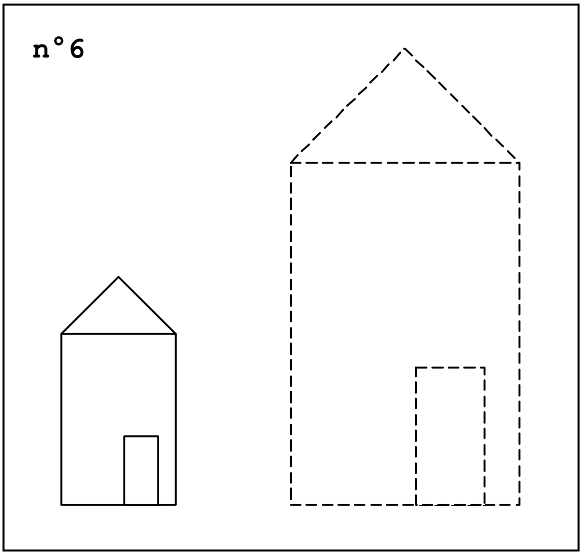




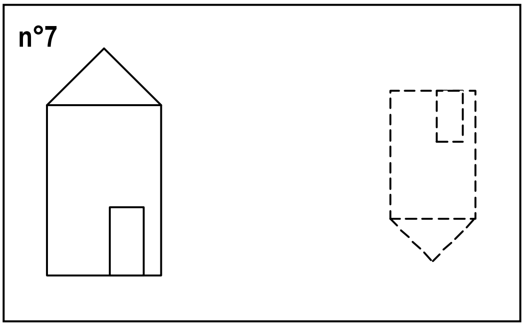


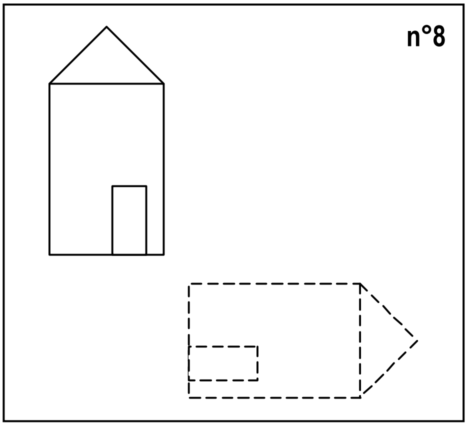


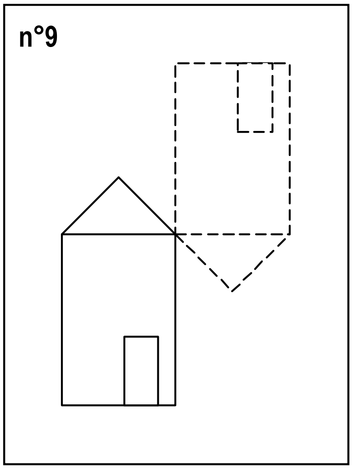


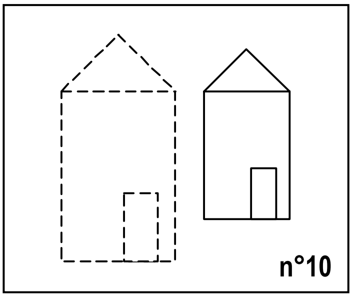


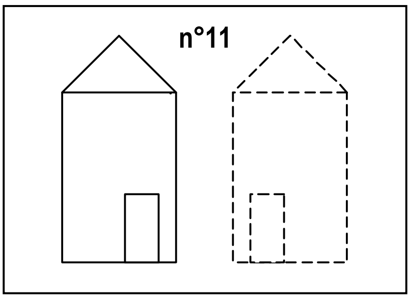
Feuille 3

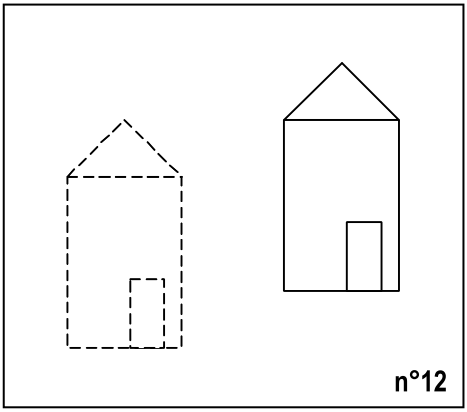


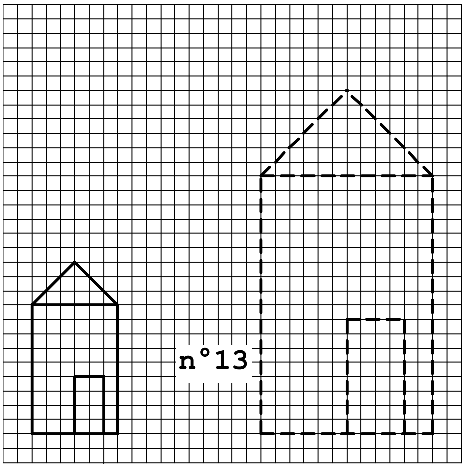












PROBLÉMATIQUE N° 4

MESURE DE GRANDEURS

PRÉCISION , APPROXIMATION , INCERTITUDE

Situations-Démarches-Contenus

Les listes qui suivent ne prétendent pas être exhaustives quant aux situations et aux contenus. Elles nécessitent d'être élargies, précisées et spécifiées à des niveaux de classe du second cycle ainsi qu'à ses différentes filières. Elles vont nécessairement associer les cadres géométriques, graphiques et algébriques.

Situations	Démarches	Contenus
♦ Approximation d'une fonction par une autre pour des valeurs limites de la variable.	♦ Factoriser, décomposer, étudier des limites, approcher	♦ Courbes asymptotes à une autre courbe
♦ Approximation d'un phénomène représentable fonctionnellement par une expression affine (ou polynomiale)	♦ Rechercher graphiquement et analytiquement une fonction simple qui approche une fonction plus complexe sur un domaine choisi	♦ Inégalité des accroissements finis. Développements limités simples. Approximation affine d'une fonction
♦ Approximation d'une longueur (resp. d'une aire) par encadrement.	♦ Encadrer un réel par deux suites numériques	♦ Suites numériques. Etude de la convergence et vitesse de convergence.
♦ Recherche de l'aire placée sous une courbe. Recherche de l'encadrement d'une série par 2 intégrales	♦ Passer du discret au continu par un encadrement. Veiller à contrôler son intuition de l'infiniment petit. Associer intégrale et aire.	♦ Intégrale de Riemann sur un intervalle relative à une fonction positive, puis de signe quelconque. Relation série-intégrale
♦ Décomposition de lignes (resp. de solides) simples pour accéder à des mesures approchées de longueurs (resp. d'aires, de volumes) et autres grandeurs physiques.	♦ Associer le geste de décomposition à une opération géométrique dynamique. . En dégager des propriétés métriques	♦ Aires de surfaces et volumes de solides par un calcul d'intégrale. Problèmes d'unités. Equation aux “dimensions”. Génération de surfaces par rotation d'une courbe

Situations	Démarches	Contenus
♦ A partir de l'expérience de la planche de Galton, expression d'événements vraisemblables et impossibles à l'aide des connecteurs logiques et des opérations sur les ensembles. Calculs “de bon sens” de la probabilité de la survenue d'événements élémentaires et conjugués.	♦ Représenter le langage des événements à l'aide des connecteurs de la logique et des opérations ensemblistes. Dégager les propriétés suffisantes pour associer un nombre à ce qui “mesurerait” les chances d'apparition d'un événement.	♦ Formalisation de la théorie des probabilités élémentaires à l'aide des axiomes de Kolmogoroff : - l'ensemble des événements associés à une épreuve aléatoire a une structure d'anneau - la probabilité est une mesure sur cet ensemble
♦ Simulation d'une aire par la méthode de Monte-Carlo.	♦ Relier aire et distribution uniforme dans le plan. Substituer une simulation à un calcul.	♦ Application des probabilités aux problèmes de simulation.
♦ Recherche de la représentation d'une variable statistique par une autre plus simple.	♦ Minimiser, approximer, optimiser un écart quadratique. Anticiper des observations	♦ Approximation linéaire d'un nuage de points. Droite, courbe de régression
♦ Problème d'intérêts composés. Problème de diffusion d'une épidémie	♦ Passer du temps discret au temps continu, d'un taux d'accroissement à une dérivée	♦ Equation récurrente et équation différentielle linéaire

Quelques situations-problèmes

Toutes classes ✶✶✶ **1** ✶✶✶

1° L'entier le plus proche d'un nombre ***a*** est 7. Trouver des valeurs possibles de ***a***.

2° Trouver plusieurs nombres dont la valeur *tronquée* à 10^{-3} près est 5,176. Soit ***b*** un tel nombre. Quelles sont les valeurs possibles de ***b*** ? (On répondra à cette question en donnant un encadrement de ***b***)

3° Trouver plusieurs nombres dont la valeur *arrondie* à 10^{-3} près est 5,176. Soit ***c*** un tel nombre. Quelles sont les valeurs possibles de ***c*** ? (On répondra à cette question en donnant un encadrement de ***c***)

Remarque : *des exercices de ce type, très simples, n'en sont pas moins très utiles pour bien installer les notions d'arrondi, de troncature*.

Toutes classes ✶✶✶ **2** ✶✶✶

Dans une classe de 27 élèves, Mouloud a été élu délégué avec 66,7% des voix.

1° Sur la feuille de compte-rendu, Mouloud a écrit par erreur 77,6%. Sans même savoir le nombre de voix obtenues par Mouloud, son professeur de mathématiques lui fait remarquer qu'il s'est certainement trompé. Comment a-t-il pu s'en apercevoir ?

2° Combien de voix Mouloud a-t-il obtenu sachant que 66,7% est un pourcentage arrondi à 10^{-1} près ?

Indication :

Soit x le nombre de voix obtenues par Mouloud : $x \in \mathbf{N}$ et $0 \leq x \leq 27$.

1° $\dfrac{77{,}6 \times 27}{100} = 20{,}952$ *; or avec 21 voix le pourcentage, à 10^{-1} près, serait de* $\dfrac{21}{27} \times 100 \approx 77{,}8\%$ *et avec 20 voix il serait de* $\dfrac{20}{27} \times 100 \approx 74{,}1\%$. *Autre approche proposée (qui convainc souvent davantage les élèves car 77,8 c'est tout de même proche de 77,6 !) :*

En supposant que 77,6 % est une valeur arrondie à 10^{-1} près :

$77{,}55 \leq \dfrac{x}{27} \times 100 < 77{,}65$ *d'où $20{,}9385 \leq x < 20{,}9655$ et comme $x \in \mathbf{N}$, il n'y a pas de solution !*

En supposant que 77,6 % est une valeur tronquée à 10^{-1} près :

$77{,}6 \leq \dfrac{x}{27} \times 100 < 77{,}7$ d'où $20{,}9512 \leq x < 20{,}979$ et comme $x \in \mathbf{N}$, il n'y a pas de solution !

2° $\dfrac{66{,}7 \times 27}{100} = 18{,}009$ *; or avec 18 voix le pourcentage est bien de* $\dfrac{18}{27} \times 100 \approx 66{,}7\%$ *à 10^{-1} près. On peut alors proposer de vérifier qu'il y a bien l'entier 18 dans l'encadrement traduisant l'énoncé, à savoir :*

$66{,}65 \leq \dfrac{x}{27} \times 100 < 66{,}75$ c'est à dire : $17{,}9955 \leq x < 18{,}0225$ et comme $x \in \mathbf{N}$, $x = 18$!

Toutes classes **✶✶✶ 3 ✶✶✶**

Pour tout renseignement, le chef cuistot d'un Lycée de 1 650 élèves ne connaît que le pourcentage des élèves demi-pensionnaires. Quel nombre de repas doit-il prévoir sachant que ce pourcentage est égal à 55 % ?

On étudiera deux cas suivant que ce pourcentage est une valeur tronquée à l'unité ou une valeur arrondie à l'unité et bien sûr, on donnera les résultats sous forme d'une "*fourchette*" de nombres entiers...!

Indications :

Soit R le nombre de repas à prévoir (c'est à dire le nombre de demi-pensionnaires). $R \in \mathbb{N}$.

1° *Si 55 est une valeur tronquée à l'unité :*

$0{,}55 \times 1650 \leq R < 0{,}56 \times 1650$ *c'est à dire :* $907{,}5 \leq R < 924$. *Le chef cuistot devra donc prévoir entre 908 et 923 repas.*

2° *Si 55 est une valeur arrondie à l'unité :*

$0{,}545 \times 1650 \leq R < 0{,}555 \times 1650$ *c'est à dire :* $899{,}25 \leq R < 915{,}75$. *Le chef cuistot devra donc prévoir entre 900 et 915 repas.*

Dans le doute, il lui faut donc prévoir entre 900 et 923 repas ce qui représente pratiquement 3 tables de 8 personnes d'écart !

2[nde]

✳✳✳ 4 ✳✳✳

Soient a et b deux nombres tels que $b < a < 0$.

1° À quel intervalle appartient $\dfrac{a}{b}$? En déduire, en le justifiant, dans quel intervalle se trouvent $A = \dfrac{-5a}{4b}$ et $B = \dfrac{b-3a}{2b}$. Est-il possible que $A = B$?

2° Qu'en est-il réellement ? Pour répondre à cette question, on vous propose de résoudre l'équation $A = B$ d'inconnue $x = \dfrac{a}{b}$ [1].

3° Donner une interprétation graphiquement des réponses précédentes.

[1] La méthode consistant à étudier le rapport B/A donne une réponse quasi immédiate ici puisque l'on obtient $-2b/5a = -1/5$, d'où l'on déduit $a/b = 2$, ce qui est impossible d'après la question 1… mais c'est volontairement que l'on a posé cette question sous cette forme pour amener les élèves à l'interprétation de la question 3°… (cf. problématique 7).

Indications :

1° *On a* $\frac{a}{b} > 0$ *; d'autre part comme* $b < a$ *et* $b < 0$ *on a donc* $1 > \frac{a}{b}$*, d'où :* $\frac{a}{b} \in [0\ ;\ 1]$.

On en déduit : $0 > -\frac{5}{4} \times \frac{a}{b} > -\frac{5}{4}$ *c'est à dire A* $\in$. $\left]-\frac{5}{4}; 0\right[$

$B = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{a}{b}$ *d'où B* $\in \left]-1; \frac{1}{2}\right[$

Comme $\left]-\frac{5}{4}; 0\right[\cap \left]-1; \frac{1}{2}\right[=]-1; 0[\neq \varnothing$*, il est donc envisageable que A = B.*

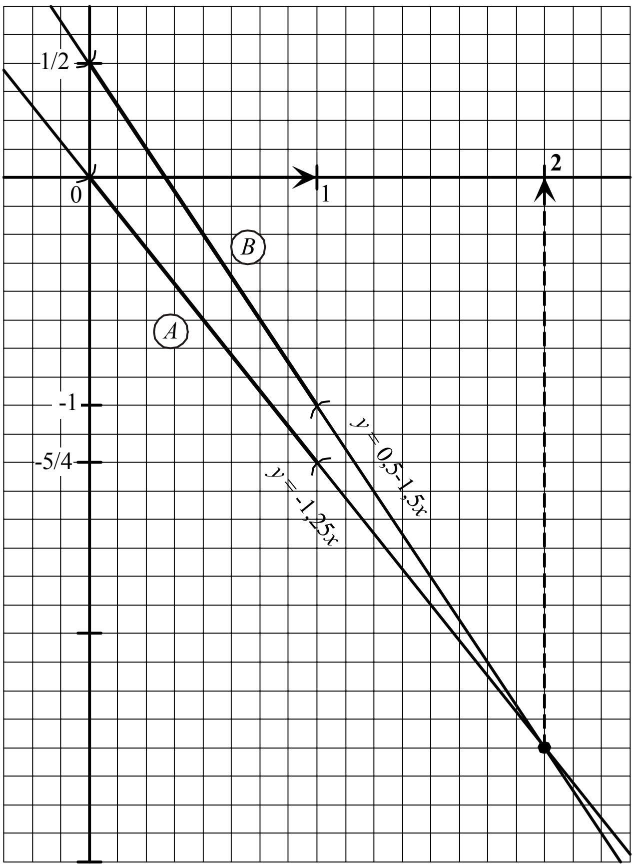
2° $A = -\frac{5}{4}x$

et $B = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$.

L'équation, d'inconnue x, A = B admet pour solution x = 2.

Mais 2 ∉] 0 ; 1 [donc il est impossible que A = B.

3° *Voir ci-contre.*



$2^{de} - 1^{ère}$ ✶✶✶ **5** ✶✶✶ **Option Sciences !**

Dans un repère du plan, on considère les droites d_1 et d_2 d'équations respectives : $y = \dfrac{x}{a}$ et $y = -x + b$ où $-0{,}6 < a < -0{,}5$ et $-1{,}5 < b < -1{,}4$. Le but de cet exercice est d'encadrer au mieux les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2.

1° Calculer, en fonction de a et b, les coordonnées du point d'intersection I de d_1 et d_2.

2° En déduire un encadrement de l'abscisse ainsi que de l'ordonnée du point I.

3° Le point I peut-il avoir pour coordonnées (2 ; –3) ? (1,75 ; –3) ? et (1,75 ; –3,2) ?

Donner une interprétation graphique de ces résultats.

Indications :

Les coordonnées du point d'intersection I sont : $\left(\dfrac{ab}{a+1}, \dfrac{b}{b+1}\right)$.

Remarque *: I appartient à la droite d'équation* $y = \dfrac{x}{a}$.

Par encadrements successifs, on trouve : 0,7 < ab < 0,9 et $\dfrac{1}{0{,}4} > \dfrac{1}{a+1} > \dfrac{1}{0{,}5}$ *c'est à dire :* $2 < \dfrac{1}{a+1} < 2{,}5$. *D'où :* $1{,}4 < \dfrac{ab}{a+1} < 2{,}25$. *Comme 1,4 < –b < 1,5, il vient* $-3{,}75 < \dfrac{b}{a+1} < -2{,}8$.

Donc le point d'intersection I est nécessairement dans le rectangle défini par

$$\begin{cases} 1{,}4 < x_I < 2{,}25 \\ -3{,}75 < y_I < -2{,}8 \end{cases}$$

Mais ce n'est pas suffisant comme le montre une étude plus précise :

♦ *Si le point I avait pour coordonnées (2 ; –3) cela impliquerait :*

$$\begin{cases} -3 = \dfrac{2}{a} \\ -3 = -2 + b \end{cases} \quad \textit{c'est à dire} \quad \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \notin]-0,6 ; -0,5[\\ b = -1 \notin]-1,5 ; -1,6[\end{cases}$$

♦ *Si le point I avait pour coordonnées (1,75 ; –3) cela impliquerait :*

$$\begin{cases} -3 = \dfrac{1,75}{a} \\ -3 = -1,75 + b \end{cases} \quad \textit{c'est à dire} \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1,75}{3} \in]-0,6 ; -0,5[\\ b = -1,25 \notin]-1,5 ; -1,6[\end{cases}$$

♦ *Par contre le point I peut avoir pour coordonnées (1,75 ; –3,2) , en effet :*

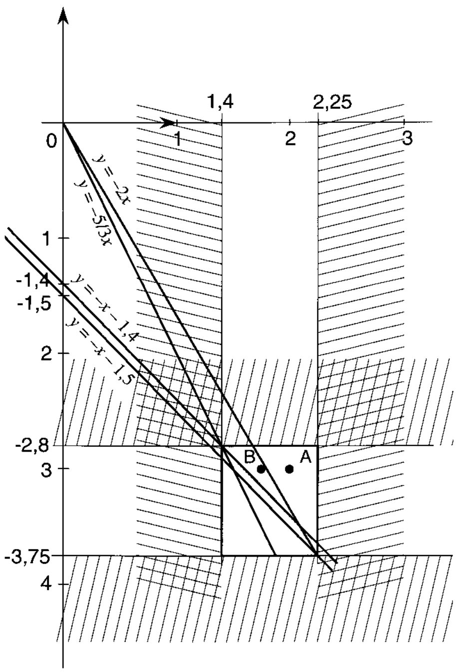
$$\begin{cases} -3,2 = \dfrac{1,75}{a} \\ -3,2 = -1,75 + b \end{cases} \quad \textit{c'est à dire} \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1,75}{3,2} \in]-0,6 ; -0,5[\\ b = -1,45 \in]-1,5 ; -1,6[\end{cases}$$

Interprétation graphique :

On a $-2 < \dfrac{1}{a} < -\dfrac{5}{3}$ *et comme* $x_I > 0$ *on en déduit :* $-2x_I < \dfrac{1}{a}x_I < -\dfrac{5}{3}x_I$ *et donc la droite d'équation* $y = \dfrac{x}{a}$ *est entre les droites d'équations respectives* $y = -2x$ *et* $y = -\dfrac{5}{3}x$.

D'autre part, on a : $-x_I - 1,5 < -x_I + b < -x_I - 1,4$ *et donc la droite d'équation* $y = -x + b$ *est entre les droites d'équations respectives* $y = -x - 1,5$ *et* $y = -x - 1,4$.

Voir figure à partir d'un document élève.



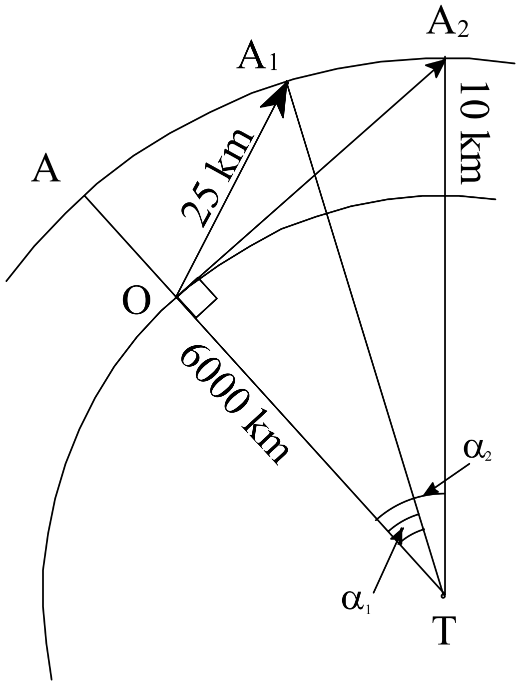
Des situations géométriques, nous ramenant ainsi à l'étymologie de ce mot :

2^{nde} – $1^{ère}$ **✷✷✷ 6 ✷✷✷**

Du haut du clocher de l'église de mon village, avec mes jumelles, je vois un avion à l'horizon. C'est un quadri-réacteur, donc je suppose qu'il vole à 10000 m. Rien ne faisant obstacle, à quelle distance approximative l'ai-je aperçu lors de sa survenue à l'horizon.

Sans mes jumelles, je ne distingue vraiment un tel objet que lorsqu'il est au plus loin à 25 km de moi. De sa première apparition à son passage à la verticale, il a mis 2 minutes. A quelle vitesse se déplace-t-il ?

Remarque et solution



La première partie de ce problème est classique et peut revêtir plusieurs habillages suivant les régions… Dans une région de montagne on se transportera sur un sommet voisin, au bord de la mer on observera un bateau ou une île. On *peut aussi à travers un hublot d'avion, regarder la région survolée. Cette partie peut être traitée en seconde.*

La seconde partie, un peu plus complexe, fait appel à la trigonométrie dans le triangle quelconque (formule d'Al Kashi) et ne peut être traitée avant la première.

Suivant la classe et le type de travail (TD, devoir maison, contrôle) on décidera de préciser ou non la valeur à retenir pour le rayon de la Terre.

Les objectifs de ce problème sont de schématiser une situation concrète, de la mathématiser et de mettre en œuvre les concepts relatifs aux relations métriques et trigonométriques dans le triangle et dans le cercle.

De plus, les élèves devront faire appel aux approximations des lignes trigonométriques : sin et cos. Ainsi, en choisissant 6000 km comme rayon de la Terre, on trouvera, dans TOA_0 : $\sin\alpha_0 = 0{,}0577$ *d'où* $\alpha_0 \approx 0{,}058$ *et* $OA_0 \approx 340\,km$.

A partir de TOA_1, et en utilisant la relation d'Al Kashi, qui donne $\cos\alpha_1$ *en fonction des côtés, on obtient $AA_1 \approx 23$ km, d'où la vitesse approximative de 700 km.*

2^nde^

✳✳✳ 7 ✳✳✳

ABC est un triangle isocèle de base [BC]. On choisit un point quelconque M sur cette base. Comparer la somme des distances de M aux côtés [AB] et [AC]aux distances de B et C à ces mêmes côtés.

Remarque :

Ce problème peut être présenté aux élèves de seconde car il ne nécessite que des connaissances mathématiques de base. Son résultat est suffisamment accessible aux élèves et inattendu pour représenter une acquisition peu coûteuse mais enrichissante.

Il suffit de décomposer l'aire de ABC selon les aires de AMC et AMB. Celles-ci s'expriment à l'aide des distances de M aux deux côtés [AB] et [AC] alors que celle de ABC s'exprime au moyen des distances de C ou B aux côtés qui leur sont opposés. Ainsi la somme des distances de M aux côtés [AB] et [AC] est constante et égale à la distance de B ou de C au côté qui lui est opposé.

Variante : *on peut, soit demander ensuite, soit demander d'emblée :*

ABC est un triangle équilatéral, M un point quelconque de ce triangle (intérieur ou sur un côté). Etudier comment varie la somme des distances de M aux côtés lorsque M se déplace dans le triangle. (la question pouvant être posée de façon plus ou moins ouverte).

On peut prolonger cet exercice en proposant une situation .dans laquelle on représente trois grandeurs. A chaque point du plan sont attachés trois nombres : les distances du point aux trois côtés du triangle (Il faut bien sûr éviter la confusion avec le triplet des longueurs des segments de parallèles aux côtés, comme dans la problématique 7, dans le « problème du spaghetti).

2nde

✴✴✴ 8 ✴✴✴

Considérons que la terre est une sphère parfaite de circonférence 40000 km. Supposons que l'on puisse entourer l'équateur par une corde de 40000, 00001 km qui soit partout à la même distance du sol. Une fourmi pourrait-elle passer sous cette corde ?

Remarque 1

Ce problème vise, par un habillage ludique, à étonner les élèves et leur faire faire une petite conversion métrique et un pari ... perdant. Qu'est 1 cm sur une telle longueur ? Et pourtant, la petite mathématisation nécessaire conduit au résultat surprenant : un accroissement du rayon de ΔR *conduit à un accroissement de la longueur de* $2\pi\Delta R$. *Donc* $\Delta R = \frac{1}{2\pi} cm$, *soit* $1{,}5\,mm$. *Une fourmi peut donc passer !*

Un habillage

Comptes de l'Olympe.

En ces temps immémoriaux où les dieux de l’Olympe commençaient à s’ennuyer, Zeus, qui avait coutume de fréquenter les mortels (et surtout les mortelles), descendit sur terre pour voir comment ceux-ci se distrayaient. Ce qu’il vit dans les rues le séduisit.

Sitôt remonté sur son trône, il décida d’inventer le sky-basket (basket des nues), pour y défier les dieux du Walhalla. Il s’agirait d’envoyer la Terre, alors parfaitement sphérique, dans un immense anneau circulaire pour marquer des points.

Pour fixer les règles, et surtout choisir la circonférence de l’anneau, qu’Héphaïstos et ses Cyclopes seraient chargés de forger, il envoya Hermès se renseigner sur Terre.

– "Les Hommes jouent avec un ballon de 76 cm de circonférence et un panier de 141 cm de circonférence. Ce qui leur laisse une certaine marge, si le ballon est bien centré, déclara Hermès.
– "Parfait !", s'exclama Zeus. "Nous ne pouvons être plus maladroits que ces mortels !"
– "C'est évident, confirma Hermès. Mais, ajouta-t-il à mi-voix, il n'est pas sûr que nous soyons plus adroits qu'eux."
– "Donnons-nous donc la même marge entre la Terre, notre ballon et l'anneau d'Héphaïstos , en conclut Zeus."
Après quelques secondes de calculs, il décida :
_ " Prenons donc, comme les mortels, un panier dont la circonférence mesure 65 cm de plus que la Terre. Puisque celle-ci – qui, rappelons-le, était parfaitement sphérique en ce temps-là – a une circonférence de 40.000 km, qu'Héphaïstos forge un anneau de 40.000,00065 km !"

Que pensez-vous de ce calcul "foudroyant ?"

Remarque 3 : *Quel que soit l'habillage (ceux proposés ci-dessus ou encore une balle de tennis et la Terre, etc…), le résultat surprend toujours les élèves.. Si c'est autour d'une balle de ping-pong qu'on ajoute une longueur de 1 cm, on aura aussi une « marge » de 1,5 mm, ce qui paraît assez grand par rapport à la balle mais très petit par rapport à la Terre. Il y a alors un débat sur la raison pour laquelle on est surpris par le résultat.*

Constructions exactes ou approchées ?

Voici trois construction géométriques trouvées dans un livre datant de 1702, la « Géométrie pratique », destiné comme l'indique son nom à des personnes qui ont besoin de tracer des figures de géométrie pour réaliser des objets ou dessiner des jardins « à la française ».(On a gardé la rédaction et l'orthographe d'origine).

Pour chacune des trois situations, on demandera de tracer les figures en suivant le plan de construction donné, et avec l'aide apportée par la figure qui accompagne l'énoncé (figure reproduisant à l'identique celle du livre). Puis on cherchera s'il s'agit d'une construction dans laquelle la figure est exacte, ou bien s'il s'agit d'un tracé approché.[1]

[1] Sur ces questions de constructions, voir la conférence de Bernard Parzysz aux Journées Nationales de l'APMEP à Nice en 2000, Bulletin Vert n°437

2nde – 1ère

✶✶✶ 9 ✶✶✶

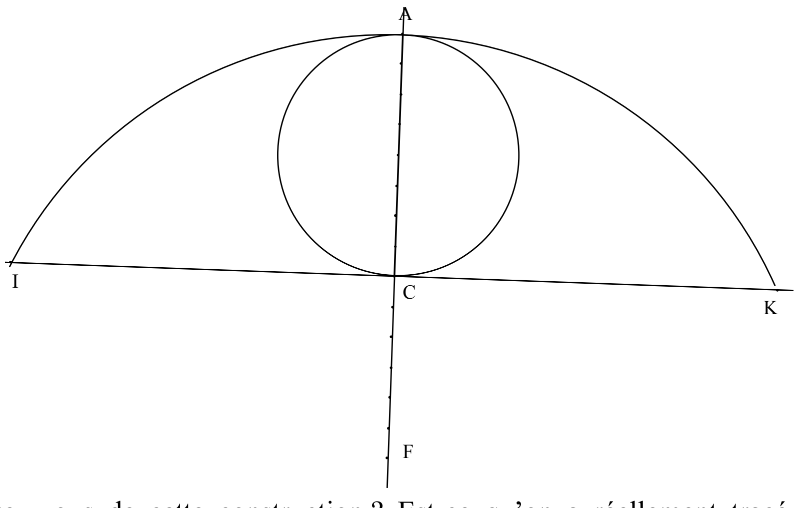
La longueur du cercle

« Soit la circonférence donnée ABCD à laquelle on veut faire une ligne droite qui lui soit égale.

Divisez le diamètre AC de la circonférence donnée, en huit parties égales. Prolongez ce diamètre de C vers E, comme à l'infini, puis limitez le de C en F en six parties des huit de AC, de sorte que toute la longueur AF aura quatorze parties.

Au point C et sur la ligne AF, faites passer à droite et à gauche la perpendiculaire GH d'une longueur à volonté.

Puis du point F comme centre, et de la distance FA décrivez l'arc IAK, la longueur IK fera une ligne droite à peu près égale à la circonférence ABCD »



Que pensez-vous de cette construction ? Est-ce qu'on a réellement tracé un segment de la longueur du périmètre du cercle, ou seulement, comme on le lit « une ligne à peu près égale » ? Calculer le rapport entre la longueur de IK et le diamètre du cercle.

Solution :

On s'en doute, il ne s'agit pas d'une construction exacte : si on savait « rectifier » le cercle, ça se saurait !

Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle de centre F. D'après une relation m étrique dans le triangle rectangle,

$KC^2 = CA \times CA' = 8 \times 20$

$KC = 4\sqrt{10}$

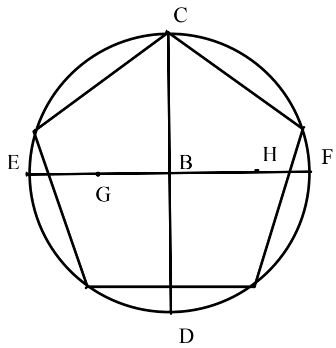
Le rayon du cercle est 4, le périmètre trouvé par cette méthode est 8π. *Autrement dit, l'approximation de* π *est* $\sqrt{10}$. *La calculatrice donne comme valeur approchée de* $\sqrt{10}$ *: 3,163377. L'erreur relative commise est donc inférieure à 0,01, ce qui est souvent tout à fait acceptable.*

2^nde^ – 1^ère^

✶✶✶ 10 ✶✶✶

Construction du pentagone

« On fera le pentagone régulier en traçant en blanc du point B comme centre, une circonférence de l'étendue qu'on veut donner au pentagone, puis par ce centre B tirez à angles droits les deux diamètres CD et EF, pour du point G, moitié du demi diamètre EB, et de la distance GC, marquer sur l'autre demi diamètre BF le point H ; la longueur CH divisera la circonférence en 5 parties égales et on aura le pentagone régulier A »



Que pensez-vous de cette construction ? A-t-on réellement tracé un pentagone régulier ?

Remarque :

Ici il s'agit bien d'une construction mathématiquement exacte. C'est la construction « classique », celle que donne Euclide dans Les Eléments.

Une autre construction, approchée celle-là a été donnée par A. Dürer. En voici la méthode :

A partir d'un segment AB, qui sera un côté du pentagone, on trace cinq cercles de même rayon, comme indiqué sur la figure ci-après :

Le cercle de centre A passant par B

Le cercle de centre B passant par A

Le cercle de centre C (une des intersections des deux premiers) passant par A (et par B)

Ce troisième cercle coupe le premier en E et le deuxième en F

La droite (CD) coupe le petit arc AB du troisième cercle en G.

(FG) coupe le premier cercle en H.

On trace maintenant le cercle de centre H qui passe par B

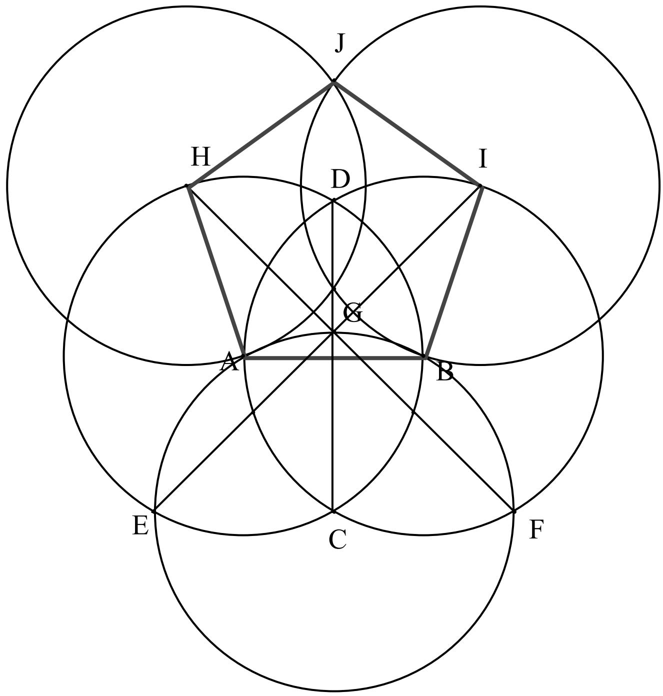
De même (EG) coupe le deuxième cercle en I.

On trace le cercle de centre I qui passe par A.

Ces deux derniers cercles se coupent en J

Le pentagone cherché est ABIJH.

Cette construction donne une bonne approximation, que l'œil ne distingue pas d'une construction exacte. Les longueurs des côtés sont égales, on peut calculer les angles en n'utilisant que des propriétés de base des triangles et les lignes trigonométriques dans un triangle. L'erreur est de moins d'un demi-degré.

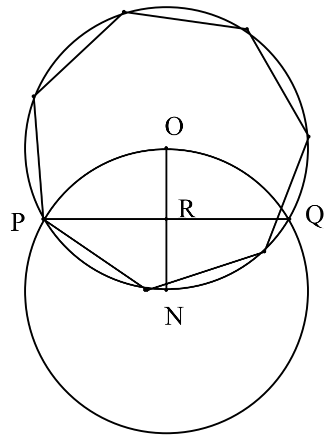


2^{nde} – $1^{ère}$

✳✳✳ 11 ✳✳✳

Construction de l'heptagone

« On fait l'eptagone[2] M en traçant une circonférence de l'étendue qu'on le désire, puis du point N, pris sur cette circonférence et de la distance du centre O, divisez l'arc POQ, et tracez la corde PQ ; la moitié de cette corde, comme PR ; fera un des côtés de l'eptagone »



Que pensez-vous de cette construction ?

A-t-on réellement tracé un heptagone régulier, ou bien est-ce une bonne approximation ?

Indication :

Dans le triangle NPR, on connaît NP (égal au rayon), NR (moitié du rayon), d'où $PR = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$*, ce qui est également la longueur des cordes. La définition du sinus dans le triangle rectangle permet de calculer l'angle au centre qui intercepte la corde de longueur PR. On vérifie ainsi que l'heptagone ainsi obtenu n'est pas régulier.*

Ces exercices s'intègrent très bien dans un programme optionnel en série littéraire notamment.

On peut d'ailleurs, à cette occasion, débattre de la pertinence des constructions mathématiquement exactes ou au contraire seulement approchées, suivant le type de tâche recherchée.

---

[2] Orthographe utilisée dans le livre de 1702

Calculs d'aires

Les problèmes de géométrie à résoudre par des considérations d'aires ont été « remis à la mode » dans le programme 2000 de seconde.

Cela invite à reprendre certaines démonstrations qui avaient été un peu laissées de côté, comme celles du théorème de Pythagore, et les présenter par exemple sous forme de puzzles. Certaines démonstrations sont redevenues classiques, telle celle du théorème de Pythagore qui figure dans les Eléments d'Euclide. Voici quelques autres exemples.

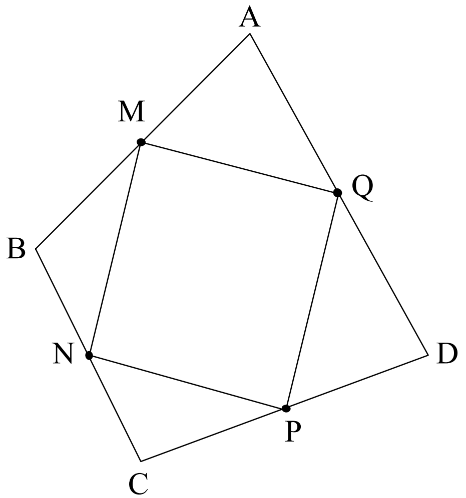
2nde – 1ère

✶✶✶ 12 ✶✶✶

La configuration ci-dessous a été exploitée dans le problème 3 de la problématique 3.

Question supplémentaire :

Evaluer l'aire de MNPQ par rapport à celle de ABCD.



Evaluer l'aire de MNPQ par rapport à celle de ABCD

Indications :

La démonstration peut utiliser la « réduction-agrandissement » : l'aire de AMQ est le quart de celle de ABD puisque les longueur sont divisées par 2.

On peut aussi utiliser les cas d'égalité des triangles et démontrer que les triangles tels que AMQ et MQO sont égaux donc de même aire.

✶✶✶ 13 ✶✶✶

Calculs approchés d'aires de quadrilatères

Divers procédés « coutumiers » ont été utilisés au cours du temps pour évaluer une approximation de l'aire d'un quadrilatère à partir des longueurs des côtés, en effet l'aire n'est pas calculable si ces longueurs sont les seuls éléments connus.

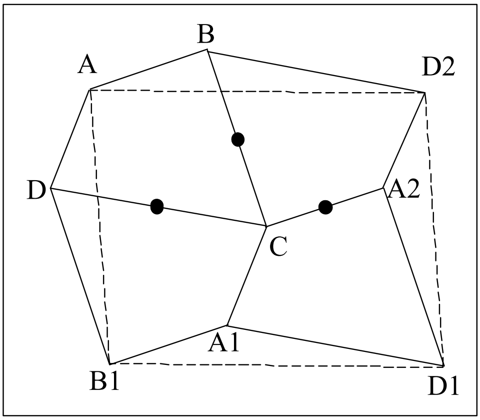
Un des procédés est le suivant : on fait le produit des moyennes des longueurs des côtés opposés.

Ce procédé semble avoir été largement utilisé, il est déjà mentionné dans le Papyrus de Rhind qui date de 1650 avant Jésus-Christ, et il encore utilisé de nos jours par les paysans du Nordeste brésilien[1].

Quels sont les quadrilatères pour lesquels cette formule est exacte ? Que peut-on dire de l'aire des autres quadrilatères ?

Indication :

Une solution ne faisant intervenir que des notions mathématiques simples consiste à construire, par des symétries centrales, un début de pavage du plan par des quadrilatères convexes, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Lors d'une séance en classe, pour amener les élèves à découvrir cette construction, on peut

[1] On peut lire sur ce sujet : dans le numéro spécial « Nombres » de La Recherche n°278 de juillet-août 1995, Mathématiques paysannes, de Guida de Abreu

Le problème n°52 du petit vert, de la Régionale APMEP de Lorraine

La conférence de René Lozi aux Journées Nationales de l'APMEP à Nice en 2000, Bulletin vert n°437

- *commencer par remarquer que prendre une demi-somme pour un calcul d'aire intervient dans la "formule" de l'aire du trapèze :* $\frac{(B+b)\times h}{2}$
- *puis retrouver qu' une démonstration de cette "formule" se fait en « doublant » le trapèze par une symétrie centrale par rapport au milieu d'un des côtés autre que les "bases" , procédé qui permet déjà de calculer l'aire d'un parallélogramme à partir de celle du triangle.*

On peut alors proposer :

Soit ABCD un quadrilatère non croisé, et qui ne soit pas un parallélogramme. A partir des symétries centrales par rapport aux milieux des côtés, construire le début d'un pavage du plan par des quadrilatères superposables à ABCD ; on obtient ainsi le schéma reproduit ci-dessus.

Les élèves peuvent alors trouver des pistes :

- *on peut démontrer que $AB_1D_1D_2$ est un parallélogramme (de centre C).*
- *son aire est quadruple de celle de ABCD : en effet, les triangles ADB_1 et $D_2A_2D_1$ sont translatés l'un de l'autre, de même que ABD_2 et $B_1A_1D_1$ ...*
- *d'après l'inégalité triangulaire,* $AD_2 \leq AB + DC$, *l'égalité ayant lieu quand deux côtés du quadrilatère sont parallèles ; de même pour les autres côtés.*

On pourra finalement conclure : les rectangles vérifient la formule proposée, les autres quadrilatères ont une aire plus petite que celle donnée par la formule « brésilienne ».

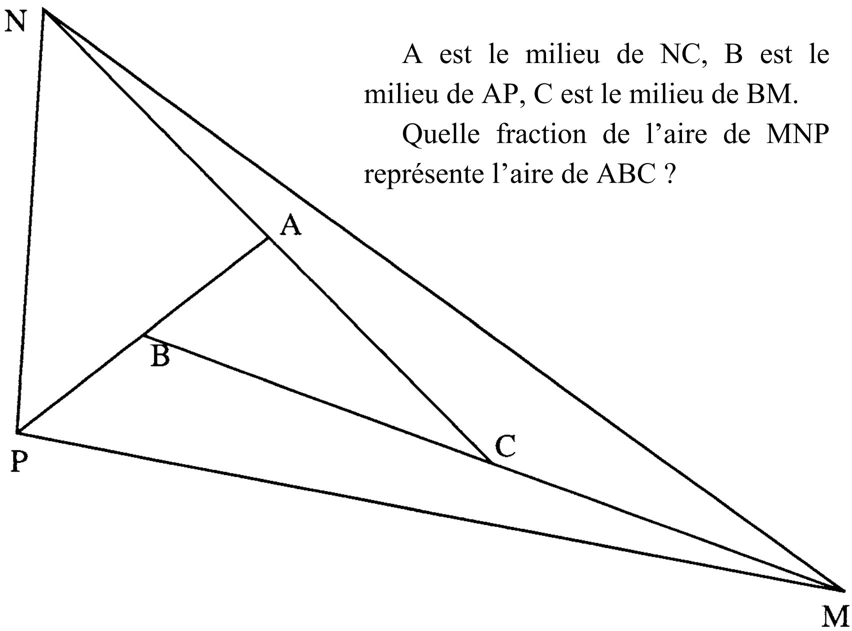
2^nde

✷✷✷14 ✷✷✷

La configuration suivante[2] donne lieu à problème assez facile sur les aires :

A partir du triangle ABC, on construit les points M, N et P tels que A est le milieu de [NC], B le milieu de [AP], C celui de [BM].

[2] Voir aussi la Problématique n°10 et le Bulletin Vert de l'APMEP n°406.



A est le milieu de NC, B est le milieu de AP, C est le milieu de BM.

Quelle fraction de l'aire de MNP représente l'aire de ABC ?

1 - Quelle fraction de l'aire de MNP représente celle de ABC ?

La démonstration est entièrement basée sur le fait qu'une médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire, et peut donc être faite en seconde.

2 – Soient I, J et K les points d'intersection respectivement de (NC) et (PM), (PA) et (NM), (MB) et (PN). Préciser la position de I sur (PM), de J sur (NM) et de K sur (PN).

Cette question est plus difficile, abordable seulement en première, avec par exemple une solution utilisant le barycentre partiel :

2^{nde} – $1^{ère}$

✷✷✷ 15 ✷✷✷

Certaines revues présentent des relations entre taille et poids qui servent de référence pour jauger de sa propre"normalité", voire de son poids idéal, eu égard à sa taille. Deux d'entre elles ont été retenues ici. Notons H la taille en mètres et P le poids en kg d'un individu quelconque :

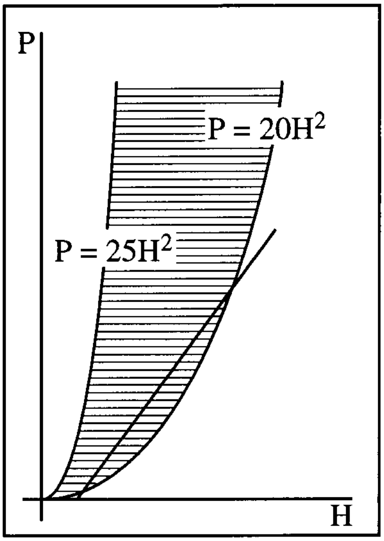
$1^{ère}$ formule : si $I = \dfrac{P}{H^2}$ alors l'idéal 1 impose $20 \leq I \leq 25$

$2^{ème}$ formule : l'idéal 2 est atteint pour une femme lorsque P = 60 H – 46 et pour un homme lorsque P=75 H – 62,5

Conjuguer les deux normes et conclure.

Remarque :

L'ensemble des couples (P,H) satisfaisant la double inéquation correspond à la zone hachurée entre les 2 arcs de parabole. Les couples satisfaisant l'ensemble des contraintes sont situés sur le segment déterminé par l'intersection avec les ~~de~~s demi- droites :



P=60H - 46 (d) et P=75H - 62,5 (d')

Or, dans le premier cas, on trouve que tous les couples de(d) sont en dessous du domaine hachuré, et donc que, si une femme est "canon" pour l'idéal 2 elle est trop maigre pour le 1, quelle que soit sa taille.

Dans le second cas, il suffit qu'un homme ait une taille comprise entre 1,27 m et 2,48 m pour qu'il satisfasse l'idéal 1 en satisfaisant l'idéal 2.Ce !qui ne devrait pas être difficile

Cet exercice permet de mettre l'accent critique sur la relativité de tous les canons définis par les organes de presse attrape-nigauds. Sur le plan didactique, il permet de donner du sens aux situations de résolution d'inéquations. D'ailleurs, le problème peut se complexifier si l'on contraint la détermination de l'idéal 2 à une autre inéquation, par exemple, pour une femme :

$$60H - 48 \leq P \leq 60H - 44.$$

On demandera dans quels intervalles la satisfaction d'un idéal permet de satisfaire l'autre.

1ère L

✷✷✷ 16 ✷✷✷
Deux verres, bonjour les dégâts

Le calcul de l'alcoolémie se fait de la façon suivante une heure après l'absorption et à jeun (au sens de : sans avoir absorbé de nourriture…autre que la boisson alcoolisée !) :

soit a le poids d'alcool absorbé,

soit p le poids de la personne qui boit,

soit k le coefficient de diffusion qui est égal à 0,7 pour l'homme et 0,6 pour la femme.

Le taux d'alcoolémie est proportionnel à a et inversement proportionnel à p et k.

On rappelle que la densité de l'alcool pur est 0,8.

1° Une heure après avoir bu un demi-litre de bière à 5°, quel est le taux d'alcoolémie d'un homme de 75 kg et d'une femme de 55 kg ?

2° Une heure après avoir bu un whisky (4 cl à 40°) quels sont les taux respectifs d'un homme et d'une femme de mêmes poids que dans la question 1° ?

Remarque et solution :

Ce problème a de multiples objectifs :

** social : apprendre aux élèves les danger de l'alcool,*

** scientifiques : manipuler les notions de capacité, de densité et de concentration*

** mathématiques : établir une formule formalisant une situation de proportionnalité et savoir l'utiliser.*

Par suite, l'information donnée nous permet de dire que le taux est obtenu par la formule suivante : $t = \frac{a}{pk}$.

Ainsi, un demi-litre de bière à 5° fournit 20 g d'alcool pur (500 ml à 5° soit 25 ml d'alcool pur, soit 25×0,8 g = 20 g). Donc, un homme de 75 kg a un taux égal à 0,38 g/l et une femme de 55 kg un taux de 0,606 g/l (arrondir à 0 ,61)

Pour un whisky, 4 cl à 40° fournissent 0,04×320g = 12,8 g d'alcool puisque dans un litre de whisky on trouve 0,8×400 g = 320 g d'alcool pur. Un homme aura donc un taux de 0,24 g/l et une femme 0,39 g/l.

<u>*Note*</u> *: Il est dit également que l'absorption pendant le repas fait tomber d'un tiers le taux d'alcoolémie. Il est possible alors de refaire les calculs précédents dans ces nouvelles conditions. On trouvera respectivement 0,16 et 0,26 g/l. On pourrait également faire représenter la situation dans laquelle un apéritif est pris,*

puis suivi d'une demi-bouteille de vin, environ une heure après et au cours du repas. On utilisera l'information : le corps élimine 0,15 g/l par heure ce qui, en théorie et si les phénomènes d'absorption-élimination sont linéaires, permet de donner à chaque instant le taux d'alcoolémie.

De toutes façons, on n'oubliera jamais de rappeler aux élèves que celui qui devra conduire ne boit pas !

2nde

✶✶✶ 17 ✶✶✶

Si le produit de 2 entiers naturels a et b est majoré par un autre entier c, alors la somme de a et b est encore majorée par c. Est-ce vrai ?

Remarque et indications

L'objectif est de prouver une propriété arithmétique toute simple. La forme ouverte laisse l'élève sur ses gardes, mais quelques essais doivent lui donner suffisamment confiance pour qu'il s'engage dans la preuve. Celle-ci fait appel à la définition du produit d'entiers qui n'est que l'itération d'une somme.

En effet, supposons $a \leq b$ *:*

• *on peut régler le cas où a serait égal à 1 en remarquant qu'alors :* $b < c$, *donc* $1 + b = a + b \leq c$, *(idem si a et b sont égaux à 1) ;*

• *si a et b sont supérieurs à 1, alors* $a + b \leq b + b \leq \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ fois}} \leq c$

Les élèves de seconde trouvent facilement le résultat et suivent le calcul (on peut éviter pour eux le mot « majoré » dans l'énoncé), mais la formalisation leur est plus difficile, car il s'agit tout simplement de démontrer que la somme de eux entiers naturels est inférieure ou égale à leur produit.

Tale

✶✶✶ 18 ✶✶✶

n et *k* étant deux entiers naturels quelconques, démontrer que :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+k}} \leq \sqrt{n+k} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Remarque et indications

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ *est dérivable, croissante sur* $\boldsymbol{R}^+$ *et sa dérivée, décroissante sur* $[n,\ n+k]$ *est majorée par* $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ *et minorée par* $\dfrac{1}{2\sqrt{n+k}}$. *La formule des accroissements finis permet alors de conclure.*

Présenté comme un problème dans ***N****, il est résolu dans R+, dans un cadre fonctionnel et non pas numérique.*

1$^{\text{ère}}$

✶✶✶ 19 ✶✶✶

Démontrer que pour tout n $\in$ **N*** : $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Remarque 1

L'objectif de cet exercice est de faire fonctionner l'habileté à majorer une expression.

En effet, les deux membres de l'inégalité étant positifs, il suffit d'étudier le carré du premier; et ensuite de majorer toute fraction de la forme $\dfrac{2k-1}{2k}$ *figurant deux fois par* $\dfrac{2k}{2k+1}$. *Il ne reste plus enfin qu'à simplifier pour obtenir la majoration par* $\dfrac{1}{2n+1}$.

Remarque 2

Voici une autre formulation et une extension de ce problème :

“ On considère le produit $\prod = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}\times\dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.

$\prod$ s'écrit également : $\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{6}{7}\cdots\times\dfrac{2n}{2n+1}\right)$).

Notons : $P_n = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}$ et $P'_n = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{6}{7}\cdots\times\dfrac{2n}{2n+1}$

Démontrer le double encadrement :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < P_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}} < P'_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$ ”

Cette nouvelle approche permet de donner plus de sens à l'inégalité proposée dans la première formulation et, bien évidemment, est plus informative sur les *positions respectives de* P_n et $\mathrm{P'}_n$ *. Une preuve utilise en effet de façon explicite l'expression de* Π *et s'appuie sur une récurrence pour démontrer que* $\frac{1}{\sqrt{2n}} < \mathrm{P'}_n$

1$^{\text{ère}}$ – T$^{\text{ale}}$

✶✶✶ 20 ✶✶✶

Soit n réels strictement positifs $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Remarque

La propriété est vraie d'évidence pour n = 2 et sa démonstration repose sur le fait que $(a-b)^2 \geq 0$. *Mais que se passe-t-il lorsqu'on croise les n nombres en jeu ? C'est sur ce doute et sur une certaine confiance que l'on peut prendre appui pour avoir de bonnes raisons de s'engager dans la preuve.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que n est pair ou impair.

1° *n = 2p*

On peut dans ce cas associer 2 par 2 les éléments équidistants des extrémités de la suite, procédé rencontré pour calculer la somme des termes d'une suite artihmétique.

$$\frac{x_1}{x_{2p}} + \frac{x_{2p}}{x_1} \geq 2$$

$$\frac{x_2}{x_{2p-1}} + \frac{x_{2p-1}}{x_2} \geq 2$$

... ...

$$\frac{x_p}{x_{p+1}} + \frac{x_{p+1}}{x_p} \geq 2$$

En sommant, on trouve $S = \frac{x_1}{x_{2p}} + \frac{x_2}{x_{2p-1}} + ... + \frac{x_{2p}}{x_1} \geq 2p = n$

2° *n = 2p + 1*

Associons encore 2 à 2 mais différemment :

$$\frac{x_1}{x_{2p+1}} + \frac{x_{2p+1}}{x_1} \geq 2$$

... ...

$$\frac{x_p}{x_{p+2}} + \frac{x_{p+2}}{x_p} \geq 2$$

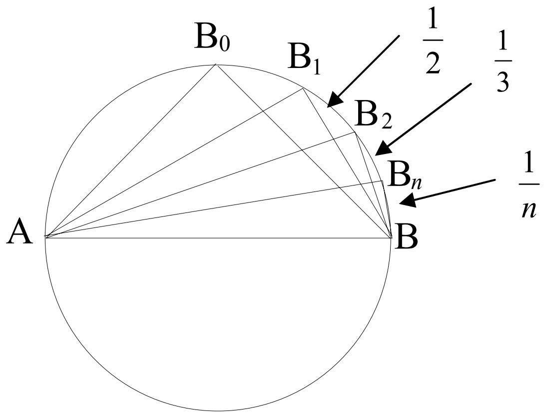
et $\dfrac{x_{p+1}}{x_{p+1}} \geq 1$

En sommant, on trouve $S \geq 2p + 1 = n$

T^{ale}

✶✶✶ 21 ✶✶✶

On considère un demi-cercle de diamètre AB = 1. On examine la suite de points B_0, B_1, B_2,..., B_k sur ce demi-cercle définis ainsi :



$B_0B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $B_1B = = \dfrac{1}{2}$, $B_2B = = \dfrac{1}{3}$, $B_3B = \dfrac{1}{4}$,....., $B_nB = \dfrac{1}{n}$.

Démontrer que $\prod_{k=1}^{k=n} AB_k > AB_0$

Emettre une conjecture sur ce produit lorsque n tend vers l'infini.

Remarque et indication

Le résultat cherché peut paraître hétérogène et l'existence de la limite étonnante, le produit paraissant plutôt diverger. L'objectif est donc ici de conduire une majoration à son terme en maîtrisant un produit indicé. La première difficulté consiste à penser à élever le produit au carré afin de faire disparaître les racines *encombrantes. Ceci fait, il ne reste plus qu'à exprimer le produit en utilisant Pythagore :*

$$AB_1^2\times\ AB_2^2\times\ldots\times AB_n^2 = .\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right).\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\times$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\ldots\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n}{n-1}\ldots\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{(n-1)!(n+1)!}{2\ n!}=\frac{(n-1)!(n+1)!}{2\ n!}$$

$$=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}=AB_0^2.$$ *D'où le résultat recherché.*

Lorsque n tend vers l'infini, le produit au carré tend vers $\frac{1}{2}$ *, le produit* $\prod_{k=1}^{k=n} AB_k$ *tend vers* AB_0*, ce qui ne manquera pas d'étonner .*

T^ale^

✷✷✷ 22 ✷✷✷

Déterminer le plus petit entier k tel que : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}>1000$

Remarque

L'objectif de cet exercice est d'utiliser et montrer ainsi l'efficacité de l'encadrement d'une intégrale définie par une série partielle ou par des aires de rectangles de même base. Mais il est possible d'ignorer ce résultat et le reconstruire de façon ad-hoc comme dans l'exercice précédent.

Ici, on a la double majoration pour $S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}$ *:*

$$\int_1^{k+1}\frac{dx}{x} < S < 1+\int_1^{k}\frac{dx}{x}$$

Or $1 + \int_1^k \frac{dx}{x} = 1 + Ln\, k$ *et* $\int_1^{k+1} \frac{dx}{x} = Ln\,(k+1)$, *donc* $Ln(k+1) < S < 1 + Ln\, k$

Mais $1 + \int_1^k \frac{dx}{x} - \int_1^{k+1} \frac{dx}{x} = Ln(\frac{k}{k+1})+1 < 1.$

Donc pour que $S > 1000$, *il suffit de prendre* $k= E[\exp 1000]+1$, *qui est un nombre de 435 chiffres….*

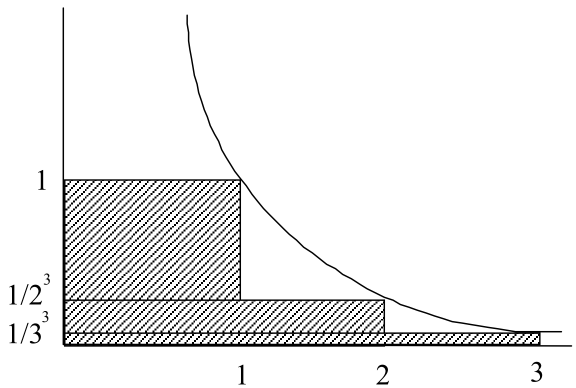
T^ale^

✶✶✶ 23 ✶✶✶

Démontrer que la somme $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}$ est majorée par $\frac{5}{4}$

Remarque

L'objectif de cet exercice est d'utiliser une majoration d'aire placée sous une courbe et de faire le choix opportun de l'ordre du majorant.



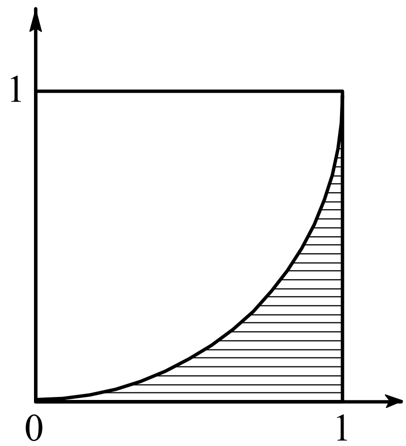
Il suffit de comparer les aires des rectangles hachurés à celle placée sous la courbe. On obtient une majoration du type : $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\frac{1}{n^3} < 1+\frac{1}{2^3}+\int_2^n \frac{1}{x^3}dx$

Soit le majorant $\frac{9}{8} - \frac{1}{2}(n^{-2} - \frac{1}{4})$, *lui-même majoré par* $\frac{5}{4}$.

Tale

✶✶✶ 24 ✶✶✶

De l'analyse aux probabilités (méthode de Monte-Carlo)



L'objectif est de calculer l'aire hachurée ci-dessus, au moyen d'une simulation.

Ecrire un petit programme pour qu'au hasard soient tirés deux nombres x et y de l'intervalle [0,1] et que y soit comparé à x^2.

Calculer, pour un nombre important de couples (x,y), la fréquence de l'issue $y \leq x^2$, éventuellement en cumulant ses résultats avec ceux des autres élèves.

Comparer cette fréquence à l'intégrale : $\int_0^1 x^2 dx$

Remarque :

L'objectif est de conduire l'élève à se servir de la touche de génération aléatoire de la calculette, d'écrire un programme pour enregistrer et cumuler des observations et de prendre conscience de la méthode permettant de substituer une simulation à un calcul d'intégrale. La validation des résultats de la simulation obtenue pourra se faire par la comparaison avec l'intégrale définie une fois calculée.

Mais on pourra remplacer la donnée de la courbe par la donnée seule d'une fonction définie et à valeurs dans des intervalles, la fonction pouvant être d'une forme où l'intégration est difficile ; par exemple, si l'on prend l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 exp(-\frac{x^2}{2})dx$ *, on pourra renvoyer l'élève au tableau de la loi normale afin qu'il valide ses propres résultats.*

Tale

✶✶✶ 25 ✶✶✶

Soit P un polynôme quelconque de degré 3. Déterminer deux nombres réels *a* et *b*, indépendants de P, tels que l'intégrale définie $\int_0^1 P(x)dx$ soit la moyenne arithmétique des valeurs de P en *a* et en *b*.

On devra se souvenir qu'un polynôme en *x* nul pour toutes les valeurs de la variable *x* a nécessairement tous ses coefficients nuls.

Remarque: *Cet exercice, proposable en terminale, nécessite chez l'élève de traduire le texte en une relation mathématique, puis mobiliser la maîtrise de deux techniques :*

** d'une part, l'intégration d'un polynôme de degré 3,*

** d'autre, la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues.*

En clair, il s'agit de trouver a et b tels que $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{2}(P(a) + P(b))$.

Pour cela il suffit de résoudre un système linéaire à partir de l'identification de l'intégrale définie pour un polynôme quelconque $c_0 + c_1.x + c_2.x^2 + c_3.x^3$ *et de la demi-somme des valeurs de P en a et b.*

On trouve : $a = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ *et* $b = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

1ère – Tale

✶✶✶ 26 ✶✶✶

On considère la fonction $x \mapsto y$ avec $y = 3\,x^2 - 4$.

1°) Une unité étant choisie, si la mesure de la variable x en x_0 admet une incertitude de 0,01, quelle est l'incertitude correspondante sur la variable y en y_0 ? Cette incertitude est-elle indépendante de x_0 ? Application : $x_0 = 2/3$.

2°) Donner une majoration de l'incertitude sur x en x_0 si l'incertitude sur y en ce point est majorée par 0,02. Application : $x_0 = 2/3$.

Remarque :

Cet exercice vise à donner du sens à la notion de continuité par un travail effectif sur des encadrements.à partir de la variable puis de son image à l'aide de la fonction réciproque.

Tale

✶✶✶ 27 ✶✶✶

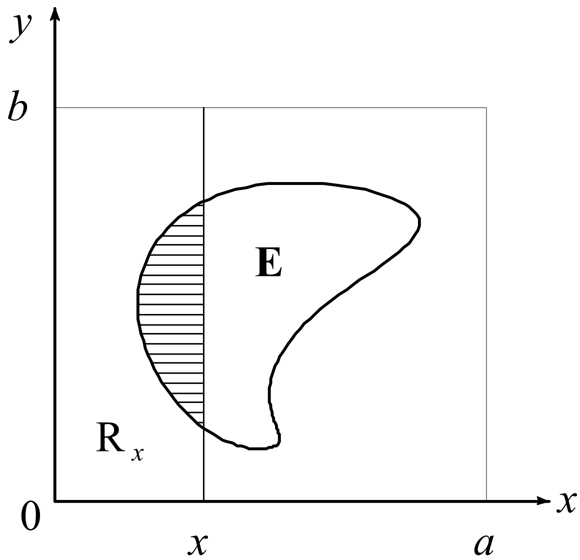
Soit E un domaine plan "d'un seul tenant" (connexe) et une direction Δ. Existe-t-il une droite D, de direction Δ, qui partage E en deux sous-domaines de même aire ?

Remarque

L'intuition peut conduire à une telle évidence que l'élève hésite à s'engager dans un processus de construction d'une solution mathématique. Mais elle risque, en même temps, de peser sur une mathématisation du fait de sa représentation fortement imagée. L'objectif est donc de persuader l'élève à faire la transposition mathématique du problème et de mettre en oeuvre un théorème d'analyse qui en permet le contrôle décisif. Afin d'y parvenir, on peut indiquer d'autres situations moins évidentes et où le théorème des valeurs intermédiaires conduit à la preuve. Citons par exemple, les énoncés qui pourraient faire l'objet de problèmes ultérieurs pour conforter une méthodologie dégagée du problème actuel :

1°) Soit E un domaine fermé borné du plan et O un point quelconque du plan. Existe-t-il une droite D passant par O et partageant E en deux sous-domaines de même aire ?

2°) Soit E un domaine fermé borné du plan. Existe-t-il un couple de droites perpendiculaires qui coupent E en 4 sous-domaines de même aire ? (On pourra utiliser l'image d'un gâteau de ***forme quelconque*** *qu'il s'agit de découper au couteau en 4 morceaux de même aire par deux tracés perpendiculaires).*



Ici, on peut toujours enfermer E dans un rectangle de côtés parallèles à des axes dont (y'y) soit de direction Δ *. Soit* R_X *le rectangle [0,x]x[0,b] où* $x \leq a$ *et soit f(x) l'aire de l'intersection de E et* R_X*.*

Or $|f(x) - f(x')| \leq b\ |x-x'|$ *pour x et x' quelconques de [0, a]. Donc f est continue (et même strictement croissante) sur [0,a].*

Comme f(0) = 0 et f(a)=Aire(E), le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe une valeur x_0 *(et une seule) telle que* $f(x_0) = 1/2$ *Aire(E).*

T^ale ES (?) **✶✶✶ 28 ✶✶✶**

Deux propositions d'épargne me sont faites :

* ou bien à intérêts annuels dont le taux est r%,

* ou bien à intérêts composés dont le taux est s%. On suppose que dans ce cas, le calcul se fait à temps continu, et non pas à la journée.

Comparer les deux propositions et donner la condition pour que la première soit moins avantageuse que la seconde.

Application : r = 3,5%, s = 3,1%.

Remarque

Ce problème vise à comparer la notion d'équation récurrente et celle d'équation différentielle, en montrant que la seconde dérive (!) de la première par discrétisation du paramètre temps en l'occurrence. Des mises en équation respectives sont à faire en respectant l'analogie des notations afin que la comparaison soit plus claire. Les connaissances exigées sont assez élémentaires bien que peu souvent mobilisées à l'occasion d'une mathématisation et sa formalisation. Elles le sont plus volontiers à l'occasion de la résolution directe ou d'une équation récurrente ou d'une équation différentielle.

<u>1ère proposition</u>: si t est le nombre d'années en jeu, u(t) la somme capitalisée correspondante et (0) la somme initiale, on a :

$$u(t+1) = u(t) + r.u(t)$$

équation récurrente linéaire dont la solution évidente est :

$$u(t) = u(0)\,(r+1)^t$$

<u>2ème proposition</u> : si, de plus h représente une fraction de temps (discrétisation du temps), on a l'équation :

$$u(t+h) = u(t) + s.\,h.\,u(t)$$

d'où : $\dfrac{u(t+h)-u(t)}{h} = s.u(t)$, *soit en passant à la limite quand h->0 :*

$u'(t) = s.u(t)$ équation différentielle linéaire dont la solution est $u(t) = u(0).e^{s.t}$.

On constate donc l'analogie entre les deux approches et la différence de nature des solutions.

Pour étudier si la seconde proposition est plus avantageuse, il suffit de résoudre l'inéquation : $u(0)\,(r+1)^t < u(0).e^{s.t}$, qui se ramène à : $\ln(r+1) < s$.

Ainsi, si r = 3,5%, il faut que s soit supérieur à 3,44% pour que la seconde solution soit plus avantageuse. Dans le cas de l'application, c'est donc la première qui l'est.

✶✶✶ 29 ✶✶✶

Avec beaucoup trop d'intérêt...

Je veux emprunter 50000 F dans une banque pour acheter un véhicule neuf. Je choisis de rembourser l'emprunt en 24 mois. Le banquier m'annonce alors que j'aurais à verser, chaque mois, la somme de 2448 F et insiste sur l'avantage de n'avoir que 8752 F d'intérêts répartis sur 24 mois. Ce qui lui paraît bien peu, compte tenu du plaisir de disposer immédiatement de mon véhicule.

En fait, quel est le taux d'usure selon lequel la mensualité a été calculée ?

Remarque et indications

Ce problème relève à la fois des problématiques 9 (modélisation...), 6 (algorithmes...) et 4 (approximations...). Nous le plaçons dans cette dernière car l'activité principale demandée à l'élève est celle d'approximer un binôme de degré élevé par les premiers termes de son développement car la variable en jeu a, nécessairement, une valeur faible. Un problème du même genre est dans la problématique 8, avec pour objectif la lecture critique de document publicitaire.

Le principe de calcul est le suivant : à chaque ‘instant » on paie des intérêts sur le capital restant à rembourser. Chaque versement comprend donc une part de capital et une part d'intérêt. De plus les versements sont égaux.

On démontre alors que, si Y est la mensualité constante à verser, C est le capital emprunté, r' le taux d'usure mensuel (soit le 12^{ème} du taux annuel) et n le nombre de mois de remboursements, alors :

$$Y = \frac{Cr'(1+r')^n}{(1+r')^n - 1}$$

Ici, Y=2448, C=50000, n=24.

Pour calcule r', il nous faudrait résoudre une équation de degré 25, ce que nous ne savons pas faire sauf par approximation à l'aide de la calculatrice. Cependant, l'analyse nous permet de trouver une valeur approchée par une autre méthode.

En effet, r' étant petit, le binôme $(1+r')^{24}$ pouvant être développé selon la formule classique du binôme, on obtient une première approximation de celui-ci sous la forme :

$$(1+r')^{24} \approx 1+24\, r',$$

les éléments suivants du développement étant considérés comme négligeables.

La résolution de l'équation du premier degré qui résulte de l'emploi de la formule et de cette approximation donne r' ≈ 0,0073 soit r ≈ 8,8 %

En réalité, cette valeur, "raisonnable" de façon surprenante, est assez éloignée de la valeur réelle. Aussi, nous "pousserons" l'approximation à l'ordre 2 :

$$(1+r')^{24} \approx 1+24\,r'+\frac{24.23}{2!}\,r'^2$$

L'équation du second degré qui en résulte est :

$$\frac{24.23}{2!}\;r'^2 - \left(\frac{24.23}{2!}.\frac{2448}{50000} - 24\right)r' - \left(24.\frac{2448}{50000} - 1\right) = 0$$

dont la solution positive est r' = 0,01255 soit r= 15,06%.

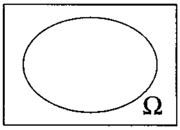
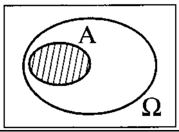
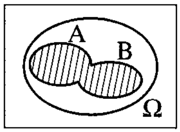
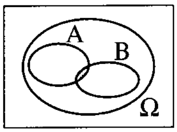
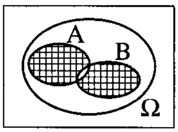
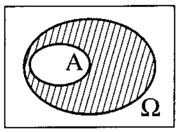
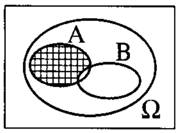
Il serait possible de continuer à améliorer l'approximation en passant à une équation du troisième degré que l'on pourrait, par exemple, ramener à une équation du second degré en choisissant 0,015 comme valeur approchée de r' .

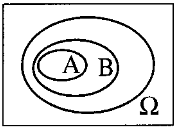
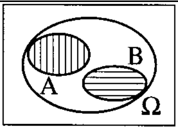
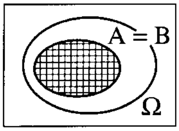
En réalité, le taux d'usure est r=16% , ce qui montre que la deuxième approche est convenable.

Situation didactique développée n° 1

Il ne s'agit pas ici d'une situation-problème au même titre que les précédentes. Cette séquence a pour objectif de faire établir par les élèves une synthèse entre plusieurs registres et cadres (cf. problématique 7) dans lesquels on peut exprimer le modèle des probabilités élémentaires. Elle pourrait prendre légitimement sa place ou bien dans l'introduction de l'axiomatique dite de Kolmogoroff ou bien pour la récapituler, axiomatisation elle-même introduite à partir des propriétés de la fréquence. Elle aurait pour mérite de servir par la suite de référence mnémonique pour les leçons portant sur les probabilités, ainsi que de rappeler à la fois les propriétés fondamentales de la logique des propositions et l'illustration que permettent les diagrammes de Venn. Sa place dans le cadre de la problématique 4 se justifie par la conception sur laquelle il serait conseillé de prendre appui : la probabilité est une mesure dans un espace où sont définies des opérations ensemblistes booléennes.

Il serait bon de faire compléter par chaque élève la colonne réservée aux exemples ou d'autres cases en leur demandant de trouver eux-mêmes des situations qu'ils considèrent personnellement comme prototypiques. On pourrait y introduire une contrainte en demandant des illustrations relevant d'une même situation réelle, par exemple, les cartes à jouer ou les dés.

Langage des événements	**Probabilités**	**Langage ensembliste**	**Représentation de Venn**	**Exemples**	**Logique des propositions**
Evénement		Ensemble d'éventualités		tirer un cœur d'un jeu de 32 cartes	Proposition
Evénement certain	1	Référentiel Ω			Proposition toujours vraie (tautologie)
Evénement impossible	0	Partie vide $\varnothing$			Proposition toujours fausse
Evénement A	p(A)	Partie A de Ω			Proposition p
Evénement A ou événement B		$A \cup B$			$p \vee q$ (p ou q) ("ou" inclusif)
Evénement A et événement B		$A \cap B$			$p \wedge q$ (p et q)
soit événement A, soit événement B		$A \Delta B$ (différence symétrique)			pwq (soit p soit q) ("ou" exclusif)
Evénement contraire à A		A^C ou $C_\Omega A$ (complé-mentaire de A dans Ω)			$\neg p$ (non p)
Evénement A et non événement B		$A \backslash B$ ($A \cap B^C$)			$p \wedge \neg q$ (p et non q)

Langage des événements	**Probabilités**	**Langage ensembliste**	**Représentation de Venn**	**Exemples**	**Logique des propositions**
A induit (ou implique) B		$A \subset B$ A contenu dans B			$p \Rightarrow q$ vrai
A et B incompatibles		$A \cap B = \varnothing$			$p \wedge q$ faux
A et B se produisent toujours en même temps		$A = B$			$p \Leftrightarrow q$ vrai

A l'issue de ce travail, il est possible de dégager les propriétés minimales du modèle mathématique permettant de satisfaire les attentes de l'ensemble des situations données par le langage des événements. La minimalité réduisant à deux axiomes la notion d'espace probabilisable et deux autres la notion d'espace probabilisé devrait conduire à des exercices intéressants décrivant clairement le processus d'axiomatisation en mathématiques.

Par exemple, l'axiome affirmant que si A est un élément de l'espace probabilisable, son complémentaire l'est aussi et l'axiome de la réunion ensembliste conduisent de façon simple à la stabilité de cet espace pour l'intersection. De même les axiomes définissant la probabilité mènent à des exercices de mesure de la différence ensembliste ou de la différence symétrique.

Remarque : *Bien qu'un travail de ce genre ne soit pas exactement dans l'esprit du programme actuellement en vigueur, il nous semble que cela aide à la compréhension.*

Situation didactique développée n° 2
Trois approches différentes d'un même phénomène

1- Le principe.

Les êtres vivants contiennent du carbone 14, dans une proportion maintenue à peu près constante par suite des échanges gazeux avec l'atmosphère. En fait le C^{14} se désintègre pour se transformer en C^{12} (ordinaire) de façon que, au bout d'un temps T (appelé “demi-vie”), la moitié de la quantité initiale a disparu ($T \approx 5600$ ans). Lorsque l'être meurt, les échanges gazeux cessent et le C^{14} se désintègre sans compensation extérieure.

La méthode de datation dite du “carbone 14” est basée sur ce phénomène. Partant du principe (pas tout à fait vrai, mais presque) que la proportion de C^{14} chez les êtres vivants est restée constante au cours des âges, il suffit de déterminer -par comptage des atomes- chez une partie d'un être mort (animal ou plante) le taux restant, puis d'établir son rapport ρ au taux initial, pour en déduire le temps écoulé depuis la mort. Dans ce qui suit, nous prendrons l'exemple de la détermination de l'âge A d'un fragment de charbon (élément d'un foyer préhistorique) trouvé dans un abri sous roche préhistorique et pour lequel l'analyse a donné $\rho = 0{,}094$.

2- Une approche discrète.

On peut simplement dire que ρ est, par nature, une fonction décroissante du temps, et que:

au bout du temps T, on a $\rho_1 = 0{,}5$
au bout du temps $2T$, on a $\rho_2 = 0{,}25$
au bout du temps $3T$, on a $\rho_3 = 0{,}125$
au bout du temps $4T$, on a $\rho_4 = 0{,}0625$ etc.

Plus généralement, on a $\rho_n = 2^{-n}$ (c'est-à-dire une suite géométrique de raison 1/2).

En ce qui concerne notre échantillon, on peut donc affirmer que $3T < A < 4T$, c'est-à-dire que l'abri a été occupé à un moment compris entre 16800 ans et 22400 ans BP (Before Present).

On peut essayer de raffiner cette méthode: le principe du 1° indique que le rapport de la quantité présente à l'instant $t + T$ à celle présente à l'instant t est indépendant de *t*. En extrapolant, <u>supposons que la rapport de la quantité présente à l'instant $t + \Delta t$ à celle présente à l'instant t ne dépend que de Δt</u>. On peut alors chercher la valeur $\rho_{1/2}$ du rapport correspondant à $\Delta t = T/2$: on doit avoir $(\rho_{1/2})^2 = 0,5$, d'où $\rho_{1/2} = \sqrt{0,5} \approx 0,707$.

On en déduit que, au bout du temps 3,5*T*, on a $\rho_{3/2} = 0,125.\sqrt{0,5} \approx 0,0884$. Par conséquent, on a maintenant $3T < A < 3,5T$, ce qui nous fournit la nouvelle "fourchette" 16800-19600 ans BP.

On pourrait bien sûr encore réduire la fourchette, mais on peut aussi construire une table qui sera valable une fois pour toutes (à la manière dont ont été construites les tables de logarithmes au 17e siècle). On obtiendra, par exemple, avec $\Delta t = T/8$:

Age	Rapport
0	0
T/8	0,9170
T/4	0,8409
3*T*/8	0,7711
T/2	0,7071
5*T*/8	0,6484
3*T*/4	0,5946
7*T*/8	0,5453
t	0 ,5

<u>Utilisation de la table</u>: ayant ici $3T < A < 4T$, on commence par se ramener à l'intervalle[0; *T*] en multiplant par $2^3 = 8$, ce qui nous donne le rapport 8 = 0,752. Ce rapport nous situe dans l'intervalle]3*T*/8 ; *T*/2[, et on peut conclure que l'on a $3T + 3T/8 < A < 3T + T/2$, c'est-à-dire que l'âge se situe dans la fourchette 18900-19600 ans BP.

De même, une dichotomie supplémentaire nous donnera le tableau suivant ($\Delta t = T/16$):

Age	Rapport
T/16	0,9576
T /8	0,9170
3 *T* /16	0,8781
T /4	0,8409
5 *T* /16	0,8052
3 *T* /8	0,7711
7 *T* /16	0,7384
T /2	0,7071

Age	Rapport
9 *T* /16	0,6771
5 *T* /8	0,6484
11 *T* /16	0,6209
3 *T* /4	0,5946
13 *T* /18	0,5694
7 *T* /8	0,5453
15 *T* /16	0,5222
T	0,5000

On voit que le rapport 0,752 nous place dans l'intervalle] 3 T /8 ; 7T/16 [. On obtient donc cette fois la fourchette 18 900-19 250 ans BP.

Malgré tout, cette approche est quelque peu incommode (elle nécessite l'utilisation d'une table et des calculs annexes. C'est pourquoi on aimerait disposer d'un outil plus efficace.

3- Une approche continue.

Dans le § précédent, nous avons fait l'hypothèse suivante: en notant $Q(t)$ la quantité de C^{14} restante au bout du temps t, le rapport $\dfrac{Q(t+\alpha)}{Q(t)}$ est indépendant de t. Cette expression est donc une fonction de la seule quantité α, et on peut noter $\dfrac{Q(t+\alpha)}{Q(t)} = f(\alpha)$ (N.B.: on a $f(0) = 1$). De cette relation on déduit $\dfrac{Q(t+\alpha)-Q(t)}{Q(t)} = f(\alpha)-1 = f(\alpha)-f(0)$ qui peut encore s'écrire (en divisant par α): $\dfrac{Q(t+\alpha)-Q(t)}{\alpha}\dfrac{1}{Q(t)} = \dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}$.

<u>Si nous supposons en outre que la fonction f est dérivable en 0</u> nous obtenons, en faisant tendre α vers 0: $\dfrac{Q'(t)}{Q(t)} = f'(0)$ (c'est-à-dire une constante k). Nous sommes alors ramenés à l'équation différentielle $y' = ky$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions g définies sur **R** par $g(t) = \lambda e^{kt}$ (où λ est une constante réelle). En appelant Q_0 la quantité de C^{14} à l'instant initial 0, nous obtenons que la fonction Q cherchée est la solution vérifiant $g(0) = Q_0$, et on a donc $Q(t) = Q_0 e^{kt}$.

Il reste maintenant à déterminer la constante k. Si t est exprimé en années, on sait que pour

$t = T/2$ on a $Q(T/2) = Q_0/2$. D'où $e^{kT} = 1/2$ et k = -.

Maintenant, “retournons au charbon” pour essayer de déterminer son âge. On a ρ= $\dfrac{Q(t)}{Q_0} = e^{kt}$, soit ici 0;094 = e^{kt}, d'où $t = \dfrac{\ln(0{,}094)}{k} = -T\dfrac{\ln(0{,}094)}{\ln 2} \approx 19100$.

Nous avons donc déterminé que notre échantillon a environ 19100 ans.

Remarques:

1- En fait, la méthode de datation au C^{14} (due à Willard F. Libby, prix Nobel de chimie en 1960) a été améliorée depuis sa création (vers 1950). La comparaison avec d'autres méthodes de datation (comme, par exemple, la dendrochronologie, étude de l'âge des arbres à l'aide de leurs cercles de croissance) a permis de constater que la teneur en C^{14} des êtres vivants n'est pas restée tout à fait constante au cours des âges. On a donc constitué des tables permettant de "calibrer" les résultats bruts obtenus.

2- Les fourchettes successives sont des intervalles emboîtés les uns dans les autres, et la valeur "ponctuelle trouvée par la méthode "continue" appartient à tous ces intervalles.

3- En réalité, le rapport ρ est lui-même déterminé par un encadrement. On aurait par exemple $0,092 < \rho < 0,096$, ce qui, ramené à l'intervalle $]\ 0\ ;\ T\ [$, donnerait $0,736 < 8 < 0,768$, ce qui nous conduirait à l'intervalle $]\ 3T/8\ ;\ T/2\ [$, soit 18900-19600 ans BP. En ce qui concerne l'approche continue, qui fournit une valeur ponctuelle, nous obtiendrions cette fois les limites temporelles $t_+ = -T\dfrac{\ln(0,092)}{\ln 2} \approx 19280$ et $t_- = -T\dfrac{\ln(0,096)}{\ln 2} \approx 18930$. La conclusion serait que l'âge de l'objet est situé dans la fourchette 18930-19280 ans BP.

4- La remarque précédente n'est malgré tout qu'une vision sommaire, de type déterministe, de la réalité. En fait, la transformation du C^{14} en C^{12} est un phénomène de nature statistique, et la valeur trouvée pour le rapport ρ n'est une estimation de la valeur réelle de ce rapport. La variable aléatoire qui lui correspond est une variable gaussienne, dont la distribution est donc déterminée par son espérance et son écart-type. L'espérance est estimée par la valeur trouvée pour □; quant à son écart-type □□, il dépend de l'échantillon et de la technique utilisée pour déterminer □. D'où un nouveau type d'approche que nous allons développer.

4- Une approche statistique.

Le problème est maintenant le suivant : étant donné la valeur mesurée du rapport ainsi que son écart-type, comment déterminer l'âge d'un objet archéologique.

Soit *R* la variable aléatoire "taux de C^{14} dans l'objet"; nous avons vu que *R* suit la loi $N(\rho,\alpha)$. Si maintenant nous appelons A la variable aléatoire "âge de l'objet", les variables R et A sont liées par la relation $R = e^{kA}$. L'estimation de R est ρ à laquelle correspond pour A l'estimation t_0 telle que ρ= e^{kt_0}.

Au voisinage de t_0 (qui est la région qui nous intéresse) on a :

$e^{k(t_0+\alpha)} = e^{kt_0}.e^{k\alpha} = e^{kt_0}\left[1 + k\alpha + \alpha.\varepsilon(\alpha)\right]$, où ε(α) tend vers 0 quand α tend vers 0.

On en déduit $e^{k(t_0+\alpha)} - e^{kt_0} \approx ke^{kt_0}(t_0 + \alpha - t_0)$. Il en résulte que l'écart-type de R est sensiblement celui de A multiplié par le coefficient $|k|e^{kt_0}$, c'est-à-dire qu'on a à peu près $\sigma_t = \dfrac{\sigma_\rho}{|k|\, e^{kt_0}} = \dfrac{\sigma_\rho}{|k|\,\rho}$.

Dans l'exemple numérique choisi, supposons que l'on ait trouvé $\sigma_\rho = 0{,}002$ (on note alors, par convention ρ= 0,094 ± 0,002). On en déduit : $\sigma_t = 0{,}002.\dfrac{5600}{0{,}0094 \ln 2} \approx 170$

D'autre part, au voisinage du pont considéré les variables A et R sont liées par une relation affine, puisqu'on a $R \approx e^{kt_0}\,[1 + k(A - t_0)]$; on peut donc conclure que l'âge de l'objet suit une loi normale. Cette loi a ici pour espérance 19100 (trouvée par l'approche déterministe) et pour écart-type 170, ce que l'on notera 19100 ± 170 ans BP.

Ceci signifie, non pas que l'âge de l'objet est compris dans la fourchette 18930-19270 ans BP, mais que la probabilité que son âge réel appartienne à cet intervalle est d'environ 68 % (et qu'il y a 95 % de chances qu'il soit compris entre 18760 et 19440 ans).

PROBLÉMATIQUE N°5

TRAITEMENT ET REPRÉSENTATION DE DONNÉES STATISTIQUES

GÉNÉRALITÉS

La multiplicité des données numériques pluridisciplinaires rencontrées dans le cadre scolaire, mais également l'abondance des “informations” fournies dans notre société par les médias, conduisent chacun d'entre nous, et en particulier l'élève, à la nécessité d'effectuer des tris, de réduire et d'organiser des signaux - informations brutes, inertes, non signifiantes, également génératrices de bruits- en données structurées, puis celles-ci en informations. Ces dernières ne prennent véritablement ce statut que lorsqu'il a été possible d'effectuer un certain traitement des données, qui les génèrent, en vue de leur conférer un sens, lui-même attribué à la suite d'une interprétation. Sans cette capacité de l'individu à effectuer une mise à distance personnelle, l'aliénation au traitement externe de ces données risque d'être totale: l'école se doit de délivrer une culture suffisante et quelques savoir-faire afin de préparer l'élève à échapper à cette dépendance, à acquérir des moyens de traitement mais aussi de jugement et d'esprit critique qui lui soient propres.

L'enseignement au cours de l'élémentaire et du 1er cycle fournit de primitifs et timides outils dans cette direction, conduisant cependant à une première autonomie, à des représentations imagées et à la mise en correspondance entre les données numériques et des concepts mathématiques, comme la proportionnalité. Dans certains cas de relation fonctionnelle, ces concepts permettent d'organiser les données et de mener à des calculs. Mais, faute d'avoir relié l'aléatoire et le numérique, d'avoir forgé des outils spécifiques d'un traitement des données et du hasard qui peut être lui-même à la fois l'origine de ce traitement et la source de la prévision, la maîtrise visée est loin d'être satisfaite. De plus, la relation entre données numériques et proportionnalité fait courir le risque de mettre en place chez l'élève un obstacle épistémologique consistant à croire, par exemple, que si un événement est apparu 3 fois en 10 épreuves, il devrait apparaître 30 fois en 100 épreuves, 300 fois en 1000 épreuves, etc..

La France demeure donc l'une des dernières nations à prendre conscience qu'elle a en charge une véritable formation à l'école en matière de statistique et de probabilité. La formation des maîtres en est la première responsable. Par suite, tout en regrettant que le terrain n'ait pas été mieux préparé en amont, nous devons, à travers les programmes de lycée pallier sérieusement cette carence par des **objectifs** plus ambitieux touchant au civique, au culturel et au cognitif :

- permettre à l'élève de s'intégrer dans une société où abondent les “informations” et leurs interprétations, puis d'y exercer une profession, société où la référence aux sondages et aux jeux de hasard est omniprésente, quelquefois sous des formes pernicieuses, misant sur la crédulité des individus, prétendant rationaliser la composante irrationnelle de la psychologie humaine**,**

- faire prendre conscience de la différence entre les modes de raisonnement déterministe utilisés jusqu'alors dans la majorité des activités mathématiques et les modes non déterministes utilisés en statistique inférentielle où les décisions s'assortissent de risques qu'il s'agira d'optimiser,
- mettre en place des situations suffisamment variées et pluridisciplinaires pour que des changements de cadres et de registres soient efficacement mobilisés, que les connaissances trop éclatées soient plus transverses, mieux globalisées et qu'une démarche scientifique soit déployée.

Pour ce faire, il est nécessaire que des **objectifs** plus **spécifiques** soient atteints par l'élève:

- explorer et structurer des données, puis comprendre les structures obtenues,
- disposer d'éléments conceptuels de la statistique et des probabilités,
- savoir, dans des situations pluridisciplinaires peu complexes, mathématiser en un modèle où intervient le hasard sur des données empiriques, résoudre dans le modèle et revenir de façon critique à la situation initiale.

Les **situations et les activités** associées seront donc largement ouvertes et variées :

- recueillir, organiser, condenser, coder, représenter en tableaux ou graphiques des données numériques d'origine scolaire ou non,
- analyser, interpréter, comparer et critiquer des représentations,
- à travers des situations de défis et de paris, rendre pertinents, opérationnels, anticipateurs donc efficaces, des concepts de probabilité,
- dans une situation aléatoire simple, émettre une hypothèse et étudier l'éventualité de son rejet ou de son acceptation.

Les **démarches** sollicitées nécessiteront donc le déploiement de ce qui relève de l'esprit scientifique : analyser, modéliser, résoudre, spécifier, anticiper et appliquer avec esprit critique.

Ceci nécessite que les **contenus** des programmes soient sensiblement élargis, tout en étant spécifiés aux différentes filières. Il nous semble raisonnable, du point de vue didactique, d'aborder l'ensemble des notions par celles qui relèvent de la statistique descriptive, en partie enseignées à un niveau élémentaire au 1er cycle, en particulier la notion de fréquence. C'est celle-ci qui donnera, par la suite, un sens à la notion de probabilité, de même que les opérations intuitives puis explicitées sur la fréquence donneront à l'axiomatique de Kolmogoroff toute sa signification. Quelques lois théoriques, discrètes ou continues (binomiale, Poisson, hypergéométrique, multinomiale, exponentielle et normale) apparaîtront comme des outils permettant ensuite d'étudier l'ajustement d'une loi théorique à une distribution empirique et de juger sa pertinence. A cette occasion, sans développement théorique, le test du χ^2 permettra de répondre à l'hypothèse d'ajustement. L'étude de la distribution conjointe de 2 variables conduira à une première étude de la régression linéaire et de ses applications à la prévision. Les notions de décision et de risque associé pourront être abordées à travers des fonctions simples où la recherche de minima prendra un de ses sens. Une méthode de classification hiérarchique de données (par exemple, celle qui est utilisée dans l'analyse du test d'entrée en seconde) sera enseignée sur la base d'exemples numériques et pourra conduire à la notion de typologie utile en sciences biologiques et en sciences humaines. Un changement de cadres comme statistique ↔ géométrie associant moyenne et barycentre, écart-type et distance, covariance et produit scalaire, coefficient de corrélation et cosinus permettrait de munir l'élève de riches images intuitives, efficaces à la mémorisation et à l'interprétation de certains phénomènes.

En résumé, pour satisfaire cette problématique, de grands efforts sont à faire sur plusieurs plans, si l'on souhaite modifier sa représentation au niveau de l'institution :

- la formation initiale et continue des enseignants,
- la révision des programmes où cette problématique n'apparaîtrait plus comme le superflu dont on peut amputer sans dommage l'enseignement lorsque les programmes sont jugés chargés,
- la totale intégration institutionnelle de l'évaluation des connaissances et des compétences des élèves en matière de statistique et de probabilité dans les différents examens de l'enseignement secondaire.

Enfin, ne terminons pas cette introduction sans réfléchir sur la philosophie à incidence sociale, pédagogique et culturelle :

"*Qu'est devenue la sagesse que nous avons perdue dans la connaissance ?*
Qu'est devenue la connaissance que nous avons perdue dans l'information ?
Qu'est devenue l'information que nous avons perdue dans les données ?"

Mark ASPEN, Musée des Enfants du Capitole à Washington.

Situations – Démarches – Contenus

Situations	Démarches	Contenus
♦ Réalisation d'une enquête par les élèves en travail de groupe (opinions, économie, démographie, météorologie, biométrie, jeu de hasard, etc.) à partir de questions jugées pertinentes. Construction de graphiques adaptés à la spécificité des situations et des questions.	♦ Organiser une enquête, planifier et distribuer des tâches. Recueillir des informations chiffrées selon des critères pré-établis dans des conditions objectives. Traduire ces informations par des graphiques conventionnels. En extraire des projections raisonnées.	♦ Fréquence simple, fréquence cumulée de la distribution d'une variable statistique. ♦ Révision des principaux systèmes de représentation d'une série statistique simple. ♦ Représentation d'une série statistique double.
♦ Premières extrapolations et interpolations en vue d'une prédiction. ♦ Dans une situation de communication, recherche d'outils condensant l'information sur des données numériques en conservant les caractères jugés essentiels et minimisant la quantité de données.	♦ Chercher et/ou utiliser des moyens suffisants pour réduire des informations en conservant leur structure et leurs tendances. Chercher un compromis entre la fidélité et la simplicité.	♦ Paramètres de condensation de la distribution d'une grandeur : moyenne, médiane, mode, variance, écart-type. Relation avec la géométrie (barycentre, distance) et la mécanique (centre de gravité, moment d'inertie, ...).
♦ A partir d'une des situations initiales (ou au moyen d'une simulation aléatoire) et sous forme d'un pari, formulation de la probabilité d'un événement non encore observé. Exploitation critique de la validation ou l'invalidation du pari.	♦ Sans attitude conflictuelle, se donner comme enjeu, seul ou en duel, la réussite d'un pari sur la réalisation d'un événement. Tenter d'optimiser les chances de gain.	♦ Définition de la probabilité à la fois comme valeur tirée a priori de la fréquence d'apparitions d'un phénomène aléatoire et comme valeur limite de la fréquence quand le nombre d'épreuves tend vers l'infini. Expression intuitive de la loi des grands nombres.

Situations	Démarches	Contenus
♦ Situations de dénombrement : croissance exponentielle (nombre de parties d'un ensemble fini), nombre de mots différents à partir d'un mot, nombre de suites de longueur donnée (jeu du "pendu"), nombre de parties de cardinal donné d'un ensemble fini (nombre de tiercés), etc.	♦ Se donner des moyens efficaces et sûrs de substituer un procédé mental à un procédé par exhaustion effective. Constater la réduction du coût associé.	♦ Eléments de combinatoire : processus exponentiel, permutations, arrangements, combinaisons.
♦ Traduction en termes ensemblistes des énoncés formulables en termes de la logique des propositions, dans une situation aléatoire où les événements sont constitués d'un nombre fini d'éventualités (planche de Galton, par ex.).	♦ Rattacher les expressions d'assemblage des événements aléatoires à celles de la logique des énoncés mathématiques. Utiliser ainsi les représentations de ce dernier langage comme le diagramme de Venn.	♦ Relation entre énoncés logiques reliés par les connecteurs propositionnels et la probabilité sur un ensemble d'événements. Eléments de l'axiomatique de Kolmogoroff.
♦ Situation séquentielle de jeu (dés, par ex.) conduisant à la prise en compte d'informations successives modifiant ou non la probabilité.	♦ A partir de la donnée d'informations, changer de point de vue dans la considération des aléas. Relativiser la probabilité d'un événement à la réalisation supposée d'un autre.	♦ Probabilité conditionnelle. Formule de Bayes. Représentation arborescente ♦ Evénements indépendants. Epreuves indépendantes. Loi de probabilité produit. Représentation cartésienne.

Situations	Démarches	Contenus
♦ Situations de la vie courante conduisant à des types de variables divers : présence-absence, nominales-ordinales ; étude de tels cas dans un processus avec indépendance; entrées-sorties d'un libre service, répartition des tailles, des poids, etc. ...	♦ Revenir sur des enquêtes antérieures afin d'identifier par de nouveaux critères les variables en jeu. Exemplariser ces critères par de nouvelles enquêtes fictives ou réalisées.	♦ Variables aléatoires. Lois de probabilité les plus courantes ; - variables discrètes : Bernoulli, binomiale, Poisson, - variables continues : normale, exponentielle. Paramètres d'une variable aléatoire.
♦ Examen de deux variables liées : poids-taille pour un individu, notes math-physique, etc. dans un but prévisionnel et dégagé des données du croisement des variables.	♦ Se donner de nouveaux moyens pour prédire le comportement d'une variable liée à une autre. Mesurer l'incertitude quant à sa connaissance.	♦ Couple de variables aléatoires. Notion de covariance, coefficient de corrélation ; notion de régression ; droites et paraboles de régression.
♦ A partir de la publication d'un sondage, examen de la crédibilité des valeurs annoncées et détermination d'une base de sondage plus satisfaisante.	♦ Développer son sens critique à l'égard des médias. Se donner les moyens d'objectiver la distance ainsi prise.	♦ Expression du théorème central-limite, applications ; en particulier : intervalle de confiance.
♦ Validation de la loi de Mendel sur des données fournies par la biologie.	♦ Appliquer à des questions scientifiquement légitimées les connaissances acquises. ♦ A cet égard, manifester curiosité, rigueur, mesure du coût du risque et esprit critique.	♦ Eléments de statistiques : test de la loi normale, intervalle de confiance, test d'adéquation d'une loi théorique à une loi empirique, test d'indépendance de deux variables.

Quelques situations - problèmes

1ère

✳✳✳ 1 ✳✳✳

15 représentants de la Communauté Européenne sont réunis.

1° Au cours de leur première rencontre, combien de poignées de main sont échangées ?

2° Combien de dispositions différentes des 15 sont a priori envisageables autour d'une table ronde ?

3° A la sortie de la réunion, les 15 se retrouvent sans protocole pour la photo officielle. Combien y a-t-il de dispositions différentes, donc de photos possibles :

a) s'ils sont alignés sur le même rang ?

b) s'ils sont alignés sur 3 rangs de 5 ?

Remarque : *il s'agit de petits exercices de combinatoire devant mettre en évidence la différence cardinale entre des types de disposition des objets à dénombrer. L'application directe des formules classiques n'est pas possible ici sans une réflexion sur la situation en jeu.*

1ère

✳✳✳ 2 ✳✳✳

Forme-t-on plus de nombres différents à l'aide de tous les chiffres 2, 3, 4, 5, 6 qu'avec 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6 ?

Remarque : *on notera la formulation de cet exercice conduisant à un éventuel pari ou lançant un défi, d'autant que la réponse nécessite le calcul effectif dans une situation où des objets indiscernables sont répétés.*

1ère-Tale

✳✳✳ 3 ✳✳✳

Un livre de cuisine annonce “un million de menus”. Ce livre est constitué de pages découpées en trois parties indépendantes les unes des autres. Le haut de la page est consacré aux recettes de hors-d'œuvre, le milieu à celles des plats principaux, le bas de la page à celles des desserts. Toutes les combinaisons de recettes pour constituer un menu (hors-d'œuvre, plat principal, dessert) sont possibles.

Combien y a-t-il de recettes en tout s'il y a bien un million de menus différents ?

Remarque : *une petite mathématisation est nécessaire, mais la combinatoire exponentielle simple bien que rétroactive nécessite la compréhension de la réversibilité de l'opération. La représentation arborescente facilite la résolution du problème.*

T^ale

✶✶✶ 4 ✶✶✶

Quel serait le pari équitable contre un adversaire sur l'événement "obtenir un 4-2-1 en lançant simultanément 3 dés à 6 faces", événement que vous souhaitez réaliser ?
Remarque : *Même remarque que pour le 2. La représentation cartésienne pour dénombrer les triplés, bien que délicate, est recommandée. Elle peut n'être qu'évoquée.*

T^ale

✶✶✶ 5 ✶✶✶

Dans un jeu de rôles, on utilise des dés inhabituels à 4, et 8 faces. Des nombres sont marqués sur chaque face comme on le fait pour un dé à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir respectivement un total de 15 points, puis de 10 points en lançant :

1° 2 fois un dé à 8 faces ?

2° 4 fois un dé à 4 faces ?

Remarque : *l'objectif essentiel ici est de déconditionner les élèves qui ont l'habitude de résoudre de tels exercices avec des dés à 6 faces et donc de faire une étude exhaustive nouvelle des issues possibles de tels lancers.*

Dans le cas du dé à 8 faces, les seules issues possibles pour obtenir 15 sont le 8 et le 7 d'où la probabilité : $\dfrac{C_2^1}{8^2}$.

Pour obtenir 10, les seules issues sont : 2 et 8, 3 et 7 et 4 et 6 de 2 façons et 5 et 5 d'une façon. La probabilité est $\dfrac{7}{64}$.

Pour obtenir 15 avec un dé à 4 faces, il faut nécessairement obtenir le 4 trois fois et une fois le 3 donc de 4 façons. La probabilité est donc : $\dfrac{C_4^1}{4^4} = \dfrac{1}{64}$.

Pour obtenir 10, les seules issues sont :

1 1 4 4 soit de 6 façons | *1 2 3 4 soit de 24 façons*

1 3 3 3 soit de 4 façons | *2 2 3 3 soit de 6 façons*

et 2 2 2 4 soit de 4 façons.

La probabilité est donc $\dfrac{11}{64}$.

✶✶✶ 6 ✶✶✶

1000 signaux "1" ou "0" envoyés par un émetteur parviennent à un récepteur avec une certaine distorsion. On observe que la fréquence de réception du signal "1" est 5/8.

Adoptant cette valeur comme probabilité de réception du "1" à chaque émission, quelle est, a priori, la loi du nombre de réceptions de "1" sur 1000 signaux "1" émis ? Quelle est la probabilité pour que le "1" soit reçu plus de 650 fois ?

Remarque : *dans cet exercice, il s'agit d'une part de reconnaître la loi binomiale, d'autre part, compte tenu de la difficulté d'effectuer le calcul, d'utiliser le théorème central-limite, pour trouver la valeur gaussienne correspondante.*

T^{ale}

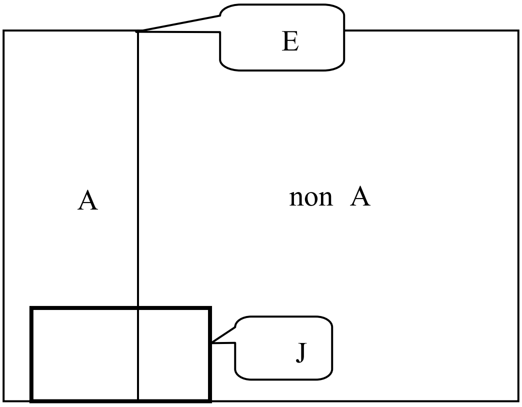
✶✶✶ 7 ✶✶✶

Considérons le jeu du loto où il s'agit, pour simplifier, de trouver 6 "bons numéros" parmi les nombres 1, 2, 3, ... 48, 49 (pas de numéro supplémentaire).

1° Quelle est la probabilité de gagner ainsi en choisissant 7 numéros ?

2° Quelle est la probabilité de n'avoir que 5 "bons numéros" parmi les 6, dans les mêmes conditions ?

Remarque : *sans développer la théorie de la loi hypergéométrique, on peut ici se contenter du dénombrement des échantillons de tailles 5,6 et 7.*



Nous suggérons la représentation suivante qui permet de bien mettre en évidence les échantillons à dénombrer. E représentant l'ensemble des numéros jouables, J celui des numéros joués dans le 2°, il suffit de dénombrer les situations comparables à celle ci-contre, soit $C_6^5 \times C_{43}^2$

Comme il y a C_{49}^7 *échantillons a priori, la probabilité demandée est immédiate.*

Tale

✶✶✶ 8 ✶✶✶

Dans un lot de 50 souris, 10 d'entre elles subissent un certain traitement. Puis elles sont mêlées aux autres. Au bout d'une semaine, on prélève dans le lot, au hasard, un échantillon de 10 souris. On observe qu'une seule a été traitée.

A votre avis, ce résultat est-il invraisemblable, si l'on déclare invraisemblable un événement de probabilité inférieure à 0,10 ? Justifiez.

Remarque : *ce problème a pour objectifs, outre la résolution d'un problème de probabilité, la démarche critique face à un résultat expérimental sur lequel il était possible de fonder une conjecture en environnement aléatoire. En particulier, se fixer une limite de doute représente une attitude scientifiquement saine et à intégrer dans le quotidien.*

✶✶✶ 9 ✶✶✶
étude d'une migration

Une colonie d'ours blancs a un habitat bien localisé et un effectif égal à n. Lors d'une première opération de marquage, n_A ours blancs ont été marqués puis lâchés dans la colonie. Quelques semaines plus tard, on capture en une prise sans remise m ours blancs dans le même habitat.

1° Définir la loi de la variable aléatoire X représentant le nombre d'ours marqués, recueillis au cours de la deuxième capture.

2° Application numérique : $n = 50$, $n_A = 12$, $m = 6$.

Déterminer P[X=0], P[X=1], P[X=6].

Remarque : *les élèves peuvent spontanément se diriger vers une loi binomiale qui, du fait de la non-remise, est illégitime. En fait, le 1° permet de formaliser la loi utilisée dans l'exercice précédant la mise en situation. Par suite, la représentation proposée est d'une grande utilité.*

✶✶✶ 10 ✶✶✶

Lu dans un bulletin météo d'un journal :

" On estime qu'en France il pleut 3 jours par mois. Ainsi, il y a en moyenne un mois par an où le nombre de jours de pluie est supérieur à 5 ".

Curieux ? A votre avis, quels arguments ont été utilisés par le journaliste pour affirmer une telle conclusion ?

Remarque : *considérant l'observation faite comme une réalisation aléatoire, la v.a., nombre de jours de pluie dans un mois, peut être considérée comme suivant une loi binomiale de paramètres 30 et 3/30, approximable par une loi de Poisson de paramètre 3. Les objectifs de cet exercice sont doubles : esprit critique et modélisation dans la théorie des probabilités.*

T[ale]

Option Sciences !

✶✶✶ 11 ✶✶✶
aux urnes, citoyens...

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On veut faire des tirages successifs dans cette urne en procédant ainsi : si l'on tire une boule blanche (resp. noire) lors du $k^{\text{ième}}$ tirage, on remet cette boule dans l'urne et on en rajoute deux de la même couleur.

n tirages sont prévus. Quelle est la probabilité p de ne tirer <u>que</u> des boules blanches jusque, et y compris, au $n^{\text{ième}}$ tirage ?

Donner une majoration de cette probabilité pour n = 1000.

Remarque et indication : si l'on note B_1, B_2,, ..., B_k,, ... les événements successifs : apparition d'une boule blanche aux 1[er], 2[ème] , ..., $k^{\text{ième}}$, ...tirages , la probabilité p est :

$P[B_1]. P[B_2 / B_1]. P[B_3 /(B_1 \text{ et } B_2)].....P[B_n /(B_1 \text{ et } B_2 \text{ et}...B_{n-1})]$ soit $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{2n-1}{2n}$. Ainsi, la formule des probabilités composées est seule

nécessaire à ce calcul. L'élève peut représenter les situations successives par un petit schéma qui lui permettra d'écrire sans peine le produit des probabilités conditionnelles.

La majoration demandée pour n = 1000, étant inaccessible au calcul direct si elle n'est pas grossière, appelle nécessairement que l'on démontre une formule générale qui n'est autre que celle qui est demandée dans l'exercice 3 de la problématique 4, à savoir :

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Les deux membres étant positifs, il suffit d'élever au carré le premier, et ensuite de majorer toute fraction de la forme $\frac{2k-1}{2k}$ *(qui figure deux fois) par* $\frac{2k}{2k+1}$ *(on ne majore qu'une fraction sur les deux). Il ne reste plus qu'à simplifier.*

T^ale^

✶✶✶ 12 ✶✶✶

Un camarade et vous-même jouez l'un contre l'autre à l'aide de deux dés marqués 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Votre camarade vous propose la règle suivante : à chaque lancer simultané des dés, si le maximum des points obtenus sur l'un ou l'autre est 5 ou 6, vous lui donnez 1 euro, sinon c'est lui qui donne 1 euro.

1° Acceptez-vous cette règle comme étant équitable ?

2° Quelle devrait être la mise minimum de votre adversaire pour que le jeu soit équitable ou vous soit favorable, alors que vous misez toujours 1 euro ?

Remarque et indications : *cette situation nécessite certes la connaissance d'une méthode de détermination d'une probabilité sur un espace-produit, mais ici l'équiprobabilité sur {1,2,3,4,5,6}×{1,2,3,4,5,6} et une représentation dans le cadre graphique rendent la situation aisément appréhendable. Cependant, il est nécessaire de savoir qu'un gain moyen par partie est l'espérance d'une variable aléatoire G dont il suffit de déterminer la loi. Ici, la v.a. est de Bernoulli et sa distribution est, dans le problème : 16/36 et 20/36. Ainsi, l'espérance de G est :*

$$E(G)= 1 \times 16/36 + (-1) \times 20/36 = -1/9 < 0$$

Le jeu n'est donc ni équitable, ni favorable à vous-même. Il le devient si, notant a l'enjeu de l'adversaire, on a : $E(G) = a \times 16/36 + (-1) \times 20/36 \geq 0$*, soit* $a \geq 5/4$*. Cette somme est donc la mise minimum que l'adversaire doit accepter.*

Cette situation peut servir à plusieurs fins :

- illustrer la notion récemment introduite d'espérance mathématique,

- mais également permettre de l'introduire vu le contexte de jeu où il est possible de faire ressentir ce qui se passe en moyenne sur 36 parties où l'on gagnerait 16 euros pendant que l'on perdrait 20 euros.

Tale

✳✳✳ 13 ✳✳✳

Une urne contient 6 boules blanches ou noires. On suppose a priori que toutes les compositions possibles sont équiprobables. On fait 6 tirages successifs et indépendants d'une boule avec remise. A chaque tirage une boule blanche est extraite. Bizarre !

Trouver, par le calcul, quelle est la composition la plus probable.

Remarques et indication : *ce problème est une application du théorème de Bayes, mais il se présente de telle façon que soit remise en cause une hypothèse légitime d'uniformité comme c'est le cas dans le doute absolu où n'existe pas raisonnablement d'idée préconçue. La mathématisation est intéressante car elle fait appel à cette hypothèse a priori.*

1- Appelons U_i, $i = 0$ à 6, l'événement : [la composition de l'urne est : i boules blanches et 6-i boules noires]. D'après l'hypothèse : $Pr[U_i] = \frac{1}{7}$, pour tout i.

Notons B_6 l'événement [le nombre de boules blanches tirées en 6 tirages est 6].

Les tirages étant indépendants, on a :

$Pr[B_6/U_0] = 0$; $Pr[B_6/U_1] = (\frac{1}{6})^6$; $Pr[B_6/U_2] = (\frac{2}{6})^6$;....; $Pr[B_6/U_6] = (\frac{6}{6})^6$

D'où par Bayes :

$$Pr[U_6/B_6] = \frac{Pr[B_6/U_6]Pr[U_6]}{Pr[B_6/U_0]Pr[U0] + Pr[B_6/U_1]Pr[U_1] + \ldots + Pr[B_6/U_6]Pr[U_6]} = 0{,}695$$

Cette probabilité est nécessairement supérieure à toutes les autres ($Pr[U_6/B_6] > \frac{1}{2}$). La composition la plus probable, mais pas certaine, est donc U_6, ce que l'on pouvait penser.

2- Le fait d'avoir supposé que les $Pr[U_i]$ sont égales, ramène la comparaison des $Pr[U_i/B_6]$ à celle des $Pr[B_6/U_i]$.

3- On pourrait compliquer un peu avec un tirage BBBBNN .

Tale

✶✶✶ 14 ✶✶✶
allô, pompiers...

Un poison vient d'être absorbé par une personne. L'examen des lieux laissent penser que trois poisons A, B et C seulement peuvent être incriminés, mais avec des probabilités différentes compte tenu des observations faites : Pr[A]= 1/10, Pr[B]= 1/2, Pr[C]= 4/10. De plus, on sait que chaque poison provoque chez la personne qui l'a ingéré des signes cliniques particuliers mais avec des probabilités différentes car ils n'ont pas la même composition.

Ainsi le poison A provoque essentiellement deux signes s et t avec des probabilités respectives 4/5 et 1/5. Les deux mêmes signes sont observables respectivement avec les probabilités 1/50 et 49/50 pour le poison B et 2/5 et 3/5 pour le poison C.

Or c'est le signe *s* qui est observé sur la personne dans le cas présent. Comme on souhaite agir rapidement, on veut savoir quel est le poison qui a la plus grande probabilité d'avoir été absorbé.

A votre avis quel est-il ?

Remarque et indications : *cette situation est le prototype des situations scientifiques où le raisonnement inductif est guidé par un calcul mathématique rigoureux, dans l'hypothèse où les données sont numériques et fiables. Ce que l'on va supposer ici. Mais il paraît nécessaire que les élèves sachent pratiquer de tels calculs et qu'ils constatent que les diagnostics et les gestes médicaux peuvent très souvent procéder ainsi. Des logiciels d'aide au diagnostic médical et à l'établissement de l'ordonnance, mis à la disposition de médecins, ne fonctionnent pas autrement. Mais ce n'est pas la seule profession qui fasse appel à la démarche baysienne sous-jacente : par exemple, l'aide à la détection des pannes présente une analogie avec la situation-problème donnée ici.*

Une démarche intéressante pourrait consister à demander a priori aux élèves de fixer leur propre diagnostic au vu des données. Il a été souvent observé que les valeurs des probabilités des poisons induisaient un choix erroné. En particulier le poison A cité souvent montre bien le comportement aberrant qui consiste à ne pas relier la fréquence d'un événement à ses manifestations causales. C'est un comportement très populaire alimenté par des croyances irrationnelles trop répandues.

La situation-problème pourrait donner lieu en outre à une réflexion "philosophique" développée autour de l'idée de la remontée des conséquences aux *causes et de la vertu de la mémoire nourrie du cumul des expériences passées. Les activités de la vie de tous les jours se nourrissent de telles démarches lorsqu'il s'agit de prendre des décisions sur la foi de la raison.*

Dans la situation présente, nous disposons des probabilités conditionnelles :

Pr[s/A]= 4/5 ; Pr[t/A]= 1/5 ; Pr[s/B]= 1/50 ; Pr[t/B]= 49/50 ; Pr[s/C]= 2/5 ; Pr[t/C]= 3/5

Le théorème des probabilités totales et la formule de Bayes nous permettent d'écrire :

$$Pr[A/s] = \frac{Pr[s/A]Pr[A]}{Pr[s/A]Pr[A] + Pr[s/B]Pr[B] + Pr[s/C]Pr[C]} = \frac{8}{25}$$

de la même façon, on obtient : $Pr[B/s] = \dfrac{1}{25}$ *et* $Pr[C/s] = \dfrac{16}{25}$

On peut aussi arriver plus simplement aux résultats par un schéma en arbre bien construit, ou un tableau à double entrée, et s'en servir pour généraliser et aboutir à la formule de Bayes.

Option Sciences !

T$^{\text{ale}}$

✶✶✶ 15 ✶✶✶
une recherche de paternité

Il s'agit d'estimer la probabilité que le père présumé d'un enfant en soit le père réel. Ou plus précisément ici, sous réserve de compatibilité assurant la présomption entre le groupe sanguin du père présumé et celui de l'enfant, on cherchera à évaluer le groupe du père réel qui a la probabilité maximale.

On pourra réfuter (à peu près certainement) l'hypothèse qu'un père présumé soit le père réel si son groupe est A, celui de la mère est O et celui de l'enfant est AB. En effet, l'allèle B n'a pu être donné par aucun des deux parents. Par contre, on ne la réfutera pas si le groupe du père présumé est O, celui de la mère est AB et celui de l'enfant est B. En effet, d'après les lois générales de l'hérédité, des parents de groupes O, A, B ou AB ne peuvent transmettre respectivement, avec la probabilité 1/2, et de façon indépendante, que l'un des deux allèles qu'ils possèdent parmi les trois allèles A, B (dominants) et O (récessif). Or :

- le groupe A recouvre les génotypes AA (2 allèles A) et AO (allèle A + allèle O),
- le groupe B recouvre les génotypes BB et BO,
- le groupe AB le génotype AB.
- le groupe O le génotype OO.

En France, on observe la répartition génétique des allèles suivantes :

A: 28%, B : 6%, O : 66%.

Sachant que l'enfant (français) est du groupe B, la mère (française) du groupe AB, quel est alors le groupe sanguin, parmi O, A, B et AB, du père réel (supposé français) qui a la probabilité maximale ?

Remarque et indication : *ce problème fait appel non seulement aux connaissances de probabilité (théorème de Bayes), mais aussi à la compréhension des phénomènes simples de l'hérédité. Les élèves de terminale ont une culture suffisante dans ce dernier domaine pour résoudre le problème.*

Aussi, ils doivent pouvoir affirmer que les seuls génotypes possibles pour le père sont : AO, BB, BO, AB, OO, AA. Posons

p = distribution allèle A = 0,28 ; q = distribution allèle B = 0,06 ;

r = distribution allèle O = 0,66

H_1 *l'hypothèse (à débattre) : le père réel a le génotype AO*

H_2 *l'hypothèse (à débattre) : le père réel a le génotype BB*

H_3 *l'hypothèse (à débattre) : le père réel a le génotype BO*

H_4 *l'hypothèse (à débattre) : le père réel a le génotype AB*

H_5 *l'hypothèse (à débattre) : le père réel a le génotype OO*

H_6 *l'hypothèse (à débattre) : le père réel a le génotype AA*

On doit donc calculer, sachant que la mère a le groupe sanguin AB (donc de génotype AB) les probabilités respectives $Pr[H_1 / \text{fils } B]$, $Pr[H_2 / \text{fils } B]$,...,$Pr[H_6 / \text{fils } B]$.

Or sans autre information, nous savons qu'en France:

$Pr\ [H_1] = 2pr$, $Pr\ [H_2] = q^2$, $Pr\ [H_3] = 2qr$, $Pr\ [H_4] = 2pq$, $Pr\ [H_5] = r^2$, $Pr\ [H_6] = p^2$.

De plus les lois de l'hérédité donnent les répartitions suivantes :

$Pr[\text{fils } B/ H_1] = 1/4$, $Pr[\text{fils } B/ H_2] = 1/2$, $Pr[\text{fils } B/ H_3] = 1/2$,

$Pr[\text{fils } B/ H_4] = 1/4$, $Pr[\text{fils } B/ H_5] = 1/2$, $Pr[\text{fils } B/ H_6] = 0$

Le théorème de Bayes (ou un arbre probabiliste) permet enfin de trouver les probabilités cherchées :

$$Pr[H_1/\text{fils } B] = \frac{2pr.\frac{1}{4}}{2pr.\frac{1}{4} + q^2.\frac{1}{2} + 2qr.\frac{1}{2} + 2pq.\frac{1}{4} + r^2.\frac{1}{2}} = \frac{pr}{q+r}$$

$$= 0{,}257 \qquad (p + q + r = 1)$$

de la même façon :

$$Pr[H_2\,/\,fils\ B] = \frac{q^2}{q+r} = 0{,}005\ ;\quad Pr[H_3\,/\,fils\ B] = \frac{2qr}{q+r} = 0{,}110\ ;$$

$$Pr[H_4\,/\,fils\ B] = \frac{pq}{q+r} = 0{,}023\ ;\quad Pr[H_5\,/\,fils\ B] = \frac{r^2}{q+r} = 0{,}605$$

et $Pr[H_6\,/\,fils\ B] = 0$

Le groupe auquel appartient le plus probablement le père réel est donc le groupe O. En revanche, on pourrait douter qu'un père présumé du groupe AB soit le père réel et être (quasi)certain qu'un père présumé du groupe AA ne soit pas le père.

On trouvera dans la problématique 8 un texte extrait d'un journal de la transfusion sanguine procédant de façon inverse : on donne a priori une chance sur deux à un père présumé la présomption d'être le père réel et on fait "fonctionner" le théorème de Bayes pour affirmer cette paternité ou conduire au doute ou à sa réfutation.

Tale

✶✶✶ 16 ✶✶✶
recherche d'une répartition inconnue

Des boules rouges et des boules vertes sont mélangées dans une boîte. Les effectifs respectifs R et V de ces boules sont inconnus et l'objectif de l'expérience qui suit est d'estimer les proportions respectives r et v. On sait que :

- une boule rouge sur deux porte une marque indiquant que son tirage fait gagner,
- une boule verte sur quatre porte cette même marque gagnante,
- seul le meneur de jeu voit la couleur et cette marque.

Après chaque tirage aléatoire d'une boule avec remise par le joueur, le meneur de jeu annonce, seulement et sans mentir, si le joueur a ou non gagné (c'est-à-dire si la boule tirée porte ou non la marque gagnante).

Avant la première partie, n'ayant aucun préjugé en faveur de l'une ou l'autre des deux couleurs, le joueur estime que $r = v$.

5 tirages successifs ont lieu et conduisent aux résultats respectifs : Gain-Gain-Gain-Perte-Gain.

Calculer les estimations respectives que le joueur peut faire des répartitions inconnues r et v après chacun des tirages suivi de l'annonce du résultat.

Remarque : *cette situation a pour objectif, dans un cadre ludique effectivement réalisable ou simplement simulable, de mathématiser et formaliser le sentiment de confiance que tout individu peut avoir à l'issue de la réalisation d'une expérience au sujet de sa reproduction. Cette mathématisation et sa formalisation passent par l'établissement ou l'emploi, comme précédemment, du théorème de Bayes qui doit prendre tout son sens dans sa faculté intégratrice de l'expérience et anticipatrice pour une nouvelle épreuve. En fait, les élèves devraient percevoir, au delà de cette situation, un des modèles comportementaux de l'intelligence humaine, capitalisatrice des expériences antérieures pour mieux maîtriser les aléas des expériences futures. La pratique diagnostique du médecin est, par exemple, l'illustration d'une réalisation familière de ce type de modèle comportemental.*

Dans un premier temps, les élèves vont, sans doute, se contenter de pratiquer une estimation en acte par des calculs locaux, voire au jugé, c'est-à-dire sans l'établissement de la formule de Bayes. Cependant, la répétition du calcul est coûteuse, même si celui-ci permet de remettre séquentiellement en cause la répartition définie a priori. Ils doivent donc se donner une stratégie plus générale, donc une relation entre l'observation et la répartition à estimer. Une présentation en tableau des calculs successifs et, éventuellement, un petit programme sur leur calculatrice, faciliteront la confrontation des résultats et simplifieront la répétition des calculs tout en valorisant l'algorithme proposé par la formule générale. Une question sur la répartition définie a priori permettrait d'exploiter le problème de la convergence du processus vers une distribution qui pourrait être étrangère à la distribution réelle et souligner ainsi l'importance d'une connaissance a priori qui ne soit pas complètement sans fondement.

1ère

✶✶✶ 17 ✶✶✶ une introduction de la variance

On a fait n observations $x_1, x_2, ..., x_n$ d'un phénomène quantitatif aléatoire X avec les fréquences respectives f_i. Déterminer le nombre a tel que : $\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x_i - a)^2$ soit minimale. Ce minimum sera appelé variance en terminale.

On rappelle que la moyenne m des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ affectées des coefficients respectifs f_i est définie par m = $\sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i$.

Remarque : *développant la somme donnée et regroupant les termes dont* **a** *est facteur, on obtient un binôme du second degré en* **a** *dont l'extremum est un minimum pour* **a** = moyenne des valeurs x_i . *Ce minimum est égal à la variance de X. Si X est une variable aléatoire et les coefficients f_i les probabilités affectées aux nombres x_i alors $E[(X-\mathbf{a})^2]$ est minimum lorsque* **a** *= E[X].*

Cet exercice permet de disposer d'une conception de la variance qui fait intervenir l'optimisation d'une distance euclidienne. Cette conception munit la variance d'une signification dynamique et "économique", ce que n'offre pas la définition classique qui peut sembler parachutée. De plus, les élèves rencontreront (ou ont rencontré) en mécanique la notion de moment d'inertie. La variance apparaît donc également comme un moment d'inertie autour du centre de gravité m des masses f_i ponctuelles placées respectivement aux points xi sur un même axe.

T^ale^

✶✶✶ 18 ✶✶✶

En référence à la formule de Leibniz démontrée dans la problématique 1, établir la relation homologue faisant intervenir la variance et la moyenne d'une variable aléatoire.

Remarque et indication : *ce problème doit permettre d'insister sur la relation entre la variance d'une variable aléatoire et sa moyenne quand cette variable prend des valeurs x_i avec les probabilités respectives a_i (donc de somme égale à 1).*

Rappelons (cf. problématique 1) que si les points A_i sont munis de coefficients a_i et si G en est le barycentre, alors :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i GA_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i MA_i^2 - (\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i)MG^2 \quad \textit{(formule de Leibniz)}$$

Plaçons-nous dans le cadre des probabilités et, mettant la référence M à l'origine O, nous remplaçons les valeurs MA_i^2 par x_i^2, GA_i^2 par $(x_i - E[X])^2$ et MG^2 par $(E[X])^2$. Cette substitution est légitimée par la relation

$$\vec{OA_i} = \vec{OG} + \vec{GA_i} \quad \textit{soit } x_i = E[X] + (x_i - E[X]).$$

On obtient alors : $$\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i (x_i - E[X])^2 = \sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i)(E[X])^2$$

ou $$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

T^{ale}

✴✴✴ 19 ✴✴✴
un problème d'analyse médicale

Un laboratoire doit analyser N flacons pour déterminer ceux qui contiendraient un certain corps C. On admet que la probabilité p qu'un flacon contienne ce corps est indépendante du flacon considéré. De façon considérée maintenant comme négligente, on divise les flacons en k groupes de taille n (donc $N = nk$) et on fait une analyse du mélange des n flacons de chaque groupe. Si le mélange ne contient pas le corps C, une seule analyse aura établi qu'aucun des n flacons du groupe ne contient le corps. Si l'analyse du mélange conduit à la présence du corps, il faut alors analyser séparément les n flacons pour déterminer celui ou ceux qui le contiennent. Le nombre d'analyses faites dans ce cas est alors $n+1$.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre total des analyses faites.

1° Déterminer la loi de la variable $Y = \dfrac{X-k}{n}$ et en déduire la loi de X. Calculer son espérance.

2° Donner la valeur numérique de cette espérance dans le cas où N = 200, $p = 0{,}05$ et successivement pour $n = 4$ puis 5.

Remarque : *cet exercice permet de réfléchir sur une méthode certes économique mais dangereuse, ayant conduit à des diagnostics faux. De plus, il nécessite une formalisation rigoureuse pour déterminer la loi de Y. De petits problèmes d'analyse peuvent être greffés sur celui-ci (recherche d'un optimum par exemple).*

T^{ale}

✴✴✴ 20 ✴✴✴
un problème de génétique

Le nombre de génotypes aa observés parmi 40 individus issus du croisement de deux hétérozygotes Aa est une variable aléatoire X. On rappelle que dans ce croisement, la probabilité d'obtenir un individu de génotype aa est 1/4.

1° Déterminer la loi de X et son espérance.

2° Quelle est la probabilité p d'obtenir pour X une valeur au plus égale à 6 ?

3° Si Y est la variable aléatoire égale au nombre de génotypes aa observés parmi 400 individus, quelle est la valeur y telle que l'événement $[\ Y \leq y\ ]$ ait la même probabilité p que $[\ X \leq 6\ ]$?

Remarque : *cet exercice nécessite de faire un détour par la loi de Mendel et donc a la vertu de présenter un contexte pluridisciplinaire. La convergence de la loi binomiale vers la loi normale permet d'éviter de longs calculs dans le 3° (on peut aussi accepter ces longs calculs en les faisant à la calculatrice).*

T^ale^

Option Sciences !

✶✶✶ 21 ✶✶✶
un autre problème de génétique

La règle dite de Hardy-Weinberg, dérivée des lois de Mendel, affirme qu'une population possédant les gènes dominant (D) et récessif (r) dans des proportions respectives p et q présente les fréquences de génotypes suivants : des homozygotes DD et rr dans les proportions respectives p^2 et q^2, des hétérozygotes Dr dans la proportion $2pq$.

Or, un certain caractère ("être goûteur de phénylthiocarbamide") est héréditaire et est conditionné par un gène dominant. Ainsi ne sont pas goûteurs uniquement les porteurs des 2 gènes r et r, les hétérozygotes Dr étant bien entendu goûteurs (propriété du caractère dominant).

Snyder a observé les fréquences suivantes sur 3643 personnes étudiées : 70,2% sont goûteurs et 29,8% ne le sont pas.

1° Quelles sont les fréquences de porteurs des gènes D et r ?

2° Afin de prédire le pourcentage théorique d'enfants goûteurs ou non selon les propriétés des parents, étudier les croisements entre parents goûteurs ou non et les proportions correspondantes du caractère chez les enfants. On suppose que les couples se forment au hasard, indépendamment de la possession ou non du caractère.

Comparer les proportions attendues à celles-ci :

♦ parmi les parents dont tous les deux possèdent le caractère goûteur, on observe que le pourcentage d'enfants non goûteurs est 12,3%

♦ parmi les parents dont l'un seulement est goûteur, on observe que le pourcentage des enfants non goûteurs est 33,6%.

Remarques et indications :

1- Ce problème permet de faire une incursion dans le domaine interdisciplinaire maths-biologie. Le modèle mathématique des lois de Mendel est mis en question, les élèves devant utiliser les notions élémentaires des probabilités simples dans le cas de l'indépendance de facteurs de "croisement".

D'après la loi de Hardy-Weinberg, le caractère non goûteur est en proportion $r^2 = 0{,}298$ *dans l'échantillon des 3643 personnes. Donc la fréquence du gène r y est égal à :* $q = 0{,}546$. *Par conséquent, le gène dominant D admet la fréquence* $p = 0{,}454$.

Le tableau suivant donne les fréquences théoriques issues des croisements parentaux et déduites des lois de Mendel où chaque parent donne au hasard un des 2 gènes possédés.

	DD (p^2)	**Dr** ($2pq$)	**rr** (q^2)
DD (p^2)	DD (p^4)	DD (p^3q) et Dr(p^3q)	Dr (p^2q^2)
Dr ($2pq$)	DD (p^3q) et Dr(p^3q)	DD (p^2q^2), Dr ($2p^2q^2$), rr (p^2q^2)	Dr ($2pq^3$) et rr ($2pq^3$)
rr (q^2)	Dr ($2p^2q^2$)	Dr ($2pq^3$) et rr ($2pq^3$)	rr (q^4)

Par suite, un couple de goûteurs, doit donner la proportion suivante de non goûteurs :

$$\frac{p^2q^2}{p^4 + 4p^3q + 4p^2q^2} = \left(\frac{q}{1+q}\right)^2 = 0{,}125 \text{ ou } 12{,}5\%$$

Si dans un couple, un des deux parents seulement est non goûteur, la proportion théorique d'enfants non goûteurs doit être :

$$\frac{2pq^3}{2p^2q^2 + 4pq^3} = \frac{q}{1+q} = 0{,}353 \text{ ou } 35{,}3\%.$$

Ces deux nombres sont voisins de l'observation faite, ce qui conforte les lois théoriques.

2- On pourra faire réfléchir de façon critique les élèves sur l'observation d'un certain phénomène dans une tribu d'indiens d'Amérique centrale. Afin semble-t-il de limiter la diffusion du caractère "albinisme", le mariage entre albinos y est interdit. Or ce caractère dépend d'un gène récessif. La fréquence du génotype "albinos" est égale à 1/20000 dans une population normale. Dans cette population indienne, on observe, au contraire, que la fréquence est de 138/20000, soit considérablement plus élevée. Cet accroissement tient au fait que les homozygotes étant porteurs du gène récessif peuvent concevoir un albinos alors qu'ils n'en ont pas le phénotype.

✶✶✶ 22 ✶✶✶

Pour faire une “réussite”, on dispose d’un jeu de 32 cartes portant chacune un des numéros de 1 à 32. Si le jeu est bien battu, toutes les permutations des 32 cartes sont équiprobables. Puis retournant les cartes dont on ne voit plus que le dos, on annonce successivement et systématiquement chacun des nombres de 1 à 32, une seule fois. Après chaque annonce, on regarde s’il y a ou non coïncidence entre l’annonce et le numéro inscrit sur la carte. A la suite de la $32^{\text{ème}}$ annonce, on compte le nombre S de fois où il y a eu coïncidences.

1° Lors de chaque annonce, la coïncidence est aléatoire. On note X_i la v.a. égale à 1 s’il y a succès lors de la $i^{\text{ème}}$ annonce, et 0 dans le cas contraire. Quelle est la loi de X_i ? Quelles sont son espérance et sa variance ?

2° Pour $i \neq j$, quelle est la loi du couple (X_i, X_j) ?

3° Déterminer l’espérance de la v.a. S.

4° Répondre aux mêmes questions pour un jeu composé de n cartes.

Conclusion ?

Remarque : *selon le niveau et l’intérêt de la classe, on pourrait commencer directement par un jeu de n cartes. Pour corser l’intérêt des élèves, une offre de pari sur la valeur de E(S) permettrait de créer une certaine surprise sur la valeur déterminée par la suite. Il serait même recommandé de faire varier n dans de grandes proportions et de demander : que se passerait-il si n était égal à 2, à 32, à 1000 ?*

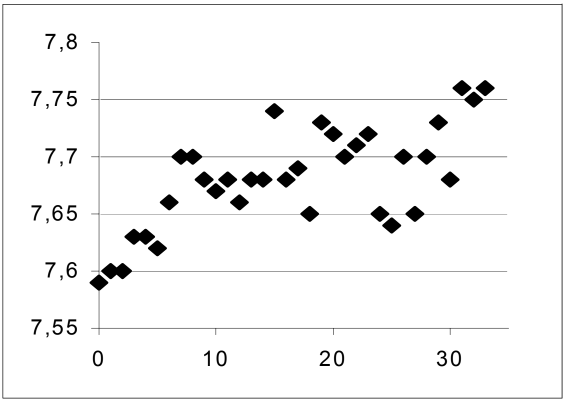
La détermination de la loi-produit de (X_i, X_j) se fait simplement en calculant $P[X_i=1$ et $X_j=1]$, puis les autres valeurs par différence avec les lois marginales. L’économie et l’efficacité du calcul peuvent servir d’arguments au passage par cette méthode.

X_i \ X_j	**1**	**0**	**Probabilités marginales**
1	$\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{n-2}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n}$
0	$\frac{n-2}{n(n-1)}$	$\frac{(n^2-3n+3)}{n(n-1)}$	$1-\frac{1}{n}$
Probabilités marginales	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$	**1**

T$^{\text{ale}}$

✶✶✶ 23 ✶✶✶
une histoire cochonne

Sur le marché de porcs de Loudéac, un éleveur a remarqué que, régulièrement, au cours de la journée de vente, les prix des lots de porcs augmentaient du début à la fin de la vente.



Schématiquement, le nuage ci-contre représente l'ensemble des couples temps-prix au kilo. On voit l'intérêt de la question suivante :

“ Ne serait-il pas profitable d'attendre pour vendre et quel prix approximatif peut-on espérer tirer d'une vente à une heure donnée dans la journée ? ”

Les durées de transaction seront supposées réparties uniformément du matin au soir du même jour. Voici les données recueillies un certain jour jugé significatif par rapport à tous les autres jours de foire.

lot n°	***Temps***	***Prix au kg***	***Nbre de porcs/lot***
696	0	7,59	80
702	1	7,60	100
712	2	7,60	80
714	3	7,63	80
735	4	7,63	80
742	5	7,62	50
749	6	7,66	100
770	7	7,70	50
763	8	7,70	55
767	9	7,68	93

lot n°	***Temps***	***Prix au kg***	***Nbre de porcs/lot***
771	10	7,67	100
776	11	7,68	80
787	12	7,66	90
793	13	7,86	112
799	14	7,68	78
805	15	7,74	140
813	16	7,68	120
830	17	7,69	80
834	18	7.65	25
840	19	7,73	70

862	20	7,72	75
868	21	7,70	92
879	22	7,71	30
601	23	7,72	100
619	24	7,65	20
626	25	7,64	70
630	26	7,70	35

636	27	7,65	36
641	28	7,70	86
645	29	7,73	45
652	30	7,68	30
658	31	7,76	100
668	32	7,75	100
674	33	7,76	134

Comment dégager de ces données une information permettant d'estimer le prix en fonction du temps et donc de prendre le risque d'attendre ?

Remarque : *la formulation du problème est suffisamment ouverte pour que les élèves ne manquent pas de s'interroger sur l'approche à conduire et peuvent proposer des pistes intéressantes. La présence d'une information inutile (n° du lot) peut troubler certains d'entre eux qui ne sauraient pas faire le choix pertinent des variables à retenir pour apporter une réponse adaptée à la question.*

En fait, ici on attend que les élèves conjecturent une liaison simple, donc de type linéaire entre la variable "temps" et la variable "prix du porc". Si tel est le cas, la situation peut tenir lieu de circonstance favorable à l'introduction de la notion de droite de régression linéaire. Mais elle peut tout aussi bien se présenter comme application de cette notion. Dans un tel cas, l'élargissement à l'approximation du nuage des couples observés par un arc de parabole fournit matière à de nouveaux calculs et à la relativisation de la notion d'approximation. Le concept d'inertie expliquée peut en découler comme paramètre pertinent pour comparer les approximations.

On trouvera, par exemple, l'équation de la droite de régression suivante : notant T la variable temps et Y la variable prix, on obtient

$$y = 0{,}003135\ t + 7{,}628857$$

Si l'on cherche une liaison "quadratique" entre Y et T de la forme :

$$T = aY^2 + b, \text{ on obtient:}$$

$$t = 9{,}9443\ y^2 - 570{,}1492$$

La variance expliquée dans le premier cas est 63%, dans le second cas 75%, ce qui crédite cette approximation.

T^ale

✶✶✶ 24 ✶✶✶
l'eau bout-elle à 100 degrés ou à 90 degrés ou ?...

Le tableau suivant est un relevé qui permet de comparer l'altitude où l'on amène de l'eau à l'ébullition et ce point d'ébullition. On constate que la différence d'altitude joue un grand rôle par rapport à cette température.

Pourrait-on dégager à partir des valeurs croisées ci-dessous une formule qui nous permette de donner approximativement ou d'estimer la température d'ébullition de l'eau à Nice, Rennes, Strasbourg, Metz, Katmandou, Montréal, La Paz, Pékin, au sommet du Kilimandjaro, de l'Everest ?

Localités	**Altitude**	**Point d'ébullition**
Métairie d'Antisana	4101 m	86,3°
Quito	2908 m	90,1°
Santa-Fé de Bogota	2661 m	90,9°
Mexico	2270 m	92,3°
Hospice du St Gothard	2075 m	92,9°
Village de Gavarnie	1444 m	95°
Village de Barège	1269 m	95,6°
Bains du Mont-Dore	1040 m	96,5°
Madrid	608 m	97,8°
Plombières	421 m	98,5°
Moscou	300 m	99°
Turin	230 m	99,1°
Prague	179 m	99,3°
Lyon	162 m	99,4°
Vienne (Autriche)	133 m	99,5°
Dresde	90 m	99,6°
Observatoire Paris (1er ét)	65 m	99,7°
Rome (capitole)	46 m	99,8°
Berlin	40 m	99,8°
Niveau de l'océan	0 m	100°

Remarque : *ce problème, dont les données relatives à des phénomènes naturels pourront peut-être surprendre les élèves, vise à satisfaire 3 objectifs :*

1° conduire les élèves à rechercher des informations sur leur Atlas ou sur Internet au sujet des localités d'altitude non donnée ;

2° à dégager la corrélation entre altitude et point d'ébullition, puis éventuellement la droite de régression de cette température selon l'altitude ; écrire la formule donnant le premier en fonction du second ;

3° interpoler et extrapoler pour répondre aux questions posées.

On trouvera que la droite de régression de Y (point d'ébullition) en X (altitude) a pour équation : $y = -0{,}003358\,x + 99{,}92$ et que le coefficient de corrélation linéaire est $r = -0{,}9999$, ce qui signifie que la dépendance entre les deux phénomènes est quasi-linéaire.

T[ale]

✶✶✶ 25 ✶✶✶

Les principes de la thermodynamique établissent la relation suivante entre la pression P d'une masse de gaz donnée et son volume occupé V: $PV^k = C$, où k et C sont des constantes dépendant des conditions expérimentales que l'on veut déterminer par une certaine expérience.

Le tableau suivant donne les valeurs empiriques dans l'expérience où P et V ont été mesurés (les valeurs correspondantes de V et de P sont dans la même colonne) :

Volume V en centimètres cubes	54,3	61,8	72,4	88,7	118,6	194,0
Pression P en Kg par centimètre carré	61,2	49,5	37,6	28,4	19,2	10,1

1° Une droite de régression de V en P a-t-elle du sens. Pourquoi ?

2° Calculer les valeurs de k et de C en linéarisant l'équation liant P et V et en procédant alors par une méthode classique des moindres carrés.

3° Utiliser cette approximation pour estimer P si l'on mesure $V = 100\ cm^3$

Remarque : *cet exercice place les élèves devant une situation réelle de physique où l'accès à la linéarisation nécessite le passage par le logarithme.*

Tale

✶✶✶ 26 ✶✶✶

Un examen est constitué de 10 questions avec plusieurs modalités de réponse. Pour tester si l'étudiant qui répond ne le fait au hasard (choix équiprobable de l'une quelconque des modalités), on décide d'adopter la règle suivante:

" Si 7 réponses au moins sont bonnes, l'examinateur déclare que l'étudiant n'a pas répondu au hasard; sinon, il déclare qu'il a répondu au hasard ".

1° Les modalités de réponse sont: "vrai" ou "faux". Quelle est la probabilité qu'a l'examinateur de rejeter l'hypothèse de réponse au hasard (il déclare ainsi que l'étudiant n'a pas répondu au hasard) alors qu'elle serait vraie?

2° Il y a maintenant 3 modalités de réponse, toujours équiprobables dans le cas de réponse au hasard. Quelle est la probabilité de rejeter l'hypothèse de réponse au hasard alors qu'elle serait vraie?

Remarque : *sans en dégager la théorie, cet exercice peut servir d'introduction à la statistique inférentielle dans une situation qui peut avoir du sens pour les élèves (et pour les enseignants). En particulier, le risque, dit de première espèce, apparaît comme réponse "naturelle" aux questions posées : c'est la probabilité de rejeter une hypothèse alors qu'elle serait vraie. Cette occurrence se légitime par la règle de décision choisie.*

2nde

✶✶✶ 27 ✶✶✶

On enquête auprès d'une vaste population d'élèves de la classe de seconde, en milieu d'année, pour savoir s'ils ont déjà fait leur choix de filière pour leur terminale. Un échantillon représentatif de 100 élèves nous informe que 70% d'entre eux ont fait effectivement leur choix.

Quels sont, aux seuils respectifs de 5% et 1%, les intervalles de confiance de la fréquence p dans la population entière?

Remarque : *cet exercice est le prototype des situations de sondage dans lequel la base du sondage est un échantillon de taille 100. La fréquence* m *observée dans l'échantillon (ici 0,7) est le centre d'un intervalle de confiance pour la fréquence* p *de la population-mère, intervalle défini par les seuils respectifs (ici 5% ou 1%), après avoir estimé la variance par* m(1-m). *On profitera de cette situation pour analyser les derniers sondages parus dans les médias.*

✷✷✷ 28 ✷✷✷

Une expérience cherchant à éprouver la loi de Mendel sur la descendance est faite sur 10 plants de petits pois. La théorie affirme que l'on devrait obtenir par le croisement de pois verts et jaunes 1/4 de pois verts et 3/4 de pois jaunes dans chacun des plants. Chacun de ceux-ci présente 60 pois exactement. Or on observe les résultats donnés par le tableau suivant :

n° du plant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nb de pois jaunes	45	42	39	50	49	38	51	52	37	47

On constate que les proportions obtenues ne sont pas celles qui étaient attendues puisque la stricte application de la loi de Mendel aurait dû conduire à 45 pois jaunes sur chaque plant. Cependant, on admet que des fluctuations d'échantillonnages soient susceptibles de modifier la composition des plants sans que la loi ne soit mise en défaut. Pour apprécier l'effet de ces fluctuations, on va définir un écart entre la distribution observée ou empirique et la distribution théorique. Comment faire et pourra-t-on accepter on non la validation de la loi de Mendel dans ce cas ?

Remarque et indications : *cette situation vise plusieurs objectifs :*

♦ *montrer le rôle outil des mathématiques dans une situation non artificielle des sciences ;*

♦ *faire construire par les élèves une formalisation d'un écart entre deux distributions respectant l'essentiel de l'information ;*

♦ *montrer le pouvoir décisionnel permis par la théorie des probabilités.*

On va observer chez les élèves deux types de comportement spontanés :

♦ *d'une part, celui où l'on rejette l'adéquation du théorique à l'empirique ;*

♦ *d'autre, celui ou, au contraire, on considère que l'écart est négligeable.*

Prenant appui sur ce désaccord, il faut donc conduire les élèves à quantifier la différence en prenant en compte toutes les informations. Or un écart "raisonnable" entre les deux distributions sera calculable à partir d'une loi statistique qui donne la probabilité limite d'acceptabilité d'un certain écart, ne relevant que du hasard, des fluctuations d'échantillonnage. On lira, par exemple, dans une table, que l'écart ne peut dépasser dans ces conditions une certaine valeur que dans 5% des cas. Au-delà, on prend un risque qui devient moindre de *se tromper, quand l'écart grandit, en réfutant l'adéquation de l'empirique au théorique, c'est-à-dire la validation de la loi de Mendel.*

Comment définir cet écart ? Comme il doit ne pas subir l'effet du signe de la différence, qui pourrait faire se compenser les distorsions et qu'il doit accentuer les écarts importants et diminuer l'effet des très petits, on calculera la différence plant par plant et on en prendra le carré.

Si o_i *et* t_i *sont respectivement les valeurs empirique et théorique sur le plant i, on considère :* $(o_i - t_i)^2$

De plus, afin de relativiser cette différence à la grandeur de l'observation (petite différence attendue quand la valeur théorique est petite, plus grande différence relativement admissible quand cette valeur est grande), on divisera chacune des différences portée au carré par la valeur théorique. Ce sera donc une différence relative :

$$\frac{\left(o_i - t_i\right)^2}{t_i}$$

Puis, pour évaluer l'ensemble des distorsions, on sommera bien entendu toutes ces fractions pour obtenir l'écart total :

$$S = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{\left(o_i - t_i\right)^2}{t_i}$$

Enfin, comme le nombre de plants intervient dans l'écart total, on prendra en compte ce nombre : à un même écart, si le nombre de plants croît, il est évident que la tolérance doit croître. En fait, on dira que, dans les conditions d'observations ci-dessus, le nombre retenu, appelé nombre de degrés de liberté est 10 - 1 = 9. Si une partie de l'information recueillie à travers l'expérience est intégrée dans la détermination de la loi théorique, la contraignant, on diminuera ce nombre de degrés de liberté ; par exemple, si l'on estime la moyenne d'une loi théorique à l'aide des observations, on diminue le nombre de degrés de liberté des écarts. Finalement, on dispose d'une table qui nous indique que, pour un écart total et pour un nombre de degrés de liberté donné, il est ou non vraisemblable, avec une certaine probabilité, que cet écart atteigne une valeur lue dans la table nous permettant d'accepter ou non l'hypothèse du respect de la loi de Mendel, c'est-à-dire l'adéquation ou non de la distribution empirique à la distribution théorique.

✳✳✳ 29 ✳✳✳

Le tableau suivant indique les résultats d'une enquête visant à déterminer si le nombre d'accidents dans la conduite d'un véhicule est indépendant de l'âge du conducteur.

		Age du conducteur				
		18 à 27 ans	*28 à 37 ans*	*38 à 47 ans*	*48 à 57 ans*	*plus de 57 ans*
Nombre d' accidents	*0*	748	821	786	720	672
	1	74	60	51	66	50
	2	31	25	22	16	15
	plus de 2	9	10	6	5	7

Etudier cette indépendance par un test approprié aux seuils de 5%, puis de 1% ? Conclure.

Remarque et indication : *l'objectif est ici d'utiliser un test permettant, comme précédemment, de rejeter ou non une certaine hypothèse. En l'occurrence, on veut étudier l'indépendance ou non entre deux facteurs en jeu dans un accident.*

Un test dit du χ^2 permet de comparer la distribution théorique des effectifs sous l'hypothèse d'indépendance entre les deux facteurs (âge et accident) et la distribution observée. Ainsi, on calcule la valeur de la "distorsion" entre théorique et empirique par la somme de ces "distorsions" pour toutes les valeurs du croisement des deux facteurs :

$$\chi^2 = \sum_{i=1 \text{ à } 4}^{j=1 \text{ à } 5} \frac{\left[k_{ij} - \frac{k_i k_j}{N}\right]^2}{\frac{k_i k_j}{N}}$$

où k_i et k_j sont respectivement les sommes des effectifs de la ligne i et de la colonne j, alors que k_{ij} est l'effectif de l'intersection de la ligne i et la colonne j. N est le nombre total de conducteurs concernés soit 4174. On trouvera : $\chi^2 = 14{,}6$. Mais il y a (4-1)(5-1) degrés de liberté et la valeur limite pour ne pas réfuter l'hypothèse d'indépendance au seuil de 5% est 21. Aussi, on acceptera l'indépendance entre les deux facteurs.

✷✷✷ Situation didactique développée ✷✷✷
Une introduction à la notion de probabilité en Première ES.

Cette approche a été expérimentée en classe de Première ES, mais elle est également tout à fait envisageable en Première S. Pour commencer, on a distribué aux élèves un document (voir encadré en Annexe) constitué, d'une part d'un extrait de l'entrée "Croix ou pile" de la Grande Encyclopédie (article dû à d'Alembert), et d'autre part d'un texte d'accompagnement, destiné à la fois à faire comprendre aux élèves ce dont il s'agit et à les faire entrer dans l'activité qui suit.

Les élèves sont répartis en 7 groupes de quatre. Après une rapide présentation de l'Encyclopédie et de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) et une lecture individuelle du document, le professeur suscite un débat sur le contenu et le sens du texte, puis relève les opinions *a priori* des élèves sur les "chances d'obtenir au moins une "face" en deux lancers successifs d'une pièce". Elles sont de trois types : une chance sur deux, deux chances sur trois et trois chances sur quatre.

Puis on demande aux élèves de rechercher des arguments justifiant leur opinion personnelle (la discussion étant, bien sûr, possible au sein du groupe). A noter que, dans la plupart des groupes, on procède à des simulations ; la dévolution de la tâche s'opère donc comme prévu. Les positions s'homogénéisent ainsi au sein de chaque groupe, qui délègue un représentant pour indiquer et justifier la position commune :

➔ *Position 1* (deux groupes) : une chance sur deux, car la pièce a deux faces, et à chaque lancer on a donc une chance sur deux de faire "face".

➔ *Position 2* (trois groupes) : c'est celle de d'Alembert; on a deux chances sur trois, car il y a trois possibilités:

- soit on fait "face" au premier lancer, et dans ce cas on gagne ;
- soit on fait "pile" au premier lancer, et dans ce cas on gagne si on fait "face" au second lancer, et on perd si on fait "pile".

➔ *Position 3* (deux groupes) : trois chances sur quatre.

Mais cette position s'effondre devant l'argument "massue" mis en avant par la position 2 : si on fait "face" au premier lancer, on s'arrête (on peut donc penser qu'elle était liée à l'expérience aléatoire consistant à lancer la pièce deux fois, **quel que soit le résultat du premier lancer**). Notons que ce même argument fait aussi vaciller (mais non disparaître) la position 1.

A l'issue de cette étape, il ne reste donc plus que deux positions contradictoires en présence : une chance sur deux, et deux chances sur trois (très majoritaire).

Le problème est alors posé: *comment peut-on faire pour savoir qui a raison ?*

L'idée de la simulation apparaît rapidement, validée intuitivement par l'idée que "sur un grand nombre de parties, les variations se compensent", et on procède à sa mise en place dans les groupes :

- pièce de 20 centimes et gobelet, destinés à fixer le protocole expérimental
- tableau de relevés à remplir.

L'expérimentation fournit les résultats suivants :

Groupe	1	2	3	4	5	6	7
nbre de parties gagnées	65	69	53	53	64	58	62
nbre de parties jouées	80	80	80	80	80	80	80
Fréquence	0,81	0,86	0,66	0,66	0,80	0,72	0,77

Les résultats obtenus ci-dessus semblent éliminer la position 1, mais ils sont parfois assez éloignés de la valeur 2/3 correspondant à la position 2. D'où l'idée, pour disposer d'un plus grand nombre d'essais, de cumuler les résultats des différents groupes :

Groupes	1	1 + 2	1 à 3	1 à 4	1 à 5	1 à 6	1 à 7
nbre de parties gagnées	65	134	187	240	304	362	424
nbre de parties jouées	80	160	240	320	400	480	560
Fréquence	0,81	0,84	0,80	0,75	0,76	0,75	0,77

Ces nouveaux résultats confortent le discrédit jeté sur la position 1 ... , mais ils semblent aussi éliminer la position 2, et seule l'éphémère position 3 semble pouvoir désormais convenir. Cependant, avant de passer à la modélisation, une simulation à la calculatrice est entreprise dans les groupes ; après des explications relatives à la touche "*random*" des calculatrices, on décide d'utiliser la procédure suivante : chaque recours à la touche "*random*" correspond à un lancer du dé ; un nombre compris entre 0 et 0,5 sera interprété comme "face", et un nombre compris entre 0,5 et 1 sera interprété comme "pile". Cette simulation à la calculatrice a conforté les résultats obtenus "manuellement" et a en quelque sorte permis de valider, en prévision de l'avenir, ce type de procédure. Il reste alors – ce sera l'objectif du cours suivant – à construire un modèle théorique de cette expérience aléatoire qui ne soit pas en contradiction avec les résultats de l'expérimentation.

Annexe

Extrait de l'article « Croix ou Pile » de la Grande Encyclopédie (écrit par d'Alembert)

Ce jeu, qui est très connu et qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes :
on demande combien il y a à parier qu'on amènera croix en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, et suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons :

Premier coup	Second coup
Croix	*Croix*
Pile	*Croix*
Croix	*Pile*
Pile	*Pile*

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre et trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il pariait en trois coups, on trouverait huit combinaisons, dont une seule fait perdre et sept font gagner ; ainsi, il y aurait 7 contre 1 à parier.

Cependant cela est-il bien exact ? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup ? Car, dès qu'une fois croix est venu, le jeu est fini, et le second coup est porté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix, *premier coup*
Pile, croix, *premier et second coup*
Pile, pile, *premier et second coup.*

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même dans le cas de trois coups, on trouvera :

Croix
Pile, croix
Pile, pile, croix
Pile, pile, pile.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier. Ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, et irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard.

louisjean
IMPRIMEUR

59, Av. Émile Didier
05003 Gap Cedex
Tél. 04 92 53 17 00
Dépôt légal :
368 – juin 2003
Imprimé en France

Groupe “Problématiques Lycée” de l’APMEP

Titre : **Pour un enseignement problématisé des Mathématique au Lycée**

Tome 1 **En référence privilégiée à des contenus.**

Auteurs : Régis GRAS, Philippe BARDY, Bernard PARZYSZ
Michèle PECAL, Jean-Pierre RICHETON

Après une dizaine d’années de travail par correspondance, à travers réunions, exposés, critiques, collaboration étroite avec le groupe de travail “Prospective Bac”, soutien continu des différents Présidents et Comités de l’APMEP, voici enfin en deux volumes une approche originale des programmes d’enseignement au lycée par le groupe “Problématiques Lycée”. Partis de grandes classes de problèmes, de “problématiuues” suffisamment générales pour structurer également le premier cycle, nous inscrivons objectifs, compétences et contenus plus en système qu’en une suite éclatée de chapitres de cours, uniquement structurés par des notions mathématiques. Selon un point de vue constructiviste, dans ces ouvrages, les concepts doivent apparaître comme problématisés, c’est-à-dire comme réponses, issues et moyens incontournables, peut-être temporairement, pour résoudre des problèmes significatifs et non comme une fin en soi.

On trouvera au fil de ces deux ouvrages d’une part des “problématiques” plutôt référencées par les contenus comme le traitement et la représentation de données statistiques, d’autre part plutôt référencées par rapport à des objectifs méthodologiques comme le recueil, le traitement, la consultation et la communication de l’information.

Edition : APMEP
N° ISBN : 2-912846-26-9