

APMEP
Groupe "Problématiques Lycée"

Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au Lycée

Tome 2

En référence privilégiée à des objectifs méthodologiques



Brochure n° 154 - N° ISBN : 2-912846-30-7



APMEP
groupe de travail
« Problématiques Lycées »

POUR UN
ENSEIGNEMENT
PROBLÉMATISÉ
DES MATHÉMATIQUES
AU LYCÉE
Tome 2

En référence privilégiée
à des objectifs méthodologiques

Brochure APMEP n° 154 N° ISBN : 2-912846-30-7

Présentation

Jean-Paul Bardoulat

Président de l'APMEP

S'il fallait une preuve de la vitalité de l'APMEP, de sa volonté et de sa capacité à mener à bien une réflexion de fond sur l'évolution de l'enseignement des mathématiques, cette brochure en serait une. Au début des années 80, un groupe de l'APMEP avait produit deux documents: « Mathématiques au collège. Pour un renouvellement : dix problématiques » (supplément n°1 au bulletin n° 345, octobre 84) et une plaquette portant sensiblement ce même titre en janvier 85. Ces travaux ont influencé les programmes du collège des années 90 et ont contribué à l'évolution des pratiques pédagogiques.

Poursuivre ce travail pour le lycée relevait du défi. Une équipe, constituée et animée par Régis Gras, déjà membre du groupe collège, l'a relevé, tout en intégrant la réflexion, les travaux et les expérimentations menés par l'autre groupe dont il était responsable, « Prospective bac ». Le supplément au bulletin n° 401 de décembre 1995, « Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle » et quelques articles du bulletin vert rendaient compte de l'état d'avancement de la brochure présente.

Cette brochure montre à la fois que les grandes classes de problèmes au lycée sont les mêmes qu'au collège et l'intérêt qu'il y a d'aborder les programmes par les problèmes. Un enseignement des mathématiques qui privilégie les démarches et les activités introduit davantage de cohérence entre les contenus et les méthodes, donne plus de sens aux concepts étudiés et favorise le développement des compétences visées. La modélisation et la formalisation y deviennent des activités naturelles, incontournables. Les mathématiques n'apparaissent plus alors seulement comme de simples outils mais comme une discipline contribuant à la structuration de la pensée car les notions à enseigner répondent à des questions « qui posent problème » au lieu d'être des injonctions de programmes . C'est ce que les auteurs de cet ouvrage ont essayé de faire avec succès.

Qu'il me soit permis ici de les remercier vivement pour leurs efforts, leur persévérance, leur détermination et leur talent. Ce document devrait contribuer efficacement à l'évolution de l'enseignement des mathématiques, à une meilleure formation des lycéens, à l'amélioration de l'image de notre discipline et au rayonnement de l'APMEP.

SOMMAIRE

Présentation (J.P. Bardoulat).....	2
Préface (J.-P. Kahane).....	5
Une approche des contenus d'enseignement du Lycée par des problématiques	7
En guise d'introduction	9

Tome 1

En référence privilégiée à des contenus

Problématique n° 1 : Repérage	13
Problématique n° 2 : Etude de certaines configurations planes ou spatiales – Représentation et mesures associées.....	53
Problématique n° 3 : Dynamique des points, des figures et des nombres	99
Problématique n° 4 : Mesure de grandeurs Précision, approximation, incertitude.....	137
Problématique n° 5 : Traitement et représentation de données statistiques	181

Tome 2

En référence privilégiée à des objectifs méthodologiques

Problématique n° 6 : Techniques algorithmiques	13
Problématique n° 7 : Changements de cadre et de registres.....	51
Problématique n° 8 : Formation au recueil, au traitement, à la consultation et à la communication de l'information.....	83
Problématique n° 9 : Construction ou choix opportun et optimal des modèles, des outils et des situations sous contrainte.....	115
Problématique n° 10 : Conjectures, preuves, réfutations et validations.....	151

LE GROUPE
« PROBLÉMATIQUES LYCÉES »
de l’A.P.M.E.P.

Animé par Régis Gras

Avec : Philippe Bardy
Bernard Parzysz
Michèle Pécal
Jean-Pierre Richeton

Avec la participation de :

Marc Bailleul, Henri Bareil, Elisabeth Busser,
Michèle Fabregas-Bechler, Annie Larher, Michel
Magenet, Daniel Vagost, Christiane Zehren.

Remerciements à :

Michel Bovani, Jacqueline Croguennec, Marie-
Agnès Egret, Lise Heilbronner, Robert Rocher,
*pour leur relecture attentive et leurs remarques
constructives.*

Jean Barbier
*pour sa patience à satisfaire nos exigences
d’auteurs, sa mise en page soignée et la qualité de
ses graphiques.*

Préface

par Jean-Pierre Kahane¹

La réflexion sur l'enseignement des mathématiques se mène de toutes parts. Ce peut être à partir de la classe, des difficultés des professeurs et des élèves; ou de la participation au baccalauréat, aux examens et aux concours; ou des activités périscolaires, des clubs, des rallyes, des compétitions, de toutes les manifestations d'animation mathématique; ou du rôle et de l'évolution des sciences mathématiques dans l'ensemble des sciences et de la société.. Ce peut être le fait des enseignants, des élèves et de leurs parents, des inspecteurs d'académie et des inspecteurs pédagogiques régionaux, de l'Inspection Générale, du Conseil National des Programmes et de ses Groupes d'Experts et commissions, comme de la commission officielle, créée à l'initiative des associations représentatives des mathématiciens et professeurs de mathématiques, qui a pour objet de préparer des propositions pour le long terme et qui a publié en 2002 ses premiers rapports. Cette réflexion se mène depuis longtemps dans les IREM et actuellement dans les IUFM, et les éditeurs y ont leur part. Reste que les associations professionnelles ont un rôle majeur dans l'élaboration et la fourniture de documents à tous les niveaux des mathématiques et de leur enseignement.

Voici donc une initiative de l'APMEP. Après "Problématiques collèges", qui date de 1985, "Problématiques lycées". Il s'agit de problèmes, et de réflexion sur les problèmes.

Les problèmes ont une longue tradition en mathématiques. Georges Polya considérait les Eléments d'Euclide comme une collection de problèmes (une succession d'énoncés et de solutions). Lui-même, avec Gabor Szegő, a produit, sous le titre Exercices d'analyse, une collection graduée de problèmes qui était sans doute, à l'époque, la meilleure introduction à l'analyse mathématique, et qui reste de grand intérêt. Ses ouvrages didactiques, qui méritent d'être revisités, tournent autour de la résolution de problèmes. Inutile d'insister sur le rôle des problèmes ouverts dans la recherche mathématique.

Dans cet ouvrage il s'agit de problèmes à l'intention et à la portée des élèves. Cela ne veut pas dire que ce sont des problèmes sans intérêt. Certains sont très stimulants, même pour les professeurs. On trouvera d'excellents problèmes d'arithmétique et de géométrie, des exercices de mise en route pour des notions de

¹ Jean Pierre Kahane : Délégué de la section Mathématiques de l'Académie des Sciences ; Président de la Commission de **R**éflexion sur l'**E**nseignement des **M**athématiques.

calcul, d'estimations, de probabilités et de statistiques, des textes écrits en utilisant les symboles mathématiques et d'autres en langue naturelle, des articles de journaux ou des publicités à critiquer, et bien d'autres choses intéressantes et savoureuses. Les auteurs ont beaucoup travaillé, ils se sont sûrement beaucoup amusé aussi. On aurait envie de participer avec eux au choix des sujets.

A fortiori le lecteur éprouvera le désir de trouver des solutions autres que celles proposées par les auteurs. Cela va dans le sens qu'ils impriment à ce recueil: non pas "problème et solution", mais "problème et solutions". Non pas une méthode, mais plusieurs. Sur chaque sujet, thème et variations.

Les présentations et commentaires occupent une grande place, et correspondent au titre de "problématiques". Leur rédaction s'inspire des méthodes et du style de la didactique mathématique contemporaine. Selon le goût du lecteur il est possible de commencer ou de terminer par eux. Ils apportent à l'ouvrage, de manière explicite, la composante de réflexion sur l'enseignement des mathématiques que j'évoquais au départ.

La lecture et la consultation sont facilitées par la répartition en grands chapitres qui portent sur les sujets suivants: repérage, configurations et mesures, dynamique des notions élémentaires, mesure et approximation, dénombrements et statistique, procédés et algorithmes, changements de registres, critiques de textes, modèles, conjectures, réfutations et preuves. Les titres des chapitres sont parfois plus explicites, parfois moins. Naturellement, toutes ces rubriques communiquent entre elles, et on pourrait imaginer d'autres classements.

On peut aussi imaginer d'autres développements, une poursuite de cette problématique vers d'autres champs: les notions et les questions venant d'autres disciplines, le traitement des données tel qu'il se présente réellement en statistique, l'explicitation des algorithmes dans l'esprit de l'informatique, les mathématiques discrètes qui font une entrée dans l'enseignement. Mais cela nécessite une maturation. L'enseignement des mathématiques ne peut progresser et se renouveler que dans une vision d'avenir solidement nourrie de l'expérience acquise par des générations de professeurs et d'élèves.

Ainsi cet ouvrage appelle le lecteur à l'utiliser, à le prolonger, à le dépasser. C'est un appel à l'air du large, en même temps qu'un bon instrument pour le pilotage de la classe. Une fois de plus, l'APMEP témoigne de son importance pour la bonne marche et l'avenir de notre enseignement mathématique.

UNE APPROCHE DES CONTENUS D'ENSEIGNEMENT DU LYCÉE PAR DES PROBLÉMATIQUES

Avant propos...

Que propose ici le groupe "Problématiques Lycée" ?

*... le fruit d'un travail commencé il y a une dizaine d'années, faisant suite à une réflexion relative aux programmes du 1^{er} cycle et à leur enseignement, menée de façon analogue, dans le même cadre de l'A.P.M.E.P., au cours des années 80. Cette réflexion était restée cependant d'ambition plus modeste quant à la production de textes.² Le travail effectué dans ce groupe Lycée s'est renforcé des réflexions, travaux et expérimentations en œuvre dans le groupe "**Prospective Bac**" qui vise lui-même un renouvellement du contenu et des modalités de l'examen. En effet, on ne peut isoler enseignement et évaluation, tant l'influence de celle-ci sur le travail des élèves, sur les méthodes pédagogiques et sur les choix didactiques est fondamentale³. Il apparaît ainsi clairement, mais de façon regrettable, qu'en réalité l'état actuel des connaissances acquises par la majorité des élèves à la fin du 2^{ème} cycle se réduit le plus souvent à ce qui leur est justement conseillé dans la préparation du bac et renforcé, pour l'essentiel, par les problèmes qui y sont donnés. La stratégie la plus payante pour l'élève, de façon à peine caricaturale, se ramène à : « par sécurité, algorithmisons nos connaissances, pour nous assurer la "moyenne", ne vous écartons pas du chemin qui nous conduit pas à pas à la solution, segmentons notre savoir comme le sont les questions du problème, ne perdons pas de temps à comprendre ses relations avec les autres disciplines, à changer de cadre lorsque ce n'est pas demandé, etc. » Il est hors de question de condamner en cela les enseignants qui, pour des raisons déontologiques, doivent assurer, à travers la réussite maximale aux examens, un*

² " Mathématiques au collège. Pour un renouvellement ", supplément n°1 au BV de l'APMEP n°345, et " Pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au Collège ", janvier 1985

³ <http://www.apmep.asso.fr/bac.html>

contrat social vis-à-vis de l'institution, des élèves et de leurs parents. Mais l'acrobatie pour échapper à la dérive "algorithmique" que nous dénonçons se nourrit actuellement de certaines illusions sur l'atteinte des objectifs généraux de l'enseignement secondaire et ne peut que se renforcer dans la diminution des horaires d'encadrement des élèves car il faudra bien « ne pas perdre(?) de temps dans le temps d'apprentissage ».

*Notre proposition au sujet de la méthode de conception et de lecture d'un programme, sans être révolutionnaire, veut se construire, de façon originale, à partir de grandes classes de problèmes, de "problématiques", qui inscrivent objectifs, compétences et contenus plus en **système** qu'en une suite éclatée de chapitres de cours. Selon un principe constructiviste, les contenus doivent apparaître comme une issue et un moyen incontournables pour résoudre des problèmes significatifs et non comme une fin en soi⁴. C'est un renversement épistémologique par rapport à ce qu'un programme classique propose où le concept est d'abord introduit et où les problèmes d'application et de réinvestissement apparaissent ensuite.*

*Certes les libellés actuels de programme décrivent, en amont des contenus, des intentions générales, des lignes directrices, des objectifs, des capacités attendues. Particulièrement, le projet de programme de 1^{ère} S présente une structuration des contenus qui, bien que timide, ne déclinant pas suffisamment ceux-ci des démarches attendues et oubliant de relier les mathématiques aux autres disciplines, montre cependant l'effort du G.E.P.S.⁵ de mathématiques à coordonner "objectifs-capacités-contenus". Mais la présentation linéaire des autres programmes ne permet pas d'en voir les articulations qui en assureraient la cohérence et surtout ne décrit pas de façon aisément opérationnalisable des situations favorisant l'approche des connaissances visées, ni les démarches attendues des élèves, eu égard aux objectifs et aux capacités déclarés. Elle évoque bien quelques situations pluridisciplinaires ou environnementales, mais généralement plus comme alibi et de façon incantatoire, que comme lieu de conflits, de quêtes ou de défis, condition nécessaire à l'éveil de la curiosité et du plaisir de faire des mathématiques. Notre ambition est de construire, autour des problématiques majeures de tout l'enseignement des mathématiques du secondaire, un système cohérent qui, **en faisant plus de place à la formation scientifique qu'à***

⁴ cf. en particulier les travaux de Guy Brousseau à ce sujet

⁵ Groupe d'Expert pour les Programmes Scolaires

la culture mathématique sans la reléguer, coordonne trois composantes indissociables :

- des situations où l'activité de l'élève trouve sa place, situations suffisamment significatives pour que l'élève s'approprie le problème posé, pour qu'il y engage un coût cognitif ni trop élevé, ni dérisoire,*
- des démarches, des attitudes scientifiques attendues de lui, satisfaisant les objectifs généraux et spécifiques des mathématiques,*
- des savoirs visés à organiser en fonction de l'approfondissement défini par le niveau de la classe, par le rythme adopté par certains élèves, etc. Par suite, un même contenu pourra être enseigné ou "visité" plusieurs fois, mais à des niveaux ou dans des cadres différents.*

Ainsi, un programme à notre sens devrait comporter dans son écriture, à chaque niveau scolaire, des préalables qui, à la suite des objectifs visés et des compétences attendues, distingueraient selon les dix problématiques que nous avons identifiées, les trois composantes énoncées ci-dessus⁶. On pourra remarquer, qu'à des détails de rédaction près, ce sont sensiblement les mêmes que celles que nous avons dégagées pour l'enseignement dans le Collège. Cette similitude devrait nous conforter dans le sentiment que les mathématiques enseignées ou à enseigner forment un tout, cimenté par les problèmes qu'elles permettent de résoudre en complexifiant peu à peu et au besoin leurs outils de résolution.

⁶ On trouve une approche comparable dans certains libellés de programmes où une présentation en trois colonnes associe dans l'ordre : contenus, exemples de situations, compétences. Mais cette présentation ne traverse pas toutes les filières, loin s'en faut. De plus, l'énoncé préalable des contenus démontre bien la centration sur ceux-ci et, par suite, annonce les dérapages didactiques où seront minorées les autres composantes.

Voici les titres de ces problématiques pour le Lycée :

Tome 1

En référence privilégiée à des contenus :

- 1- Repérage.***
- 2- Représentations figurales et/ou graphiques. Propriétés des modèles associés.***
- 3- Dynamique des points, des figures et des nombres.***
- 4- Mesure de grandeurs avec précision, approximation ou incertitude.***
- 5- Traitement et représentation de données statistiques.***

Tome 2

En référence privilégiée à des objectifs méthodologiques :

- 6- Techniques algorithmiques.***
- 7- Changement de registres et de cadres.***
- 8- Recueil, traitement, consultation et communication de l'information.***
- 9- Construction ou choix opportun et optimal des modèles, des outils et des méthodes dans des situations sous contraintes pluridisciplinaires.***
- 10- Conjectures, preuves, réfutations et validations.***

La lecture critique, et éventuellement comme nous le souhaitons, la mise en œuvre dans la classe de nos suggestions ni fermées, ni exhaustives, doit conduire à un enrichissement continu des textes qui vont suivre.

En guise d'introduction...

Pour chaque problématique, nous indiquons, a priori, le niveau où certains exercices proposés nous semblent pouvoir être abordés. Cependant, cette indication n'est donnée qu'à titre indicatif car elle dépend bien entendu des contenus des programmes, du niveau des classes et des choix jugés opportuns par l'enseignant eu égard à ses objectifs. D'autres exercices sont sans indication de niveau car considérés d'un abord plus difficile et/ou hors des contenus présents et donc hors du champ des compétences actuelles de la plupart de nos lycéens, même en TS. Outre le fait qu'ils ont pour nous valeur d'exemples pour la problématique concernée, la présence et le choix de ces exercices trouvent également leur légitimité à nos yeux par le fait qu'ils représentent le type même d'exercices que nous pensons utile de voir aborder à plus ou moins long terme dans nos classes.



Ceci à condition, il va de soi, d'intégrer la pratique **“d'exercices avec prise d'initiative”** dans notre enseignement et donc dans nos évaluations (cf. le rapport de la commission baccalauréat de mathématiques –présidée par M. Paul Attali, IG de mathématiques – remis à la DESCO en juillet 2000⁷).

Certains exercices sont étiquetés **“option Sciences”** car ils ont été expérimentés dans cette option ou sont tout désignés à l'être selon nous)... (cf. le site de l'APMEP⁸ ou le site du lycée Jean Monnet de Strasbourg)



Certes ces exercices devraient avoir leur place à part entière dans notre enseignement mais faute de temps et vu la très grande hétérogénéité des classes actuelles, ils risquent de disparaître de fait des activités des élèves. D'où la revendication récurrente de l'A.P.M.E.P. d'obtenir la création d'une option Sciences et de retrouver des horaires décents en mathématiques respectant le temps d'apprentissage des élèves eu égard *aux objectifs affichés par l'institution et le rôle reconnu et universel des mathématiques dans le monde actuel.*

⁷ <http://www.apmep.asso.fr/bac.html>

⁸ <http://www.apmep.asso.fr/OptSci1.html>

Certains des exercices proposés tout au long de notre brochure sont “classiques” mais ils ont été retenus pour des raisons d’adéquation à la logique des “**problématiques**”. D’autres sont plus originaux et élaborés en fonction du rôle que nous voulions leur faire remplir. Des pistes de solutions, voire des solutions, ainsi que des remarques didactiques les accompagnent le plus souvent. Une ou deux situations dites “**didactiques développées**” clôturent la suite d’exercices liés à la problématique, afin de rendre compte, plus amplement, de celle-ci à travers une véritable activité de classe.

Les auteurs de programmes pourront toujours nous objecter que leurs commentaires plaident pourtant clairement en faveur d’un tel enseignement à l’image de ceux du programme de Seconde entrés en application en septembre 2000 : « Prendre du temps pour s’adonner à une vraie recherche de problèmes - en respectant toutes les étapes relatives à ce type de recherche (conjectures et expérimentations, recherche de preuves, mise en forme d’une démonstration...) »... Mais comme pour les programmes précédents, où figuraient notamment les huit moments de l’activité mathématique (« formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence au regard du problème posé »), ces directives risquent fort, le plus souvent, de rester à l’état de vœux pieux... En effet, la réduction drastique des horaires de mathématiques entamée depuis le collège ces dernières années, et, par voie de conséquence, le manque chronique de temps dont nous disposons ne permettent pas à l’élève de réinvestir ses connaissances... sans compter que les sujets actuels du baccalauréat n’incitent guère à ce type de travail basé sur la recherche de problèmes !

Nous ne pouvons que le déplorer tout en espérant que cette brochure apportera une aide aux collègues et saura **convaincre l’institution à s’engager enfin dans une voie dont l’objectif ne serait pas tant les contenus à peine survolés que la capacité à mettre en œuvre une démarche scientifique.**

PROBLÉMATIQUE N°6

**TECHNIQUES
ALGORITHMIQUES**

GÉNÉRALITÉS

S'il est une problématique qu'il ne convient pas d'aborder en termes de contenus, il s'agit bien de celle-ci ; sinon la quasi-totalité du programme de lycée risque de s'y trouver énoncée.

Algorithme : ensemble de règles opératoires dont l'application permet de **résoudre un problème** en un nombre fini d'opérations. La caractéristique d'un algorithme est de transformer des quantités, dites grandeurs d'entrée, en d'autres quantités, dites grandeurs de sortie, à partir d'un ensemble bien défini d'instructions de transformations.

Quel est le problème qui se pose à l'élève, dès son entrée au lycée ?

Ce n'est pas tant d'essayer de "fréquenter le monde des mathématiques" que d'**engranger des savoirs** qu'il lui faudra "replacer", à bon escient si possible, le jour du baccalauréat ! Ce qui l'intéresse le plus souvent, ce sont les grandeurs de sortie et les sanctions en vrai-faux associées !

Le problème qui se pose alors à l'enseignant est celui du "bon escient" de la phrase ci-dessus. Pour améliorer la qualité de la sortie, l'option sur laquelle nous nous fondons est d'améliorer chez l'élève **la qualité de la perception du problème posé, des entrées, des opérations à effectuer et de la vraisemblance de cette sortie.**

Il s'agit alors de présenter les notions et propriétés mathématiques **non comme des objets exposés** derrière une vitrine, celle d'une **culture mathématique figée** et définitivement acquise à laquelle il convient d'adhérer, mais comme des **outils agissant** et permettant de résoudre tel ou tel type de problème en fonction du niveau scolaire où l'on travaille, contribuant ainsi à l'émergence d'une **culture mathématique**, et plus généralement scientifique, **vivante et en construction.**

Ne nions pas que l'**algorithme libère**, rend disponibles des segments de la pensée opératoire, mais, simultanément, risque d'emporter celui qui s'y réfugie et l'utilise dans une **spirale où se perd le sens** de la situation initiale. Aussi, conformément à ce qui est avancé ci-dessus, convient-il d'amener les élèves à le **maîtriser et se poser des questions** au cours de son utilisation :

- Quel outil faut-il mobiliser dans **cette** situation ?
- Quelles sont les **conditions** de son utilisation ?
- Ce qu'il me permet d'obtenir a-t-il un **sens dans le contexte proposé** (test de vraisemblance, d'ordre de grandeur...) ?

“Algorithmisés” qu’ils sont, de nombreux élèves de terminale connaissent la formule donnant l’équation de la tangente à la courbe représentative d’une fonction en un point x_0 où elle est dérivable.

Mais que se passe-t-il lorsqu’il s’agit de tracer la tangente au point $O(0 ; 0)$ de la représentation graphique de la courbe définie par :

$$f: [0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} f(x) = x \ln x \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$x \mapsto f(x)$ tel que :

Nous sommes devant un défi : faire en sorte que, devant un problème à résoudre, les élèves cherchent d’abord le sens des questions posées, puis se rassurent par l’utilisation, voire l’élaboration, d’un algorithme, et non l’inverse, ce qu’ils ont naturellement tendance à faire, encouragés la plupart du temps par la forme même des situations proposées et par la recherche immédiate de la solution et sa sanction. La principale difficulté didactique réside donc dans la recherche d’un compromis entre l’apprentissage, la maîtrise et le contrôle des techniques.

Situations – Démarches

Nous avons vu que cette problématique était associée à toutes les activités qu'il était possible de décomposer en termes d'algorithmes. Certes, à travers les autres problématiques, nous avons conduit les élèves à certaines démarches de ce type, mais elles étaient plus incidentes que véritablement destinées à faire prendre conscience de leur nature. Ici, nous allons proposer des situations où la mise en évidence, l'explicitation, l'effectuation d'un algorithme ou tout simplement la reconnaissance de son adéquation et le recours à lui représentent l'objectif majeur de l'activité. L'absence d'une colonne "contenus" se justifie par le fait que ceux-ci ne sont ni introduits ni institutionnalisés par cette problématique. Ils ne font qu'être en jeu à l'occasion du déroulement d'un algorithme, de son analyse voire de sa conception.

Situations	Démarches
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Révision de quelques algorithmes de calcul et de dessin utilisés dans les classes de collège : opérations élémentaires sur les nombres, reproduction de dessins, représentation graphique de fonctions, ... ◆ Recherche opérationnelle ; par exemple : algorithmes pour la méthode PERT ou la programmation dynamique. ◆ Écriture des étapes de l'effectuation d'un algorithme : par exemple, la résolution d'une équation du premier degré, d'une équation du second degré, d'un système d'équations, d'une intégrale définie... ◆ Construction d'une correspondance entre fonctions dérivables et/ou intégrables à seule fin de calculs à renouveler sans hésitation. ◆ Construction d'un algorithme permettant d'extraire une racine carrée ou cubique afin de la minorer par un nombre décimal. ◆ Utilisation d'un algorithme itératif : $u_n = f(n)$ et d'un algorithme récursif : $u_{n+1} = g(u_n, u_{n-1})^1$ 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Prendre conscience de l'aspect algorithmique de certaines activités où le contrôle ne passait pas par le sens, mais seulement par la correction de son déroulement. ◆ Appliquer un algorithme donné en suivant pas à pas les étapes de son déroulement. ◆ Décomposer de façon consciente un algorithme en ses pas successifs. En écrire le programme en un langage informatique ou tout autre langage symbolique consensuel. ◆ Rappeler les connaissances déjà connues et appliquer dans de nombreux exercices l'usage des algorithmes de dérivation et/ou d'intégration. ◆ Donner des valeurs permettant d'approximer une racine carrée ou une racine cubique. ◆ Distinguer itération et récursivité et écrire un organigramme correspondant.

¹ L'itération est une procédure qui consiste en la répétition d'une action avec un critère d'arrêt défini par la valeur du prédicat. Elle s'exprime dans un programme par « tant que... faire... »
 La récursivité est une procédure qui s'appelle à l'intérieur d'elle-même, de la forme : $f(n+1) = g(f(n), n+1)$

Quelques problèmes¹

2^{nde}

*** 1 ***

Rappels de calcul mental

Expliquer pourquoi les calculs suivants peuvent être rapidement faits de tête :

1° 37×43 ; $75 \times 85 \dots$

2° $65^2 = 6 \times 7 \times 100 + 25 = 4225$

3° $2^7 \times 5^3$; $12^3 \times 5^6$; $15^4 \times 16 \dots$ ou encore $56^2 \times 5^5 \dots$

Remarque et indication :

Ces petits rappels semblent utiles afin de donner un sens aux révisions de calculs algébriques. Mais également, souligner, en classe de Seconde, l'importance du calcul mental pour exercer un contrôle sur les calculs effectués la plupart du temps à la calculatrice, nous semble primordial.

La première propriété en jeu est l'application de l'identité :
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

[$1600 - 9 = 1591$; $6400 - 25 = 6375$].

Le seconde se déduit à la fois de la numération décimale et de l'application de l'identité : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a(a + 2b) + b^2$ [$65^2 = 60^2 + 2 \times 60 \times 5 + 25 = 60 \times (60 + 10) + 25 \dots$].

La troisième met en jeu l'identité $a^n \times b^n = (ab)^n$, en particulier $2^n \times 5^n = 10^n$, ainsi que l'identité $(a^n)^p = a^{np}$ [$2^2 \times 10^3 \dots$; $3^3 \times 4^3 \times 5^6 = 27 \times 10^6$; $3^4 \times 5^4 \times 2^4 = 9^2 \times 10^4$; $7^2 \times 8^2 \times 5^5 = 49 \times 2 \times 10^5 \dots$].

¹ Certains des problèmes relatifs aux fonctions, présentés ici, sont extraits de fiches manuscrites aimablement communiquées par Marc ROGALSKI, dont une est parue dans Audimath, et destinées à des étudiants à titre de révision ou de consolidation. Ils ont pu être adaptés afin de rester compatibles avec les programmes et les compétences de terminale scientifique.

2^{nde}

*** 2 ***

Une tasse est pleine de café noir. J'en bois tout d'abord une gorgée que j'évalue à $1/6$. Je complète alors ma tasse avec du lait et je mélange soigneusement. Je bois ensuite $2/3$ de ce mélange et je complète une nouvelle fois avec du lait. Enfin, je bois le tout. Je me demande si ainsi j'ai bu plus de café que de lait.

Remarque et indication :

Plutôt qu'une tâche mobilisant directement les savoir-faire des élèves en matière de fractions, ce problème a quelques chances de les mobiliser par son ouverture et son aspect ludique. Une petite mathématisation est nécessaire mais l'essentiel est de manipuler correctement des opérations sur les fractions d'entiers.

On trouvera sans difficulté que je bois en tout 1 tasse et $5/6$ de tasse soit 1 tasse de café et $5/6$ de tasse de lait.

Et pour le régal, voici la façon dont Jean-Pierre Kahane nous a dit avoir abordé ce petit problème :

« L'important ici est de mémoriser l'énoncé et d'extraire ce qui est relatif à la question posée.

Qu'ai-je bu comme café ? Une tasse pleine.

Comme lait ? Ce que j'ai ajouté, successivement $1/6$ et $2/3$ de la tasse donc moins d'une tasse ($1/6 < 1/3$!)

Donc j'ai bu plus de café.

*Qu'est-ce qu'on peut (en fait **doit**) oublier ? Qu'on mélange soigneusement.*

Qu'est-ce qui est inutile : l'algorithme d'addition des fractions. »

T^{ale}

*** 3 ***

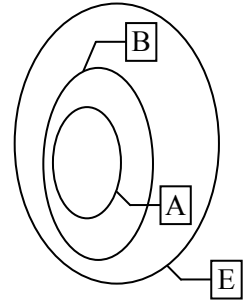


Une population E comporte n individus. On souhaite dénombrer les paires $\{A, B\}$ de parties de E strictement incluses l'une dans l'autre, c'est-à-dire telles que $A \subset B$. On procédera en explicitant un algorithme de constitution de telles paires. Combien y en a-t-il si $n = 6$?

Remarque et indication :

Il s'agit de trouver toutes les paires de parties $\{A, B\}$ de E telles que A soit strictement incluse dans B .

Si $B = E$, pour constituer les parties A , il suffit d'enlever à l'ensemble de toutes les parties de E la partie $B = E$. On trouve donc $2^n - 1$ parties de type A et donc $2^n - 1$ paires $\{A, B\}$.



Si B ne doit comporter que $n - 1$ individus, pour constituer les paires $\{A, B\}$, il suffit de choisir $n - 1$ individus parmi n , puis de former A comme partie strictement incluse dans cet ensemble à $n - 1$ éléments. Il y aura donc $2^{n-1} - 1$ parties A et $C_n^{n-1} (2^{n-1} - 1)$ paires $\{A, B\}$.

Si $\text{card } B = n - k$, le nombre de parties A constituables est $2^{n-k} - 1$ et le nombre de paires est $C_n^{n-k} (2^{n-k} - 1) \dots$

Finalement, le nombre de telles paires est :

$$\underbrace{2^n + C_n^{n-1} 2^{n-1} + C_n^{n-2} 2^{n-2} + \dots + C_n^1 2^1 + 2^0}_{(2+1)^n} - (1 + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} + \dots + C_n^1 + 1) = 3^n - 2^n$$

Si $n = 6$, le nombre de paires $\{A, B\}$ est 665.

Variante pour le calcul :

On dénombre les paires $\{A, B\}$ telles que $A \subseteq B$. L'application de l'ensemble de ces paires $\{A, B\} \mapsto 1_B + 1_A$ est une bijection sur $\{0, 1, 2\}^E$. Leur nombre est donc 3^n . On soustrait les paires $\{B, B\}$ qui sont au nombre de $2^n \dots$

1^{ère}

*** 4 ***

On veut savoir si l'équation $x^4 - x^2 + 1 = a$ a des racines réelles ou non et leur nombre.

Qu'en pensez-vous si $a = -1$, puis $a = 1$?

Remarque :

Ce problème simple nécessite seulement l'utilisation d'une équation bicarrée qui impose elle-même le changement de variable $x^2 = X$. Ce changement fait partie des méthodes qui sont souvent abordées en classe.

1^{ère}

*** 5 ***

On considère les fonctions $f : x \mapsto x + 1$, $g : x \mapsto x^2$, $h : x \mapsto \cos x$.

Déterminer les fonctions composées : $h \circ g \circ f$, puis $f \circ g \circ h$, puis $g \circ f \circ h$. Sont-elles égales ?

Remarque :

Ce problème a pour seuls objectifs, en faisant répéter plusieurs fois un même "calcul", de conforter la maîtrise de la notion de composition de fonctions et, de ce fait, de faire constater l'importance de l'ordre des opérations de composition. Pour montrer que ces fonctions composées sont différentes, il suffit, naturellement, de montrer qu'elles prennent des valeurs différentes, mais cela nécessite de l'initiative.

2^{nde}

*** 6 ***

On considère les fonctions $f : \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 10\} \mapsto \mathbf{R}$ et $g : \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 10\} \mapsto \mathbf{R}$ définies par le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	2	3	5	7	10	3	4	7	5	3
$g(x)$	0	1	1	2	3	1	4	2	5	3	8
$(g \circ f)(x)$											
$(f \circ g)(x)$											

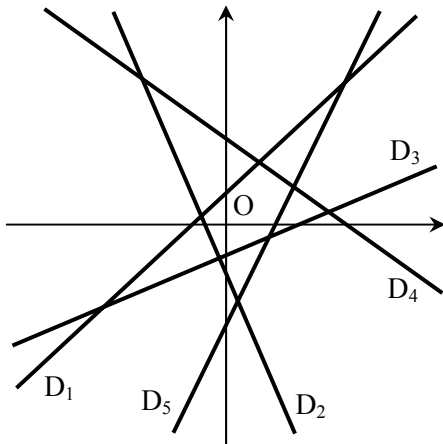
Compléter ce tableau par le calcul demandé dans les deux dernières lignes.

Remarque :

Cette fois, les fonctions sont définies sur un intervalle d'entiers, et l'algorithme de calcul des composées d'applications s'applique sur des valeurs déterminées à la place d'une formule explicite comme c'est généralement le cas.

2^{nde}

*** 7 ***



Les droites représentées ci-contre, dans le plan repéré, admettent des équations de la forme :

$$y = a_i x + b_i \text{ où } i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Utiliser à vue les représentations graphiques pour ranger les nombres réels a_i par ordre croissant.

Faire de même ensuite pour les nombres réels b_i .

Remarque et indication :

Les objectifs de ce problème sont :

1° décoder une propriété graphique en passant du registre graphique au registre algébrique,

2° manifester la compréhension de l'ordre sur les réels,

3° réviser la signification des paramètres de la représentation algébrique d'une droite dans un repère cartésien.

De ce fait, le problème peut être proposé dès la classe de Seconde. Il implique une mise à distance de l'algorithme de représentation graphique d'une fonction affine.

1^{ère}

*** 8 ***



Les paraboles représentées ci-contre, dans le plan repéré, admettent des équations de la forme : $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$ où $a_i \neq 0$ pour $i \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Utiliser à vue leur représentation graphique pour répondre aux questions suivantes :

1° Ranger les nombres réels c_i , puis les nombres $q_i = -\frac{b_i}{a_i}$ et enfin

les nombres a_i par ordre croissant.

2° Quels sont les signes des nombres b_i ?

Remarque et indication :

Les objectifs sont les mêmes qu'à l'exercice 7.

Les questions trouveraient une place intéressante en Première pour valider la compréhension de : la représentation graphique de la parabole, en particulier le

rôle des paramètres de son équation, de l'algorithme $a_i \left[\left(x + \frac{b_i}{2a_i} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a_i^2} \right]$

et/ou de la dérivée du trinôme du second degré.

Réponses : $c_4 < c_1 < c_2 < c_3$ (intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées) ;

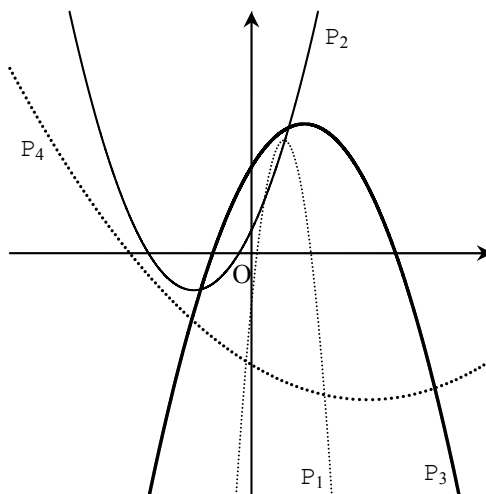
$q_2 < q_1 < q_3 < q_4$ (double de l'abscisse du sommet de la parabole) ;

$a_1 < a_3 < a_4 < a_2$ ($a > 0$ pour P_2 et P_4 , $a < 0$ pour P_1 et P_3 + "ouverture" de la parabole) ;

$b_1 > 0 ; b_2 > 0 ; b_3 > 0 ; b_4 < 0$ (b_i du signe opposé de $a_i \times q_i$).

À titre indicatif : P_1 a pour équation $y = -15x^2 + 20x - 2$

P_2 a pour équation $y = 1,75x^2 + 4,2x + 1$

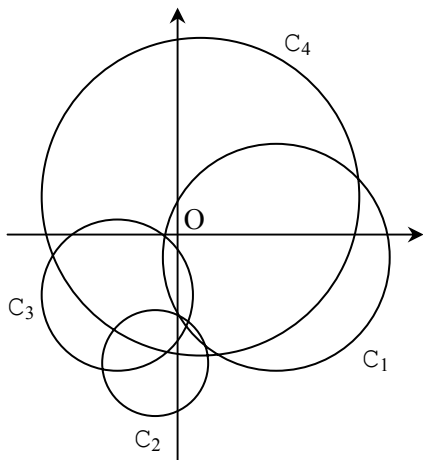
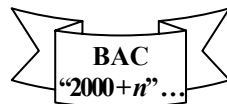


E_3 a pour équation $y = -1,5x^2 + 3,25x + 3,6$

E_4 a pour équation $y = 0,25x^2 - 1,2x - 4,6$

1^{ère}

*** 9 ***



Les cercles représentés ci-contre, dans le plan repéré, admettent des équations de la forme : $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = r_i^2$ où $i \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Utiliser à vue leur représentation graphique pour ranger les nombres a_i , puis les nombres b_i et enfin les nombres r_i par ordre croissant.

Remarque et indication :

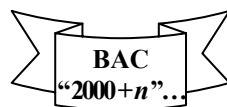
Mêmes objectifs que les deux exercices précédents. Les questions

trouveraient une place intéressante en Première pour valider la compréhension de la représentation du cercle, en particulier le rôle des paramètres de son équation.

- À titre indicatif :
- C_1 a pour équation $(x - 1,3)^2 + (y + 0,3)^2 = 1,5^2$
 - C_2 a pour équation $(x + 0,3)^2 + (y + 1,7)^2 = 0,7^2$
 - C_3 a pour équation $(x + 0,8)^2 + (y + 0,8)^2 = 1^2$
 - C_4 a pour équation $(x - 0,3)^2 + (y - 0,5)^2 = 2,1^2$

1^{ère}

*** 10 ***



La courbe C est représentative de la fonction $x \mapsto f(x)$ dans le plan repéré.

Que représentent les courbes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sachant qu'elles ne peuvent représenter que :

$x \mapsto f(x) + 2$, $x \mapsto 2f(x)$,

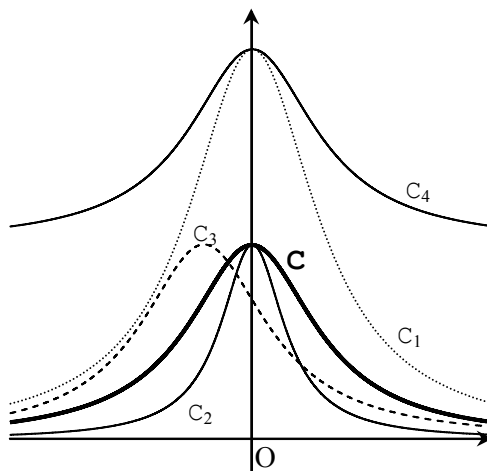
$$x \mapsto f(x + 2) \text{ ou } x \mapsto f(2x).$$

Donner des arguments pour défendre vos choix.

Remarque et indication :

Il s'agit encore de décoder une famille de courbes en identifiant les critères qui les associeraient de façon privilégiée à l'une ou l'autre des fonctions proposées.

Les connaissances mobilisées sont relativement élémentaires et des élèves de Première devraient fournir des réponses correctes.



À titre indicatif : C a pour équation $y = \frac{2}{0,1x^2 + 1}$, C_1 a pour équation $y = 2f$

(x), C_2 a pour équation $y = f(2x)$, C_3 a pour équation $y = f(x + 2)$ et C_4 a pour équation $y = f(x) + 2$.

1^{ère}/Tale

*** 11 ***



Une fonction f , définie sur l'intervalle $I = [0 ; +\infty[$ possède les propriétés suivantes :

- ♦ elle est dérivable sur I , sa dérivée f' est continue, strictement décroissante sur tout l'intervalle I .
- ♦ $f(0) = 1, f'(0) = 1$.

Donner une représentation graphique possible pour f , puis un exemple d'écriture algébrique possible pour $f(x)$.

Remarque et indication :

L'élève est placé devant une situation ouverte, comme il s'en présente en sciences. Ici il doit construire un modèle bien adapté, en réinvestissant ses connaissances relatives aux propriétés des fonctions de références sur la base d'informations fournies, particulièrement sur la dérivée. On trouvera, par exemple, la restriction de $x \mapsto ax^3 + x + 1$ à l'intervalle I avec $a < 0$...

Tale

*** 12 ***

Une fonction f , définie sur l'intervalle $I =]-1 ; +\infty[$ possède les propriétés suivantes :

- ♦ elle est dérivable sur I , sa dérivée f' est continue, strictement décroissante et positive sur tout l'intervalle I .

- ♦ $f(0) = 1, f'(0) = 1$.

Donner une représentation graphique possible pour f , puis un exemple d'écriture algébrique possible pour $f(x)$.

Remarque et indication :

Même remarque que pour l'exercice précédent mais avec une difficulté supplémentaire en imposant le signe de la dérivée. On trouvera, par exemple, $x \mapsto \ln(x+1) + 1$.

Remarque : en n'imposant pas le signe de f' sur I , cet exercice est abordable dès la classe de 1^{ère}. Par exemple, toute fonction trinôme du second degré du type $x \mapsto ax^2 + x + 1$ où $a < 0$ peut convenir (ainsi que pour l'exercice 11 d'ailleurs...).

2^{nde}/1^{ère}

*** 13 ***

On considère les droites d'équations respectives : $y = x + 3$ (d) et $x - y + 5 = 0$ (d').

Les représenter et décrire par des inéquations les demi-plans qu'elles déterminent, de même que les intersections de ces demi-plans.

Remarque :

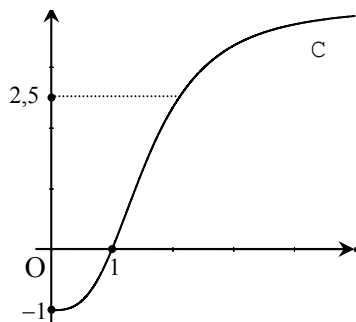
Cette situation est un préalable à la résolution de systèmes d'inéquations par la programmation linéaire. L'élève doit donc avoir assimilé la relation entre les deux registres algébrique et graphique où les éléments qui se correspondent sont respectivement l'inéquation et un demi-plan.

1^{ère}

*** 14 ***



La courbe C dessinée ci-contre représente une certaine fonction f de \mathbf{R}^+ vers \mathbf{R} dans le plan repéré.

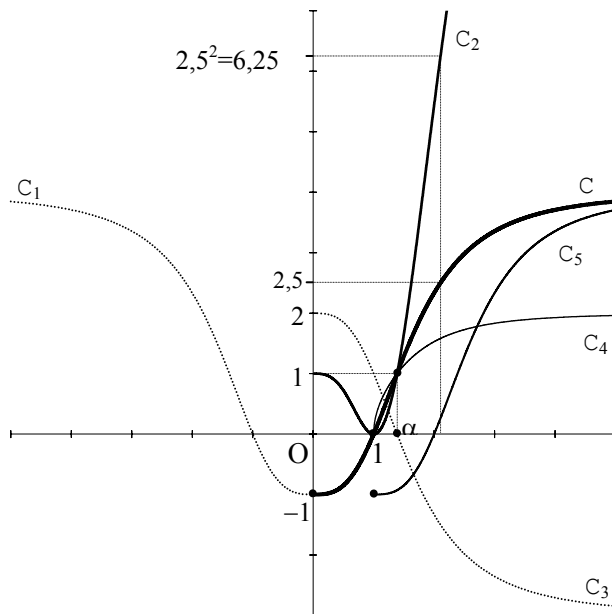


Sur une même feuille, donner une ébauche de représentations des fonctions suivantes sur les intervalles où elles sont définies :

- 1° $x \mapsto f(-x)$ 2° $x \mapsto f^2(x)$
- 3° $x \mapsto 1 - f(x)$ 4° $x \mapsto \sqrt{f(x)}$
- 5° $x \mapsto f(x - 1)$

Remarque et indication :

Pour ce problème d'aspect un peu technique l'élève doit manifester, d'une part, la compétence du décodage du graphique, puis, dans le cadre algébrique, doit transposer les propriétés décodées, y effectuer les calculs nécessaires à l'aide des algorithmes connus et, enfin, recoder graphiquement les informations algébriques obtenues. En particulier, il doit éviter l'écueil de la racine carrée.



Notamment, si α est la valeur telle que $f(\alpha) = 1$, alors les courbes C_2 et C_4 passent également par le point de coordonnées $(\alpha ; 1)$ et la courbe C_3 par le point de coordonnées $(\alpha ; 0)$.

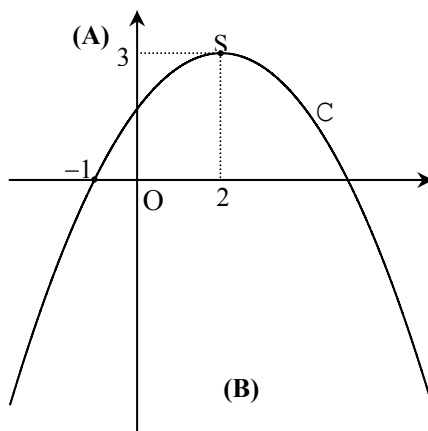
1^{ère}

*** 15 ***

La figure ci-contre représente une parabole C de sommet S .

À l'aide des informations portées sur ce graphique, déterminer une équation de cette parabole.

Déterminer ensuite, à l'aide d'une inéquation, les deux régions du plan séparées par la parabole C , notées respectivement **(A)** et **(B)**.



Remarque et indication :

Il s'agit tout d'abord, de trouver les valeurs a , b et c correspondant à l'équation de la parabole de la forme : $y = ax^2 + bx + c$ dans le cadre algébrique eu égard aux informations données dans le cadre graphique [$y - 3 = a(x - 2)^2$, $a < 0$, et le point de coordonnées $(-1 ; 0)$ appartient à C : d'où $a = -1/3...$]

Ensuite, il reste à "établir" l'équivalence $(x, y) \in \mathbf{(A)} \Leftrightarrow y > ax^2 + bx + c$; idem pour la région **(B)** : $(x, y) \in \mathbf{(B)} \Leftrightarrow y < ax^2 + bx + c$.

Tale

*** 16 ***



Dans cet exercice, P désigne un polynôme associé à une équation d'une parabole quelconque qui passe par l'origine d'un repère orthonormé du plan.

1° Déterminer les nombres réels α et a tels que $\int_0^1 P(x) dx = \alpha P(a)$.

2° Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

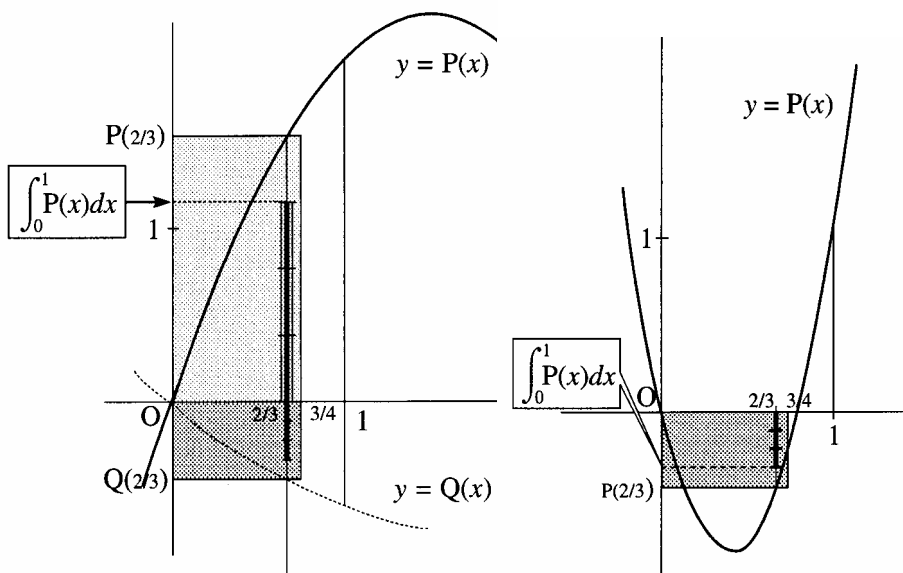
Remarque et indication :

L'identification de deux polynômes de même degré selon les coefficients b et c de l'équation $y = bx^2 + cx$ de la parabole conduit à résoudre un système de deux équations aux inconnues α et a , d'où l'on tire : $a = \frac{2}{3}a$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

L'interprétation graphique est la suivante :

Problématique n° 6 - Problèmes

$\int_0^1 P(x) dx$ est égale aux $3/4$ de l'ordonnée de la parabole au point $x = 2/3$ comme indiqué sur les graphique ci-dessous, ce qui peut aussi se traduire par le fait que la valeur absolue de l'aire algébrique de la surface comprise entre la courbe et l'axe des x , pour x variant de 0 à 1 , est égale à l'aire du rectangle comme indiqué en tramé sur les trois exemples de ces graphiques.



Ainsi, indépendamment des coefficients du polynôme, on dispose d'un moyen graphique direct d'évaluer l'intégrale proposée, c'est-à-dire l'aire (algébrique) sous la courbe.

T^{ale}

*** 17 ***



On désigne par P un polynôme quelconque du troisième degré en x .

1° Déterminer les nombres réels a et b ($a < b$) ainsi que les nombres α et β tels que : $\int_0^1 P(x) dx = \alpha P(a) + \beta P(b)$.

2° Donner une interprétation graphique du résultat obtenu dans un plan muni d'un repère orthonormé du plan.

Remarque et indication :

La première partie du problème se ramène à la résolution d'un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues après identification des 4 coefficients de P dans 2 expressions les contenant. À savoir :

$$\begin{cases} \alpha a^3 + \beta b^3 = \frac{1}{4} \\ \alpha a^2 + \beta b^2 = \frac{1}{3} \\ \alpha a + \beta b = \frac{1}{2} \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \alpha(a - b) = \frac{1}{2} - b \\ \alpha(a - b)(a + b) = \frac{1}{3} - b^2 \\ \alpha(a - b)(a^2 + ab + b^2) = \frac{1}{4} - b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \alpha(a - b) = \frac{1}{2} - b \\ \frac{1}{2}(a + b) - ab = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}(a^2 + ab + b^2) - ba^2 - ab^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

L'algorithme de la résolution de ce système conduit à 2 équations "symétriques en a et b "... Une méthode (qui mériterait d'être abordée au cours d'exercices ou de thèmes) peut consister alors à les considérer en " $a + b$ et $a \times b$ ", c'est-à-dire comme des équations en s et p , somme et produit de 2 racines d'une équation du second degré

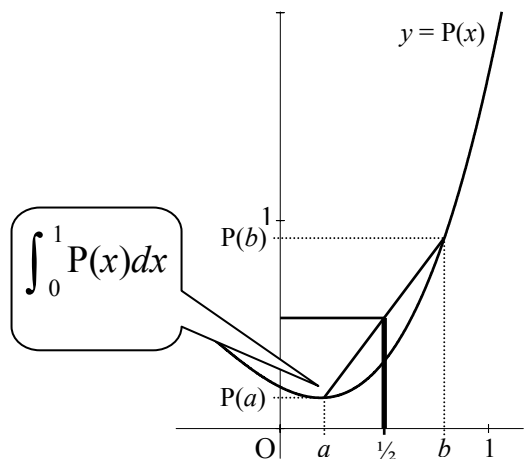
On obtient ainsi :
$$\begin{cases} \frac{1}{2}s - p = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}(s^2 - p) - ps = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2}s - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12}s = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ p = \frac{1}{6} \end{cases}$$

D'où l'on tire : $\{a; b\} \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{3}}{6}; \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right\}$ (nombres appartenant à

l'intervalle $[0; 1]$) puis $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

L'intégrale définie en jeu est donc égale à la demi-somme des ordonnées des points a et b . C'est donc l'ordonnée du milieu du segment qui joint les points de la cubique, d'abscisses respectives a et b , (point d'abscisse $\frac{1}{2}$).

On en tire un procédé d'une détermination approchée de la valeur de cette intégrale lorsque le polynôme est représenté graphiquement comme ci-dessus.



T^{le}

*** 18 ***

Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'arc de parabole représentatif de la fonction $x \mapsto x^2$ lorsque x varie de 0 à 10. Comparer les aires de :

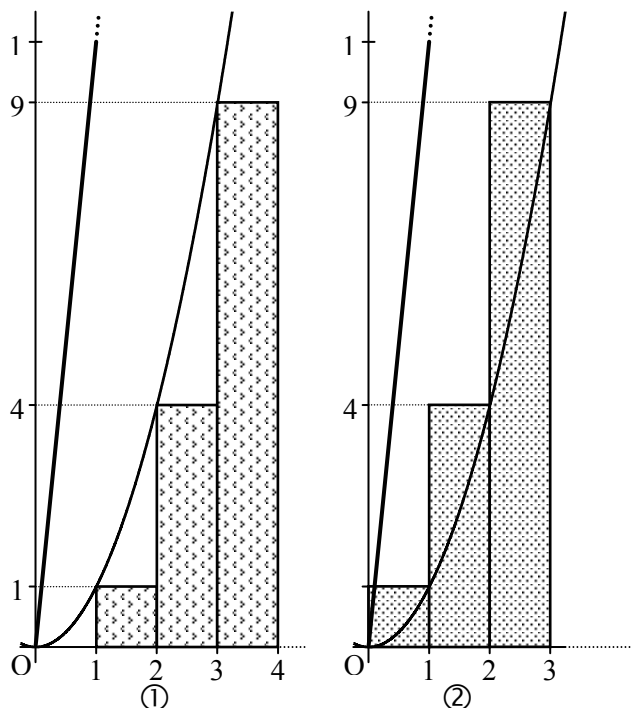
1° la parties du plan comprise entre l'axe des x et le segment joignant l'origine du repère au point d'abscisse 10 de la parabole (en gras sur les figures ci-contre),

2° la parties du plan comprise entre l'axe des x et l'arc de parabole pour $x \in [0 ; 10]$,

3° la réunion des rectangles de largeur 1

et de "longueur" x^2 , "encadrant" la courbe, quand x prend :

- ♦ d'une part, les valeurs entières 0, 1, 2, ..., 9 (fig. ①),
- ♦ d'autre part, les valeurs entières 1, 2, ..., 9, 10 (fig. ②).



Remarque et indication :

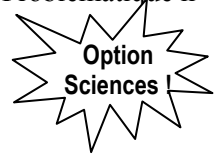
S'il s'agit d'utiliser les algorithmes classiques relatifs aux aires, cet exercice permet aussi de revoir les qualités respectives des encadrements d'une intégrale de Riemann et de faire découvrir, incidemment, la formule de somme de carrés d'entiers

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$(A_1 = 500, A_2 \approx 333 \left(\frac{1000}{3} \right), A_{31} = 285, A_{32} = 385).$$

2^{nde}/1^{ère}

*** 19 ***



(a_1, a_2, \dots, a_n) est un n -uplet de réels non tous nuls, mais de somme nulle. On peut toujours les ranger de telle façon que les k premiers soient négatifs ou nuls et les $n - k$ suivants soient positifs ou nuls.

Quel est le signe de la somme $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n$?

Remarque et indication :

La question posée étant ouverte, des conjectures sont possibles. Elles seront peut-être assorties d'essais numériques (à encourager) de la part des élèves. Sinon, on pourrait penser que le fait de "majorer" d'une certaine façon par les coefficients l'importance des nombres positifs a des chances de favoriser le signe de la somme donnée ; d'autant que la somme de tous les nombres est elle-même nulle. On constatera que les connaissances mobilisées sont très réduites mais que la démarche de résolution nécessite un peu de "flair". Celui-ci peut être orienté par le but final : la somme est positive, donc il est nécessaire de faire disparaître les négatifs, c'est-à-dire de dégrader progressivement la somme initiale...

Voici l'algorithme proposé :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n = 0$$

$$a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n \geq 0 \text{ puisque } a_1 \leq 0$$

$$a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n \geq 0 \text{ puisque } a_2 \leq 0$$

.....

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n > 0 \text{ car il existe } a_i < 0$$

sinon tous les "négatifs ou nuls" seraient nuls et la somme totale ne pourrait l'être que si les "positifs ou nuls" étaient également nuls.

$$a_{k+2} + \dots + a_n \geq 0$$

.....

$$a_n \geq 0$$

En sommant toutes les lignes ci-dessus, on obtient la somme attendue :

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + ka_k + (k+1)a_{k+1} + (k+2)a_{k+2} + \dots + na_n > 0$$

Variante

On pourrait contextualiser la situation en termes de jeu. Un joueur peut percevoir des sommes lors de n parties successives, ces sommes étant des gains ou

des pertes. Si à la fin du jeu, le joueur n'a ni gagné ni perdu d'argent, alors il existe une combinaison avantageuse exprimée par la somme coefficientée ci-dessus !

2^{nde}/1^{ère}

*** 20 ***



On écrit les entiers naturels en escargot $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \dots \rightarrow 37 \dots$:

21	22	23	24	25	26	
20	7	8	9	10	27	
19	6	1	2	11	28	
:	18	5	4	3	12	29
38	17	16	15	14	13	30
37	36	35	34	33	32	31

A partir de l'algorithme ci-contre de la construction de cet escargot infini, trouver la formule récurrente permettant de connaître tous les nombres situés sur la diagonale où figurent les nombres écrits en gras sur fond grisé.

Sont-ils tous premiers comme le sont les premiers nombres indiqués ici ?

Remarque et indication :

L'objectif est de faire dégager d'un algorithme de construction une formule récurrente qui soit décisive sur la valeur des nombres sur la diagonale.

La dernière question devrait inciter les élèves à poursuivre la construction de l'escargot sur au moins un tour, ce qui leur permettra de constater que l'on n'obtient pas un nombre premier (65)... tout en les amenant à accepter de "bricoler" pour essayer de faire émerger un invariant dans la construction, invariant qui sera soumis à une démonstration par récurrence en Première.

On pourra, par exemple, remarquer :

au tour 0 : le nombre est 1,

au tour 1 : le nombre est $5 = 4 + 1 = 2^2 + 1$ selon le schéma ci-contre :

1	2
4	3

au tour 2 : le nombre est $17 = 16 + 1 = 4^2 + 1$ selon le schéma ci-

contre :

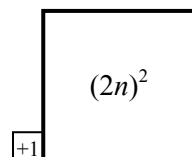
au tour 3 : le nombre est $37 = 36 + 1 = 6^2 + 1$

au tour 4 : le nombre doit être $64 + 1 = 65 = 8^2 + 1$, ce que

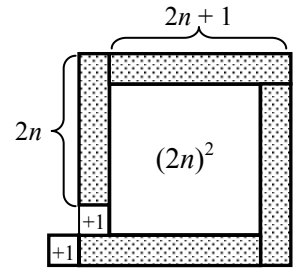
l'on peut vérifier...

7	8	9	10	
6	1	2	11	
5	4	3	12	
17	16	15	14	13

On peut conjecturer qu'au tour n , le nombre cherché sera $(2n)^2 + 1$ selon le schéma ci-contre :



Supposons cette conjecture vraie au rang n : alors, le nombre cherché au rang $n + 1$ est $(2n)^2 + 4 \times (2n + 1) + 1$ selon le schéma ci-contre :



Le nombre cherché au rang $n + 1$ s'écrivant plus simplement $4(n + 1)^2 + 1$ ou encore $[2(n + 1)]^2 + 1$, la conjecture est donc validée.

2^{nde}/1^{ère}

*** 21 ***

Un premier problème d'ordonnement

La construction d'un composant électronique nécessite l'exécution de six tâches distinctes. Les durées d'exécution de chaque tâche sont considérées ici comme négligeables mais les six tâches doivent se dérouler successivement de la façon suivante :

- ◆ la tâche 1 doit s'effectuer en premier ;
- ◆ la tâche 2 ne peut pas se conduire avant que 3 unités de temps ne soient écoulées depuis la tâche 1 ;
- ◆ la tâche 3 nécessite que 5 unités de temps la séparent de la tâche 1 et 4 unités de la tâche 2 ;
- ◆ la tâche 4 exige un intervalle de 2 unités après le début de la tâche 2 et de 3 unités après celui de la tâche 3 ;
- ◆ la tâche 5 exige, quant à elle, que 2 unités de temps la séparent de la tâche 3 et de la 4 ;
- ◆ Enfin, la tâche 6 ne peut commencer que lorsque 5 unités se seront écoulées depuis le commencement de la tâche 4 et 1 unité depuis la tâche 5.

Représenter par un graphe le déroulement de ces 6 tâches en convenant que les *sommets* en soient les tâches et que toute *arête* qui joint deux sommets soit chargée de la pondération égale au temps qui sépare ses extrémités.

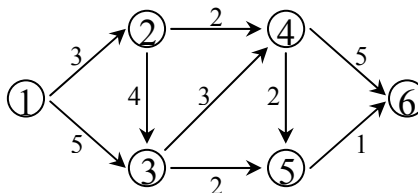
Chercher un algorithme permettant d'organiser le déroulement complet de la construction du composant :

Problématique n° 6 - Problèmes

- en calculant le temps minimal d'exécution totale de la construction,
- en désignant les sommets, dits critiques, où aucun délai n'est autorisé avant de passer à la tâche qui suit sans compromettre la durée minimale de l'exécution totale,
- en établissant le chemin, dit critique, qui joint ces sommets critiques.

Remarque et indication :

Ce problème partage avec la problématique 7 (Changement de registres et de cadres) l'objectif de faire passer d'un registre "Langue naturelle" au registre "Graphes". En outre, et c'est le plus important, l'élève est conduit à élaborer et expérimenter lui-même un algorithme qui permettrait de traiter un cas plus complexe.



Voici ce que nous proposons en notant t_{ij} la durée minimale séparant le sommet i du sommet j (par exemple : $t_{34} = 3$) :

On commence par le sommet 1 : on affecte au sommet 1 la marque (0) et on pose $c_1 = 0$.

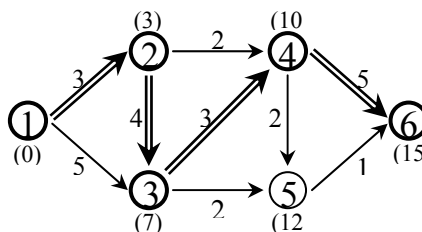
On se place au sommet 2 : $c_1 + t_{12} = 3$; on affecte au sommet 2 la marque (3) et on pose $c_2 = 3$.

On se place au sommet 3 : $c_1 + t_{13} = 5$ et $c_2 + t_{23} = 7$; on affecte au sommet 2 la marque (7) et on pose $c_3 = 7 = \sup_i (c_i + t_{i3})$ pour les sommets i précédant le sommet 3.

...

On se place à un sommet j quelconque. Les sommets i précédant le sommet j sont marqués par (c_i). On examine toutes les arêtes $i \rightarrow j$ qui aboutissent en j . On compare les marques $c_i + t_{ij}$ et on affecte le sommet j de la marque $\sup_i (c_i + t_{ij})$ qui est le temps incompressible qui doit précéder j depuis le début 1. Le sommet qui correspond au maximum est critique.

On obtient donc les marques indiquées entre parenthèses sur le graphe ci-contre.



Les sommets critiques correspondent aux tâches 1, 2, 3, 4 et 6.

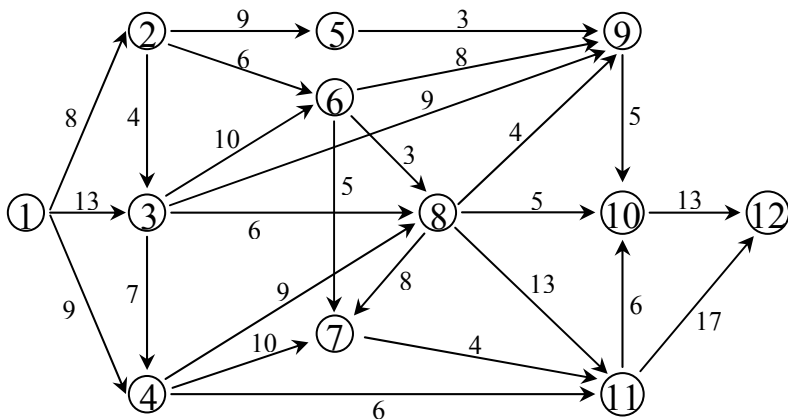
Le chemin critique passe par ces 5 sommets. Tout retard pris entre l'exécution de ces tâches affecte le temps minimal 15 total. En revanche, un retard d'une unité dans la tâche 5 ne change pas ce temps total.

2^{nde}/1^{ère}

*** 22 ***

Un autre problème d'ordonnement

Le graphe ci-dessous décrit les 12 tâches associées à la fabrication d'une automobile. Certaines ne peuvent être exécutées que si des tâches l'ont déjà été. Par exemple, la tâche 6 ne peut commencer que lorsque les tâches 2 et 3 ont été terminées. Les durées incompressibles qui séparent les débuts d'exécution de deux tâches consécutives sont indiqués sur les *arêtes* joignant les *sommets* correspondant du graphe. Les durées d'exécution de chaque tâche sont considérées ici comme négligeables.



Le problème consiste à décrire dans quel ordre les tâches doivent être exécutées pour respecter l'ordre d'exécution, en soulignant celles, appelées critiques, dont tout retard d'exécution serait préjudiciable au temps minimal, ainsi que ce temps minimal que l'on peut escompter pour atteindre l'étape finale de fabrication, c'est-à-dire la 12.

La méthode qui sera utilisée s'appelle "Méthode PERT" (Project Evaluation and Review Technique). L'algorithme qui est applicable est celui mis en place dans l'exercice précédent, mais dans un contexte plus complexe.

Remarque et indication :

On procède comme précédemment et l'on obtient le chemin critique : 1, 3, 4, 8, 11, 10 et 12. Le temps minimal et incompressible est 61. Un tel problème peut être présenté dès la classe de 2^{nde} en option Sciences et, de toute façon, semble bien adapté à des préoccupations de la série ES.

1^{ère}

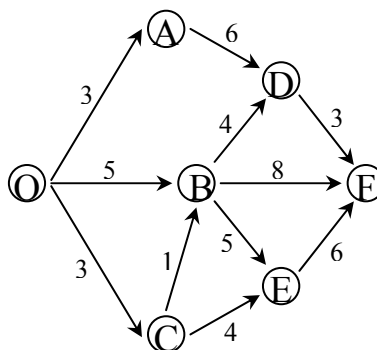
*** 23 ***

Problème du représentant de commerce

Partant de la ville O, un représentant peut passer par différentes villes pour rejoindre la ville F, son point d'arrêt. Sachant les frais occasionnés par ses déplacements et les gains associés prévus sur les ventes, il doit choisir l'itinéraire le plus favorable. Le graphe ci-après rend compte des itinéraires possibles et des frais afférents au choix du passage dans une ville particulière parmi les villes A, B, C, D, E et F.

Ce graphe rend compte de la possibilité de transiter par B et E quand on est passé par C, mais en revanche l'impossibilité de passer par B quand on est passé par A. Un itinéraire possible est donc, par exemple, O → B → E → F dont le coût associé est 16.

Peut-on faire mieux ? Comment s'y prendre ?



Remarque et indication :

① Ce problème vise à faire expliciter un algorithme qui soit plus fécond que celui consistant à mettre à plat tous les itinéraires possibles, comme cela pourrait être le comportement premier attendu des élèves. On voit qu'ici 8 itinéraires sont praticables. Mais si la situation devient plus complexe, le risque d'oublier des chemins du graphe s'accroît très vite. Un tel problème est accessible à des niveaux scolaires peu élevés et trouverait une bonne place chez les "économistes".

Un algorithme simple est issu de la programmation dynamique, autre méthode de la recherche opérationnelle. Il serait bon de piloter les élèves pour le leur faire découvrir ou tout au moins leur faire formaliser. Il consiste à traduire en termes récurrents la technique suivante :

« Si je me trouve à un moment donné dans le graphe en x , la meilleure façon de parvenir à son extrémité F à moindre coût $U(x ; F)$ est de passer par le sommet y tel que le coût total de passage par y soit le plus faible parmi les coûts possibles de passage par un autre sommet, sachant qu'en y est connue la meilleure façon de finir, de coût $U(y ; F)$ ».

Aussi, l'algorithme peut se formaliser ainsi : quel que soit le sommet x du graphe, le coût associé au trajet simple $x \rightarrow y$ étant $h(x, y)$: $U(x ; F) = \inf_y [h(x, y) + U(y ; F)]$

On calcule donc tous les minima intermédiaires en “remontant” d'un sommet y vers chacun de ses antécédents x . On obtient ici :

$$U(D ; F) = \inf [h(D, F) + U(F ; F)] = 3$$

$$U(E ; F) = \inf [h(E, F) + U(F ; F)] = 6$$

$$U(B ; F) = \inf [h(\mathbf{B}, \mathbf{D}) + U(\mathbf{D} ; F) ; h(B, F) + U(F ; F) ; h(B, E) + U(E ; F)] = 7$$

$$U(A ; F) = \inf [h(A, D) + U(D ; F)] = 9$$

$$U(C ; F) = \inf [h(\mathbf{C}, \mathbf{B}) + U(\mathbf{B} ; F) ; h(C, E) + U(E ; F)] = 8$$

$$U(O ; F) = \inf [h(O, A) + U(A ; F) ; h(O, B) + U(B ; F) ; h(\mathbf{O}, \mathbf{C}) + U(\mathbf{C} ; F)] = 11$$

L'itinéraire optimal est donc : $O \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F$. Le coût total est 11.

On observe que l'algorithme n'a nécessité que 6 calculs contre 8 dans le cas d'examen de chacun des itinéraires possibles.

② Une situation semblable est proposée parmi les situations de la problématique 9. Il serait intéressant de faire fonctionner l'algorithme dans cette situation où le nombre de possibles est plus élevé et où donc il s'avérerait très efficace et plus sûr.

S'il s'agit de maximiser une fonction le long d'un graphe, au lieu de chercher le minimum à chaque étape récursive, on recherche, bien évidemment, le maximum.

Thème en 2^{nde} ou 1^{ère}

*** 24 ***

Le grand mathématicien Euler, évidemment dépourvu de calculatrice (!), nous fournit un exemple de recherche de la racine carrée d'un nombre entier par approximations successives. Voici comment il procédait :

Problématique n° 6 - Problèmes

Soit par exemple à donner une valeur approchée a' du nombre a tel que $a^2 = b = 29$. Bien entendu, on souhaite que cette valeur soit telle que l'erreur $|a - a'|$ soit la plus petite possible.

Or le nombre a est compris entre 5 et 6, donc il s'écrit $5 + \alpha$ où $\alpha \in]0 ; 1[$. Comme $(5 + \alpha)^2 = 25 + 2 \times 5\alpha + \alpha^2$, en négligeant le nombre α^2 , qui doit être petit puisque α est inférieur à 1, on tire une valeur approchée par $10\alpha = 4$, soit $\alpha = 0,4$. Ainsi 5,4 est une valeur approchée de a avec $|a - 5,4| < 0,1$.

Recommençons. Cherchons $\beta > 0$ tel que $5,4 - \beta$ soit proche de a . Comme $(5,4 - \beta)^2 = 29,16 - 2 \times 5,4\beta + \beta^2$, en négligeant encore β^2 qui doit être petit puisque $\beta < 0,1$, prenons alors $10,8\beta = 0,16$ soit $\beta \approx 0,01$. Ainsi 5,39 est une valeur approchée de a avec $|a - 5,39| < 0,01$, etc.

1° Écrire un algorithme qui permettrait de majorer l'écart entre a et sa valeur approchée par 10^{-n} , où $n \in \mathbf{N}^*$.

2° Étudier, sur un exemple particulier, une méthode analogue dans le cas où l'on chercherait à déterminer une valeur approchée de a telle que $a^3 = b$, nombre donné.

Remarque :

On retrouve dans la méthode d'Euler celle qui permettait de calculer "à la main", la racine carrée d'un nombre entier ou décimal sans disposer d'une calculatrice. Ce problème pourrait donc paraître anachronique à l'époque des ordinateurs. Mais la réflexion épistémologique qui pourrait accompagner ce problème est loin d'être sans intérêt par rapport à un cours d'analyse. En tout cas, il est une illustration du développement du binôme (penser au cas de la racine cubique) où les termes au carré, voire au cube, deviennent négligeables devant les termes de degré inférieur lorsqu'ils sont majorés par des puissances négatives de 10.

*** 25 ***
**Électroniciens, informaticiens,
 un job possible ...**



Un original prétend qu’il est possible et économique de faire effectuer les 4 opérations arithmétiques (+ ; - ; × ; ÷) par une machine “appauvrie”, ne sachant effectuer et répéter éventuellement qu’une seule opération notée “☆” : $a ☆ b =$

$$1 - \frac{a}{b}.$$

Êtes-vous d’accord ? Si oui, comment y parvenir ? Si non, pourquoi ?

Remarque et indication :

Il s’agit de “décortiquer” les algorithmes des opérations arithmétiques habituelles afin de les réduire à ceux que permet l’opération “☆”.

Quelques remarques et formules liminaires : $a ☆ b$ n’est défini que si $b \neq 0$

$$c ☆ (a ☆ b) = \frac{b(1-c) - a}{b-a} \quad (1) ;$$

$$(a ☆ b) ☆ c = \frac{b(c-1) + a}{bc} \quad (2) ; \quad (a ☆ b) ☆ (b ☆ a) = 1 + \frac{a}{b} \quad (3)$$

Division : avec $c = 1$, (2) donne : $(a ☆ b) ☆ 1 = \frac{a}{b}$ (4). On en déduit que

$$(1 ☆ b) ☆ 1 = \frac{1}{b} \quad (5)$$

Multiplication : en remplaçant b par $\frac{1}{b}$ dans (4) : $(a ☆ [(1 ☆ b) ☆ 1]) ☆ 1 = a \times b$

Soustraction : Si $a = b$, alors $a - b = 0$. Supposons $a \neq b$, et $a \neq 0$.

D’après (1), $1 ☆ (a ☆ b) = \frac{a}{a-b} = d$, donc $\frac{a}{d} = a - b$.

C’est-à-dire (4) : $(a ☆ [1 ☆ (a ☆ b)]) ☆ 1 = a - b$.

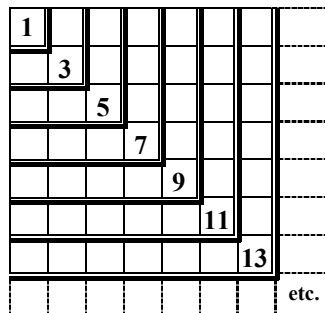
Addition : En multipliant (3) par b , on retrouve $a + b$.

En effet : $([(a ☆ b) ☆ (b ☆ a)] ☆ [(1 ☆ b) ☆ 1]) ☆ 1 = a + b$.

1^{ère}

*** 26 ***

1° Le schéma ci-contre a permis de conjecturer (et de s'en convaincre !) ce que vaut la somme $\sum_0^n (2k+1)$ des n premiers nombres impairs. Et vous, sauriez-vous dire à quoi est égale cette somme ?



2° Pensez-vous qu'un algorithme consistant à soustraire à un nombre entier les nombres impairs successifs à partir de 1 conduit à la racine carrée entière du nombre donné ? Si oui le décrire, si non dire pourquoi.

Remarque et indication :

Il s'agit de démontrer la relation $\sum_0^n (2k+1) = (n+1)^2$ qui peut s'obtenir par

la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

Le schéma en est une preuve physique. On peut aussi faire une démonstration par récurrence (si l'on a $\sum_0^{n-1} (2k+1) = n^2$, alors :

$\sum_0^n (2k+1) = \left(\sum_0^{n-1} (2k+1) \right) + 2n+1 = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$ et donc la conjecture est validée).

Si A est un nombre entier donné, il existe donc un entier n tel que :

$$(n+1)^2 = \sum_0^n (2k+1) \leq A < \sum_0^{n+1} (2k+1) = (n+2)^2$$

Ainsi, si n est le plus petit entier tel que la différence entre A et une expression de la forme $\sum_0^{n+1} (2k+1)$ est négative, la racine carrée entière de A est $n+1$.

D'où l'algorithme :

$$A_0 = A - 1$$

$$A_1 = A - (1+3)$$

$$A_2 = A - (1+3+5)$$

...

$$A_n = A - (1+3+5+ \dots + 2n+1) = A_{n-1} - (2n + 1)$$

S'arrêter au dernier nombre positif de la suite : si $A_n \geq 0$ et $A_{n+1} < 0$, alors la racine carrée entière de A est $n + 1$ et l'algorithme "converge" bien.

Cet exercice ne mobilise pas de concepts dépassant le niveau de Seconde si le symbole Σ n'est pas employé systématiquement. En revanche, il nécessite une bonne compréhension des relations d'ordre entre nombres entiers et une approche dynamique de la génération d'une suite.

1^{ère}

*** 27 ***

Un groupe de 8 amis (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** et **H**) établissent des projets de vacances avec 6 destinations de voyage (numérotées **1**, **2**, **3**, **4**, **5** et **6**) qu'ils feraient en commun ou en sous-groupes en fonction de leurs accords ou leurs désaccords.

Le tableau ci-dessous récapitule leurs vœux : 0 signifie un désaccord pour la destination x et 1 signifie l'accord avec cette destination.

Destinations :		1	2	3	4	5	6
amis	A	0	1	1	1	1	1
	B	0	1	1	1	0	0
	C	1	0	0	0	0	0
	D	0	1	1	1	0	1
	E	0	1	1	1	1	1
	F	0	1	1	1	1	0
	G	1	0	0	1	0	0
	H	1	0	0	0	0	0
Totaux :		3	5	5	6	3	3

Les 8 amis souhaitent former des groupes où ils se retrouvent aussi bien par leurs goûts que leurs refus communs. Définir un indice de similarité entre 2 amis i et j , noté $s(i, j)$, qui respecte cette décision et effectuer les regroupements en

fonction de ce critère de telle façon qu'au cours du processus de classification, la similarité entre 2 sous-groupes G_1 et G_2 soit : $S(G_1, G_2) = \inf_{i \in G_1, j \in G_2} s(i, j)$.

Effectuer l'algorithme de classification selon ces critères de similarité et donner la typologie en 2 sous-groupes d'amis respectant ces critères.

Remarque et indication :

Les objectifs de ce problème sont multiples :

- *définir un critère algébrique conformément à une contrainte, critère qu'il s'agit d'étendre à des couples d'items (ici les 8 amis),*
- *puis utiliser un critère itératif classifiant les sous-groupes d'items,*
- *trouver ou utiliser un mode de représentation d'une hiérarchie de sous-groupes emboîtés.*

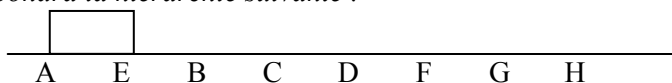
Soit (i, j) un couple d'amis quelconque. Notant n_{11} le nombre de fois où ils sont d'accord sur la même destination et n_{00} le nombre de fois où ils sont tous les deux en accord avec le refus d'une destination. Une ressemblance mutuelle sera signifiée par l'indice de similarité $s(i, j) = n_{11} + n_{00}$. Il intègre des regards communs sur les mêmes destinations.

Il est possible de définir d'autres critères, mais nous retiendrons celui-ci en le rapportant à son complémentaire à n, soit $d(i, j) = n - (n_{11} + n_{00})$. Ainsi, plus cet indice sera petit, comme une distance, plus grande sera la ressemblance entre i et j. D'où le tableau symétrique de ces valeurs dont on ne fait pas figurer la partie symétrique (ici $n = 6$) :

$d(i; j)$	A	B	C	D	E	F	G	H
A		2	6	1	0	1	5	6
B			4	1	2	1	3	4
C				5	6	5	1	0
D					1	2	4	5
E						1	5	6
F							4	5
G								1
H								

Convenant de retenir en premier la plus faible valeur des distances dans l'ordre de lecture de haut en bas et de gauche à droite, la première réunion d'amis sera {A, E} et non pas {C, H}.

Il lui correspondra la hiérarchie suivante :



L'indice de similarité entre 2 sous-groupes devient :

$$S(G_1, G_2) = \inf_{i \in G_1, j \in G_2} s(i, j) = \sup_{i \in G_1, j \in G_2} (n - s(i, j)) = \sup_{i \in G_1, j \in G_2} d(i, j)$$

On obtient donc le nouveau tableau :

Ayant agrégé les amis C et H à distance minimale, on obtient donc la hiérarchie suivante au niveau 2 :

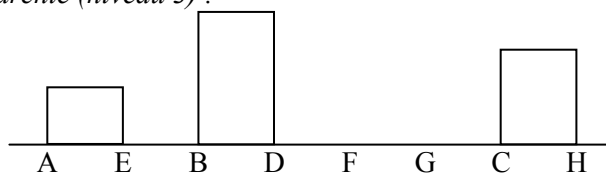
$d(i; j)$	B	C	D	F	G	H	{A, E}
B		4	1	1	3	4	2
C			5	5	1	0	6
D				2	4	5	1
F					4	5	1
G						1	5
H							6
{A, E}							



Le tableau suivant conduira à l'agrégation de B et D qui, avec l'algorithme retenu, réalisent le premier minimum :

	B	D	F	G	{A, E}	{C, H}
B		1	1	3	2	4
D			2	4	1	5
F				4	1	5
G					5	1
{A, E}						6
{C, H}						

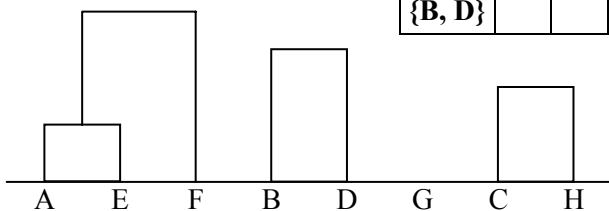
d'où la hiérarchie (niveau 3) :



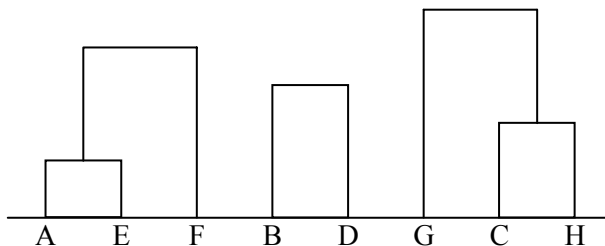
Problématique n° 6 - Problèmes

Continuant d'appliquer les mêmes algorithmes, nous obtenons les hiérarchies successives suivantes au niveau 4 :

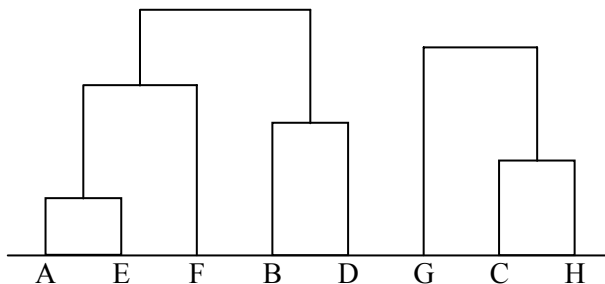
	F	G	{A, E}	{C, H}	{B, D}
F		4	1	5	2
G			5	1	4
{A, E}				6	2
{C, H}					5
{B, D}					



Puis au niveau 5 :



Et enfin au niveau 6 :



Cette hiérarchie fournit la classification attendue en deux sous-groupes :
 $\{A, E, F, B, D\}$ et $\{G, C, H\}$.

Tale

*** 28 ***

Écrire un programme adapté à votre calculatrice graphique afin de calculer l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$, en prenant des pas d'amplitudes $\frac{\pi}{2^8}$, puis $\frac{\pi}{2^{10}}$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Les calculs seront faits avec la précision autorisée par votre calculatrice.

Remarque et indication :

L'objectif est de faire fonctionner l'algorithme de la définition de l'intégrale de Riemann et d'établir un petit programme à l'aide du langage imposé par des calculatrices personnelles. L'examen sur celles-ci de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x \cos x$ permet de constater l'effet de l'amortissement induit par le coefficient x sur le cosinus, conduisant à une intégrale dont la valeur est inférieure à celle de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$.

S'il est possible de valider les calculs approchés par le calcul effectif à l'aide d'une intégration par parties, on constatera l'erreur commise par le calcul approché. On trouvera la valeur : $\frac{\pi}{2}$.

1^{ère}

*** 29 ***

On pose $f_0(x) = 1 - \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbf{R} - \{0; 1\}$ et $f_n(x) = f_0[f_{n-1}(x)]$ pour $n \in \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.

Calculer $f_{2000}(2000)$.

Remarque et indication :

Les objectifs de ce problème sont de divers ordres :

– rentrer dans le jeu du problème en acceptant de tâtonner en faisant des essais,

Problématique n° 6 - Problèmes

- découvrir et formaliser une hypothèse de récurrence,
- prouver sa validité.

Ainsi, par des essais sur les premières valeurs de n , on montre que pour tout $x \in \mathbf{R} - \{0; 1\}$:

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} ; f_2(x) = x ; f_3(x) = 1 - \frac{1}{x} = f_0(x) \dots$$

D'où l'hypothèse de récurrence (qu'il est aisé de démontrer), pour $x \in \mathbf{R} - \{0; 1\}$ et $k \in \mathbf{N}$:

$$f_{3k}(x) = 1 - \frac{1}{x} ; f_{3k+1}(x) = \frac{1}{1-x} ; f_{3k+2}(x) = x.$$

Par suite, on obtient : $f_{2000}(2000) = f_{3 \times 366 + 2}(2000) = 2000$.

*** 30 ***

Certaines pyramides (ancienne Egypte et Amérique Centrale) se présentent, sur une base carrée, sous forme d'un empilement de parallélépipèdes de base également carrée dont la longueur des côtés décroît de la base



au sommet selon des degrés d'amplitudes sensiblement identiques, ce que nous pouvons supposer.

Si l'on prend l'amplitude commune comme unité, quelle serait le volume d'une pyramide dont la base mesure 225 (pyramide du Soleil au Nicaragua), en admettant que le dernier parallélépipède a pour côté 1.

1° Répondre à la question posée par un calcul récursif : c'est à dire en calculant un à un le volume de chaque étage d'une telle pyramide.

2° Voici comment répondre à la question posée grâce à l'usage d'une formule explicite :

a) En ajoutant membre à membre les égalités ci-dessous, quelle somme remarquable peut-on ainsi retrouver ?

♦ d'une part, à faire ressentir la nécessité et l'intérêt de dégager des algorithmes de calculs récurrents,

♦ et d'autre part, à comparer les modes de calcul suivant qu'il est nécessaire de connaître les $n - 1$ valeurs précédant u_n pour calculer cette valeur ou simplement, la valeur de n pour atteindre u_n à l'aide d'une formule explicite.

Le nombre et/ou la complexité des opérations seront les critères de l'investissement des élèves en faveur de la découverte et du changement de stratégie au bénéfice de l'une des deux méthodes selon les circonstances.

Énoncé :

On présente la suite dite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

1° Comment prolonger cette suite ? On note (u_n) cette suite et u_0 son premier terme. Trouver inductivement l'algorithme qui permet de passer, de la suite connue jusqu'au terme u_n , au terme suivant u_{n+1} .

Calculer la valeur de u_{12} .

Définir la relation algébrique générale qui relie un terme à certains de ses prédécesseurs.

2° On souhaite obtenir directement la valeur de u_n sans avoir besoin de connaître les valeurs qui précèdent.

Or l'équation récurrente : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (1) admet deux solutions de la forme λ^n . Les calculer et écrire la solution générale de (1) comme combinaison linéaire de ces solutions. Puis en déterminer les coefficients de telle façon que la solution vérifie les valeurs de la suite de Fibonacci. Calculer u_{12} à l'aide de la formule trouvée, sans aide puis à l'aide de la calculatrice. Comparer les deux accès à cette valeur.

3° On considère la suite des rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Déterminer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ quand n tend vers l'infini.

Remarque et indication :

1° La relation cherchée est celle qui est déclarée dans la question suivante : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Problématique n° 6 - Problèmes

Son emploi pour déterminer un élément quelconque de la suite nécessite la connaissance des deux termes précédents, ce qui, pour des valeurs élevées de n ne va pas sans inconvénient (penser à u_{1000}).

2° Si l'on substitue λ^n à u_n dans l'équation (1), on trouve les deux solutions :

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La solution générale est donc de la forme :

$$u_n = C_1 \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

L'identification de cette formule avec les valeurs données comme u_0 et u_1

donne :

$$C_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \text{ et } C_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

Le calcul "à la main" de u_{12} , s'il ne nécessite pas la connaissance des valeurs antérieures, impose, en revanche, le calcul des coefficients binomiaux dans le développement de l'expression d'exposant n . Par contre, un calcul à l'aide d'un logiciel de calcul formel (sur calculatrice ou sur ordinateur), est accessible sans emploi d'une récurrence. Il est important que les élèves prennent conscience de ces différences sur le plan des algorithmes.

3° La détermination de la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ impose que chacun des deux termes soit exprimé sous la forme explicite. Une tâche technique, aisément exécutable par les élèves à l'aide des algorithmes de développement d'expressions algébriques, montre que la limite cherchée est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Proposition de scénario : avant d'entamer la démonstration, il pourrait être intéressant de proposer aux élèves un petit travail sur tableur :

➤ d'une part pour calculer par récurrence un certain nombre de termes de la suite de Fibonacci (par exemple les 101 premiers termes...)

➤ d'autre part pour calculer la valeur de l'expression :

$$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

pour $n = 0$ jusqu'à $n = 100$, par exemple... ce qui devrait amener la conjecture souhaitée et motiver les élèves à sa démonstration...

PROBLÉMATIQUE N° 7

**CHANGEMENTS
DE CADRE
ET DE REGISTRES**

GÉNÉRALITÉS

La résolution d'un problème nécessite fréquemment un –ou des- changements de **cadres**. Par ce terme, nous entendons, non seulement un domaine des mathématiques et les **concepts** qui lui sont associés, mais également les **relations** entre ces objets, ainsi que les **formulations** correspondantes : vocabulaire et syntaxe spécifiques à ce domaine. C'est ainsi, par exemple, que la résolution d'un même exercice de géométrie plane pourra faire intervenir, selon la stratégie de résolution envisagée :

- le cadre *vectorielle*
- le cadre de la *géométrie affine*
- le cadre de la *géométrie analytique*
- le cadre *algébrique* (en se plaçant dans \mathbb{C}), etc.

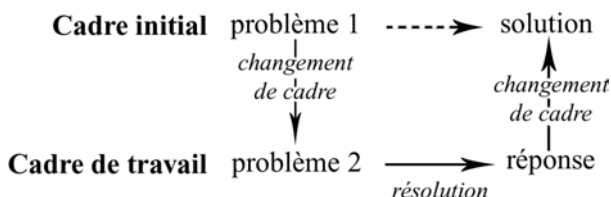
Les changements de cadres peuvent être :

- **objectifs** : lorsqu'ils sont nécessaires, ou imposés par l'énoncé (par exemple, si l'énoncé demande le lieu géométrique des points du plan complexe dont l'affixe vérifie une relation donnée, on sera nécessairement amené à effectuer des changements de cadres entre l'algébrique et le géométrique) ;

- **subjectifs** : le passage dans un autre cadre peut rendre – pour celui qui cherche – le problème plus aisé à résoudre, car il lui permet de se ramener à un domaine dans lequel il se sentira plus à l'aise, parce que ses connaissances y sont plus familières et/ou plus facilement exploitables (par exemple, dans la résolution d'un problème de géométrie dans l'espace, travailler dans un plan particulier (section) permet de réinvestir les connaissances de géométrie plane).

Ce second aspect présente un avantage du point de vue didactique : les connaissances visées par l'enseignant (qui se situent dans le cadre initial) vont pouvoir progresser en s'appuyant sur les connaissances de l'élève dans un –ou des – cadre(s) plus familier(s), le(s) changement(s) de cadres étant alors piloté(s) par le maître.

Cette démarche peut être schématisée par la figure suivante :



D'autre part, à l'intérieur d'un même cadre, les formulations relèvent de plusieurs **registres**, ayant leurs propres règles de fonctionnement ; on peut identifier en particulier, dans le discours mathématique :

- le registre de *la langue maternelle*
- le registre de *la langue mathématique*
- le registre du *langage symbolique*
- le registre *figural (géométrie) ...*
- les divers registres utilisant des *graphismes* (graphiques cartésiens, mais aussi arbres probabilisés, diagrammes de Venn, etc.) ...

Prenons l'exemple de la résolution d'un exercice de probabilités : l'énoncé peut consister en la description d'une situation en *langue naturelle* (lancer de dés, tirage de cartes dans un jeu ...), la consigne peut être formulée dans la *langue mathématique* (quel est la probabilité de tel événement ?), et la résolution utiliser un registre *graphique* (arbre probabilisé ou tableau à double entrée) et le *langage symbolique* (formule de la probabilité conditionnelle).

On retrouve souvent les mêmes registres dans les différents cadres, ce qui fait que registres et cadres apparaissent comme plus ou moins transversaux les uns aux autres : il existe un registre symbolique en analyse comme en algèbre ou en probabilités, et celles-ci, on vient de le voir, font usage des registres graphique, symbolique, etc.

Grâce aux allers et retours qu'ils permettent, l'intérêt des changements de registre est comparable à celui des changements de cadre en ce qui concerne **l'accès aux concepts mathématiques** ; c'est ainsi que le recours à une représentation graphique peut (selon un schéma analogue au précédent) faciliter le passage à l'écriture symbolique de l'encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles et des trapèze, et au-delà à l'idée de la convergence vers cette intégrale.

L'intervention de plusieurs cadres et/ou registres dans la résolution d'un problème peut également permettre un **contrôle** de la stratégie utilisée (par exemple, une vérification numérique ou une représentation graphique peuvent contrôler la résolution d'un système d'équations) ; elle peut aussi permettre d'**anticiper** ou de **conjecturer** (c'est le cas des outils graphiques en particulier).

Le passage d'un cadre (resp. registre) à un autre nécessite corrélativement une **reformulation** de l'énoncé, étape essentielle mais qui ne va pas toujours sans une distorsion plus ou moins importante ; les concepts ne se correspondent pas toujours de façon « naturelle », et il en est de même pour les langages associés (il n'y a pas

Problématique n° 7 - Généralités

« congruence » parfaite). C'est ainsi que des outils graphiques différents, bien qu'usuellement associés à un même concept mathématique, ne seront pas nécessairement interchangeables, et n'auront pas la même efficacité dans la résolution de tel ou tel type de problème (pour la probabilité conditionnelle, par exemple : séquentialité de l'arborescence vs non-séquentialité du diagramme de Carroll). Il importe donc que l'enseignant soit conscient de l'intérêt des changements de cadre et de registre et puisse les piloter à bon escient, mais aussi qu'il en connaisse les limitations éventuelles. Toutefois, si les changements de cadres et de registres présentent des difficultés qu'il faut bien sûr prendre en compte dans l'enseignement, ils constituent par contre un moteur puissant de l'apprentissage qui ne saurait être négligé.

Situations – Contenus – Démarches

Les listes qui suivent ne prétendent pas être exhaustives quant aux situations, aux contenus et aux démarches. Elles nécessitent d'être élargies, précisées et spécifiées à des niveaux de classe du second cycle, ainsi qu'à différentes filières.

Situations	Contenus	Démarches
<p>◆ Lecture critique d'un texte mathématique (énoncé de problème, extrait de manuel, texte historique, ...), suivie d'une discussion. <i>Exemple</i>: article "croix ou pile" de l'Encyclopédie.</p> <p>◆ Résolution mathématique d'un problème énoncé en langue naturelle ("word problem" des anglo-saxons). <i>Exemple</i>: problèmes de croisements de mobiles, problème de programmation linéaire.</p> <p>◆ Résolution d'un problème grâce à un ou plusieurs changements de cadres et/ou de registres (pilotés par l'enseignant ou imaginés par l'élève).</p>	<p>◆ Énoncé de géométrie ambigu (divers cas de figure), démonstration sujette à caution, erreur historique d'un mathématicien.</p> <p>◆ Exercice de probabilités : schéma d'urne, probabilité conditionnelle</p> <p>◆ Problème "concret" menant à utiliser l'algèbre, l'analyse ou la géométrie.</p> <p>◆ Problème de géométrie de l'espace dont la résolution fait intervenir la géométrie plane.</p> <p>◆ Problème de géomé-</p>	<p>◆ Extraire l'information pertinente dans un but d'argumentation. Mettre des éléments sous une autre forme, jugée plus apte à emporter la conviction (d'un autre ou de soi-même)</p> <p>◆ Passer au registre symbolique au cours de la démarche de modélisation (<i>cf. problématique n° 9</i>).</p> <p>◆ Changer de cadre ou de registre, dans le but de faciliter la résolution du problème, et revenir dans le cadre et le registre</p>

<p><i>Exemple : recherche de la section d'un cube par un plan, problème d'alignement, d'orthogonalité, de lieu, ...</i></p> <p>◆ Accès aux concepts d'analyse par le recours au registre graphique du cadre de la géométrie analytique.</p> <p><i>Exemple : introduction du nombre dérivé, introduction de l'intégrale définie.</i></p> <p>◆ <i>Exemple : problème de probabilités conditionnelles.</i></p>	<p>trie plane dont la résolution peut faire intervenir le vectoriel, les transformations, l'analytique, les complexes...</p> <p>◆ Situation d'analyse pour laquelle la visualisation permet de se représenter le problème et d'envisager une démarche de résolution (nombre dérivé et pente, intégrale et aire).</p> <p>◆ Construction et utilisation des tableaux de probabilités et des arbres pondérés, "lecture" de représentations graphiques de fonctions numériques.</p>	<p>initiaux pour contrôler la démarche de résolution réalisée ou en cours.</p> <p>◆ <i>(Pour le professeur)</i> Prendre appui sur un registre familier pour introduire un nouveau concept.</p> <p>◆ <i>(Pour le professeur)</i> Institutionnaliser les règles de fonctionnement de certains registres.</p>
---	---	--

1^{ère} S

*** 1 ***

On veut déterminer deux nombres positifs x et y tels que :

$$x - y = a \text{ et } x \times y = b^2$$

a et b étant eux-mêmes positifs donnés.

Donner une solution géométrique et une solution algébrique.

Remarque :

Solution algébrique :

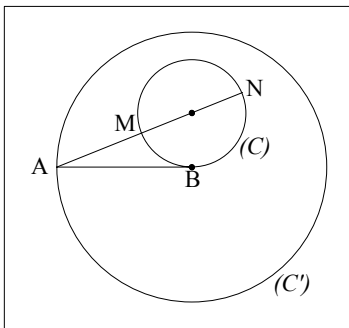
On reste dans le cadre algébrique.

Si les élèves ont déjà rencontré l'équation vérifiée par la somme et le produit de deux nombres, ils peuvent dire que x et $-y$ sont solution de l'équation $U^2 - SU + P = 0$ où $S = a$ et $P = -b^2$ (x étant bien sûr la solution positive et $-y$ la solution négative).

Mais ce point n'est plus au programme du lycée : il leur reste donc à procéder par substitution (par exemple $x = y + a$) qui les conduira également à la même équation du second degré.

Solution géométrique :

On passe du cadre algébrique au cadre géométrique.



On choisit un point B quelconque sur le cercle (C) de rayon $a/2$.

Le point A appartient à la tangente en B à (C) et au cercle (C') de centre B et de rayon b .

Alors $AN - AM = a$ et $AB^2 = b^2 = AM \times AN$

Il suffit donc de choisir : $AN = x$ et $AM = y$.

Commentaire : *Il serait intéressant de ne pas exiger la double solution et d'observer le choix spontané des élèves. Au cours d'une correction collective, on pourrait demander aux élèves quelle est celle qu'ils préfèrent et quelle est celle qui les convainc le mieux.*

Solution analytique :

En Terminale, on peut également penser à une solution de « type arabe » (cf. résolution des équations du troisième degré), en déterminant graphiquement x et y

à partir de l'intersection de l'hyperbole d'équation $xy = b^2$ et de la droite d'équation $y = x - a$.

3^{ème}, T^{ale} (ES, S)

*** 2 ***

Je pars à 7 heures de Nancy pour aller à Metz. Le lendemain, partant à la même heure de Metz, je reviens à Nancy par la même route.

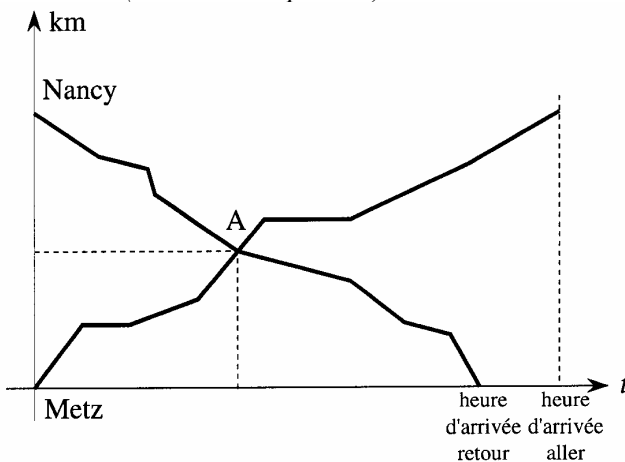
Y a-t-il un endroit où je passe à la même heure que la veille ?

Remarque :

Ce problème offre plusieurs approches qui mobilisent des concepts et des registres différents et qui peuvent emporter l'adhésion avec une force différente. La réponse positive semble pourtant assez invraisemblable, ce qui a la vertu de conduire à un conflit entre l'intuition et la raison. Citons quelques exemples de solution :

♦ (analyse) les équations horaires f et g correspondantes sont des fonctions continues. Il existe donc une valeur t telle que $f(t) - g(t) = 0$, puisque cette différence est de signes opposés entre l'heure de départ et celle d'arrivée ;

♦ (registre graphique) les deux graphiques horaires se coupent nécessairement en un point A qui a pour abscisse le moment où l'on repasse au même endroit que la veille (ordonnée du point A).



♦ (Changement de modèle) il suffit d'imaginer un véhicule partant le lendemain de Nancy à mon allure de la veille et à la même heure que moi qui pars de Metz. Il existe nécessairement un endroit où nous nous croisons (et donc à la même heure !).

2^{nde}, 1^{ère}

*** 3 ***



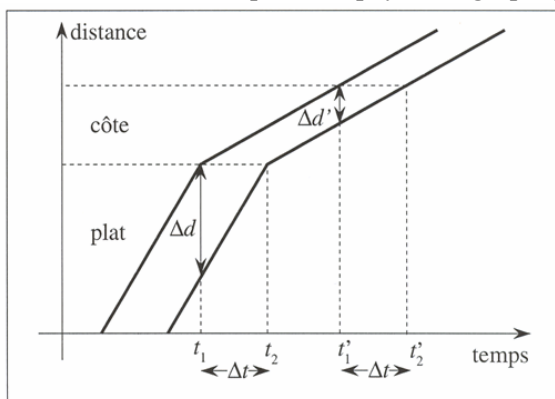
Deux coureurs cyclistes, roulant dans le même sens à une même vitesse uniforme, sont séparés sur le plat d'une certaine distance Δd et d'un certain temps Δt . Le premier aborde une montée et l'entreprend à une certaine vitesse qu'adopte ensuite le second, roulant donc à cette même allure dans la côte. Que deviennent les écarts de distance et de temps : sont-ils les mêmes que sur le plat, sont-ils différents ou bien l'un d'entre ces écarts seulement est-il le même ?

Remarque : *Ce problème est résoluble dans deux cadres au moins : le cadre algébrique et le cadre graphique (associé aux transformations). Le premier conduit à une mathématisation lourde et relativement complexe pour les élèves. Le second paraît plus lumineux et donc plus éclairant. Le graphique ci-dessous correspond aux deux coureurs dans deux situations différentes de course.*

Il est bien clair que la translation qui fait passer d'une courbe à l'autre est la même, cependant que les allures sont différentes. Par conséquent, l'écart en temps reste de même alors que l'écart en distance change : il diminue si la vitesse diminue. C'est pourquoi il est nécessaire de bien distinguer les deux types d'écart :

- l'écart de distance se mesure à un moment donné (on prend une photo depuis un hélicoptère)
- l'écart de temps se mesure en un lieu donné (on se place au bord de la route avec un chronomètre).

L'hypothèse d'uniformité de la vitesse est donnée pour simplifier le graphique mais elle est superflue car, si les vitesses aux mêmes endroits (configuration de la route) sont toujours identiques, les deux diagrammes horaires se déduiront encore l'un de l'autre par une translation.



*** 4 ***

Voici trois exercices qui, relativement à des problématiques différentes, mobilisent des démarches différentes et des cadres différents :

3^{ème}

A (cadre géométrique)

1° Problématique 2 (“ Etude de certaines configurations... ”)

Soient A, B, C et D quatre points du plan et I, J, K et L les milieux des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

2° Problématique 9 (“ Construction ou choix opportun et optimal ... sous contrainte ... ”)

Soient I, J, K et L quatre points du plan. A quelle condition existe-t-il un quadrilatère ABCD dont les milieux des côtés soient I, J, K et L ?

T^{le} S

B (changement de cadre algébrique → géométrique)

a, b, c et d sont quatre nombres complexes donnés.

1° Résoudre dans \mathbb{C} le système :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ z_2 + z_3 = 2b \\ z_3 + z_4 = 2c \\ z_4 + z_1 = 2d \end{cases}$$

2° Dans le plan, on donne quatre points A, B, C et D. A quelle condition existe-t-il un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, $[M_3M_4]$ et $[M_4M_1]$ soient A, B, C et D ?

2^{nde}, 1^{ère}, T^{le}

*** 5 ***

Etant donnés 3 entiers consécutifs non nuls, est-il possible que le cube du plus grand soit la somme des cubes des deux autres ?

Remarque : *A priori, ce problème relève du cadre arithmétique. On peut en effet répondre à la question posée en restant dans celui-ci ; par exemple en remarquant que :*

$$(n + 1)^3 = n^3 + (n - 1)^3 \Leftrightarrow n^3 - 6n^2 - 2 = 0 \text{ soit : } n^2 (n - 6) = 2 \quad (1)$$

3 solutions arithmétiques conviennent :

1° n^2 apparaît comme diviseur de 2. Ce ne peut être que 1 ou 2 qui ne satisfont pas l'équation.

2° Si $n > 6$, alors $n^2 (n - 6) > 36$ et si $n \leq 6$ alors $n^2 (n - 6) \leq 0$, donc (1) n'est pas satisfaite.

3° On a également : $n = 6 + \frac{2}{n^2}$. Or, 1 n'étant pas solution, pour toute valeur de n

> 1 , $\frac{2}{n^2}$ n'est pas entier.

En restant toujours dans le cadre arithmétique, on peut également, en Terminale S (spécialité), observer les restes modulo 4 :

n	Reste modulo 4			
	0	1	2	3
$(n - 1)^3$	3	0	1	0
n^3	0	1	0	3
$n^3 + (n - 1)^3$	3	1	1	3
$(n + 1)^3$	1	0	3	0

On peut alors constater qu'il n'y a jamais coïncidence dans les deux dernières lignes, et donc, a fortiori, qu'on n'aura jamais d'égalité.

Une solution algébrique est disponible dès l'étude des variations des fonctions. En effet, la fonction $f : n \mapsto n^3 - 6n^2 - 2$ ne s'annule sur \mathbf{R} qu'une fois. Mais $f(6) < 0$ et $f(7) > 0$. Donc le zéro de f n'est pas entier. Bien évidemment, un graphique soigné conduit au même résultat.

Cet exercice, proposé il y a quelques années dans un rallye de 2^{de} - 1^{ère}, a montré que les élèves de 1^{ère} utilisaient plus volontiers la solution dans le cadre graphique-algébrique, mais que le choix des nombres consécutifs n , $n + 1$ et $n + 2$ conduisait à des calculs plus complexes. Les élèves de Seconde, privés de la connaissance de la dérivée, tentent généralement une solution arithmétique.

*** D'autres suggestions ***

On peut voir apparaître des changements de registres ou de cadres en bien d'autres occasions. Par exemple :

- l'étude des suites de Fibonacci : problème des lapins, rectangle d'or, étude de la convergence, équation caractéristique ...

- l'approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton : approche graphique, suite récurrente ;

- l'approximation de \sqrt{a} par l'algorithme babylonien : $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$:

application de la méthode de Newton à l'équation $x^2 - a = 0$...

Situations didactiques développées

A

Un exemple de mise en œuvre des changements de cadres et de registres **L'introduction du nombre dérivé en classe de Première**

Cette séquence a été expérimentée en classe de Première ES. Le texte ci-dessous prend en compte les enseignements de cette expérimentation.

1 – Idée générale

Il s'agit d'introduire le nombre dérivé de la fonction f en x_0 comme coefficient directeur, non pas de la position limite d'une sécante à la courbe de f pivotant autour du point $(x_0 ; f(x_0))$, mais de la meilleure approximation affine de f en x_0 . Cette approche d'un concept d'analyse fait jouer un rôle primordial à la géométrie analytique.

2 – Pré-requis

- détermination des bornes d'un intervalle réel de centre et de taille donnés,
- limite d'une fonction en un point,
- détermination du coefficient directeur d'une droite passant par deux points de coordonnées données,

- programmation de la calculatrice graphique pour afficher une courbe d'équation $y = f(x)$ dans une fenêtre donnée.

3 – Déroulement de la séquence

1^{er} tableau : Les élèves sont répartis en groupes de 3 ou 4, chaque groupe disposant d'une calculatrice graphique au moins.

La consigne est de *représenter graphiquement la fonction* $f: \mapsto -\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$ dans une fenêtre orthonormale de la calculatrice, centrée sur le point A de la courbe de coordonnées $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ et de largeur 6

On commence par une étude qualitative. La consigne est ensuite de *rétrécir* cette fenêtre *ad libitum*, mais en la centrant toujours sur le point A, et d'observer les modifications correspondantes de l'arc de courbe affiché. Le seul paramètre sur lequel peuvent jouer les élèves est la largeur de la fenêtre.

En fait, les élèves remarquent que, lorsque la fenêtre rétrécit, la "courbure" diminue (la courbe "se redresse"), et que l'arc de courbe observable finit par ressembler à un segment de droite : pour une fenêtre suffisamment petite, la courbe se confond pratiquement avec une droite.

N.B. 1) Une petite mise au point sur la façon d'obtenir une fenêtre orthonormée centrée sur A est nécessaire. En effet, certaines calculatrices ne proposent rien de simple pour obtenir une telle fenêtre.

2) On peut, bien sûr, prendre un autre type de fonction, mais en évitant toutefois les fonctions trinômes du second degré. En effet, celles-ci possèdent la propriété que, pour tout réel h : $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$, propriété qui peut se révéler gênante dans certaines procédures des élèves (2^{ème} tableau ci-après) pour les amener à chercher une *limite*.

2^{ème} tableau : On se propose maintenant d'effectuer une étude quantitative : *il s'agit de déterminer une équation de "droite" affichée sur l'écran de la calculatrice*. Pour cela, il suffira de trouver son coefficient directeur, puisqu'on sait qu'elle passe par le point A $\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

On distribue alors aux groupes un tableau dans lequel sont indiquées différentes largeurs de fenêtres, de plus en plus petites. Il s'agit, pour chacune des fenêtres correspondantes :

1° d'afficher la courbe,

2° de déterminer le coefficient directeur de la "droite" qui s'affiche.

Diverses stratégies apparaissent pour résoudre cette question :

a) *en ce qui concerne les points choisis pour déterminer le coefficient directeur :*

- certains élèves prennent deux points quelconques, dont ils déterminent les coordonnées par l'un des deux procédés indiqués ci-après ; les abscisses de ces points peuvent éventuellement être les bornes de la fenêtre ;

- certains choisissent systématiquement pour abscisses les bornes de la fenêtre ;

- certains utilisent le point A comme l'un des deux points.

b) *en ce qui concerne la détermination des coordonnées de ces points :*

- certains élèves utilisent la fonction TRACE de leur calculatrice, qui indique les coordonnées d'un point choisi de la courbe, mais les arrondit parfois ; dans ce cas, le coefficient directeur trouvé, dépendant de cet arrondi, n'est qu'approximatif.

- certains calculent l'ordonnée en utilisant la fonction f , obtenant ainsi une valeur exacte.

Ces stratégies diverses et variées deviennent source de conflit au sein de certains groupes : quelle est la bonne méthode ? Une courte phase collective de débat sur la question de l'arrondi permet de régler le problème de d'opter pour le *calcul* de l'ordonnée.

La mise en commun montre que les groupes (et même parfois différents individus au sein d'un même groupe) ont obtenu, pour le coefficient directeur, des valeurs différentes, quoique « voisines », et que, pour une même méthode, des fenêtres différentes donnent des valeurs différentes. Par exemple :

a) Si on prend le point $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ et un autre point, celui d'abscisse 2,01 :

on a $f(2,01) = 1,48989975$. D'où la valeur $-1,010025$.

b) Si on prend le point $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ et un autre point, celui d'abscisse 1,995 :

on a $f(1,995) = 1,504975031$. D'où la valeur $-0,9950062$.

c) Si on prend les points d'abscisses 1,99 et 2,01 : on a $f(1,99) = 1,50990025$ et $f(2,01) = 1,48989975$. D'où la valeur : $-1,000025$.

En résumé, *on obtient dans tous les cas des valeurs voisines de -1* . Mais y a-t-il réellement une valeur limite ? On peut certes le conjecturer, mais ce n'est pas suffisant.

3^{ème} tableau : La diversité des tailles de fenêtres, de même que la constatation du fait que “ plus la fenêtre est petite, plus la courbe est droite”, conduit, après débat, à

la recherche de la pente en s'appuyant, d'une part sur le point $A\left(2; \frac{3}{2}\right)$ qui est indépendant de la fenêtre considérée, et d'autre part sur un point M "très voisin" de A.

On aboutit, après débat, à la consigne suivante : *Soit M le point de la courbe d'abscisse $2 + h$ (avec h "petit"). Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM).*

Le calcul donne la valeur $-\left(1 + h + \frac{h^2}{4}\right)$, qui est "à la limite" égale à -1 .

4^{ème} tableau : Ayant ainsi caractérisé la droite qui se confond pratiquement avec la courbe au "voisinage" du point A, on peut maintenant chercher son équation et la faire afficher par la calculatrice, conjointement avec la courbe, dans la fenêtre initiale $[-1 ; 5]$; on constate alors :

1° qu'elle "frôle" cette courbe, mais que la presque coïncidence n'est que locale ;

2° qu'elle recoupe la courbe en un second point, B $\left(-2; \frac{11}{2}\right)$.

Vient ensuite l'institutionnalisation ; dans laquelle on considère une fonction f quelconque et un point d'abscisse x_0 , un coefficient directeur $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$,

le problème de l'existence, la définition, etc.

4 – Analyse de cette séquence du point de vue des cadres et des registres

L'apprentissage visé est relatif au cadre de l'analyse réelle (nombre dérivé d'une fonction en un point), et plus précisément à celui des fonctions réelles d'une variable réelle. Cependant, le premier tableau, dans lequel est posé le problème, se situe dans le cadre de la géométrie repérée (analytique) ; la raison en est que le registre graphique de ce cadre permet aux élèves de se faire une représentation forte à composante visuelle de ce problème (au voisinage d'un point, la courbe est "presque" une droite), à l'aide d'une activité qui est, elle aussi, de nature essentiellement graphique (modifier la fenêtre de la calculatrice et observer ce qui se passe).

Le deuxième tableau se situe, lui aussi, dans ce même cadre de la géométrie analytique (coefficient directeur d'une droite définie par deux points), et fait intervenir, en plus du registre graphique, le registre numérique (coordonnées des points), par une succession de va-et-vient, puis le registre symbolique (formule

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ permettant le calcul du coefficient directeur). On a ici le schéma

suivant :

Registre	<i>graphique</i>	\leftrightarrow	<i>numérique(\mathbb{R}^2)</i>	\rightarrow	<i>symbolique + numérique</i>
Démarches	repérage des points à utiliser		détermination des coordonnées		détermination du coefficient directeur

(N.B. : le passage du registre graphique au registre numérique est facilité par la calculatrice (qui fournit les coordonnées d'un point choisi), mais celle-ci peut cependant se révéler obstacle à la résolution du problème (arrondis) ; il convient donc d'être vigilant).

L'insuffisance des résultats numériques trouvés (pentes différentes quoique voisines), ainsi que le contrat didactique habituel en mathématiques, amènent les élèves à rechercher une justification (troisième tableau), et à se poser ainsi un nouveau problème, situé cette fois dans le cadre de l'analyse réelle (existence et valeur d'une limite), par une référence au registre graphique du cadre analytique (influence de la taille de la fenêtre) ; le travail est dorénavant placé dans le registre symbolique (recherche de la limite de $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0).

Pour répondre à la question initialement posée, il s'agira ensuite, par un retour au cadre de la géométrie analytique, d'interpréter cette limite comme étant "la vraie pente" de la droite approximant la courbe, et de revenir finalement au registre graphique (quatrième tableau) pour faire dessiner cette droite (tangente), afin de contrôler ainsi à la fois le résultat du calcul symbolique et le fait que l'on a bien répondu à la question posée.

La progression de la séquence peut donc être schématisée de la façon suivante :

<u>Cadres</u>	analyse	\rightarrow	analytique	\rightarrow	analyse	\rightarrow	analytique
			<i>graphique</i>				
<u>Registres</u>	<i>symbolique</i>		<i>numérique</i>		<i>symbolique</i>		<i>symbolique</i>
			<i>symbolique</i>				<i>graphique</i>
<u>Démarches</u>			observation de la courbe, calcul des coef. dir.		recherche d'une limite		tangente à la courbe

On voit que ce qui permet aux élèves de progresser dans leur démarche, c'est bien sûr la possibilité d'effectuer un travail véritable dans un cadre et un registre donnés, mais aussi :

1° l'existence d'un cadre et d'un registre d'appui (ici : le cadre de la géométrie analytique, et le registre graphique) qui permettent, non seulement – et ce n'est pas négligeable – d'établir un lien entre différents aspects du concept visé (ici : nombre dérivé et tangente), mais aussi de faciliter les conjectures, de donner du sens aux actions effectuées et de contrôler celles-ci.

2° l'insuffisance du travail dans un seul cadre et dans un seul registre, car la démarche induit des questions qui ne peuvent être résolues que par le recours à un autre cadre (ici : l'analyse) et/ou à un autre registre (ici : le registre symbolique). En fait c'est, dans une large mesure, cette succession de changements et ces va-et-vient qui constituent l'élément moteur de la démarche, et lui permettent d'aboutir.

B

Un exemple d'exercice de géométrie plane permettant l'intervention de divers cadres

Soit dans le plan un quadrilatère convexe ABCD. On désigne par M, N, P, Q les centres des carrés construits extérieurement à ce quadrilatère, respectivement sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Démontrer que les segments [MP] et [NQ] sont perpendiculaires et de même longueur.

Première solution :

1 – Lemme : Soient, dans un plan euclidien orienté, deux points distincts A et B. On désigne par r_1 (resp. r_2) la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre A (resp. B). Alors $r_2 \circ r_1$ est la symétrie de centre Ω , le point Ω étant le centre de la rotation $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

En effet, l'isométrie $S = r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, c'est-à-dire une symétrie centrale. Soient Ω et Ω' les points tels que le quadrilatère $A\Omega B\Omega'$ soit un carré de sens direct. On a $r_1(\Omega) = \Omega'$ et $r_2(\Omega') = \Omega$; donc Ω , invariant par S , est le centre de cette symétrie.

2 – *Preuve* : Orientons le plan de façon que le quadrilatère ABCD soit de sens direct. Appelons r_M (resp. r_N, r_P, r_Q) la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre M (resp. N, P, Q).

D'après le lemme, l'isométrie $r_M \circ r_N$ est une symétrie centrale ; d'autre part, elle transforme C en A, donc son centre est le milieu I de [AC]. Et, toujours d'après le lemme, la rotation ρ de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme N en M.

De même, l'isométrie $r_P \circ r_Q$ est la symétrie centrale qui transforme A en C, donc son centre est I, et la rotation ρ transforme Q en P.

Finalement, on a $\rho([NQ]) = [MP]$, ce qui prouve le résultat.

Deuxième solution :

Plaçons-nous dans le plan complexe, et désignons l'affixe d'un point noté par une lettre majuscule par la lettre minuscule correspondante. Supposons, par exemple, le quadrilatère ABCD de sens direct. On a par hypothèse :

$$(1) \quad a - m = i(b - m)$$

$$(2) \quad b - n = i(c - n)$$

$$(3) \quad c - p = i(d - p)$$

$$(4) \quad d - q = i(a - q)$$

On en déduit :

$$(3) - (1) \quad (m - p)(1 - i) = (a - c) - i(b - d)$$

$$(4) - (2) \quad (n - q)(1 - i) = (b - d) + i(a - c)$$

En remarquant que $(b - d) + i(a - c) = i[(a - c) - i(b - d)]$, on obtient finalement $n - q = i(m - p)$, soit : $z(\overrightarrow{QN}) = i.z(\overrightarrow{PM})$, ce qui prouve le résultat.

Troisième solution

Cette solution faisant intervenir une transformation vectorielle, elle n'est pas utilisable telle quelle en Terminale. Il conviendrait d'opérer un changement de cadre pour passer du plan vectoriel au plan affine pointé, ce qui permettrait d'utiliser une rotation « ordinaire ». Mais cela ôte beaucoup de l'élégance de cette démonstration, plutôt destinée aux candidats au CAPES ...

On suppose le quadrilatère ABCD direct. La relation de Chasles donne :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}.$$

D'où, en additionnant :

$$2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}.$$

Considérons maintenant la rotation vectorielle r d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} r(\overline{MA}) &= \overline{BM} ; r(\overline{AQ}) = \overline{DQ} ; r(\overline{QD}) = \overline{AQ} ; r(\overline{DP}) = \overline{CP} ; \\ r(\overline{MB}) &= \overline{MA} ; r(\overline{BN}) = \overline{NC} ; r(\overline{NC}) = \overline{NB} ; r(\overline{CP}) = \overline{PD} . \end{aligned}$$

D'où, en reportant dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned} 2r(\overline{MP}) &= \overline{BM} + \overline{DQ} + \overline{AQ} + \overline{CP} + \overline{MA} + \overline{NC} + \overline{NB} + \overline{PD} \\ &= (\overline{NB} + \overline{BM} + \overline{MA} + \overline{AQ}) + (\overline{NC} + \overline{CP} + \overline{PD} + \overline{DQ}) \\ &= 2\overline{NQ} . \end{aligned}$$

Il en résulte $r(\overline{MP}) = \overline{NQ}$, ce qui prouve le résultat.

Quatrième solution :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct. Nous convenons de noter

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ les coordonnées du point désigné par X. Le point M étant l'image de A dans

la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$,

on a :
$$\begin{pmatrix} m_1 - b_1 \\ m_2 - b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} .$$

D'où :
$$\begin{cases} 2m_1 = a_1 - a_2 + b_1 + b_2 \\ 2m_2 = a_1 + a_2 - b_1 + b_2 \end{cases}$$

On obtient (permutation) des formules analogues pour P :

$$\begin{cases} 2p_1 = c_1 - c_2 + d_1 + d_2 \\ 2p_2 = c_1 + c_2 - d_1 + d_2 \end{cases}$$

D'où l'on déduit :
$$2\overline{MP} \begin{pmatrix} (c_1 - a_1) + (d_1 - b_1) - (c_2 - a_2) + (d_2 - b_2) \\ (c_1 - a_1) - (d_1 - b_1) + (c_2 - a_2) + (d_2 - b_2) \end{pmatrix}$$

Et de même :
$$2\overline{NQ} \begin{pmatrix} (d_1 - b_1) + (a_1 - c_1) - (d_2 - b_2) + (a_2 - c_2) \\ (d_1 - b_1) - (a_1 - c_1) + (d_2 - b_2) + (a_2 - c_2) \end{pmatrix}$$

Ou encore, en posant $\alpha = c_1 - a_1$, $\beta = d_1 - b_1$, $\gamma = c_2 - a_2$, $\delta = d_2 - b_2$:

$$2\overline{MP} \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma + \delta \\ \alpha - \beta + \gamma + \delta \end{pmatrix} \text{ et } 2\overline{NQ} \begin{pmatrix} -\alpha + \beta - \gamma - \delta \\ \alpha + \beta - \gamma + \delta \end{pmatrix} ,$$

d'où l'on tire finalement :

$$4\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{NQ} = (\beta - \gamma)^2 - (\alpha + \delta)^2 + (\alpha + \delta)^2 - (\beta - \gamma)^2 = 0,$$

ce qui prouve le résultat.

Analyse de l'exercice et des solutions

1 – l'**énoncé** se situe dans le cadre de la géométrie ponctuelle euclidienne plane. Il fait intervenir divers objets de ce cadres (points, segments, polygones, ...), ainsi que des relations entre ces objets : perpendicularité (droites, segments), égalité de longueur (segments), topologie usuelle (convexité, extérieur)... Quant aux formulations associées, elles relèvent de deux registres sémiotiques distincts : celui de la langue mathématique (proche de la langue naturelle, mais offrant des particularités sémantiques et syntaxiques), et celui de l'écriture symbolique (notation des objets géométriques).

Passons maintenant en revue les diverses solutions, et voyons quels sont les cadres et registres qui interviennent, et comment ils se situent les uns par rapport aux autres.

- 2 – Avec la **première solution**, on reste dans le cadre initial, mais on introduit :
- a) de *nouveaux objets* de ce cadre (rotations, angles « orientés »)
 - b) de *nouvelles relations* (addition d'angles, composition de rotations, images d'un point et d'un segment par une rotation)
 - c) de *nouvelles formulations*, associées à ces objets et à ces relations.

Ces formulations font intervenir, outre la langue mathématique, un *nouveau registre* : le registre graphique. Il s'agit d'une « figure » (dessin) qui apparaît comme un support quasiment incontournable (du moins pour les élèves) permettant non seulement de visualiser et de synthétiser la situation géométrique, mais également de contrôler la vraisemblance du résultat à démontrer et des étapes intermédiaires (rôle important, mais insuffisamment pris en compte dans l'enseignement). De plus, le registre symbolique inclut maintenant les écritures algébriques associées aux opérations sur les angles et les rotations.

3 – La deuxième solution conserve le cadre initial (points, polygones, rotations) dans lequel on fait intervenir le registre graphique (cf. ci-dessus), mais introduit également *deux nouveaux cadres* : celui des nombres complexes et celui des vecteurs. D'où :

- de *nouveaux objets* : nombres complexes (affixes), vecteurs (images vectorielles), matrices de rotation ;
- de *nouvelles relations* : opérations sur les complexes et sur les vecteurs ;
- de *nouvelles formulations* qui se situent dans registre symbolique.

On utilise également des correspondances permettant de relier ces trois cadres : point \leftrightarrow vecteur, point \leftrightarrow affixe, vecteur \leftrightarrow affixe, rotation \leftrightarrow relations sur les affixes.

N.B. : en fait, on travaille ici dans le *plan d'Argand-Cauchy*, isomorphe à l'espace vectoriel euclidien réel des complexes (et donc au plan affine euclidien pointé), dans lequel les changements de cadres sont très vite institutionnalisés dans l'enseignement de Terminale.

4 – Dans la **troisième solution** on passe, presque dès le départ, dans le *cadre vectoriel*, ce qui fait intervenir :

- de *nouveaux objets* : vecteurs, normes, rotations vectorielles, angles ;
- de *nouvelles relations* : relation de Chasles, opérations sur les vecteurs, linéarité des rotations, ...
- de *nouvelles formulations*, appartenant toujours au cadre symbolique.

La nécessaire correspondance avec le cadre initial est ici assurée par la relation canonique entre plan ponctuel et plan vectoriel, ce qui permet en outre le recours au registre graphique.

5 – La **quatrième solution** nous fait travailler dans le cadre de la géométrie analytique, qui contient les cadres ponctuel et vectoriel, auxquels vient s'adjoindre un registre numérique particulier, \mathbf{R}^2 ;

- *objets nouveaux* : coordonnées, produit scalaire ;
- *relations nouvelles* : opérations sur les coordonnées.

Le registre de la langue mathématique est très vite abandonné et laisse la place aux registres graphique (figure) et symbolique (calculs sur les coordonnées).

Correspondance entre les trois cadres :

point \leftrightarrow vecteur, point \leftrightarrow coordonnées, vecteur \leftrightarrow coordonnées.

II – Analyse

1 – En ce qui concerne les **cadres** qui interviennent dans l'énoncé ainsi que dans les différentes solutions, on peut rassembler les observations ci-dessus dans le tableau suivant :

	énoncé	1 ^{ère} solution	2 ^{ème} solution	3 ^{ème} solution	4 ^{ème} solution
géométrie ponctuelle	X	X	X	X	X
géométrie vectorielle			X	X	X
géométrie analytique					X
nombres complexes			X		

Problématique n° 7 - Problèmes

On s’aperçoit que, à l’exception de la première, les solutions envisagées font intervenir au moins deux cadres différents, si ce n’est trois : il y a en effet fréquemment nécessité de changer de cadre par rapport au cadre initial, et ceci essentiellement pour deux raisons possibles (et non exclusives l’une de l’autre) :

- l’impossibilité apparente d’envisager une solution se situant entièrement au sein du cadre initial ;
- l’impression que le fait de “basculer” dans un cadre qui paraît mieux adapté va faciliter l’élaboration d’une solution (en particulier parce que le champ de connaissances dans ce nouveau cadre est plus vaste et/ou mieux structuré).

On voit ainsi le rôle essentiel que joue les changements de cadre – qui, éventuellement, peuvent être “pilotes” par l’enseignant – dans la résolution des problèmes.

2 – Si nous passons aux registres, nous obtenons cette fois le tableau suivant :

	énoncé	1 ^{ère} solution	2 ^{ème} solution	3 ^{ème} solution	4 ^{ème} solution
langue mathématique	X	X	X	X	X
graphique		X	X	X	X
symbolique	X	X	X	X	X

Ce tableau donne *a priori* l’impression d’une grande uniformité, car toutes les solutions font intervenir les trois registres ; mais cette uniformité n’est qu’apparente, car ces registres n’interviennent pas avec la même importance. Ainsi, la langue mathématique apparaît comme le registre essentiel dans la première solution, et l’écriture symbolique – si l’on excepte la notation des objets – n’est ici qu’une notation commode dont on pourrait, à la rigueur, se passer (écrire “la composée de r_1 par r_2 ” au lieu de “ $r_2 \circ r_1$ ”, “l’image de Ω par r_1 est Ω' ” au lieu de “ $r_1(\Omega) = \Omega'$ ”, etc.). par contre, c’est le registre symbolique qui apparaît comme fondamental dans les autres solutions, puisque ce sont ses propres règles de fonctionnement (i.e. sa “syntaxe” particulière) qui, une fois opérée la “conversion” des registres (Duval), vont permettre de parvenir à la solution.

Mais il ne faudrait pas pour autant négliger le rôle central joué par le registre *graphique* qui, comme on l’a dit plus haut, fournit une “vue” synthétique de la situation, permettant peut-être de s’orienter vers un nouveau cadre jugé plus intéressant, et aussi, par un “retour au sens”, de contrôler à divers moments de la résolution la vraisemblance des résultats intermédiaires obtenus (ici, par exemple : sens des angles, rapport des longueurs, signes des coordonnées, etc.).

3 – Quant à l’articulation entre registres et cadres, les deux tableaux qui précèdent permettent de constater la **transversalité** des uns par rapport aux autres, puisque, quel que soit le cadre envisagé, les formulations font intervenir à la fois le registre de la langue maternelle et celui de l’écriture symbolique.

Ici encore la position du registre graphique est particulière, étant donné qu’il est canoniquement lié au cadre de la géométrie ponctuelle, et que son utilisation – par exemple comme élément de contrôle des opérations effectuées dans le registre symbolique – est tributaire de la correspondance établie entre le cadre de travail – par exemple les nombres complexes – et le cadre de la géométrie ponctuelle.

Ainsi (2^{ème} solution), pour contrôler sur la figure la vraisemblance de la relation $n - q = i(m - p)$, on repasse dans le cadre ponctuel et on y interprète cette relation dans le registre symbolique de ce cadre (à savoir : $NQ = MP$ et $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}) = \frac{\pi}{2}$).

Mais ce passage n’est possible que grâce à une correspondance opératoire (“homomorphisme” de Vergnaud, “congruence” de Duval) entre deux cadres concernés.

Un exemple en probabilités¹

Dans un jeu forain, on dispose de trois boîtes d’apparence identique. Elles contiennent respectivement un, deux et trois papiers ; dans chacune des boîtes, un seul papier est marqué.

Une partie consiste pour un joueur à désigner au hasard une boîte et à tirer également au hasard un papier de cette boîte.

Si le papier est marqué, le joueur reçoit un bon.

(...) Lors d’une partie, calculer la probabilité pour que le papier tiré soit marqué.

(d’après Baccalauréat A₁B Bordeaux, juin 1989)

L’expérience aléatoire ici décrite consiste :

- 1° à désigner une boîte “au hasard” ;
- 2° à tirer de cette boîte un papier “au hasard” .

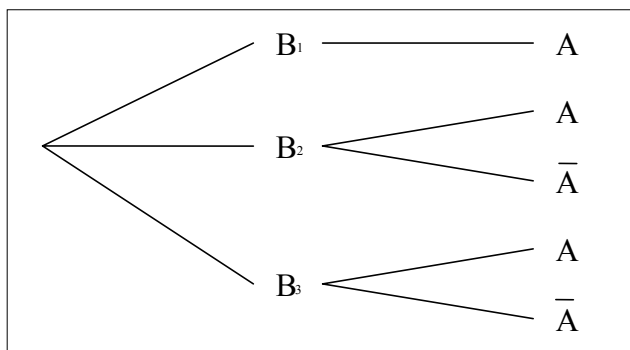
¹ Ce paragraphe est extrait de B. Parzys : *L’articulation des cadres et des registres en probabilités : le cas des arbres et des tableaux*, in *Enseigner les probabilités au lycée*, publication collective de la commission Inter-IREM de Probabilités et Statistique. Ed. ADIREM

Problématique n° 7 - Problèmes

Une stratégie possible de résolution peut consister, par exemple :

- à *numéroter* les boîtes ;
- à *définir* des événements : A : “tirer un papier marqué”
 B_i (i = 1, 2, 3) : “désigner la boîte n° i”.

3° A *visualiser* la situation par un arbre des possibles :

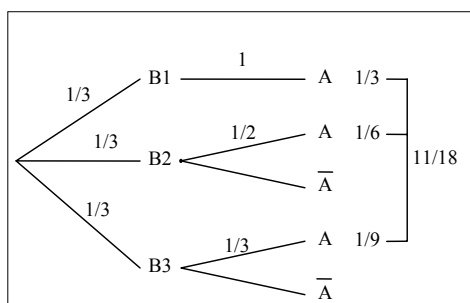


(N.B. : \bar{A} désigne l'événement contraire de A).

4° à poursuivre la modélisation en *convertissant* les données de l'énoncé dans le registre symbolique, et en faisant les hypothèses d'équiprobabilité suggérées par l'expression “au hasard” (et aussi en utilisant de façon plus ou moins implicite un certain nombre de “règles”, qui peuvent être des règles d'action ou des théorèmes).

On peut ainsi obtenir : $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$
 $P(A|B_1) = 1$; $P(A|B_2) = 1/2$ et $P(A|B_3) = 1/3$.

On pourra ensuite, soit rester dans le registre symbolique et y opérer un *traitement* (à l'aide de formules du type $P(A \leftrightarrow B) = P(A|B) \times P(B)$ et probabilités totales), soit reporter ces nombres dans l'arbre (*conversion*) pour en faire un arbre de probabilités, et opérer un *traitement* au sein de ce dernier registre :



Enfin, la dernière étape consistera à énoncer : “ Lors d'une partie, la probabilité pour que le papier soit marqué est de $\frac{11}{18}$.”

N.B. : les nouveaux programmes stipulent qu'un arbre correctement utilisé a valeur de preuve, sans qu'il soit nécessaire de revenir au langage symbolique. Cependant, ce retour permet de donner du sens aux formules et il peut être utile, à l'occasion, de l'effectuer.

Grosso modo, on peut donc schématiser la résolution de ce problème par le tableau suivant, en faisant intervenir cadres et registres² :

	situation-problème	→ stratégie de résolution	→ solution
Domaine concerné	“réalité”	cadre probabiliste	“réalité”
Registres associés	langagier	langagier + symbolique + arbres pondérés	langagier

Remarque : Les arbres pondérés peuvent tout aussi bien s'utiliser dans le cadre statistique, en remplaçant les probabilités par des fréquences ; on peut même utiliser des effectifs, en considérant un échantillon “idéal” de la population considérée.

Ces « glissements » successifs d'un cadre à un autre, via l'utilisation d'arbres se déduisant les uns des autres (effectifs → fréquences → probabilités), peuvent d'ailleurs – à condition que le changement de cadre soit clairement explicité – constituer un bon accès à la notion de probabilité conditionnelle. Il faudra toutefois prendre garde au danger de renforcer ainsi une conception réductrice (« cardinaliste ») de cette notion³, ce qui peut être pallié en ne travaillant que de façon transitoire sur les effectifs et en passant rapidement aux fréquences, puis aux probabilités, et/ou en étudiant des situations dans lesquelles le recours aux effectifs est malaisé, voire peu pertinent.

² Les guillemets autour du mot réalité signifient que la situation réelle est peu ou prou simplifiée par la description qui en est donnée ; ce n'est pas encore un modèle au sens mathématique, mais ce n'est plus tout à fait la réalité, car la description en langue naturelle n'a conservé que les éléments jugés pertinents pour la finalité envisagée.

M. Henry parle à ce propos d' « une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. » (M. Henry : L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, in *Repères-IREM* n° 36, p.28).

³ Gras, R. et Totohasina, A. (1995) : Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle, in *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 15-1, pp. 49-95.

D

Un autre exemple en probabilités : le « spaghetti coupé en trois »

Sur un segment $[AB]$ de longueur unité, on prend aléatoirement deux points M et N (appelant M le point le plus proche de A). Avec quelle probabilité les longueurs AM , MN et NB sont-elles celles des côtés d'un triangle ?

N.B. : *Il existe diverses variantes de ce problème, qui peuvent conduire à des modélisations différentes⁴. Mais nous voudrions ici nous placer dans le cas d'une unique modélisation (celle suggérée par l'énoncé ci-dessus) et montrer comment le recours à des changements de cadres peut conduire, d'une part à une solution, d'autre part à une "exploration" de diverses interprétations de cette situation qui permettra de confronter divers "éclairages" sur le problème.*

a) Simulation. Si on n'a aucune idée de la réponse, on peut, dans un premier temps, avoir recours à une simulation "au tableur", en suivant l'énoncé d'aussi près que possible et en utilisant la caractérisation "basique" du triangle : *la longueur du plus grand segment est inférieure à la somme des deux autres*. Dans le tableau, on pourra alors mettre :

colonne A : un premier nombre aléatoire, compris entre 0 et 1 ;

colonne B : un second nombre aléatoire, compris entre 0 et 1 ;

colonne C : $\min(A, B)$, longueur du premier segment ;

colonne D : $\max(A - B, B - A)$, longueur du deuxième segment.

Puisque la somme des longueurs des trois segments est égale à 1, on a alors :

colonne E : $1 - \max(A, B)$, longueur du troisième segment ;

colonne F : $\max(C, D, E)$, longueur du plus grand segment ;

colonne G : $1 - F$, somme des longueurs des deux autres segments ;

colonne H : test pour savoir si F est plus petit que G .

⁴ Voir par exemple l'article « Simulation et modélisation. Etude d'un exemple », par Joëlle FONTANA et Maryse NOGUES, in *Repères-IREM* n° 46 (janvier 2002), p. 39-50.

Voici un exemple de ce qu'on obtient :

A	B	C	D	E	F	G	H
0,36482662	0,258553741	0,258553741	0,108928921	0,632517338	0,632517338	0,367482662	0
0,400601443	0,518102941	0,400601443	0,117501498	0,481897059	0,481897059	0,518102941	1
0,500312112	0,776574485	0,500312112	0,276262374	0,223425515	0,500312112	0,4996587888	0
0,949346817	0,746417042	0,746417042	0,202929775	0,050653183	0,746417042	0,253582958	0
0,77309583	0,785475629	0,77309583	0,012379799	0,214524371	0,77309583	0,22690417	0

Il n'y aura plus alors qu'à faire le quotient du nombre de succès dans la colonne H par le nombre d'essais pour avoir la fréquence de succès.

[A titre indicatif, dix simulations de 10 000 essais avec Excel ont fourni les résultats suivants : 0,2494 ; 0,2562 ; 0,2451 ; 0,2509 ; 0,2515 ; 0,2428 ; 0,2509 ; 0,2484 ; 0,2493 ; 0,2570.

Moyenne sur l'ensemble des 100 000 résultats : 0,2502].

b) Modélisation. Les abscisses x et y ($x \leq y$) des deux points de subdivision M et N sont deux nombres aléatoires de $[0 ; 1]$. La simulation a permis de voir qu'on aura à résoudre des inéquations. Si on veut, comme plus haut, déterminer le plus grand des trois segments, on va avoir à résoudre un grand nombre d'inéquations et à distinguer trois cas. Il est plus simple de ne pas se poser la question et de caractériser le triangle par la condition : *la longueur de chaque segment est inférieure à la somme de celle des deux autres*.

On va donc déterminer la probabilité que les trois nombres x , $y - x$, $1 - y$ vérifient les trois inégalités triangulaires suivantes :

$$\begin{cases} x \leq (y - x) + (1 - y) \\ y - x \leq x + (1 - y) \\ 1 - y \leq x + (y - x) \end{cases}$$

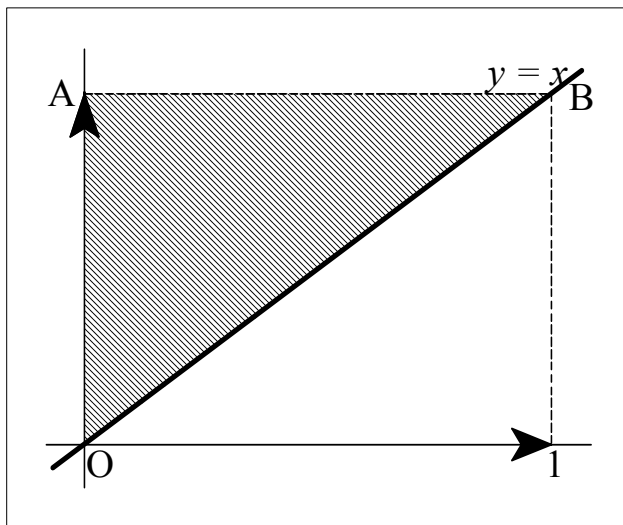
c) (Début de) résolution algébrique. Après réduction, le système ci-dessus est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ y \leq x + \frac{1}{2} \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

d) Première interprétation graphique. Le système précédent peut faire penser à un régionnement du plan. En fait, il s'agira ici d'un régionnement d'une partie du

Problématique n° 7 - Problèmes

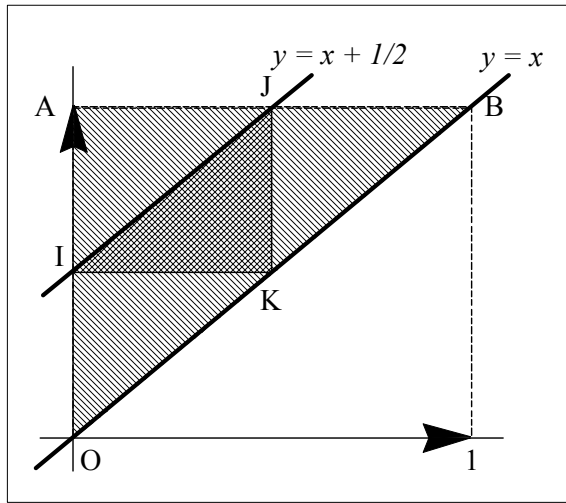
plan, puisque x et y appartiennent à $[0 ; 1]$ et que $x \leq y$. Soit donc, dans un repère cartésien⁴ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, le point $M(x, y)$. Par définition de x et y , le point M appartient au triangle OAB délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 0$ et $y = 1$:



En complétant ce graphique par les droites d'équations : $x = \frac{1}{2}$, $y = x + \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$, on voit que la partie du triangle OAB pour laquelle les coordonnées de M permettent d'obtenir un triangle est le triangle IJK .

⁴ Ce repère peut être quelconque, même si dans la pratique (papier millimétré) il s'avère plus commode de le supposer orthonormal.

Pour pouvoir conclure, il faut admettre que la donnée aléatoire de x et y ($x \leq y$) fait que la répartition des points $M(a, b)$ est uniforme dans le triangle AOB (ce qui ne pose problème qu'à l'enseignant⁵). Il en résulte que la probabilité de succès est égale au rapport de l'aire du triangle IAK à celle du triangle OAB , c'est-à-dire $1/4$.



e) Seconde interprétation graphique. Si l'on tient compte du fait que la somme des longueurs des trois segments est égale à 1, on peut se souvenir de l'outil graphique statistique qu'est le diagramme triangulaire.

Rappel. Le diagramme triangulaire est utilisé, en particulier dans l'industrie, pour représenter des produits composés de trois constituants (exemple : un objet en bronze constitué de cuivre, d'étain et de plomb). Les proportions respectives a, b, c de chacun des trois constituants sont par définition telles que $a + b + c = 1$ (ce qui fait qu'en réalité on n'a besoin que de deux de ces trois nombres pour connaître la composition de l'objet).

Considérons maintenant un triangle ABC ⁶, ainsi qu'un triplet (a, b, c) de réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Soient I, J, K les points respectivement définis par : $\overline{BI} = a\overline{BC}$; $\overline{CJ} = b\overline{CA}$; $\overline{AK} = c\overline{AB}$. On démontre que :

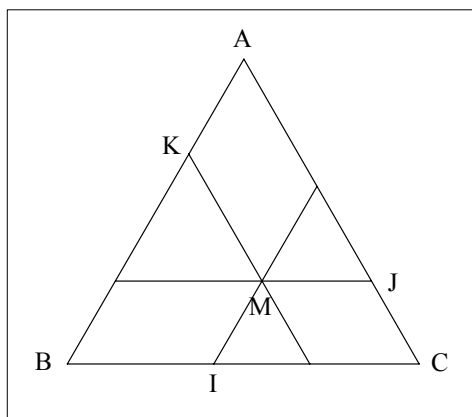
⁵ Sans même parler de démontrer, on peut cependant justifier simplement cette équirépartition dans le triangle AOB à l'aide des deux remarques suivantes :

- L'indépendance des aléas X et Y (correspondant aux colonnes A et B du tableau) assure l'équirépartition du couple $(X ; Y)$ dans le carré $[0 ; 1]^2$.
- La symétrie $(x ; y) \rightarrow (y ; x)$, qui échange le triangle AOB et son symétrique par rapport à la première bissectrice des axes, assure l'équirépartition des couples $(x ; y)$ dans chacun de ces deux triangles.

⁶ Non nécessairement équilatéral, mais en pratique on le prend tel (cf. les feuilles de graphique du commerce).

Problématique n° 7 - Problèmes

la parallèle à (AB) passant par I,
la parallèle à (BC) passant par J,
la parallèle à (AC) passant par K,
sont concourantes en un point M, intérieur au triangle ABC :

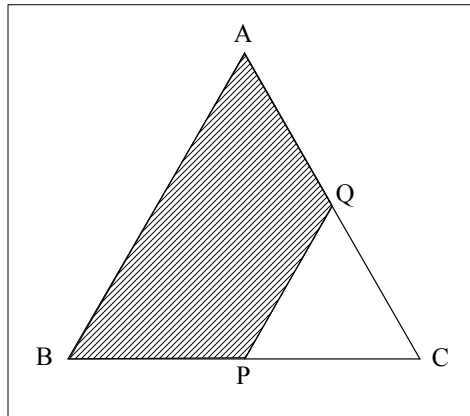


De plus, la correspondance entre le triplet (a, b, c) et le point M est une bijection sur la surface délimitée par le triangle ABC.

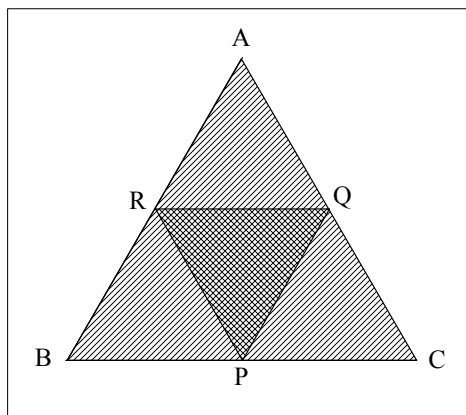
Venons-en maintenant au cas qui nous occupe ici. On peut prendre pour “coordonnées triangulaires” (a, b, c) les trois longueurs des trois segments à l’aide desquels on veut réaliser le triangle, c’est-à-dire qu’on posera : $a = x$, $b = y - x$, $c = 1 - y$. Les longueurs a, b, c permettront d’obtenir un triangle si et seulement si elles vérifient le système :

$$\begin{cases} a \leq b + c \\ b \leq c + a \\ c \leq a + b \end{cases}$$

Puisque $a + b + c = 1$, la relation $a \leq b + c$ équivaut à $a \leq \frac{1}{2}$, c’est-à-dire qu’elle correspond aux points M du trapèze ABPQ ci-dessous (avec P et Q milieux respectifs de [BC] et [AB]) :



De même les deux autres relations correspondant aux trapèzes BCQR et CARP :



L'intersection de ces trois trapèzes est le triangle PQR, dont l'aire est égale au quart de celle du triangle ABC. En admettant, ici aussi, que la donnée aléatoire de x et y ($x \leq y$) fait que le point M est pris aléatoirement dans le triangle ABC⁷, on trouve encore une probabilité de $1/4$.

Commentaires

1) Dans ce problème, la simulation numérique permet de conjecturer la réponse $1/4$, mais aucunement de la justifier. Le passage au cadre algébrique permet d'envisager un début de solution, mais le système d'inéquations auquel on aboutit

⁷ La justification est ici moins simple que dans le cas précédent.

ne permet pas de donner une solution. Le passage au cadre de la géométrie plane, et plus précisément au registre des graphiques cartésiens suggéré par le couple de longueurs $(x ; y)$, fournit une interprétation de ce système qui amène à des calculs d'aire simples, même si la question de l'équirépartition peut – théoriquement – poser problème dans la conversion des registres. Quant au passage par le registre des diagrammes triangulaires, il peut, lui aussi, être convoqué de façon “naturelle” si les élèves l'ont déjà rencontré en statistique descriptive (la somme des longueurs des trois segments est toujours égale à 1) et constituer alors un exemple d'application de ce mode de représentation, couramment utilisé dans l'industrie et la recherche. Sinon, on a ici une occasion de le présenter et d'en montrer ensuite d'autres applications.

2) Dans l'article de Repères-IREM cité, le diagramme triangulaire n'est pas celui qui est utilisé ici : l'unité de longueur n'est pas celle du côté du triangle, mais celle de sa hauteur, et les coordonnées du point M sont les distances de M aux trois côtés du triangle. Nous avons ici préféré donner une version qui coïncide avec le diagramme triangulaire “du commerce”. Signalons enfin que, dans cet article, la question de la répartition uniforme n'est pas posée.

PROBLÉMATIQUE N° 8

**FORMATION
AU RECUEIL ,
AU TRAITEMENT,
A LA CONSULTATION,
ET A LA COMMUNICATION
DE L'INFORMATION**

Situations-Démarches-Contenus

Les contenus mathématiques à enseigner nouvellement à travers cette problématique ne pourront être qu'exceptionnels, très soumis à l'évolution des technologies et des techniques d'information. Vu la rapidité du développement de ces dernières, il ne paraît pas utile de les faire figurer explicitement dans des programmes d'enseignement, sauf à souligner la volonté de leur apprentissage et de leur emploi. Par contre, l'aspect méthodologique, la synthèse de connaissances nous semblent les plus importants et nous les mettons en regard de situations susceptibles de relever plus spécifiquement de cette problématique. Pour cela, il sera fait fréquemment référence à des textes extraits de la presse accessibles aux élèves, ceci afin de crédibiliser les intentions didactiques.

Situations	Démarches - contenus
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Recueil d'extraits écrits ou sonores en provenance de médias ◆ Travail autonome à partir d'une banque de problèmes. Recueil d'informations qualitatives ou quantitatives sur un événement actuel ou récent (par exemple : une grande épreuve de voile, des résultats aux J.O., ...) à l'aide du minitel ou par Internet. ◆ Mise en place d'une banque de données numériques correspondant à un événement sportif, un événement lié à l'établissement scolaire, ou à la classe (notes). Faire un traitement simple sur ces données (somme, moyenne,...) ◆ A partir d'un travail algébrique formel papier-crayon, validation des résultats ou extension de ceux-ci à l'aide d'un logiciel de calcul formel ◆ Création dès la classe de seconde, ou plus tôt, sur papier, selon une base informatisée, d'une "mémoire" organisée de propriétés mathématiques (définitions, théorèmes, conjectures,...) en distinguant celles qui ont été institutionnalisées. 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Lire ou écouter de façon critique des informations données par les médias. Mettre en œuvre des contenus enseignés sur des faits relatés par ces médias ◆ Apprendre la consultation arborescente d'une base de données à l'aide de mots-clés et de connecteurs logiques. Condenser des informations à l'aide de paramètres et/ou de schémas et de graphiques. Identifier des données à l'aide de mots-clés connus. Intégrer des données dans une base déjà constituée ◆ Apprendre les fonctionnalités d'un tableur (par exemple, EXCEL) ◆ Apprendre l'usage d'un logiciel de traitement automatique (par exemple DERIVE) ◆ Organiser et hiérarchiser des connaissances selon des mots-clés correspondant à des critères convenablement choisis et exigeant un accord inter-subjectif Mettre en relation les connaissances ainsi organisées

Quelques problèmes

2^{nde}

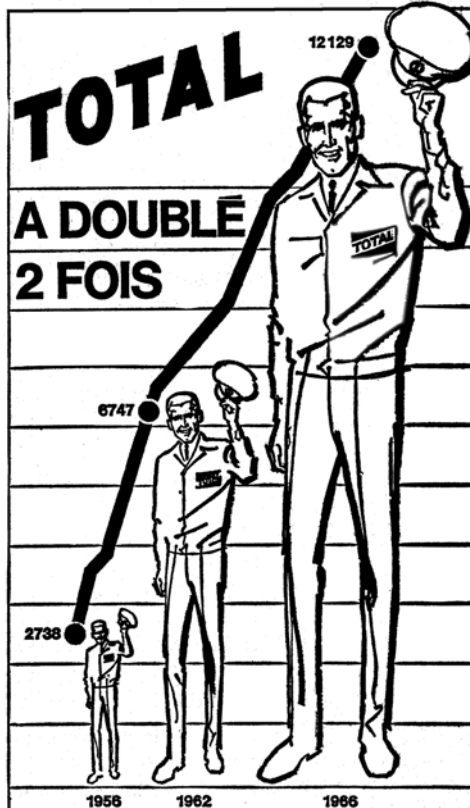
*** 1 ***

La “vérité” des graphiques (1)

Dites ce que vous pensez du graphique reproduit ci-dessous et extrait d’un quotidien.

depuis 1956 le nombre des

POINTS DE VENTE



Remarque et indications

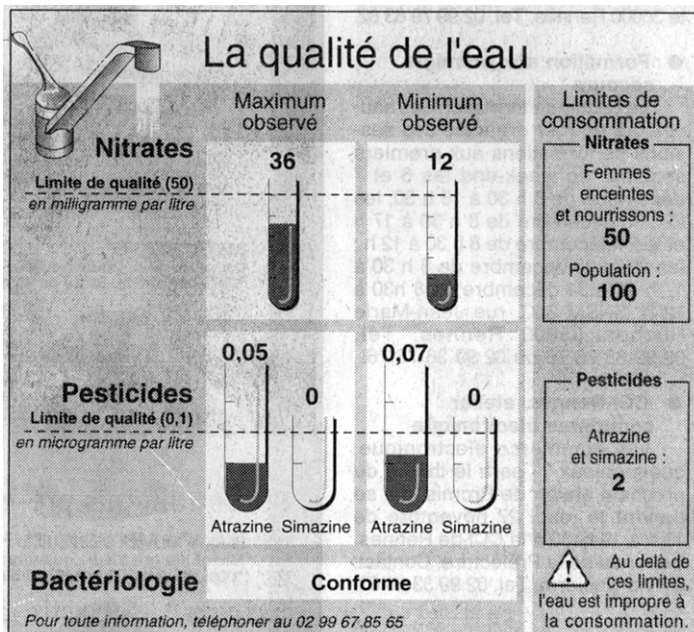
Cette situation est exemplaire pour mettre en garde les élèves sur l'abus que font certains publicitaires de l'effet visuel de l'image. Les élèves doivent alors rappeler les règles à suivre pour ce type de représentation afin qu'il rende honnêtement compte de la réalité statistique. Des élèves de seconde à qui cet exercice a été proposé en situation d'évaluation ont signalé l'irrégularité de la graduation représentant les années, le fait que le mot « a doublé » n'était pas exact, que le nombre de points de vente était proportionnel non pas à l'aire des personnages mais à leur taille (ils ont d'ailleurs souvent mesuré à la règle graduée et fait des calculs de proportionnalité, ne s'intéressant pas, ou craignant de ne pas être assez précis s'ils le faisaient, à un ordre de grandeur des dimensions), ils ont aussi signalé, mais plus confusément, l'existence de lignes horizontales qui leur semblait donner une impression de perspective. Cependant chacun n'a donné qu'un argument pour critiquer le graphique.

2^{nde}

*** 2 ***

La "vérité" des graphiques (2)

Regardez attentivement les graphiques du document ci-dessous et trouvez l'erreur.



Remarque et indications

Erreur ? Lapsus ? Le maximum d'Altrazine observé dans les pesticides est de 0,05 et le minimum de 0,07. Quoi qu'il en soit cet extrait montre quelle vigilance il est bon d'avoir vis-à-vis des publications, en particulier lorsque l'image imprimée dispose d'une puissance prégnante.

2nde

*** 3 ***

Pour vivre vieux, soyez académiciens

Consultez l'extrait d'un quotidien et dites ce que vous en pensez.

LE PARISIEN Mercredi 13 février 1974

POUR VIVRE VIEUX, SOYEZ ACADÉMICIENS

Dans sa célèbre pièce « l'Habit vert », qui évoque la vie de l'Académie, Robert de Flers fait dire à un de ses personnages, fraîchement élu par les Quarante : « Me voici donc immortel... pour la vie. »

Que représente cette immortalité, provisoire au moins dans le domaine biologique ? C'est ce qu'a cherché à établir le professeur Jean Cheymol en étudiant

l'âge moyen et la longévité des membres de l'Académie de médecine, entre 1820, date de la création de cette dernière, par ordonnance royale, jusqu'au 1^{er} janvier 1974.

Durant cette période, 1.024 membres titulaires ont figuré sur les listes ; 129 sont toujours vivants. Dans les quinze premières années de l'Académie, l'âge moyen d'élection était de

déclare le Pr CHEYMOL

53 ans. Il est aujourd'hui de 67 ans. Dans le domaine de la longévité des académiciens, comparée à celle de la population générale, on constate que l'espérance de vie est nettement augmentée pour les Immortels de la science médicale.

« S'agit-il d'une plus grande sagesse de vie, d'une meilleure diététique, d'une hygiène de la vie plus surveillée ? » C'est ce que se demande le professeur Cheymol.

« Cette situation privilégiée, ajoute-t-il, se retrouve dans la présence, sur plus d'un siècle et demi, de deux centenaires de 103 ans : Chevreul (1786-1889) et Gueniot (1832-1935) ; de 48 nonagénaires, de 222 octogénaires, soit 272 académiciens de plus de 80 ans, et 30 % du chiffre total. »

L'âge moyen pour 1970 est de 73,6 ans. Parmi les disciplines qui conservent le mieux, la médecine vient en tête, avec un âge moyen de 75,9 ans, suivie par la biologie, 75,5 ans, et la pharmacie, 70,8 ans.

« A chacun de tirer les conclusions », dit le professeur Cheymol.

Remarque et indications

Cette situation est exemplaire pour faire prendre conscience aux élèves de la nécessité de définir un référentiel avant de calculer une fréquence, voire une probabilité.

Dans la même veine « 95% des gens meurent dans un lit. Donc ... le lieu le plus dangereux... ». Ce type de déduction erronée fait sourire dans ce genre d'exemple, mais est fait fréquemment dans toutes sortes de situations de la vie courante où on confond corrélation et conséquence, et où quelques exemples tiennent lieu de preuve.

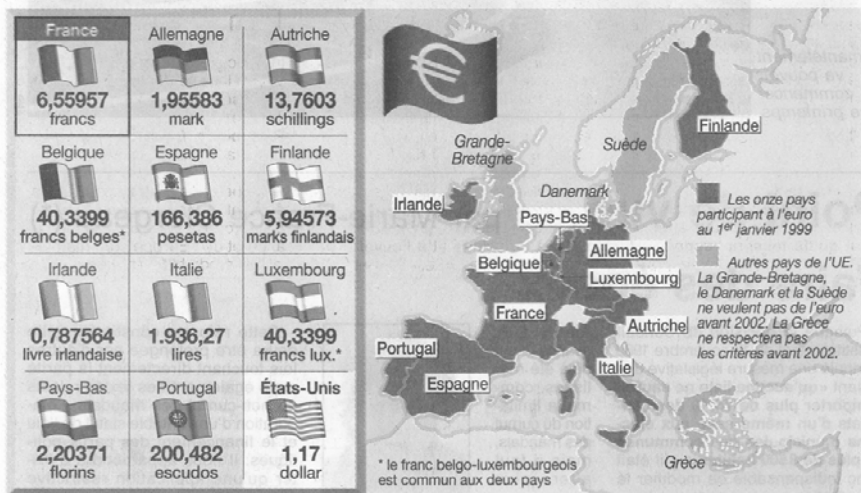
2^{nde}

*** 4 ***

Ce document donne les valeurs respectives de l'euro par rapport aux monnaies des pays de la communauté européenne qui l'ont adopté.

Trouvez des rapports simples existant entre ces monnaies et l'euro et formulez une hypothèse quant au choix de la valeur adoptée.

Ce que vaut un euro dans les onze monnaies



Remarque et indications

On trouvera les rapports :

$$\begin{aligned}
 1 \text{ euro} &= 20/3 \text{ FF} = 2 \text{ marks allemands} = 40 \text{ FB} = 1000/6 \text{ pesetas} \\
 &= 6 \text{ marks finlandais} = 2000 \text{ liras} = 40 \text{ FL} = 200 \text{ escudos} \\
 &= 11/5 \text{ florins} = 4/5 \text{ £I} = 40/3 \text{ schillings autrichiens.}
 \end{aligned}$$

Une hypothèse plausible : partir de la valeur du mark, mais ne pas s'identifier strictement à lui, et/ou choisir une valeur proche de celle du dollar... ?

Toutes classes

*** 5 ***

Près de trois candidats sur quatre reçus au brevet

"553000 élèves de troisième ont été reçus à la session 1994 du brevet des collèges, soit un taux de réussite s'élevant à 73,1% en augmentation de 0,6 point par rapport à 1993. La série "collège" (83% des candidats) a enregistré le meilleur taux de réussite, devant la série

“technologique” (11% des candidats et 65% de réussite) et la série “professionnelle” (6% des candidats et 59% de réussite). Les résultats sont très divers suivant les académies, allant de 79,9%, toutes séries confondues, dans l'académie de Rennes, à 66,5% à Lyon ou 68,1% à Créteil.”

Le Monde, 24/25 juillet 1994

Il s'agit d'un extrait d'un article de journal concernant les résultats du Brevet. Il manque une information qui nous semble intéressante : le taux de réussite dans la série "collèges". Peut-on la retrouver ?

DOCUMENTATION *Le Monde*

Le Monde

25 juillet 1994

REPERES COLLEGES

Près de trois candidats sur quatre reçus au brevet

553 000 élèves de troisième ont été reçus à la session 1994 du brevet des collèges, soit un taux de réussite s'élevant à 73,1 %, en augmentation de 0,6 point par rapport à 1993. La série " collège " (83 %

des candidats) a enregistré le meilleur taux de réussite, devant la série " technologique " (11 % des candidats et 65 % de réussite) et la série " professionnelle " (6 % des candidats et 59 % de réussite). Les

résultats sont très divers selon les académies, allant de 79,9 %, toutes séries confondues, dans l'académie de Rennes à 66,5 % à Lyon ou 68,1 % à Créteil.

Fin de l'article.

Remarque : *Cet article est le prototype des annonces que proposent les médias : résultats nombreux mais incomplets cherchant pourtant à faire accéder à toutes les informations. Cependant, cette fois, il est possible de répondre à la question posée car les données suffisent. Suivant la classe à laquelle ce problème est posé, les élèves identifieront peut-être un barycentre, ou plus simplement une moyenne pondérée... Dans une classe de première ES ou S, on attendra que des élèves écrivent l'équation où c représente la proportion d'élèves de collège ayant réussi :*

$$100 \times 0,731 = 83 \times c + 11 \times 0,65 + 6 \times 0,59 \text{ d'où l'on tire } c = 75,2\%$$

En seconde ou même dans certaines séries de première, les élèves passeront sans doute par un calcul plus long, cherchant d'abord le nombre total de

candidats, puis le nombre de candidats de chaque série, puis le nombre de reçus en série technologique et série professionnelle, etc.

Tale

***** 6 *****
Un problème périodique ...

Raymond Queneau (1903 – 1976), dans l'un de ses ouvrages, propose quatorze ensembles, E_1, E_2, \dots, E_{14} contenant chacun dix vers permettant de composer des sonnets.

Pour composer un poème, il suggère de choisir un vers dans chaque ensemble :

- le vers choisi dans E_1 est le premier vers du poème,
- le vers choisi dans E_2 est le deuxième vers du poème,
- etc.

Cette règle sera respectée dans toute la suite.

1° Raymond Queneau intitule son ouvrage « Cent mille milliards de poèmes ». Ce titre est-il exact ?

2° Deux vers de E_{14} se terminent par le mot « *destin* ». Combien y a-t-il de poèmes se terminant par le mot « *destin* » ?

3° L'un des poèmes est le suivant :

*Le vieux marin breton de tabac prit sa prise
D'aucuns par-dessus tout prisent les escargots
Sur l'antique bahut il choisit sa cerise
Qui sait si le requin boulotte les turbots ?*

*Le cheval Parthénon frissonnait sous la bise
Qui clochard devenant jetait ses oripeaux
Un frère même bas est la part indécise
Elle effraie le Berry comme les morvandiaux.*

*Le loup est amateur de coq et de cocotte
On comptait les esprits acérés à la hotte
Il voudra retrouver le germe adultérin*

*Sa sculpture est illustre et dans le fond des coques
On s'excuse il n'y a ni baleines ni phoques
Le mammifère est roi nous sommes son cousin.*

(Atlas de Littérature Potentielle collection idées, éd. Gallimard)

a) Combien y a-t-il de poèmes ne contenant aucun de ces quatorze vers ?

b) Combien y a-t-il de poèmes contenant exactement trois de ces quatorze vers ?

4° On s'intéresse maintenant aux poèmes fabriqués selon la règle (R) suivante : aucun mot ne doit rimer avec lui-même, c'est-à-dire que le mot final de deux vers différents ne peut être le même. Or, dans les 140 vers composant les 14 ensembles, le mot "marchandise" est le seul mot terminant deux vers situés dans des ensembles différents, à savoir E_5 et E_7 .

a) Combien y a-t-il de poèmes satisfaisant à la règle (R) ?

b) Combien d'entre eux finissent par le mot « destin » ?

Remarque et indication

Ce problème relève de la problématique 8 car il s'agit de traiter une situation telle qu'elle peut être rencontrée dans un livre ou dans un média et dans laquelle une affirmation de l'auteur appelle la vigilance critique du lecteur, en l'occurrence ici l'élève mathématicien curieux. Celui-ci devra se livrer à un dénombrement précis s'il veut pouvoir éventuellement remettre en question l'affirmation de R. Queneau. Les premières questions sont abordables dès la classe de première, et peuvent par exemple intéresser des élèves de série littéraire.

1° oui, car il y en a 10^{14} , soit exactement cent mille milliards de poèmes !

2° 2×10^{13} ;

3° a) 9^{14} ; b) $C_{14}^3 \times 9^{11}$

4° a) Il y a $10^{12} \times 9 \times 9$ poèmes où aucun vers ne se termine par le mot "marchandise". Donc le nombre de poèmes qui vérifient la condition (R) est $10^{12} (9^2 + 9 + 9)$ car il y a $10^{12} \times 1 \times 9 + 10^{12} \times 9 \times 1$ poèmes contenant une seule fois la rime "marchandise".

b) Il y a $10^{11} \times 9 \times 9 \times 2$ poèmes où aucun vers ne se termine par le mot "marchandise" et qui finissent par le mot "destin". Il y a $2 \times 10^{11} \times 1 \times 9 \times 2$ poèmes contenant une seule fois la rime "marchandise" et finissant par le mot "destin".

Il y a donc 198×10^{11} poèmes satisfaisant à la règle (R) et finissant par le mot "destin".

Tale

*** 7 ***

Des recettes en pagaïe...

Un livre de cuisine annonce « Un million de menus ». Ce livre est constitué de pages cartonnées partagées en trois parties indépendantes les unes des autres. Le haut de la page est consacré aux hors-d'œuvre, le milieu aux plats principaux, le bas aux desserts. Il y a le même nombre de recettes de chaque sorte. Un menu est composé d'un hors-d'œuvre, d'un plat et d'un dessert. Le titre est lui-même bien alléchant. Mais combien contient-il de recettes si le titre est correct ?

Remarque : *Dans un registre moins poétique que le problème précédent, celui-ci nous propose une situation comparable, mais dans laquelle on connaît le nombre d'éléments du produit cartésien, et il s'agit de retrouver celui de chacun des ensembles.*

La nécessité de rester critique (« un million, comment est-ce possible ? ») devant une telle annonce mène l'élève curieux à un petit calcul combinatoire. La représentation est efficace et convaincante.

2^{nde}

*** 8 ***

On consultera page suivante la page extraite d'un article de la revue "Le Capital" de septembre 1997. Voici les lignes sur lesquelles on vous demande d'exercer votre esprit critique :

“François Bayrou, ex-ministre de l'Education Nationale d'Alain Juppé, a apporté les précisions suivantes : “25 000 F, ce sont deux salaires moyens, par exemple de professeurs. C'est le revenu d'une famille moyenne”. Marc Vilbenoit, le président du syndicat des cadres CGC, a chaudement approuvé.

Eh bien, tous ont tort. La dernière enquête publiée par l'INSEE sur la question indique qu'en France une famille sur deux vit avec moins de 11 668,75 francs net par mois, et que seuls les 11% des foyers les plus aisés jouissent d'un revenu égal ou supérieur à 25 000 F. La classe moyenne ne loge pas où l'on pense”.

Et vous qu'en pensez-vous ?

Remarque

La confusion entretenue par le journaliste est fréquemment rencontrée dans les médias. Confusion (par méconnaissance de ces notions, ou intentionnelle...) entre médiane et moyenne : il n'est pas incompatible d'affirmer

En dépit des apparences et de la sinistrose, ils Les vrais revenus

Banco pour les retraités et les épargnants, ceinture pour les jeunes et les chômeurs : un grand dossier pour mesurer l'impact, sur nos portefeuilles, des années de crise.

Pages 122 à 134 : sept

Commençons par un petit test. Un ménage qui perçoit 25 000 francs de revenu net mensuel est-il plutôt modeste, plutôt aisé, ou privilégié ? En plein débat sur la réforme des allocations familiales, les responsables du RPR, de l'UDF, du PC, des associations familiales, de FO et de la CFTC ont tous répondu la même chose l'été dernier : une telle famille est à peu près dans la moyenne. François Bayrou, l'ex-ministre de l'Éducation nationale d'Alain Juppé, a apporté les précisions suivantes : « 25 000 francs, ce sont deux salaires moyens, par exemple de professeurs. C'est le revenu d'une famille moyenne. » Marc Vilbenoit, le président du syndicat des cadres CGC, a chaudement approuvé.

Eh bien, tous ont tort. La dernière enquête publiée par l'Insee sur la question indique

qu'en France une famille sur deux vit avec moins de 11 668,75 francs net par mois, et que seuls les 11% des foyers les plus aisés jouissent d'un revenu égal ou supérieur à 25 000 francs. La classe moyenne ne loge pas où l'on pense.

Bah ! Qu'une bonne partie de nos dirigeants politiques et syndicaux puisse à ce point s'égarer sur les finances des ménages n'a finalement rien d'étonnant. Est-ce parce que la matière est aride ? Ou que le sujet reste tabou dans notre vieux pays catholique ? En tout cas, les Français n'entretennent souvent qu'une vision fort approximative de leurs revenus. Non seulement ils cernent mal leur évolution et leur éventail, mais ils charrient à leur sujet un tombereau d'illusions collectives.

En particulier celle-ci, aussi tenace que répandue : mangés par les impôts et les cotisations, écornés par le chômage, limés

Suite page 118 ▶



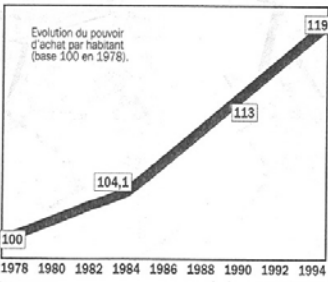
Alain Hellou, 42 ans, dirigeant d'entreprise
1 MF brut/an

Paul Joly, 49 ans, cadre
390 000 F brut/an

PHOTOS : MARTIN NICOLAS, THIBAUD BESSEYRE

La sinistrose qui mine notre pays est-elle vraiment justifiée ? Les chiffres sont formels : globalement, jamais la France n'a été aussi riche. Crise ou pas, le pouvoir d'achat par habitant a grimpé de 20% depuis 1978. Mais, dans le même temps, les inégalités se sont creusées.

Notre pouvoir d'achat a flambé !



Top managers

P. 122

Les dirigeants des grandes entreprises s'en sortent bien, avec des salaires supérieurs au million par an qui comportent de plus en plus souvent des éléments défisalisés.

Cadres

P. 124

Leur pouvoir d'achat, naguère grignoté par l'inflation, l'est aujourd'hui par l'impôt. L'individualisation de leurs salaires est devenue la règle et a créé de grosses disparités entre cadres de même niveau.

- d'une part, qu'un revenu familial (deux têtes) moyen soit 25 000 F ; ce serait la moyenne des revenus des foyers ;

- d'autre part, que le revenu médian des mêmes foyers soit 11 668,75 ; ceci signifiant que 50% des foyers perçoivent moins que cette somme et 50% perçoivent un revenu supérieur ou égal à cette somme.

Les élèves, dès la classe de seconde, comprennent facilement la différence entre médiane et moyenne et le fait que quelques personnes à revenus très élevés vont faire monter la moyenne mais pas la médiane. Par contre ils sont encore très sensibles à l'apparente objectivité d'un nombre très précis (ici au centime près), qui leur paraît plus "sérieux" qu'un ordre de grandeur. C'est sans doute un effet de l'apprentissage et de l'usage insuffisamment raisonné de la calculatrice.

***** 9 *****

Dans l'article sur la population française (voir page suivante), on affirme que les femmes sont plus nombreuses que les hommes, alors qu'il naît plus de garçons que de filles. A votre avis, cela est-il possible ou bien s'agit-il d'une erreur du journaliste ?

1^{ère}

***** 10 *****

A la suite du recensement de 1999, plusieurs journaux ont publié des articles commentant l'évolution démographique des communes. Intéressés par la rapidité du développement de certaines communes de l'Ille-et-Vilaine, nous consultons les journaux qui l'évoquent et trouvons des résultats contradictoires (cf. documents ci-dessous). Par exemple, pour la commune de Bruz, nous lisons dans l'un (Ouest-France) : taux annuel de variation : 5,52%, dans l'autre (Lettre du Canton) : progression par an : 6,92%.

Qu'en pensez-vous ? Cette différence dans les résultats de calcul se retrouve-t-elle dans d'autres communes ?

La population française a augmenté en 1965 de 470 000 habitants

Les femmes l'emportent sur les hommes et pourtant, il naît plus de garçons que de filles

La population de la France a augmenté en 1965 de 470.000 habitants, un chiffre équivalent à la population de Bordeaux. De 48.687.000 personnes au 1^{er} janvier 1965, elle est passée au 31 décembre suivant à 49.157.000 habitants. Ce chiffre est tiré des statistiques – encore provisoires – de l'Etat Civil pour l'année passée.

Cette augmentation est due à l'excédent des naissances sur les décès (plus 325.000) et au solde des mouvements migratoires (plus 145.000 personnes).

Le nombre des naissances pour 1965 s'est élevé à 870.000, en légère diminution par rapport à 1964, qui avait vu naître 847.000 enfants. Il reste supérieur aux prévisions faites en 1960.

30.000 décès de plus qu'en 1964

Le nombre des décès a été de 545.000, soit près de 30.000 de plus que l'année précédente. Cette augmentation est imputable à la mortalité élevée du mois de mars, durant lequel a sévi une forte épidémie de grippe.

Le taux de la mortalité infantile de 1965 a été le plus bas jamais connu en France (18,4 pour 1.000 naissances déclarées).

Stabilité du nombre des mariages d'ici 1967

Le nombre des mariages en 1965 reste très voisin de celui de 1964 : 345.000 environ contre 347.500 en 1964. Les dernières années ont vu arriver à l'âge du mariage des générations peu nombreuses nées entre 1940 et 1945.

On devrait assister, surtout à partir de 1967, à une augmentation importante

du nombre des mariages lorsque les générations nées à partir de 1946 atteindront à leur tour l'âge de se marier.

Les Françaises l'emportent

Les Françaises l'emportent sur les Français : 25.127.000 contre 24.030.00 et ceci bien qu'il naisse nettement plus de garçons que de filles.

Sur les 4.230.500 moins de 5 ans, la France compte 2.157.600 garçons et 2.072.900 filles.

Ce rapport numérique se prolonge jusqu'à 40 ans, puis la tendance se renverse et s'amplifie sans cesse. Chez les plus de 90 ans, les femmes constituent une majorité : 62.100 femmes contre 21.400 hommes.

Les moins de 20 ans et les plus de 60 ans progressent

La proportion des 60 ans et plus, dans la population, augmente sans cesse : en 1965, elle est de 17,4%, elle était de 17,1% en 1962, de 16,2 en 1954 et de 14,3 en 1931.

La proportion des Français âgés de 20 à 64 ans diminue. En 1965, elle n'est plus que de 53,8%, alors qu'elle était de 54,8 en 1963, de 57,8 en 1954 et de 60,4 en 1931.

Les moins de 20 ans progressent : 33,9% en 1965. Ils représentaient 30,7% en 1954 et seulement 30% en 1931.

Problématique n° 8 - Problèmes

COMMUNES	RECENSEMENT		Progression	Progression en %	Progression par an	Où sont les nombreux habitants ?
	1990	1999				
BRUZ	8 144	13 167	5 063	62,3%	6,92%	52%
PONT-PÉAN	2 011	3 217	1 206	60,0%	6,66%	12%
NOYAL-CHATILLON	4 313	5 638	1 325	30,7%	3,41%	14%
SAINT-ERBLON	1 708	2 229	521	30,5%	3,39%	5%
CHARTRES-DE-BREST	5543	6 467	924	16,7%	1,85%	10%
BOURGBARRÉ	2 004	2 322	318	15,9%	1,76%	3%
ORGÈRES	2 537	2 876	339	13,4%	1,48%	3%
CANTON	26 230	35 916	9 686	36,9%	4,10%	100%

La lettre du Canton de Bruz

COMMUNES	RECENSEMENT		Différence	Taux annuel de variation
	1990	1999		
BRUZ	8 144	13 167	5 063	5,52
PONT-PÉAN	2 011	3 217	1 206	5,35
NOYAL-CHATILLON	4 313	5 638	1 325	3,02
SAINT-ERBLON	1 708	2 229	521	3
CHARTRES-DE-BREST	5543	6 467	924	1,73
BOURGBARRÉ	2 004	2 322	318	1,65
ORGÈRES	2 537	2 876	339	1,4

Résultats diffusés par Ouest-France

Remarque et indications

Comme pour les exercices précédents, celui-ci doit conduire les élèves à manifester un esprit critique en cherchant à résoudre cette fois une contradiction produite par deux médias.

La progression de la population suit une loi géométrique (cf. Problématique 3). Par conséquent, le taux produit par Ouest-France est correct pour Bruz (5,52%). Alors que l'autre taux, dit "progression par an", correspond au quotient par 9 de la progression sur 9 ans. Il est fort possible que le journaliste ait pensé que cette progression se calculait comme s'il y avait linéarité (ou proportionnalité).

L'application de la loi géométrique sur la commune de Chartres-de-Bretagne donne un résultat conforme à sa publication dans Ouest-France, soit 1,73%. et toujours inexact sur l'autre journal. Par contre, le résultat sur Cesson-Sévigné est incorrect : on doit trouver 1,013% et non pas 1,3%.

1^{ère} toutes séries

*** 11 ***

Population de la Terre

On utilisera l'annexe de la page suivante pour répondre aux questions ci-après suivantes issues de la lecture critique de cet extrait de quotidien :

1° Le taux actuel d'augmentation de la population étant 1,33 %, vérifier les valeurs données :

la population actuelle étant estimée à 6 milliards, l'accroissement annuel serait-il bien de 78 millions ?

2° Quel a été le taux d'accroissement moyen entre 1804 et 1927 ? entre 1960 et 1974 ?

3°. Supposons qu'il y ait bien 6 milliards d'habitants en 1999 et qu'en 2020 l'augmentation soit bien de 64 millions d'habitants, et supposons de plus que l'augmentation en pourcentage diminue du même nombre de « points » chaque année (pour utiliser le vocabulaire des médias), c'est-à-dire que le taux diminue suivant une suite arithmétique. Déterminer, à l'aide d'un calcul par essais-corrrections, en utilisant un tableur ou une calculatrice, le taux d'augmentation de la population en 2020.

4° Comment interpréter mathématiquement, à la fin du paragraphe intitulé « La contraception pour 60% des couples », les phrases « Bref, ça augmente toujours. Mais moins qu'avant » ?

Remarques

Ce texte peut susciter de nombreuses questions sur les affirmations basées sur des nombres, et sur des prévisions.

Dès le début, on parle du six-milliardième habitant de la Terre¹. Comment peut-on déterminer quel jour exactement il naîtra ? et le jour venu, qui il est ? L'article semble laisser supposer qu'on peut compter les habitants de la planète comme les timbres d'une collection privée ! Et que penser de la précision « Il a fortes chances de naître en Chine ou en Inde, puisque ces deux pays concentrent à eux seuls les 2/5 de la population du globe » ? Est-ce à dire qu'il a une probabilité de 2/5 de naître dans un de ces pays ? Mais alors il a une probabilité plus grande de naître ailleurs...

¹ Dans le Bulletin Vert n°429, on peut lire un article de P.-L. Hennequin et F. Lo Jacomo : « Combien y a t il de six milliardièmes humains ? ».

Nous n'avons retenu ici que quelques-unes des questions qui peuvent se poser.

Indications

A la première question, on trouve non pas 78 millions mais 79,8 millions.

Pour la troisième question : voici un exemple de préparation de calcul sur Excel (les premières lignes seules ont été recopiées). Il suffit de faire varier la valeur dans la cellule nommée a. Avec $a = 0,023$, on obtient approximativement le résultat cherché.

année	coefficient multiplicateur	nombre d'habitants en millions	augmentation en nombre d'habitants
1999	1,330	6000	
2000	1,307	6080	80
2001	1,284	6159	79
2002	1,261	6238	79
2003	1,238	6317	79

Les formules entrées dans les cellules :

année	coefficient multiplicateur	nombre d'habitants en millions	augmentation en nombre d'habitants
1999	1,330	6000	
2000	=B2-a	=C2*(1+B2/100)	C3-C2
2001	=B3-a	=C3*(1+B3/100)	C4-C3
2002	=B4-a	=C4*(1+B4/100)	=C5-C4

A la quatrième question, on attend comme réponse que la suite des différences de la suite des augmentations de population est décroissante, ou que les différences secondes sont négatives. Suivant les séries, cela peut aussi être énoncé en termes de dérivée de la fonction " augmentation de population " en fonction du temps.

La population de la Terre continue de grimper, mais moins que prévu. Pour autant, le péril démographique n'a pas disparu. La situation des pays pauvres reste préoccupante, comme l'analysent les représentants des 180 pays que l'Onu réunit cette semaine en forum à La Haye.

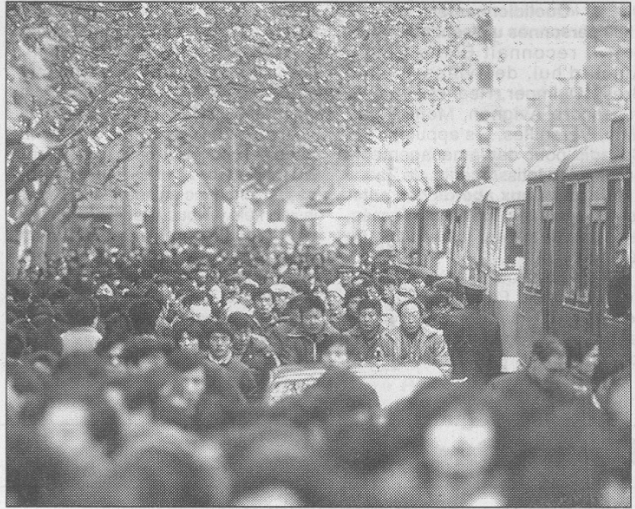
Retenez la date du 16 juin prochain. Ce jour-là, la Terre devrait accueillir son six milliardème habitant. Lequel a de fortes chances de naître en Chine ou en Inde, puisque ces deux pays concentrent à eux seuls les 2/5^{es} de la population du globe.

Ainsi va notre bonne vieille planète, avec des enfants qui ne cessent de croître et multiplier. Nous étions 1 milliard en 1804, 2 milliards en 1927, 3 milliards en 1960, 4 milliards en 1974, 5 milliards en 1987. Et combien dans un siècle? Longtemps, les démographes ont entretenu la grand peur de la surpopulation. Quinze milliards, vingt milliards... Des chiffres alarmistes circulaient, fruits de sérieuses études, mettant toutes en avant le péril qui ne manquerait pas de peser sur les générations à venir.

La contraception pour 60 % des couples

Mais la bombe a fait long feu. Les experts se sont trompés, ou plutôt ils ont sous-estimé la façon dont le monde pouvait changer. En trente ans, l'usage du planning familial a été multiplié par cinq. Et le recours à la contraception s'est avéré bien plus important que prévu: il concerne aujourd'hui 60 % des couples mariés.

La scolarisation des filles s'est développée, retardant l'âge du mariage. La fécondité est en baisse, y compris dans des pays très pauvres comme le Bangladesh ou la Bolivie. Surtout, grâce aux



«700 millions de petits Chinois», chantait Dutronc dans les années soixante. Aujourd'hui, ils sont 1,3 milliard.

moyens modernes de communication, le modèle occidental d'une famille de taille réduite s'est étendu au monde entier.

Des chiffres? Entre 1965 et 1970, le taux d'augmentation de la population mondiale était de 2,04 % par an. Vingt-cinq ans plus tard, il était tombé à 1,46 %. Et aujourd'hui, il plafonne autour de 1,33 %. En d'autres termes, au lieu d'accueillir 86 millions d'habitants de plus chaque année, notre planète n'en compte que 78 millions supplémentaires. Et ce chiffre devrait être ramené à 64 millions en 2020, et à 30 millions en 2050. Bref, ça augmente toujours. Mais moins qu'avant.

En forum à La Haye

Mais tout danger n'est pas écarté. Tandis que les pays riches font moins d'enfants (alors qu'ils en auraient besoin), les pauvres

concentrent 97 % de la croissance démographique mondiale, toutes ces naissances surnuméraires étaient autant de bouches à nourrir. Ainsi, en Afrique, la Somalie, le Mali ou l'Éthiopie gardent des niveaux de 6 à 7 enfants par femme – ce qui double la population en un an – alors que la croissance économique se situe autour de 3 %.

Le vrai péril est là, comme l'avaient déjà analysé les 179 pays réunis sous l'égide de l'Onu, en 1994, au Caire. Un plan prévoyait alors de consacrer 100 milliards de francs aux politiques de population (planning familial, santé maternelle). Cinq ans plus tard, alors que les mêmes pays se retrouvent au forum de La Haye (Pays-Bas), le bilan est peu glorieux: seuls 60 milliards de francs ont été réunis, aux 4/5^{es} par les pays pauvres, les pays riches étant loin d'avoir tenu leurs promesses.

*** 12 ***

“ Le supermarché du pauvre ”

Le document de la page suivante reproduit un article concernant un supermarché qui proposait aux clients disposant de moyens modestes d'acquiescer un

matériel électroménager par un paiement hebdomadaire aux apparences... raisonnables. Tous comptes faits, il apparaît que le taux d'usure était très élevé, bien que le montant des échéances ait paru faible. Pouvez-vous estimer le taux annuel sous-jacent (et non annoncé, bien sûr...)?

France
Mardi 12 novembre 1996

7 000 F au final pour la machine à laver au lieu de 3 170 F comptant

Le "supermarché du pauvre" tenu à l'œil

Le "Crazy George's" va revoir ses étiquettes. Le gouvernement a sommé, ce week-end, ce "supermarché du pauvre" de mieux informer ses clients sur le coût réel de leurs achats de meubles, d'électroménager ou de matériel hi-fi.

Le rêve, mais au prix fort. Ouvert samedi à Bobigny (Seine-Saint-Denis), le Crazy George's propose à sa clientèle, a priori modeste, de s'offrir une télé, un salon ou une machine à laver pour quelques dizaines de francs par semaine. 46 F pour la machine à laver, par exemple. Écrit en gros caractères sur l'étiquette. Et rien de plus simple: une adresse, l'attestation d'allocation Assedic ou de RMI et cinq numéros de téléphone de parents ou amis pour la caution... morale.

Le plus important est aussi sur l'étiquette, mais en tout petit: au bout de trois ans de paiements hebdomadaires, la machine à laver aura coûté plus de 7 000 F. Au lieu de 3 170 F au comptant.



Le magasin "Crazy George's" de Bobigny (Seine-Saint-Denis) — ouvert samedi, fermé temporairement dimanche — s'adresse a priori à une clientèle aux revenus modestes.

Polémique

Dès l'ouverture, le Parti socialiste est monté au créneau, dénonçant le supermarché « qui exploite la misère ». Lionel Josain, son premier secrétaire, a stigmatisé ces « magasins pour les pauvres dans lesquels ils vont payer deux fois plus que ne paient les riches ». Sans attendre que la polémique ne s'entle, le gouvernement a mis le Crazy George's sous haute surveillance. Jean Arthuis, le ministre de l'Économie, s'est saisi lui-même du dossier, dimanche.

Finalement, il a demandé au Crazy George's d'améliorer l'in-

formation des clients: en affichant le coût total pour chaque produit; en mentionnant ce coût dans toutes les publicités, en supprimant toute mention laissant croire au consommateur qu'il devient propriétaire du produit dès la signature du contrat; en lui indiquant clairement qu'il a un délai de sept jours pour se rétracter. Le magasin va être fermé pendant quelques jours, le temps de relaire l'étiquetage, mais cette fermeture est volontaire et ne relève pas d'une sanction administrative.

La marge de manœuvre du gouvernement est, il est vrai, restreinte. Le Crazy George's prati-

que la location avec option d'achat (LOA), autorisée par la loi. Même si les "taux de crédit" pratiqués par ce supermarché un peu spécial tournent, en moyenne, autour de 40%, ils échappent à la réglementation sur l'usure: dans le cadre d'une LOA, il ne s'agit pas à proprement parler « de taux d'intérêt mais de loyers », explique Christian Babusiaux, le patron de la Direction de la concurrence.

Pas d'inquiétude majeure, donc, pour le groupe britannique Thorn, qui exploite l'enseigne Crazy George's. Après avoir testé avec succès la formule en

Grande-Bretagne, depuis deux ans (un nouveau magasin tous les deux mois), il compte bien l'implanter largement en France. Deux autres ouvertures sont prévues en région parisienne d'ici mars 1997. Et, dans les douze mois suivants, ce ne sont pas moins de douze magasins qui sont programmés dans les grandes villes. D'ores et déjà, Jean Pierre Raffarin, le ministre du Commerce, a prévenu que le gouvernement était prêt « à empêcher les nouvelles ouvertures si nous sommes en présence de pratiques commerciales douteuses ».

Remarque et indications

Dans tout ce qui concerne les taux d'intérêt, que ce soit pour des achats ou pour des placements d'argent, une grande ambiguïté semble entretenue par les organismes bancaires... Des qualificatifs sont associés au mot « taux », que le public ne comprend généralement pas (taux actuariel brut, etc.).

Nos élèves connaissent en général bien la différence entre les intérêts simples (conduisant à des suites arithmétiques) et les intérêts composés ou capitalisés

(conduisant à des suites géométriques). La réalité est plus complexe : intérêts des placements (type Caisse d'Épargne) composés par année, mais le taux par quinzaine n'est pas, lui, composé : il est obtenu en divisant le taux annuel par le nombre de quinzaines.

S'agissant de remboursements à versements constants, le principe est que, à chaque versement, les intérêts sont dus sur le capital restant à rembourser. Au début, les versements ne remboursent donc que peu de capital et beaucoup d'intérêts, la "tendance" s'inversant au fur et à mesure des versements. Ce calcul est généralement fait lors de sommes importantes comme l'achat d'un bien immobilier, un échéancier détaillé étant fourni au client.

Dans notre exemple, la machine à laver coûte finalement 7 176 francs ($46 \times 52 \times 3$) au lieu de 3 170 francs. Un calcul rapide peut être : le total des intérêts versés est 4 006 francs en trois ans, soit 1335,33 par an, ce qui pour un capital de 3 170 fait un taux de 42,12%. C'est l'ordre de grandeur donné dans l'article. Cela correspond à des intérêts simples, et serait valable si le remboursement était fait globalement au bout de trois ans.

Le calcul avec intérêts composés donne un taux de 31,30%, mais, là encore, ce serait valable si le remboursement avait lieu en une seule fois, à la fin des trois ans.

Or, ici, les versements sont en réalité hebdomadaires, donc dès le premier versement, la somme due n'est plus 3170 francs. Un calcul comme celui évoqué pour l'achat d'un bien immobilier s'impose.

On doit établir la relation entre un capital emprunté, le taux d'intérêt, le nombre d'échéances et le montant de celles-ci lorsque le règlement est constant.

Par exemple, si le taux annuel est r , le taux hebdomadaire est $r' = \frac{r}{52}$, et le

versement hebdomadaire est $Y = \frac{Cr'(1+r')^n}{(1+r')^n - 1}$ pour un remboursement en n

semaines d'un capital emprunté C . Les élèves ne sont pas capables de calculer r en inversant la formule ci-dessus. Cependant le calcul peut se faire par encadrement à l'aide d'une calculatrice, connaissant Y , n et C , ce qui est le cas ici. On trouvera r de l'ordre de 65%, taux qui est, bien entendu, exorbitant.

Ce problème présente donc plusieurs objectifs :

- permettre une attitude critique à l'égard d'une déclaration médiatique,
- faire établir, à l'occasion, une formule récurrente,

- trouver une heuristique qui permette de tirer une valeur approchée d'une variable à partir d'une formule qui n'en fournit pas l'accès direct.

Il serait intéressant de comparer le taux ainsi calculé avec celui d'un achat à crédit « normal », ce qui permettrait aux élèves de se faire une idée de la façon dont les plus « pauvres » sont encore exploités par certains marchands indéliçats.

1^{ère}

*** 13 ***

Un certain jeu de hasard, qui fut présenté à la télévision, se joue avec un jeu ordinaire de 32 cartes qui combine donc les « hauteurs » (as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7) et les « couleurs » (pique, cœur, carreau, trèfle) comme l'indique le tableau suivant où chacun des 32 rectangles représente une carte de ce jeu :

	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
Pique					x			
Cœur	x							
Carreau			x					
Trèfle					x			

Dans un premier temps, le joueur parie 4 cartes à raison d'une seule par couleur. Par tirage au sort, on désigne ensuite une carte par "couleur", de façon équiprobable pour chacune des « hauteurs ».

Par exemple, un joueur a parié sur les 4 cartes marquées d'une croix **x** dans le tableau : 10 de pique, as de cœur, dame de carreau et 10 de trèfle. Le sort a désigné ensuite : dame de pique, 7 de cœur, dame de carreau et roi de trèfle. Ainsi, le joueur qui avait fait le pari, a une seule bonne carte parmi les 4 sorties.

Or nous lisons dans "Le Monde" du 1/8/88 (voir page suivante), à la suite de la sortie des 4 as, que ce choix ayant été fait 12000 fois, la Société du Loto avait dû distribuer 104 millions aux joueurs. Cependant, elle remarquait, après une sortie de quatre valets, que "sur un coup comme celui-là, nous sommes perdants, et il faudra compter plusieurs mois pour rééquilibrer les comptes ...". Le journaliste du Monde poursuivait alors en écrivant : "Statistiquement, la Société du Loto ne risque pas grand-chose : les parieurs vont continuer à jouer quatre as alors que cette combinaison ne devrait plus sortir avant onze ans ! Selon toute probabilité..."

Le carré d'as porte malchance au Tapis vert

Il y avait une chance sur 4 096 que cela arrive. Et c'est arrivé : le mardi 29 mars, lors du tirage du Tapis vert – jeu lancé le 15 octobre par la Société du loto national et de loterie nationale (SLNLN), - les quatre as sont sortis.

Carré mythique de tous les jeux de cartes, cette combinaison est la plus jouée par les parieurs quotidiens du Tapis vert ; pour les bulletins validés mardi les quatre as avaient été cochés 22 000 fois...

Gain pour les parieurs : 104 millions de francs au total, une centaine de joueurs dépassant la barre des 100 000, et un Perpignanais qui avait engagé 187 F recevant 1000 fois sa mise. Ces gains représentent une perte sèche pour la SLNLN : contrairement au loto sportif, qui est un jeu de répartition (les gagnants se partagent une partie des enjeux)

le Tapis vert est un jeu de contrepartie (les gagnants reçoivent de 1 à 1000 fois le montant de leur mise variant entre 2 et 187 F).

« Nous fonctionnons à cet égard comme un casino », a remarqué un responsable de la SLNLN. Mais en dépit du succès du jeu depuis son introduction, il a précisé : « sur un coup comme celui-là, nous sommes perdants, et il faudra compter plusieurs mois pour rééquilibrer les comptes ». Le 8 janvier le tirage de quatre valets avait déjà fait tomber 52 millions de francs dans l'escarcelle des parieurs. Mais statistiquement, la Société du Loto ne risque plus grand-chose : les parieurs vont continuer à jouer quatre as alors que cette combinaison ne devrait plus sortir avant onze ans : Selon toute probabilité...

A.G.

Remarque et indications

Il n'est pas difficile de calculer la probabilité de sortie de quatre as : $1 / 8^4$, soit 1 chance sur 4 096. Par suite, le tirage étant quasi quotidien et cette probabilité étant interprétée en terme de fréquence, puisque le nombre de jours est grand, on peut dire que la fréquence d'apparition des quatre as est de l'ordre de 1 pour 4 096 jours soit environ 11 ans. Mais de là à affirmer qu'il faudra attendre 11 ans (ce que ne dit pas ce journaliste) pour voir réapparaître quatre as, il y a ...un grand pas que franchissent, de bonne foi ou par ignorance, certains médias et, trop souvent, un public non averti.

Citons l'exemple des croyances issues de l'expression "crue centenaire" qui conduit le naïf à penser qu'une crue cette année ne se reproduira pas avant 100 ans ! (exemple: page...). Citons aussi l'exploitation de cette confusion entretenue par les médias entre probabilité et périodicité (cf. document 1) "un numéro au loto ou à la roulette n'est pas sorti depuis longtemps, donc sa probabilité d'apparition ne fait que croître !". Confusion à laquelle s'ajoute une représentation finaliste et anthropocentrique du hasard (cf. documents 2 et 3 ci-après).

On peut aussi se plonger dans la publicité pour Le Livre d'Or du Loto, qui promet une méthode sérieuse et efficace pour gagner au loto (document 4)

Au péril des glaces

Vingt-quatre Français sont actuellement installés dans le port de Hanggu, à 200 km de Pékin. Ils seront bientôt quarante.

« Pour la mi-novembre, explique Gérard Kuhn de Chizelle, directeur de l'opération, le premier

forage sera en cours : à moins 4 500 mètres, sous 25 mètres d'eau. Notre problème en hiver pourrait venir du froid. Chaque

année, les glaces font leur apparition en mer de Bohal, et le port est quelquefois pris. Mais il paraît que cela

n'arrive que tous les 10 ans. Or, le phénomène s'est produit l'an dernier...

Optimisme donc. Les Français présents à Hanggu en auront bien besoin.

« Rien de plus dur qu'un démarrage. Des bureaux provisoires, pas de

Document 1

Un mauvais numéro

Prochain rendez-vous avec la chance fixé donc au jeudi 13 novembre, une occasion que les amis du 13 ne voudront pas laisser passer sans lui faire un signe. Et pourtant quel mauvais défenseur de la cause Loto que ce numéro ! Plus fricoteur que foudre de guerre, il n'aime pas aller au charbon approvisionner notre mine d'argent.

En plus de quatre années de service on ne l'a même pas vu à l'ouvrage vingt fois. Il est sorti :

- 3 fois en 1976
- 2 fois en 1977
- 4 fois en 1978
- 7 fois en 1979
- 3 fois en 1980

Par contre, si l'on tient compte du complémentaire, — un mauvais numéro aussi que ce dernier dans la plupart des cas ! — le 13 se déchaîne. Voici d'ailleurs l'état des sorties en joker de toute la petite troupe depuis le début du jeu :

- 10 fois en 26
- 9 fois en 31
- 8 fois en 10, 13, 35 et 42
- 7 fois en 24, 25, 32 et 41
- 6 fois en 9, 14, 17, 18, 23, 33, 46 et 48
- 5 fois en 4, 7, 8, 11, 16, 27, 30, 34 et 44
- 4 fois en 1, 3, 5, 6, 12, 20, 28, 36, 38, 43 et 49
- 3 fois en 19, 39 et 47
- 2 fois en 2
- 1 fois en 15, 21, 29, 37, 40 et 45.

Jamais encore le 22 n'est sorti en joker.

Le meilleur dans la spécialité est le double du 13, le

26 qui se signale à l'heure actuelle comme ayant le plus gros écart du lot, 31 semaines d'absence.

Au cours des dix derniers tirages beaucoup de jokers se sont retrouvés en bons numéros assez rapidement (voyez les 35, 1, 42, 48, 6, 23). Pourquoi pas le 13 ? Des mauvais numéros devenant bons, c'est fréquent.

Le 49 fut longtemps dernier, par exemple, et il n'est maintenant qu'à deux points de différence du numéro 1 qui était premier à la même époque.

Des bons devenant mauvais cela arrive aussi. Les numéros en 7, qui furent les meilleurs, ne font guère preuve de zèle actuellement, suivons-les, les mauvais exemples sont bien tentants ici.

● La tranche de novembre des signes du Zodiaque de la Loterie Nationale sera tirée le jeudi 13 novembre à Neuf-Brisach (Haut-Rhin) Salle des Fêtes à 19 heures. Entrée libre.

Document 2

France-SOIR
vous aide
à préparer
votre
LOTO

(novembre 1980)

“FRANCE-SOIR” VOUS AIDE A PRÉPARER VOTRE LOTO

Problèmes d'intervalles

EN utilisant un bulletin multiple et en jouant dix numéros, l'heureux gagnant du précédent Loto a porté ses gains au fabuleux montant encore jamais atteint de 8.313.833,40 F ! Ce mode de pari permet de retenir sur une même grille 7 numéros (7 F), ou encore 8 (28 F), 9 (84 F) jusqu'au maximum 10 (210 F).

Le calcul des gains est fonction des ensembles de six numéros constitués. Si, par exemple, sur votre bulletin multiple à 7 F vous avez trois bons numéros vous toucherez, non pas une fois, mais quatre fois le montant attribué au cinquième rang ; pour un bulletin à 28 F ce sera dix fois ce même rang ; pour 84 F, vingt fois, et pour 210 F, trente-cinq fois. Autre cas, si vous avez trouvé quatre numéros exacts sur les sept choisis, vous gagnerez trois fois le quatrième rang plus quatre fois le cinquième rang (1).

Le numéro 1 est tombé dans le piège ce mercredi : on n'en parlait plus, alors il s'est manifesté. Il ne saurait tarder à récidiver pour reprendre la première place. Jamais encore — en exceptant le complémentaire — il n'a osé se montrer en compagnie du dernier, mais il ne refuse

pas à se commettre avec l'avant-dernier : trois fois déjà le 1 et le 48 sont sortis ensemble. L'intervalle ouvert entre eux est donc le maximum réalisé à ce jour, mais, dans l'ensemble, les marges qui séparent le plus petit du plus grand nombre d'une même série, sont très larges. En effet, sur 78 tirages :

29 fois les intervalles étaient de plus de 40 numéros, 36 fois de 30 à 40 numéros, 12 fois de 20 à 30 numéros. 1 fois seulement 19 numéros séparaient le premier chiffre (5) du dernier (25) dans le tirage 27/1976. Voilà un élément intéressant que celui des intervalles, mais qui ne simplifie pas tellement le problème !

(1) Dans « Le Loto en dix leçons » de Renaud Vincent, Hachette éditeur, tous les tableaux récapitulatifs des gains possibles avec le bulletin multiple.

Une découverte sensationnelle

Des scientifiques le prouvent :
"les tirages du loto ne dépendent pas vraiment
du hasard..."

Certains phénomènes peuvent être prévus

- un numéro absent 23 semaines a 2 chances sur 3 d'être présent la semaine suivante*
- un numéro complémentaire ressort parmi les 6 du tirage suivant, toutes les 8 semaines*
- deux numéros qui se suivent sont parmi les 6 gagnants tous les 2 tirages*
- etc...

Un ouvrage surprenant
et inédit



Le Livre d'Or du Loto, une méthode sérieuse,
efficace et simple avec laquelle vous
augmentez vos chances de gain -

Document 4

1^{ère}

*** 14 ***

Sondages

Les épisodes de sondages d'opinion, de plus en plus fréquents, nous offrent quelques commentaires et interprétations qu'il est bon de garder à distance ...

De nombreux sondages ont précédé le premier tour de l'élection présidentielle de 1995. Les instituts de sondages donnent toujours leurs résultats avec un intervalle de confiance : par exemple, "le candidat X obtient 20% ($\pm 2\%$) dans un échantillon de 1158 personnes interrogées", mais les journalistes omettent souvent de signaler cette incertitude (ou bien n'en ont pas compris la signification). Les dernières prévisions concernant les trois candidats principaux, Balladur, Chirac et Jospin, étaient très voisines. La commission des sondages produisit donc une mise en garde relatée sans explication dans « Le Monde » du 17 février 1995 au sujet des positions respectives de Balladur et Chirac : " Rien n'autorise à dire que le candidat arrivant en tête devance celui qui le suit et, notamment, de ce fait, devrait, seul des deux, figurer au second tour de l'élection. "

Certains lecteurs n'ayant rien compris à cette mise en garde, essayez de leur expliquer, au besoin en imaginant un exemple fictif.

De façon générale, si le candidat en tête des sondages arrive second, cela signifie-t-il que le sondage s'est trompé ?

Remarque et indications

Dans cet exemple (que nous avons emprunté à S. Gasquet), la réponse est facilitée par l'utilisation de graphiques où chaque valeur f de sondage est représentée par un segment de centre f et d'amplitude $0,04$. Ce que permet de dire le sondage, c'est que la probabilité d'avoir raison en affirmant que le candidat possède une proportion d'opinions favorables dans la population entière comprise entre $f - 2\%$ et $f + 2\%$, est de l'ordre de $0,95$. Ainsi, par exemple, si un candidat est séparé par le sondage d'un autre candidat de moins de 4% , l'ordre peut être, en théorie certes, retourné à la faveur de l'élection, même en supposant que les opinions n'ont pas varié du moment du sondage à l'élection même.

Si les intervalles de confiance ont une intersection non vide, le sondage ne s'est pas trompé. Si cette intersection est vide, alors le sondage a de fortes chances de s'être trompé.

On comprendra alors aisément le ridicule et l'ineptie journalistiques et/ou politiques faisant des gorges chaudes d'un gain en une semaine d'un point ou de deux qui pourrait signifier le contraire, et leurs réactions... lorsque les résultats définitifs ne sont pas conformes à leurs prévisions (prédictions ?), alors que la prise en compte des intervalles de confiance aurait permis d'informer plus justement l'opinion (comme par exemple lors du premier tour de l'élection présidentielle de 2002).

post bac

***** 15 *****

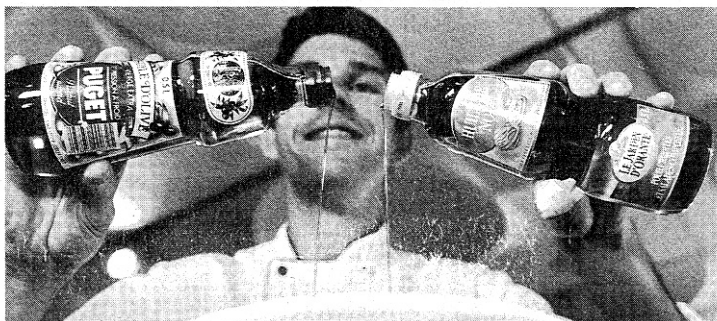
L'INSERM (Institut National de la Santé et de la Recherche Médicale) a effectué entre 1988 et 1992 une analyse comparative des effets d'une certaine alimentation inspirée de celle communément vécue en Crète. Le document de la page suivante développe quelque peu cette expérience dont voici relatés les éléments principaux :

“ des femmes et des hommes de moins de 70 ans, tous victimes d'un premier infarctus dans les six mois précédents et hospitalisés à Lyon, ont accepté de participer à cette étude entre mars 1988 et mars 1992. 303 patients ont suivi le régime traditionnel des malades du cœur : réduction des graisses saturées et remplacement par des huiles polyinsaturées. 303 autres personnes ont expérimenté le régime crétois. Après 27 mois de suivi en moyenne, voici le bilan du premier groupe : 16 décès cardiaques, 4 d'origine non cardiaque, 17 récurrences d'infarctus non mortel. Dans le groupe des « crétois » : 3 décès cardiaques, 5 d'origine non cardiaque, 5 récurrences d'infarctus non mortels... ”

Pour réduire les risques d'infarctus, mangez comme les Crétois

L'huile d'olive, c'est bon pour le cœur

Adieu quenelles, rosette, gras-double! Bonjour huile d'olive, légumes verts, poissons, fromage. A Lyon, plus de 600 malades du cœur ont testé pendant quatre ans un régime alimentaire, copié sur le modèle crétois. Bilan: cinq fois moins de récidence mortelle de l'infarctus du myocarde.



Pour prendre soin de son cœur et éviter l'infarctus du myocarde, finis les régimes déprimants sans odeur et sans saveur. Huile d'olive et fromage, légumes verts et noix, du poisson et du vin (avec modération): voici venu le joli temps d'enseigner ses repas

en a
l'hon
grec
sorm
Le
tion
réali
l'INS
santé
caie)

Un bilan particulièrement frappant

● **606 "cobayes" de la région lyonnaise.** — Des femmes et des hommes de moins de 70 ans, tous victimes d'un premier infarctus dans les six mois précédents et hospitalisés à Lyon, ont accepté de participer à cette étude, entre mars 1988 et mars 1992. 303 patients ont suivi le régime traditionnel des malades du cœur: réduction des graisses saturées et remplacement par des huiles polyinsaturées. 303 autres personnes ont expérimenté le régime crétois.

● **Des résultats très éloquentes.** — Après 27 mois de suivi en moyenne, voici le bilan du premier groupe: 16 décès cardiaques, 4 d'origine non cardiaque, soit une mortalité de 20. On compte aussi 17 récurrences d'in-

farctus non mortel. Dans le groupe des "Crétois": 3 décès cardiaques, 5 d'origine non cardiaque, soit une mortalité de 8. Et 5 récurrences d'infarctus non mortel... Le cholestérol sanguin, le poids et la tension artérielle sont similaires dans les deux groupes.

● **Le colza comme substitut.** — Les Lyonnais préfèrent souvent le beurre et la crème à l'huile d'olive. L'INSERM a tenu compte de ces habitudes et a créé pour les "cobayes" un produit de substitution: une margarine à base de colza qui possède, comme l'huile d'olive, 48 % d'acide oléique.

● **Bonnes huiles et mauvaises graisses.** — Petit guide pour s'y retrouver dans la "jungle" des

acides gras essentiels. Les acides gras saturés: on les trouve dans le beurre, la crème, le gras de certaines viandes et toutes les huiles en possèdent, en plus ou moins grande quantité; l'huile de palme détient le record mais les huiles de noix et de colza en ont le moins. Les acides gras mono-insaturés: comme l'acide oléique, ils sont présents en quantité dans les huiles d'olive, de colza, d'arachide africaine. L'acide linoléique: il se trouve en abondance dans les huiles de pépin de raisin, de tournesol, de noix, de maïs, de soja.

● **Les décès d'origine cardiovasculaires.** — En 1991 en France, 95 658 femmes et 80 023 hommes ont succombé à des maladies d'origine cardio-vasculaires.

Extrait de presse du 11-6-1994

A l'aide de vos connaissances en statistique, pouvez-vous dire si le groupe expérimental "Crétois" diffère significativement du groupe contrôle qui suit un régime traditionnel et servira de référence théorique.

Remarque et indications

S'il arrive de nombreuses fois que les résultats ponctuels soient entachés, dans les médias, de généralisation hâtive afin d'en tirer un "scoop", ici la différence statistique entre les deux populations est réelle. Elle peut être appréciée à l'aide du χ^2 (cf. problématique 5), par exemple de la façon suivante où l'on confondra les

deux circonstances de décès en raison de la faiblesse d'un effectif (décès d'origine non cardiaque chez les crétois) :

	décès d'origine ou non cardiaque	récidives non cardiaques	ni récidives, ni décès	Totaux
non crétois	20	17	266	303
crétois	8	5	290	303

Si l'on calcule la "distance" entre ces deux distributions selon la méthode du test du χ^2 , on obtient, en prenant la distribution des non-crétois comme référence théorique :

$$\frac{(20-8)^2}{20} + \frac{(17-5)^2}{17} + \frac{(266-290)^2}{266} > 32.$$

Or, pour 2 degrés de liberté, $\chi_{0,95}^2 = 5,99$ et même $\chi_{0,99}^2 = 9,21$. Autrement dit, on a au plus 1 chance sur 100 de se tromper en affirmant que les deux populations sont différentes eu égard au critère qui les associe. D'où la conclusion : "vivons crétois" si l'on veut mieux résister aux problèmes cardiaques.



*** 16 ***



Comment jouer ?

- Choisissez d'abord votre pari, Tiercé, Quarté+ ou Quinté+, puis les chevaux en précisant leur ordre d'arrivée.
- Pour un pari avec champ, remplissez la case x sur la ou les lignes des chevaux associés. Pour un champ réduit, remplissez la case Champ réduit.
- Pour jouer les chevaux choisis dans tous les ordres possibles, remplissez la case Formule complète.

Comment multiplier vos chances de gagner ?

• Le pari combiné vous permet d'élargir votre sélection de chevaux.

	4 chevaux	5 chevaux	6 chevaux	7 chevaux	8 chevaux
Tiercé	24 F	60 F	120 F	210 F	336 F
Quarté+		40 F	120 F	280 F	560 F
Quinté+			60 F	210 F	560 F

• Si vous voulez jouer un pari combiné de plus de 8 chevaux, utilisez le ticket Tiercé Quarté+ Quinté+ plus de 8 chevaux.

Comment savoir si vous avez gagné ?

- L'arrivée de la course et les rapports du Tiercé, Quarté+ et Quinté+ sont communiqués le soir même à la télévision et à la radio.
- Vos gains sont payables dès le lendemain de la course, pendant 7 jours dans le Point PMU où vous avez engagé votre pari.
- Vos gains sont également payables pendant 14 jours par correspondance.

Pour toute information :
Pari Mutuel Urbain - Service Clientèle - BP 383 - 75365 Paris cedex 08

© Société de Courses Parisiennes - CIE-PMU - 1996
3-10-2006-10-10

Ce document est la copie d'une fiche informatique mise à disposition par le P.M.U.. Relativement au tiercé (parier sur l'arrivée de 3 chevaux parmi les n partants d'une course dans l'ordre 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} ou dans un ordre indifférent dit

« désordre »), on lit sur la fiche que pour « multiplier vos chances de gagner », il suffit de parier sur plusieurs chevaux. Par exemple, si l'on parie sur 6 chevaux et que 3 d'entre eux figurent parmi les trois premiers de la course, on gagne dans l'ordre ou le désordre suivant le pronostic fait.

La mise de base est 6F lorsqu'on choisit seulement 3 chevaux. Elle devient successivement 24 F, 60 F, 120 F, ... quand on choisit respectivement 4, 5, 6, ... chevaux.

En quel sens peut-on considérer que l'on a multiplié ses chances, comme l'indique l'information ? Combien devrait-on verser si l'on pariait sur 9 chevaux ?

Remarque et indications

Il s'agit certes d'un problème de combinatoire et de probabilité. Mais cette fois encore, on souhaite éveiller chez l'élève son esprit critique et lui montrer que les concepts enseignés lui permettent de l'objectiver.

Si la course présente n chevaux :

- cas : 3 chevaux choisis. Le nombre de choix de 3 chevaux parmi n est C_n^3 ;
 puisqu'il n'y a qu'une seule façon de choisir les trois premiers en ne retenant que 3 chevaux, la probabilité P_3 que ce choix coïncide avec l'ensemble des 3 chevaux prenant les 3 première places est $\frac{1}{C_n^3}$;

- cas : 4 chevaux choisis. Il y a cette fois C_n^4 façons de choisir et C_4^1 façons de choisir le cheval qui ne figurera pas dans les trois premiers ; la probabilité d'avoir 3 chevaux placés parmi les 4 joués est donc : $\frac{C_4^1}{C_n^4}$, soit $4P_3$.

- cas : 5 chevaux choisis. Il y a C_n^5 façons de les choisir et C_5^2 façons de choisir les 2 chevaux qui ne figureront pas dans les trois premiers ; la probabilité d'avoir 3 chevaux placés parmi les 5 joués est donc : $\frac{C_5^2}{C_n^5}$ soit $10P_3$;

- cas : 6 chevaux choisis. Il y a C_n^6 façons de choisir et C_6^3 façons de choisir les 3 chevaux qui ne figureront pas parmi les 3 premiers ; la probabilité d'avoir 3 chevaux placés parmi les 6 joués est donc : $\frac{C_6^3}{C_n^6}$, soit $20P_3$.

- pour 7 chevaux, on trouvera que la probabilité d'avoir 3 chevaux placés parmi les 6 joués est $\frac{C_7^4}{C_n}$ soit $35P_3$ et que pour 8 elle est égale à $56P_3$.

Pour 9 chevaux, on trouverait $84P_3$.

Mais est-il vraiment plus avantageux de jouer 4, 5, 6, 7 ou 8 chevaux ? Non, relativement à l'espérance de gain, car les mises à engager sont justement dans le même rapport que les probabilités de gagner : respectivement, elles sont 6 F pour la probabilité P_3 , mais de $4 \times 6 F = 24 F$ pour 4 chevaux, $10 \times 6 = 60 F$ pour 5 chevaux, $35 \times 6 = 210 F$ pour 7 chevaux, $56 \times 6 = 336 F$ pour 8 chevaux. Le seul gain est de nature psychologique ! Pour 9 chevaux, la mise devrait être de 84×6 soit 504 F, mais le PMU ne le propose pas...

Tale

*** 17 ***

Recherche en paternité

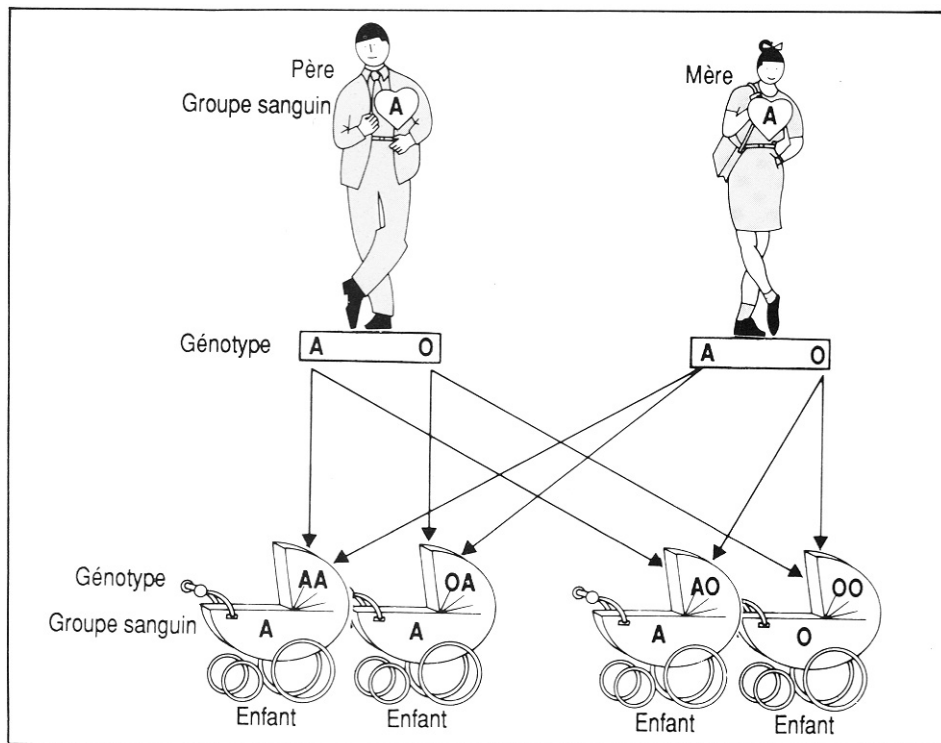
Dans une revue des Centres de Transfusion Sanguine, on trouve un article sur les phénomènes héréditaires, dont un article sur la probabilité de paternité (voir page suivante). Il y est fait allusion au théorème de Bayes. On demandera aux élèves d'en faire la critique, de réfléchir sur l'exemple proposé et de résoudre le problème n° 15 de la problématique 5, puis de refaire un problème adjacent en partant de l'hypothèse de l'article de l'annexe : on accorde a priori la probabilité 1/2 à un père présumé d'être le père réel et on compare les probabilités qu'il le soit sachant qu'il est de groupe O, alors que la mère est de groupe AB et l'enfant de groupe B.

Remarque et indications

Il s'agit ici d'associer une situation de génétique et une situation de probabilité dans le cadre de la rencontre avec une information publique qui pose question. Les informations données ici ne permettent pas de résoudre le problème malgré les termes mathématiques employés (« des lois mathématiques qui reposent sur le théorème de Bayes »).

Dans de nombreux cas, que les conclusions tirées soient exactes ou fausses, la référence scientifique et mathématique laisse le lecteur seul face à son ignorance supposée, et ne lui permet pas de se faire lui-même sa propre opinion.

Ici nous renvoyons à la problématique 5, où le problème complet est traité dans l'exercice 15.



Des résultats supérieurs à 99 %

2 - LA PROBABILITE DE PATERNITE

Quand il n'y a pas d'exclusion de paternité il convient d'effectuer le calcul de la probabilité de paternité.

Cette probabilité est une valeur positive comprise en 0 et 1 : une probabilité nulle correspondant à un évènement impossible et une probabilité égale à 1 correspondant à une certitude. En pratique, la probabilité est calculée en accordant au départ au père présumé une chance sur 2 d'être le père de l'enfant (c'est-à-dire probabilité a priori de 0,5) et en appliquant des lois mathématiques qui reposent sur le théorème de Bayes.

L'application de ce théorème nécessite :

- 1) la connaissance des résultats de groupage du laboratoire (analyse de 25 systèmes) ;
- 2) la connaissance des lois de Mendel et de la génétique des systèmes examinés ;
- 3) la connaissance des fréquences géniques de ces systèmes dans la population.

En fait, en utilisant un nombre suffisant de systèmes de groupes sanguins, ces calculs permettent de mesurer la probabilité de paternité qui atteint alors une valeur supérieure à 0,99, ce qui constitue une indication précieuse pour le juge à qui revient la décision finale.

L'expertise en recherche de paternité nécessite cependant quelques précautions indispensables :

Extrait de la Revue des Centres de Transfusion sanguine

*** 18 *** et pour terminer

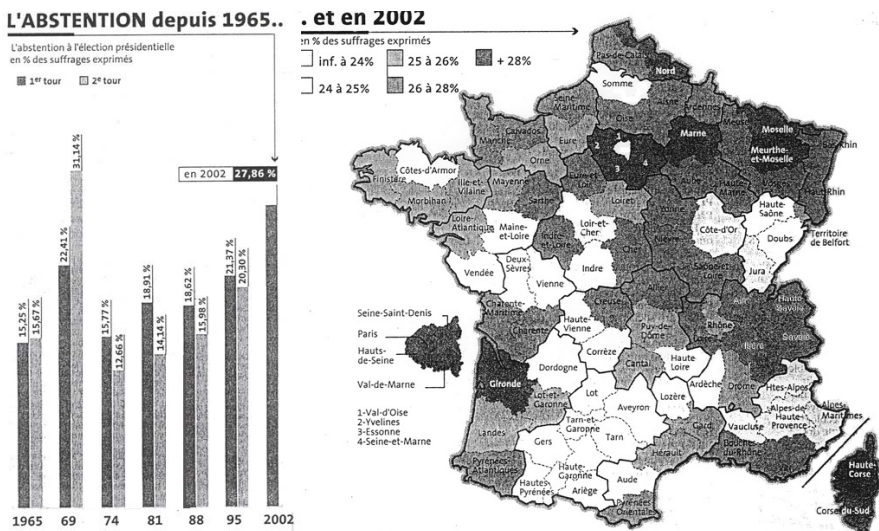
Pour terminer par un article paru plus près de la publication de cette brochure, pour montrer aussi que même les journaux réputés sérieux (les autres ne le seraient-ils pas ?...) peuvent peut-être se tromper :

Dans le Monde du mardi 23 avril 2002, (ci-dessous) autrement dit celui qui a suivi le premier tour des élections présidentielles, un long article d'une page entière, très documenté et donnant toutes sortes de pourcentages, accompagné de cartes et d'un diagramme en bâtons, donne cette carte sur l'abstention en 2002 (nous avons renoncé, faute de place, à reproduire la page entière que les archives du CDI de votre lycée possèdent certainement).

Où est l'erreur, ou du moins le détail bizarre ? Cherchez bien.

Il s'agit de l'abstention en 2002 "en % des suffrages exprimés". Est-ce réellement en pourcentage des suffrages exprimés (après tout ce ne serait pas impossible) ou bien plutôt en pourcentage des inscrits sur les listes électorales (celui dont on parle le plus communément) ? Toujours est-il qu'après le second tour, le taux des abstentions a été donné par rapport aux inscrits.

On peut faire calculer, si l'article dit vrai, le pourcentage par rapport aux inscrits. C'est le même problème que le calcul du taux de TVA (le montant de la TVA pourcentage du prix hors taxe) ou celui du taux de marge (le montant de la TVA en pourcentage du prix toutes taxes comprises).



PROBLÉMATIQUE N° 9

**CONSTRUCTION
OU CHOIX
OPPORTUN ET OPTIMAL
DES MODÈLES ,
DES OUTILS
ET DES MÉTHODES
DANS DES SITUATIONS
SOUS CONTRAINTE**

GÉNÉRALITÉS

Les problèmes extérieurs au champ des mathématiques (vie réelle, situations extra-disciplinaires) cherchent des solutions à l'aide de méthodes, de concepts et d'outils mathématiques. Les résultats attendus peuvent être de nature variée, par exemple :

- une propriété qualitative (une relation entre deux phénomènes, un environnement, etc.),
- une expression quantitative (valeur, ensemble de valeurs, relation fonctionnelle, etc.),
- une représentation (un graphique),
- mais aussi un nouveau modèle, c'est-à-dire un ensemble général, abstrait et structuré.

Les résultats peuvent avoir pour fonctions, par exemple, de :

- décrire, représenter,
- calculer, préciser,
- optimiser,
- construire un modèle,
- anticiper, prévoir,
- décider (rejet d'une hypothèse par exemple).

L'obtention de ces résultats nécessite un travail important de transformation du problème posé, engageant bien souvent dans la réalité, la coopération du mathématicien ou de l'informaticien (par exemple, pour les algorithmes génétiques) et du spécialiste de la discipline où le problème prend son origine et attend sa réponse. En effet, les transformations, pouvant être des réductions, peuvent porter simultanément sur :

- le nombre et la nature des données fournies,
- les grandeurs et les concepts en jeu, l'univocité de leur représentation,
- le nombre et la nature des relations entre ces grandeurs, les contraintes qui agissent sur elles,
- le codage formel ou non,
- la précision attendue du résultat.

Toutes ces tâches conduisent à des activités dans la classe à la charge (éclairée éventuellement) de l'élève qui, à travers elles, prend conscience des difficultés levées par le réel, avec ses ambiguïtés, sa résistance à la modélisation mutilante, ses données et ses faits superflus, négligeables, redondants ou insuffisants, ... Il

doit apprendre à questionner ce réel, à critiquer un résultat eu égard aux contraintes, aux indéterminations ou aux surdéterminations que lui impose ce réel. Il apprend également à ajuster ses compétences mathématiques à des problèmes extra-disciplinaires, constatant (avec humilité le plus souvent) les limites relatives des réponses qu'il peut apporter dans l'état présent. Autant de sources motivantes en vue de l'introduction ultérieure, plus ou moins rapprochée, de notions, de procédures et de méthodes nouvelles. Autant de lieux variés où les concepts théoriques peuvent prendre leur sens et où les mathématiques révèlent la richesse de leur caractère d'outil.

Toutes ces démarches nourrissent la formation de l'esprit scientifique, celui-ci se caractérisant par le développement d'un processus séquentiel constitué de conjectures, de choix opportuns et peut-être provisoires d'un modèle, de traitement dans ce modèle, d'interprétation et de confrontation avec les hypothèses, et d'anticipation dans le cas d'une bonne adéquation modèle-réalité

Les situations qui peuvent être proposées dans le cadre de cette problématique sont à prélever, certes, dans les disciplines scientifiques plus ou moins enseignées au lycée (physique, biologie, économie, astronomie, ...), mais également dans les disciplines à composantes sociale, humaine ou artistique. Si une certaine schématisation, par le professeur, de la situation s'impose quelquefois, elle doit rester suffisamment brute pour donner un sens à la traduction mathématique et aux opérations plus ou moins formelles qui s'appliquent sur elles. De plus, ce caractère brut doit conduire à la mobilisation de champs de concepts nécessitant une synthèse des connaissances et une mise à distance des contextes dans lesquels ils ont été enseignés.

Les qualificatifs "opportuns" et "optimal" mettent en relief le caractère relatif et local des choix que l'on est amené à faire dans des situations où les données, les paramètres, les procédures utilisables, la nature des questions posées, les résultats attendus sont placés sous contraintes. C'est le cas, par exemple, où les résultats d'un calcul doivent satisfaire une condition d'appartenance à un domaine particulier d'un ensemble de nombres (ensemble d'entiers, ensemble majoré, minoré, etc.). C'est le cas aussi où une hypothèse suffisante d'un théorème ne s'appliquant pas dans les conditions d'un problème (dérivabilité par exemple), il faut chercher l'extremum d'une certaine fonction. C'est encore le cas où la complexité d'un problème est telle qu'un changement de cadre approprié en permet la résolution.

Les objectifs didactiques qui sont associés, plus particulièrement, à cette problématique relèvent de niveaux de complexité taxonomique assez élevés, mais doivent être progressivement activés et sont supposés l'avoir été dès le premier cycle. Citons les plus remarquables :

- développer, comme nous l'avons dit, l'esprit scientifique,
- faire dégager, à l'occasion de la résolution de certains problèmes, ce qui leur est spécifique et ce qui est réinvestissable (identification de certaines méthodes plus générales),
- faire prendre conscience de l'étendue des moyens non algorithmiques dont on peut disposer pour résoudre un problème,
- faire expliciter des critères pertinents et/ou optimaux selon lesquels on peut choisir un outil ou une méthode,
- rendre claire la contingence de certaines situations-problèmes, c'est-à-dire

* d'une part, la relativité de la solution au milieu conceptuel ou culturel dans lequel se présente la situation (par exemple, preuve "matérielle" de l'existence d'une certaine propriété, consistant à l'exhiber à travers un exemple),

* d'autre part, l'aspect provisoire de la réponse eu égard aux arguments disponibles dans l'état actuel des connaissances (par exemple, pas de solution d'une équation du second degré si $\Delta < 0$).

Ainsi, les démarches attendues des élèves correspondent le plus souvent à :

- formaliser le problème et ses contraintes,
- évaluer, ou tout au moins estimer, les fonctions de coût (positif ou négatif) des méthodes ou des outils envisageables : longueur, complexité, rigueur, élégance, caractère explicatif, etc.,
- indiquer les critères optimisant les coûts, les rendre objectifs, puis chercher, comparer, évaluer et critiquer des solutions et des cadres résolvants.

Il est bien évident que les activités qui permettent de développer ces démarches nécessiteront des débats ouverts où la tolérance des points de vue différents se payera sur le compte de la recherche obstinée mais circonstanciée de l'optimisation et de la nécessité de consensus, voire d'objectivité. Elles donneront un sens à des notions mathématiques ou para mathématiques telles que les inéquations, les systèmes d'équations, d'inéquations, les paramètres ("discuter selon leurs valeurs"), la dérivation, les fonctions de plusieurs variables, la programmation linéaire, les inf. ou les sup., etc.

Situations – Démarches – Contenus

Les listes qui suivent ne prétendent pas être exhaustives quant aux situations, aux démarches et attitudes et aux contenus. Elles nécessitent d'être élargies, précisées et spécifiées à des niveaux de classe du second cycle ainsi qu'à ses différentes filières.

Situations	Démarches	Contenus
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Jeu de stratégie sur un jeu rectangulaire (cf. problème n° 20) ◆ Trouver des majorants (minorants) d'une expression, rechercher le plus petit (le plus grand) des majorants (minorants). ◆ Encadrer une valeur d'une fonction lorsqu'est donné un encadrement de la variable dont elle dépend. Problème de la recherche d'une meilleure précision et du contrôle de l'incertitude. ◆ Recherche de l'optimum d'une fonction dans des situations variées. ◆ Intérêts composés : passage du discret au continu ou d'une équation récurrente à une équation différentielle. 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Dégager une stratégie gagnante par essai-erreur. ◆ Etablir par essais un majorant (resp. minorant) et chercher à améliorer ses choix comme un défi d'approche. ◆ Transférer la connaissance d'un nombre à celle d'un autre qui en dépend. Rechercher à affiner au mieux. ◆ A partir de la problématique d'optimisation, utiliser un algorithme général institué. ◆ Apprendre à passer du discret au continu et donner un nouveau sens à la dérivation. 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Maximum-minimum ; relations max-min. ◆ Majoration-minoration d'une variable, d'une fonction d'une variable, d'une suite, d'une série. Lignes (surfaces) de niveau. ◆ Continuité d'une fonction d'une variable, application à la majoration et la minoration. ◆ Extrema d'une fonction, le rôle de la dérivation. ◆ Dérivée comme passage à la limite d'une différence discrète.

<ul style="list-style-type: none"> ◆ Représentation arborescente d'une relation d'ordre total ou partiel : par exemple, les groupes sanguins et la relation "peut être donneur à ...". ◆ Passage direct et inverse d'une inéquation (d'un système d'inéquations) à une représentation graphique. ◆ Optimisation d'une fonction affine dans le polygone défini par une programmation linéaire. ◆ Recherche d'un chemin critique dans un graphe pondéré et orienté. ◆ Recherche d'une gestion optimale d'une tâche, d'un chemin critique, d'un chemin optimal minimisant un coût à l'aide de méthodes de la théorie des graphes. ◆ Traduction de relations de communication ou de domination par des graphes orientés et par des matrices. 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Organiser de façon claire, objective et convenue l'ordre entre éléments donné par une relation. ◆ Interpréter une inéquation comme un problème de recherche de majorants et la traduire par un graphe. ◆ Coordonner plusieurs conditions extrémales pour une recherche plus large. ◆ Apprendre et utiliser un algorithme d'optimisation sur un graphe. ◆ Systématiser la recherche de valeurs optimales dans des situations variées de réinvestissement. ◆ Apprendre et utiliser d'autres modes objectifs de représentation de relations binaires symétriques ou non. 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Relation d'ordre sur un ensemble ; ordre total, ordre partiel, pré-ordre total, partiel. ◆ Inéquations et systèmes à une (resp. deux) variable(s). Représentations diverses. ◆ Eléments de programmation linéaire. ◆ Eléments de la théorie des graphes. ◆ Eléments de programmation dynamique. ◆ Flux sur un graphe. ◆ Représentation matricielle d'une relation ; sensibilisation à des opérations matricielles.
--	--	--

Quelques problèmes

Certains des problèmes qui suivent ont été prélevés ou inspirés à partir d'ouvrages du secondaire ou de Mathématiques Supérieures (P. Thuillier) ou en ont été adaptés. Les autres sont originaux. Certains pourraient être utilisés pour problématiser l'introduction d'une notion nouvelle, par exemple, les exercices 3, 4 ou 5 pourraient être structurés en situations-problèmes permettant d'introduire la notion de dérivée.

T^{le} S

*** 1 ***

On sait qu'un corps lâché dans l'atmosphère terrestre tombe, si le vent est nul, à la verticale de son point de lâchage, mais atteint une vitesse limite du fait de la résistance de l'air.

Calculer la vitesse maximum de chute d'une sphère de plomb (densité : 11,3), puis d'une sphère d'aluminium (densité : 2,7) de même rayon 1 cm et de coefficient de résistance $K = 0,25$ ($g = 9,81$ m/s/s).

Remarque : *l'objectif est ici non seulement de type pluridisciplinaire, mais également vise à déséquilibrer une représentation spontanée et erronée de la chute des corps. Il suffit simplement de connaître la relation entre les paramètres en jeu dans une telle situation, ici : $v = \sqrt{\frac{mg}{KS}}$, où m est la masse et S la surface apparente.*

2^{nde} – 1^{ère}

*** 2 ***

La théorie newtonienne au sujet du rôle de l'attraction des astres sur les marées terrestres nous dit que cette attraction est proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au cube de leur distance à la Terre. Rechercher les informations permettant de comparer les effets respectifs de la Lune et du Soleil.

Remarque et indications : *la masse du soleil est 27×10^6 fois plus grande que celle de la lune, mais la distance terre-soleil est 389 fois la distance terre-lune. En*

conséquence, le calcul montre que l'attraction lunaire est pratiquement le double de l'attraction solaire. Mais leurs positions respectives peuvent conduire à contrecarrer ou bien renforcer leur action.

1^{ère}

*** 3 ***

Un secteur circulaire est contraint d'avoir un périmètre p donné. Trouver les mesures du rayon et de l'angle (en radians) pour que l'aire du secteur soit maximale.

Remarques : *cet exercice ne nécessite qu'une mathématisation simple et doit donner un sens opératoire à la notion de dérivée d'une fonction d'une variable, autre que celui plus descriptif de l'introduction géométrique de la tangente ou celui de la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.*

Suivant le choix de la variable, on obtient un problème plus ou moins facile à résoudre. Cette différence peut être intéressante à montrer aux élèves. On obtient :

$A(r) = \frac{1}{2}(pr - 2r^2)$, dont le maximum est pour $r = \frac{p}{4}$ (calcul de dérivée ou extremum d'un polynôme du second degré).

$A(\theta) = \frac{p^2}{2} \times \frac{\theta}{(2 + \theta)^2}$, dont le maximum est pour $\theta = 2$ (dérivée).

T^{ale} S

*** 4 ***

A l'intérieur d'un parterre de forme elliptique, on veut tracer un rectangle dont les côtés seraient parallèles aux axes de l'ellipse et dont l'aire serait maximale.

Trouver les dimensions de ce rectangle.

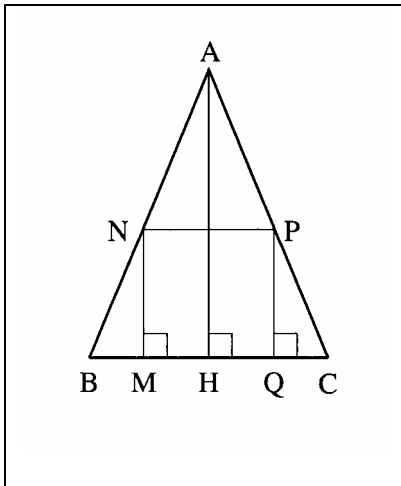
Remarque : *suivant le choix de la fonction (aire du rectangle ou son carré), on obtient un problème plus ou moins facile à résoudre. Cette différence peut être intéressante à montrer aux élèves. On obtient pour une ellipse d'équation*

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *et en notant s l'abscisse du sommet du rectangle situé dans le premier quadrant :*

$[A(s)]^2 = \frac{b^2}{a^2} s^2 (a^2 - s^2)$, dont le maximum est pour $s = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (calcul de dérivée).

2^{nde} – 1^{ère}

*** 5 ***



ABC est un triangle isocèle ($AB = AC$).
AH et BC sont deux longueurs données, respectivement h et a .

On cherche à construire dans ABC un rectangle MNPQ d'aire maximale.

Comment choisir les longueurs des côtés de MNPQ ?

Remarques : *exercice du même type que le précédent, mais ne nécessitant pas l'équation d'une ellipse. Plus facile aussi à faire expérimenter avec Cabri.*

En prenant comme variable $x = NP$, on obtient :

$A(x) = \frac{h}{a} (ax - x^2)$ dont le maximum est pour $x = \frac{a}{2}$ (calcul de dérivée ou

extremum d'un polynôme du second degré).

On pourrait aussi conjecturer le résultat, avec Cabri par exemple, puis le démontrer en montrant que l'aire ne peut dépasser le maximum obtenu (carré toujours positif).

2^{nde} – 1^{ère}

*** 6 ***

Parmi tous les rectangles ayant un périmètre donné $2p$, quel est celui qui a l'aire maximum ?

Parmi tous les rectangles ayant une aire A donnée, quel est celui de périmètre minimum ?

Remarques : *exercice ne nécessitant qu'une mathématisation simple et qui permet de donner un sens opératoire à la notion de dérivée d'une fonction d'une variable.*

On trouve $A(x) = x(p - x)$, et $p(x) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$. Dans les deux cas, c'est le

carré qui réalise ce que l'on cherche.

On pourrait résoudre ces questions en traçant, dans un repère orthonormal, un réseau de droites ($x + y = p$) et un réseau d'hyperboles ($xy = A$) correspondant aux rectangles de périmètre ou d'aire donnés (x et y sont les dimensions du rectangle).

Là aussi, Cabri peut servir d'aide à la conjecture.

1^{ère} – Tale

*** 7 ***

On veut rendre minimal le poids d'une boîte de conserve cylindrique métallique, tout en maintenant sa contenance et l'épaisseur constante de ses parois. Comment doit-on choisir sa hauteur et son rayon ?

Remarques : ce problème vise plusieurs objectifs :

- * son ouverture doit inciter l'élève à prendre des initiatives de mathématisation
- * l'optimisation recherchée fait appel au concept simple de recherche d'extremum pour une fonction de deux variables liées par une relation donnée, donc se ramène à celui d'une fonction d'une seule variable.

Il peut donc être proposé dès les premiers apprentissages de la notion de dérivée.

Suivant le choix de la variable (hauteur de la boîte ou rayon de la base), on obtient un problème plus ou moins facile à résoudre. Cette différence peut être intéressante à montrer aux élèves. On obtient :

$$\text{Aire}(r) = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right), \text{ dont le minimum est pour } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ (calcul de dérivée).}$$

$$\text{Aire}(h) = 2\frac{V}{h} + 2\pi h\sqrt{\frac{V}{\pi h}}, \text{ dont le minimum est pour } h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ (dérivée).}$$

1^{ère}

*** 8 ***

On sait que, sur route sèche, une distance minimale entre deux voitures est conseillée selon les règles communes pour éviter les collisions. Cette distance est évidemment d'autant plus grande que la vitesse est élevée. Des calculs ont montré

que, pour une vitesse v constante, en m/s, et pour un freinage classique, la distance minimale est, exprimée en mètres, $\left(3 + \frac{v}{3} + \frac{v^2}{300}\right)$.

1°) Quel est le temps minimal en fonction de v qui sépare le passage de deux voitures respectant cette distance minimale assurant un bon freinage ?

2°) En supposant que la circulation se fasse sur une file, que la circulation soit dense et que tous les véhicules respectent la règle minimale, combien au plus de véhicules passent en une heure à un endroit donné ?

Remarque et indication de solution : le problème se ramène à un calcul d'extremum à l'aide de la dérivée. Il peut donc être proposé dès la classe de 1^{ère}.

1°) Le temps minimum est : $t_m = \frac{v^2 + 100v + 900}{300v}$.

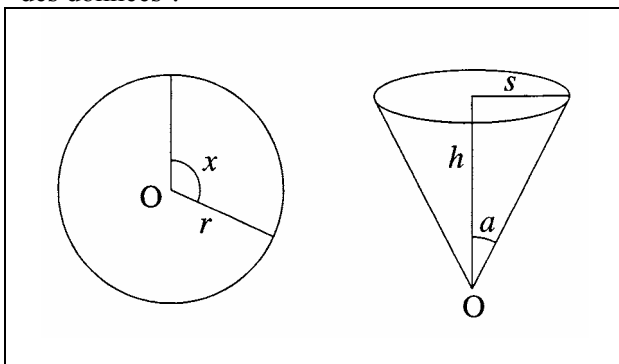
2°) Puisque le nombre de voitures est $n = \frac{3600}{t_m} = \frac{108 \times 10^4 v}{v^2 + 100v + 900}$, ce

nombre est extrémal pour $\frac{dn}{dv} = 0$, en supposant que n est une variable réelle. Il s'agit d'un maximum qui est atteint pour $v = 30$ m/s et donc $n = 6750$ voitures.

T^{ale} S

*** 9 ***

A l'aide d'un disque de rayon r , privé d'un secteur de x radians, on fabrique un cornet conique d'un certain volume. Quelles sont les valeurs de h et s en fonction des données ?



Déterminer x pour que ce volume soit maximal.

Quel est alors l'angle a du sommet du cône ?

Remarque et indications de solution : cet exercice permet de donner un sens opératoire à la notion de dérivée d'une fonction d'une

variable et nécessite une mathématisation dans une situation où doivent être mobilisées des relations géométriques simples.

En prenant le secteur pour faire le cône (au lieu de l'enlever) on simplifie un peu les calculs, de même qu'en cherchant le maximum du carré du volume.

Avec l'énoncé donné, on obtient $V(x) = \frac{r^3}{24\pi^2} \sqrt{(4\pi - x)x(2\pi - x)^2}$, dont le maximum est pour $x = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$.

1^{ère}

*** 10 ***

Deux automobilistes A et B roulent sur deux routes perpendiculaires en direction de leur croisement O, à des vitesses v_1 et v_2 .

A l'instant $t = 0$, on a : $OA = k$ et $OB = h$.

A quel instant t la distance $AB(t)$ entre les deux véhicules A et B est-elle minimale ?

Application : $k = h = 2$ km, $v_1 = 60$ km/h et $v_2 = 120$ km/h.

Remarques et indications de solution : cet exercice permet encore de donner un sens opératoire à la notion de dérivée dans une situation de cinématique simple mais où la mathématisation exige quelque réflexion.

Les deux routes étant perpendiculaires, on les choisit comme axes d'un repère orthonormal, orientés de telle sorte que les coordonnées de A et B à l'instant t soient respectivement $(k - v_1 t ; 0)$ et $(0 ; h - v_2 t)$.

On peut calculer, c'est plus simple, le carré de la distance AB.

On obtient $AB^2 = (k - v_1 t)^2 + (h - v_2 t)^2$ dont le minimum est pour

$$t = \frac{kv_1 + hv_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Application numérique : $t = 0,02$ heure.

Tale S

*** 11 ***

Un chat s'élance dans l'atmosphère terrestre (effet de la gravitation $g = 9,81$ m/s/s) avec une vitesse initiale représentée par le vecteur \vec{v}_0 de norme v_0 faisant un angle α avec l'horizontale.

Etablir l'équation de son mouvement. En déduire :
la hauteur maximale qu'il atteint en fonction de α et de v_0 ,
la longueur maximale de son saut.

Variante : on veut étudier les paramètres définissant le mouvement du sauteur en hauteur Sotomayor. Pour cela on relève que, pour son record du monde, il s'est élevé à 2,45 m du sol, son centre de gravité auquel on se réfère se trouvant à 0,95 m du sol au moment de l'appel et ayant franchi la barre à 10 cm au-dessus. Quelle a été la vitesse verticale initiale ?

Remarque : sous prétexte d'étude d'un mouvement, cet exercice permet de nouveau de donner un sens opératoire à la notion de dérivée.

En appliquant la loi fondamentale de la dynamique au chat, et en projetant sur deux axes horizontal et vertical, on obtient pour coordonnées du chat (ponctuel !) les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ telles que : $y''(t) = -g$ et $x''(t) = 0$.

Donc $y'(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha)$ et $x'(t) = v_0 \cos(\alpha)$.

On a donc $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$ et $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$.

On peut, si l'on veut, en déduire l'équation de la trajectoire (parabole) et chercher les coordonnées du sommet, ou étudier la fonction $y(t)$. Le maximum est

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\alpha) \text{ pour } t_0 = \frac{v_0}{g} \sin(\alpha) \text{ (par dérivée).}$$

Pour la longueur du saut, on cherche $t \neq 0$ tel que $y(t) = 0$, et on calcule $x(t)$.

$$\text{On obtient } x = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \text{ pour } t_1 = 2 \frac{v_0}{g} \sin(\alpha).$$

Pour la variante, avec les mêmes notations, on a une hauteur maximale d'élévation du centre de gravité de 1,60 m, donc : $\frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\alpha) = 1,60$.

Avec $g \approx 9,81$ on obtient une vitesse verticale initiale de $v_0 \sin(\alpha) \approx 5,60 \text{ m.s}^{-1}$ (20 km.h⁻¹!).

T^{ale} S

*** 12 ***

Pour chercher l'abscisse de l'extremum d'une fonction numérique $x \mapsto f(x)$, le mathématicien occitan Fermat (1601-1655) ne disposait pas du calcul des dérivées.

Voici ce qu'il faisait, par exemple, pour la fonction $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- considérer 2 nombres x et $x + E$ ($E \geq 0$)
- écrire que $f(x) = f(x + E)$
- simplifier par E
- poser $E = 0$
- en tirer l'abscisse x de l'extremum.

1°) Appliquer cette méthode pour la fonction considérée.

2°) Commenter cette méthode de Fermat.

Remarque et indications de solution : *cet exercice vise, par un retour historique, à donner une approche épistémologique critique de la notion d'extremum. Aussi le théorème de Rolle est mobilisé dans la question 2.*

Si $f(x) = f(x + E)$, il existe $r \in [x ; x + E]$ tel que $f'(r) = 0$. Quand E tend vers 0, r tend vers x .

Or l'égalité $f(x) = f(x + E)$ donne ici, après simplification par E :

$a(3x^2 + 3xE + E^2) + b(2x + E) + c = 0$. Avec $E = 0$, on obtient l'équation $3ax^2 + 2bx + c = 0$ qui nous donne l'abscisse de l'extremum.

2^{nde}

*** 13 ***

La scène se passe dans un couloir d'un lycée de la région de Nice, par une très belle journée d'automne. Conversation entre deux élèves :

“ - Hier de ma terrasse, on voyait la Corse ...

- C'est impossible, c'est beaucoup trop loin. Ce que tu vois, c'est l'image de la Corse, un mirage...

- Pas du tout, ma maison est sur une hauteur, à près de 200 m d'altitude. On voit donc très loin.”

Qu'en pensez-vous ?

Remarques et indications : *dans cette situation, deux opinions s'opposent, non argumentées. La résolution amènera à utiliser un modèle connu : la représentation de la Terre par une sphère tout en se posant la question de sa pertinence. De plus, les élèves sont amenés à chercher une petite documentation.*

Le diamètre moyen de la terre est de 12 735 km. Si l'on vise un point au niveau de la mer, on peut voir à 50 km environ d'une hauteur de 200 m. C'est insuffisant pour voir la Corse située à plus de 150 km de Nice. Le point le plus élevé de la Corse est certes le Monte Cinto (2 710 m), mais pour “voir” une région, il faut qu'elle soit suffisamment étendue. Si on voit des régions situées à plus de 500 m

d'altitude, c'est qu'elles sont à moins de 80 km du point de contact de la tangente, donc à moins de 130 km de l'observateur. Dans ce cas, l'élève ne peut donc avoir vu qu'une image de la Corse.

Tale S

*** 14 ***

Une somme C_0 est déposée sur un compte d'épargne qui rapporte $r\%$ par an.

On veut estimer, par approximation, ce que rapporterait cette somme si elle était placée sur une durée inférieure à un an.

On envisage deux types d'approximations possibles :

1°) L'année est découpée en p unités de temps insécables (jours, heures, secondes, ...) pour lesquelles le taux de placement est de $\frac{r}{p}\%$. On note t le temps

exprimé en unités, et C_1 la valeur atteinte par C_0 en t . Donner une relation récurrente entre C_{t+1} et C_t . En déduire C_t en fonction de C_0 .

2°) On peut fractionner les unités de temps et, si h est un accroissement du temps de t à $t + h$, le taux du placement est proportionnel à h (soit $\frac{r}{p}h\%$).

Exprimer la relation entre C_{t+h} et C_t . Quelle est alors l'expression de C_t lorsque $h \rightarrow 0$?

Remarques et indications de solution : ce problème est l'occasion pour les élèves de prendre conscience que le "continu" peut être considéré comme le passage à la limite du "discret". Et que par la suite, une équation différentielle peut aisément apparaître comme "limite" d'une équation récurrente.

$$1^\circ) \text{ On a : } C_{t+1} = C_t + \frac{r}{p}C_t. \text{ D'où, } C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{p}\right)^t.$$

$$2^\circ) \text{ Dans ce cas, on a : } C_{t+h} = C_t + \frac{r}{p}hC_t \text{ d'où } \frac{C_{t+h} - C_t}{h} = \frac{r}{p}C_t$$

$$\text{et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_{t+h} - C_t}{h} = C_t' = \frac{r}{p}C_t \text{ et finalement } C_t = C_0 e^{(r/p)t}$$

On retrouve, à travers ce problème, une définition analytique de la fonction exponentielle : $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

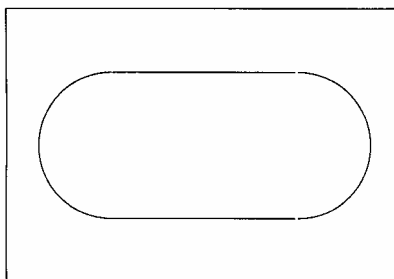
En effet pour $t = p$ (au bout d'un an), on a $C_p = C_0 \left(1 + \frac{r}{p}\right)^p$ avec la première méthode, et avec la seconde, $C_p = C_0 e^r$. Or la deuxième méthode revient à utiliser la première avec des unités de temps infiniment petites, soit lorsque p tend vers l'infini. On trouvera une situation analogue dans la problématique n°4.

T^{ale} S

*** 15 ***

Un parterre a la forme représentée ci-contre : deux demi-cercles de même rayon et deux segments.

La mesure de chacun de ces éléments géométriques est faite au cm près pour les segments et pour le rayon des demi-cercles. Quelle est l'incertitude avec laquelle on connaît le périmètre du parterre ?



Pour avoir le périmètre au centimètre près, quelle incertitude accepte-t-on sur chaque mesure ?

Peut-on trouver une incertitude acceptable sur chaque mesure telle que l'on ait le périmètre avec une précision fixée à l'avance ?

Remarque et indications de solution : cet exercice vise à donner du sens à la notion de continuité par un travail effectif sur les encadrements.

Si r et s sont les mesures effectuées, et r_0 et s_0 les mesures exactes, on a :

$$r - 1 \leq r_0 \leq r + 1 \text{ et } s - 1 \leq s_0 \leq s + 1.$$

Le périmètre p_0 vérifie : $p - 2\pi - 2 \leq p_0 \leq p + 2\pi + 2$ (p étant le périmètre calculé). D'où l'incertitude.

Avec un calcul analogue, on trouve que l'incertitude de mesure a , pour avoir le périmètre au centimètre près, doit vérifier $2(\pi + 1)a \leq 1$.

Pour une précision d sur le périmètre, il faut une incertitude a telle que $2(\pi + 1)a \leq d$.

Cette question est celle que l'on se pose quand on cherche si une fonction est continue (sauf qu'ici il y a deux variables).

On peut par la suite se poser les mêmes questions pour l'aire du parterre.

T^{ale} S

*** 16 ***

Les balanciers des grandes horloges de nos aïeux “battaient” la seconde : à chaque passage à la verticale l’horloge avançait d’une seconde. Pour que ce battement soit exact, il était nécessaire, en particulier, que la longueur du balancier soit parfaitement calculée.

Quelle était l’incertitude sur la durée du battement si celle de la mesure du balancier était de 1 pour 100 ?

Quelle précision relative de mesure faut-il pour avoir une incertitude de 1 pour 1000 sur la période ?

Peut-on trouver une précision relative de mesure acceptable, telle que l’on ait la période avec une précision relative fixée à l’avance ?

Remarque et indication : *cet exercice aussi vise à donner du sens à la notion de continuité par un travail effectif sur des encadrements et dans une situation pluridisciplinaire.*

La période du balancier de longueur ℓ est $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Par un travail d’encadrement, on trouve : $T\sqrt{0,99} \leq T_0 \leq T\sqrt{1,01}$. Cela fait à peu près une incertitude de 0,5 pour 100.

Pour connaître la période à 1 pour 1000 près, il faut mesurer la longueur du balancier à 2 pour 1000 près environ.

Comme dans l’exercice précédent, cette question est celle que l’on se pose quand on cherche si une fonction est continue.

T^{ale} S

*** 17 ***

Une fonction numérique réelle $x \mapsto f(x)$ vérifie, pour tout x_0 et tout x :

$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq K$ avec $K \geq 0$. Dans quel domaine du plan, défini par x_0 et par

K , se trouvent les points $(x, f(x))$ pour $x \geq x_0$?

Remarque : *cet exercice vise à donner du sens à la notion de continuité par un travail théorique sur des encadrements et par la détermination d’une représentation opportune.*

Les points concernés se trouvent dans un « cône » de sommet le point $(x_0, f(x_0))$ et limité par les droites de coefficients directeurs K et $-K$.

T^{ale} S

***** 18 *****

Trouver le maximum de la fraction $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ lorsque le point de coordonnées (x, y) décrit le premier quadrant $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

N.B. On pourra représenter un point du premier quadrant par ses coordonnées polaires.

Remarques : les élèves échouant dans l'étude directe à partir de l'expression de la fonction, ont deux démarches à mener demandant une certaine initiative :

* D'une part traduire le problème en termes polaires (démarche éventuellement simplifiée par la donne du N.B. laissé au libre arbitre de l'enseignant),

* d'autre part, ayant à faire à deux variables indépendantes, pour trouver l'extremum de la fraction, il suffit de le calculer pas à pas en séparant les variables.

Par la suite, le problème se ramène à l'étude simple de deux fonctions dont l'extremum sera donné par la dérivée. Les concepts en jeu sont donc : passage de coordonnées cartésiennes à polaires, dérivée d'une fraction rationnelle, dérivée d'une fonction trigonométrique, extremum d'une fonction quand on connaît sa dérivée.

Ainsi, la fraction se ramène à : $\frac{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}{1 + \rho^2}$.

Il s'agit donc de trouver

$$\max \frac{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}{1 + \rho^2} = \max \frac{\rho}{1 + \rho^2} \times \max(\cos \theta + \sin \theta).$$

Or le premier est maximum pour $\rho = 1$ et le second l'est pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Par suite, } \max \frac{x+y}{1+x^2+y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1^{ère} S

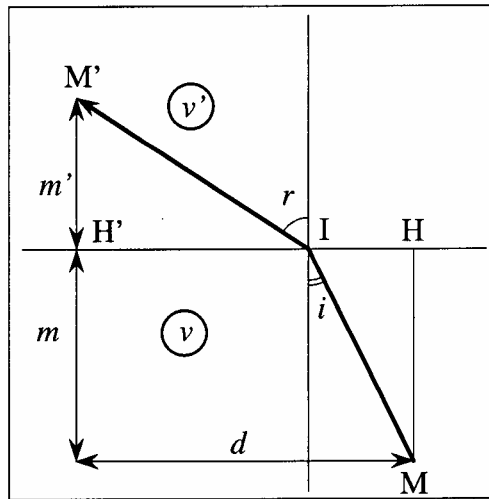
*** 19 ***

Un rayon lumineux MM' passe d'un milieu (par exemple l'eau) à partir du point M (objet) à un autre milieu (par exemple l'air) vers le point M' (œil) en franchissant le plan horizontal au point I . Si les vitesses de propagation de la lumière sont respectivement v (eau) et v' (air), quel est le plus court chemin que va emprunter la lumière pour joindre les deux points ?

Remarque et solution : ce problème a deux objectifs.

1°) Montrer le rôle outil des mathématiques en sciences physiques pour chercher un extremum.

2°) Redécouvrir une loi connue (loi de Descartes) comme satisfaisant un optimum en nécessitant chez l'élève la mobilisation de quelques connaissances en trigonométrie.



Toutes les longueurs étant arithmétiques, posons :

$$HI = x, \text{ donc } IH' = d - x.$$

Pour effectuer le trajet MM' , le rayon a mis le temps :

$$t(x) = \frac{MI}{v} + \frac{IM'}{v'} = \frac{\sqrt{x^2 + m^2}}{v} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + m'^2}}{v'}$$

Cette fonction de x admet un minimum pour x_0 tel que

$$\frac{dx}{dt}(x_0) = \frac{x_0}{v\sqrt{x_0^2 + m^2}} - \frac{(d - x_0)}{v'\sqrt{(d - x_0)^2 + m^2}} = 0.$$

Or pour cette valeur x_0 , $\sin i = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + m^2}}$

et $\sin r = \frac{(d - x_0)}{\sqrt{(d - x_0)^2 + m^2}}$, d'où la relation entre les deux valeurs : $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}$.

Ce rapport est désigné indice de réfraction. On retrouve ainsi la loi de Descartes qui confirme la loi naturelle de la recherche du temps optimum, autrement dit " du moindre effort ". Le rayon lumineux passe d'un milieu à un autre en empruntant le chemin qui lui permet le franchissement en un temps minimum.

T^{ale} S

*** 20 ***

Un tonneau contient 228 litres de vin auquel on ne donne pas un accès aisé. Cependant, discrètement, on prélève chaque jour un litre de ce tonneau que l'on remplace subrepticement par un litre d'eau. A partir de quel jour boit-on plus d'eau que de vin ?

Remarque : Le problème se ramène à la majoration d'une expression contenant une exponentiation et conduisant à l'utilisation du logarithme népérien comme outil.

Si l'on appelle Q_n la quantité de vin (en litres) présente dans le tonneau après le n -ième jour, le litre que l'on prélève le $(n + 1)$ -ième jour contient $\frac{Q_n}{228}$ litre de vin.

Après avoir versé le litre d'eau de substitution, la quantité de vin dans le tonneau est : $Q_{n+1} = Q_n - \frac{Q_n}{228} = Q_n \left(\frac{227}{228} \right)$.

Il faut donc trouver n tel que : $\left(\frac{227}{228} \right)^n \leq 0,5$. On trouvera la solution entière :

158^{ème} jour.

2^{nde}

*** 21 ***

Un éleveur de volailles veut renouveler son cheptel en achetant canards et poulets. Sa capacité d'élevage maximum est de 1000 volailles. Les prix d'achat moyens d'un canard et d'un poulet nouveaux-nés sont respectivement 0,30 € et 0,15 €. L'éleveur ne veut pas consacrer plus de 240 € dans ce renouvellement. Si les bénéfices nets tirés de la vente de volailles sont en moyenne de 0,90 € pour un canard et 0,30 € par poulet, quels effectifs respectifs de volailles faut-il acheter afin de maximiser le bénéfice total ?

Remarque : ce problème, qui peut être introduit dès la classe de Seconde est prototypique de la méthode de programmation linéaire puisque la fonction à optimiser est linéaire ($0,9c + 0,3p$, c et p étant les nombres respectifs de canards et de poulets) et que l'ensemble dans lequel est définie cette fonction est l'intérieur d'un polygone convexe.

Une preuve peut être apportée à l'existence nécessaire des extrema aux sommets de ce polygone en suivant la croissance ou la décroissance de la fonction pour tout segment intérieur et le long des côtés du polygone. Il suffit alors de spécifier la valeur de la fonction à optimiser à ces différents sommets et de choisir le point où elle est maximale.

1^{ère} – T^{ale}

*** 22 ***

		B		
		(1)	(2)	(3)
A	(1)	0	-3	1
	(2)	3	1	4
	(3)	-4	3	3
	(4)	5	7	-2

Les deux joueurs A et B conviennent de la règle suivante : connaissant le contenu du tableau, B choisit une des colonnes (1), (2) ou (3) ; puis A choisit librement une des lignes (1), (2), (3) ou (4). B verse à A la somme indiquée à l'intersection de la ligne et de la colonne qui ont été choisies. Les joueurs ne connaissent pas, bien entendu, le choix

de l'autre au moment où ils jouent.

Par exemple, si B choisit (2) et A choisit (3), B donne 3 € à A. Par contre, si A avait choisi (1), B aurait donné - 3 € à A, c'est-à-dire aurait reçu 3 € de A.

Quelle tactique doit choisir B pour minimiser ses pertes moyennes ?

Quelle tactique doit choisir A pour maximiser ses gains moyennes ?

On examinera les cas suivant que B, intelligent pense que A ne l'est pas et qu'il joue au hasard, ou bien que A est également intelligent et que tous les deux sont prudents.

		A			
		(1)	(2)	(3)	(4)
B	(1)	6	3	3	4
	(2)	-5	4	2	0
	(3)	7	-2	-4	6

Variante de données :

Remarque : ce problème peut fournir une situation didactique très riche et exploitable à différents niveaux d'enseignement. En effet :

* le premier tableau de données conduit à une stratégie permettant de distinguer les opérateurs max (min) et min (max),

* le deuxième tableau fait apparaître une stratégie à point d'équilibre (point-selle).

Donnons ci-dessous quelques indications sur la solution.

Dans le premier cas, B étant intelligent et A jouant au hasard, les pertes de B sont les suivantes :

- s'il choisit systématiquement (1), il perd en moyenne :

$$\frac{1}{4}(0 + 3 - 4 + 5) = 1$$

- s'il choisit systématiquement (2), il perd en moyenne : $\frac{1}{4}(-3 + 1 + 3 + 7) = 2$

- s'il choisit systématiquement (3), il perd en moyenne : $\frac{1}{4}(1 + 4 + 3 - 2) = 1,5$.

Il choisira donc (1).

Par contre, si tous les deux sont intelligents mais prudents, a_{ij} étant l'élément générique du tableau, B cherche $\min_{i=1,2,3} \left(\max_{j=1,2,3,4} a_{ij} \right)$ et choisit la colonne correspondante. A cherche $\max_{j=1,2,3,4} \left(\min_{i=1,2,3} a_{ij} \right)$ et choisit la ligne correspondante.

Ainsi, B minimise le risque de perte maximum et A maximise le gain minimum.

On a toujours : $\min_{i=1,2,3} \left(\max_{j=1,2,3,4} a_{ij} \right) \geq \max_{j=1,2,3,4} \left(\min_{i=1,2,3} a_{ij} \right)$ (propriété à démontrer à l'occasion de cette situation dans le cas fini le plus général).

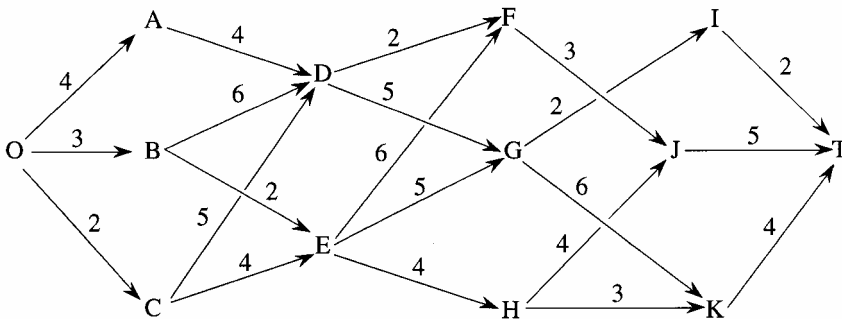
Avec le second tableau, on obtient l'égalité entre les deux expressions. En théorie des jeux, la valeur commune est appelée la valeur du jeu. Ainsi dans ce cas,

en choisissant (3), B perd au plus 3 €, alors que A en choisissant (1) gagne au moins 3 €.

1^{ère} – Tale

*** 23 ***

Caroline et Edouard ont bien envie de sortir ce soir dans la capitale et faire une tournée de cabarets. Lui veut la faire à moindre frais. Elle, au contraire, recherche la tournée la plus chère. Ils conviennent que leurs choix seront circonscrits parmi 12 cabarets répartis en 5 groupes géographiques. Leur choix se fera à raison d'un cabaret par secteur. Les situations géographiques respectives font que le prix de la consommation est augmenté du prix de la course en taxi. Le schéma suivant décrit les choix possibles dans chaque secteur et les coûts du passage d'un cabaret à un autre, y compris le prix de la consommation dans ce dernier. Les coûts sont exprimés dans la même unité. Quel est l'itinéraire que choisissent respectivement Caroline et Edouard qui partent de O et finiront en T ?



Remarque : Les élèves pourront choisir une stratégie de mise à plat de tous les itinéraires possibles. Le travail est long ... et périlleux. Par contre, la méthode de programmation dynamique consistant, par exemple, à maximiser (ou minimiser), en remontant de T, à chaque choix amont a l'avantage de ne pas nécessiter cette explicitation et d'éviter des oublis fâcheux.

Ainsi on procède comme l'indique le tableau, mais en commençant par la ligne 5, puis en remontant à la ligne 4, etc. Le chemin à coût minimal est donc OBEGIT. Celui à coût maximal est OBDGKT.

Etape	Chemin minimal	Coût minimal	Chemin maximal	Coût maximal
1	<u>O</u> BEGIT	14	<u>O</u> BDGKT	24
2	<u>A</u> DGIT	13	<u>A</u> DGKT	19
	<u>B</u> EGIT	11	<u>B</u> DGKT	21
	<u>C</u> EGIT	13	<u>C</u> DGKT	20
3	<u>D</u> GIT	9	<u>D</u> GKT	15
	<u>E</u> GIT	9	<u>E</u> GKT	15
4	<u>F</u> JT	8	<u>F</u> JT	8
	<u>G</u> IT	4	<u>G</u> KT	10
	<u>H</u> KT	7	<u>H</u> JT	9
5	<u>I</u> T	2	<u>I</u> T	2
	<u>J</u> T	5	<u>J</u> T	5
	<u>K</u> T	4	<u>K</u> T	4
		4		4

1^{ère} – T^{ale}

*** 24 ***

La situation suivante vise différents objectifs et semble exploitable en Première ou en Terminale, aussi bien scientifique que littéraire. En effet, sans mobiliser de larges connaissances, elle permet d'examiner des propriétés d'une relation binaire particulière qui ne soit ni d'équivalence ni d'ordre. Occasion donc de l'en distinguer et de rappeler les propriétés de celles-ci. De plus, elle met en évidence, de façon naturelle (un tableau doté d'une certaine structure), la clarté et l'opérativité apportée par la représentation par un graphe et par une matrice d'une relation binaire, et permet de donner du sens aux opérations que l'on peut définir sur les matrices. Ainsi une ouverture vers la théorie des graphes et l'algèbre linéaire est offerte à qui souhaiterait l'exploiter.

Dans un ensemble fini $\mathbf{E} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, on définit une relation notée \angle et possédant les propriétés suivantes :

- (1) $(\forall a_i \in \mathbf{E}) \neg (a_i \angle a_i)$
- (2) $(\forall a_i) (\forall a_j | i \neq j) [(a_i \angle a_j) \Leftrightarrow \neg (a_j \angle a_i)]$

La relation \angle n'est pas nécessairement transitive. (Ce n'est donc pas nécessairement une relation d'ordre). On peut l'interpréter des manières suivantes : $(a_i \angle a_j)$ signifie que

* l'élément (par exemple l'individu) a_i domine l'élément (l'individu) a_j mais aussi bien que

* l'élément (l'individu) a_i communique avec l'élément (l'individu) a_j ou encore qu'il existe un chemin à un pas qui relie a_i à a_j .

On peut alors représenter de plusieurs façons cette relation au sein de \mathbf{E} :

* d'une part, par un **tableau A** (une **matrice**) à double entrée à n lignes et n colonnes, chacune d'entre elles étant associée à un élément de \mathbf{E} . Par exemple, on écrira à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne (a_i) et de la $j^{\text{ème}}$ colonne (a_j) le nombre 1 si $(a_i \angle a_j)$ (a_i communique avec a_j ou le domine) et le nombre 0 si $\neg(a_i \angle a_j)$ (a_i ne communique pas avec a_j ou ne le domine pas). On note a_{ij} cet élément du tableau situé à l'intersection précitée.

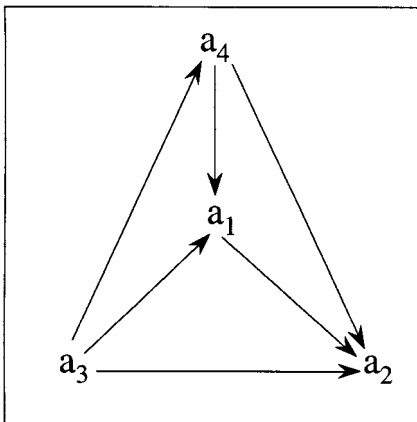
Par exemple, si \mathbf{E} contient 4 éléments, on pourra avoir :

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que a_i communique avec a_2 qui ne communique avec aucun autre. Par contre, a_3 communique avec tous les autres. On aurait ainsi : $a_{12} = 1$, $a_{2j} = 0$ pour tout j ;

* d'autre part, par un **graphe** que l'on dit **orienté** car il ne se lit que dans le sens des flèches, appelées **arêtes** (ou **arcs**) du graphe.

Par exemple, l'arête qui a pour origine a_4 et a pour extrémité a_1 signifie que a_4 communique avec a_1 .



Cette représentation illustre clairement la notion de chemin à un pas d'un élément à un autre.

Prolongeons en cherchant s'il existe des chemins à deux pas d'un élément à un autre.

De a_i à a_k , il existe une communication en deux pas s'il existe au moins un élément a_j avec lequel a_i communique en un pas et tel que a_j communique également avec a_k en un pas. Autrement dit, il est nécessaire qu'il y ait 1 à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$

colonne et à l'intersection de la $j^{\text{ème}}$ ligne et $k^{\text{ème}}$ colonne du tableau. Par conséquent, on doit avoir simultanément : $a_{ij} = 1$ et $a_{jk} = 1$, soit $a_{ij} a_{jk} = 1$, condition nécessaire et suffisante pour que $a_{ij} = 1$ et $a_{jk} = 1$.

Le nombre de chemins à deux pas entre a_i et a_k est donc égal au nombre de fois où une situation d'intermédiaire telle que a_j existe. Ainsi, notant $a_{ik}^{(2)}$ l'élément du tableau représentant les communications à deux pas (au second degré), on aura :

$$a_{ik}^{(2)} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} a_{jk}$$

De cette remarque on déduit la méthode et l'algorithme permettant d'établir le tableau noté $A^{(2)}$ donnant le nombre de communications au second degré.

Reprenant l'exemple numérique ci-dessus, on vérifiera que :

$$A^{(2)} = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Par suite, il existe deux communications à deux pas de a_3 à a_2 : $a_3 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$ et $a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_2$. En revanche, il n'existe qu'une de a_4 à a_2 et de a_3 à a_1 et aucune autre entre les 4 éléments. Ces chemins à deux pas s'observent directement à partir du graphe ci-dessus.

Dans la signification en terme de domination, on dira que a_3 exerce deux dominations au second degré sur a_2 , d'une part à travers a_1 , d'autre part à travers a_4 .

On appelle pouvoir d'un individu a_i le nombre total de domination au premier ou au second degré qu'il peut exercer. C'est donc la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne du tableau noté $S = A + A^{(2)}$.

Exemple : Un tournoi de football a réuni 4 clubs, P.S.G. (P), Juventus de Turin (J), Manchester United (M) et Inter de Milan (I). On a relevé tous les résultats :

le P.S.G. a battu la Juventus et Manchester ;

la Juventus a battu Manchester ;

l'Inter a battu le P.S.G., la Juventus et Manchester.

On peut présenter les résultats par le tableau A suivant des victoires (domination d'ordre 1) :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & J & M & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ J \\ M \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Classer les quatre équipes en fonction de leur pouvoir.

1^{ère} – T^{ale}

*** 25 ***

Une masse ponctuelle subit une translation de vecteur \overrightarrow{AB} sur un plan horizontal sous l'action d'une force représentée par le vecteur \overrightarrow{AM} .

Déterminer les points M tels que le travail de cette force soit constant.

Remarque : *cet exercice vise à donner du sens à la notion de produit scalaire dans un cadre pluridisciplinaire.*

1^{ère} – T^{ale}

*** 26 ***

Une masse ponctuelle M est contrainte, dans un plan, à une liaison avec les points A et B fixés de telle façon que la somme des distances de M à A et B soit au plus égale à une constante k .

Déterminer les points M du plan vérifiant cette contrainte.

Même question avec la somme des carrés des distances de M à A et B au plus égale à une constante k .

Mêmes questions avec les différences des distances puis des carrés des distances qui représentent les contraintes sur M.

Même question dans le cas où c'est le rapport des distances de M à A et à B qui est la contrainte sur M.

Remarques : *ces questions indépendantes permettent d'associer géométrie et analyse par des approches relativement simples et "naturelles", et aboutissent à des classiques.*

Il est possible de problématiser de façon peut-être aiguë ces questions. Par exemple, on pourrait, pour la dernière question, l'exprimer de la façon suivante :

Un tronçon rectiligne [AB] de route étant donné et un point I de ce tronçon étant choisi, on veut savoir où se situent les points M (hélicoptère) du plan vertical

contenant $[AB]$ d'où l'on voit les deux tronçons $[AI]$ et $[IB]$ sous le même angle. On les précisera en donnant les différentes distances des points A, I, B .

Une telle formulation peut avoir la vertu de nécessiter une modélisation géométrique simple de la situation, de réactiver (ou découvrir) et contextualiser une propriété de la bissectrice d'un angle, mais surtout de conduire à une question plus motivante pour certains élèves. Il est bien évident qu'il peut en être fait de même pour les autres questions de l'exercice.

1^{ère}

*** 27 ***

Remarque : voici deux problèmes présentés dans des cadres différents mais se ramenant à un même problème d'optimisation. Les concepts en jeu sont : le barycentre dans le premier cas, moyenne et variance dans le second. Leur intérêt, par rapport à la classification "Problématiques" est donc multiple (cf. Problématiques 1, 5 et 7 par exemple).

L'exploitation pédagogique peut donc être très riche si les élèves sont conduits à se rendre compte de l'isomorphisme des deux situations-problèmes. De plus, ils peuvent être proposés dès la classe de Première.

Cadre géométrique d'optimisation

2 points A et B étant donnés, chercher s'il existe, et le déterminer dans ce cas, un point M tel que la somme des carrés des distances à A et B soit minimale.

Que devient cette propriété dans les deux cas suivants :

- 3 points A, B et C sont donnés ?
- 4 points A, B, C et D non coplanaires sont donnés ?

Cadre probabiliste

On a fait deux observations x_1 et x_2 d'un phénomène quantitatif aléatoire. Déterminer le nombre a tel que : $(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2$ soit minimale. Ce minimum sera appelé variance en Terminale.

Que devient cette valeur dans les deux cas suivants :

- on a fait 3 observations x_1, x_2 et x_3 du phénomène ?
- on a fait n observations $x_1, x_2 \dots x_n$ du phénomène

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \text{ minimale} \right) ?$$

1^{ère}

*** 28 ***

Un cercle de rayon r et deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle étant donnés, déterminer analytiquement l'ensemble des points M du plan de ce cercle tels que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ soit minimum.

Remarque : pour l'élève, l'objectif de cet exercice est double : d'une part, prendre conscience de l'intérêt de choisir un repère convenable (les axes définis à partir du diamètre $[AB]$ et de celui qui lui est orthogonal au centre), d'autre part, retrouver une propriété géométrique bien connue.

T^{ale}

*** 29 ***

Un cycliste se déplace sur une route d'un point A à un point B.

1°) Y a-t-il un point entre A et B où sa vitesse soit strictement égale à la vitesse moyenne sur son parcours ? Prouver cette assertion.

2°) Arrivé en B, il revient immédiatement en A. Y a-t-il au moins un point où sa vitesse a été nulle ? Prouver cette assertion.

3°) Indurain se décide à faire le même parcours aller. Mais, s'arrêtant un moment, il met en définitive le même temps. Y a-t-il un instant du parcours où les deux cyclistes ont roulé à la même vitesse non nulle ? Le prouver.

Remarque : La question 1 est une application, voire une illustration directe du théorème des accroissements finis. La question 2 joue le même rôle vis-à-vis cette fois du théorème de Rolle. Quant à la question 3, elle est une application de ce théorème à la fonction $f - g$ définie à partir des fonctions de parcours f et g des deux cyclistes et permettant la satisfaction du théorème.

Un graphique serait sans doute le plus parlant pour expliquer ces résultats.

N.B. Il sera nécessaire d'actualiser le nom du champion cycliste !

T^{ale}

*** 30 ***

Un chocolatier crée un chocolat en forme de cône de révolution enrobant une cerise (le Mont Cherry). Pour minimiser la quantité de chocolat utilisée, il souhaite que ce cône soit tangent à la cerise que l'on assimilera (!) à une sphère de diamètre 2 cm (car les cerises sont calibrées).

Problématique n° 9 - Problèmes

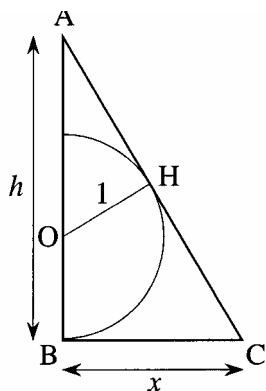
1°) Faire un schéma en coupe de ce cône et de la sphère, le plan de coupe contenant l'axe de symétrie du cône. Peut-on choisir plusieurs modèles de ce cône ? Si oui, en dessiner une autre coupe. Quelles dimensions du cône peut-on faire varier et comment ?

2°) Déterminer le rayon du disque de base qui minimisera la quantité de chocolat nécessaire. Quel sera alors le volume ?

3°) Pour des raisons de design, le chocolatier souhaite que la hauteur et le rayon de base mesurés en cm vérifient la relation $h = r + 1$. Est-ce possible avec les conditions de départ ? Si oui, combien de valeurs peut prendre le rayon r ? En donner une valeur approchée à 10^{-2} près (en justifiant le calcul). Donner une valeur approchée à 10^{-2} près (en justifiant le calcul) du volume de chocolat nécessaire dans ce cas.

Remarque : ce problème peut être accompagné de deux autres parties plus ou moins préparatoire au problème initial. Les voici :

Partie A (un peu de géométrie plane)



Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B , le demi-cercle de centre O a pour rayon 1 , la droite (AC) est tangente au demi-cercle en H et la droite (BC) est tangente au demi-cercle en E .

On pose $AB = h$ et $BC = x$.

1°) Exprimer CH , AH et $\tan(\hat{BAC})$ en fonction de x et de h .

2°) Exprimer h en fonction de x (par la suite on prendra : $\frac{2x^2}{x^2 - 1}$).

Partie B (un peu d'analyse)

1°) On demande d'étudier le plus complètement possible (ensemble de définition, limites, variations) la fonction f qui à x réel, associe $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$.

2°) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2 - 1}$, a, b, c et d étant quatre réels à déterminer. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f et pour celle de la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 1$? Etudier leurs positions respectives.

3°) Représenter ces deux courbes dans un même repère orthogonal dont on justifiera le choix des unités et l'emplacement de l'origine.

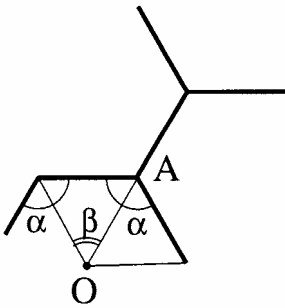
1^{ère} – T^{ale}

*** 31 ***

Une surface plane est donnée. On sait que tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle. Quel est le pavage de cette surface à l'aide de polygones réguliers qui permet de minimiser le nombre d'éléments du pavage, sachant que ces éléments sont tous découpés à partir de disques de même rayon et que la surface est suffisamment grande pour que plusieurs dizaines d'éléments puissent la recouvrir.

Remarque et indication : *les objectifs de ce problème sont triples :*

- mathématiser une situation où les contraintes sont multiples : pavage, polygones réguliers constituant le pavage, minimisation de ces constituants, donc maximisation de leur aire,
- réinvestir une propriété arithmétique simple mais efficace,
- prendre conscience et, peut-être connaissance, d'une propriété d'optimisation de la nature (alvéole d'une ruche d'abeilles).



Soit A un point de jonction de n polygones réguliers à p côtés. L'angle au sommet α de chaque polygone est égal à $\frac{360^\circ}{n}$.

Mais il est aussi égal à $180^\circ - \beta$ soit $180^\circ - \frac{360^\circ}{p}$, β étant l'angle au centre du polygone inscriptible dans le cercle de centre O .

On en tire : $\frac{n}{2} = \frac{p}{p-2} = \frac{p'+2}{p'}$ où $p' = p - 2$, soit encore $n = 2 + \frac{4}{p'}$.

p' est donc un diviseur de 4, puisque n est entier. Donc p' ne peut être que 1, 2 ou 4 et les polygones réguliers sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier. C'est celui-ci qui, maximisant l'aire de la figure découpée dans le disque, constitue le pavage optimal.

T^{ale}

*** 32 ***
Incertitudes d'événements

On souhaite modéliser la notion d'incertitude d'un événement A de probabilité p . En raison de la signification de cette notion dans le langage naturel et dans la pratique scientifique, il nous faut donc construire une fonction i de $p \in [0 ; 1]$, qui possède les propriétés suivantes :

1°) elle doit être positive pour toute valeur de p , comprise entre 0 et 1 ;

2°) elle doit décroître lorsque l'événement devient de plus en plus certain ; par exemple, elle peut être infinie lorsque A est impossible ($p = 0$), ou très grande lorsque A est improbable (p petit), puis nulle lorsque A est certain ($p = 1$). Soit $i(0) = +\infty$, $i(1) = 0$;

3°) elle doit élargir l'amplitude des valeurs de la probabilité ;

4°) elle ne doit pas être linéaire afin qu'à deux intervalles égaux de la variable probabilité ne corresponde pas deux intervalles égaux de la fonction incertitude ;

5°) lorsque 2 événements A et B sont indépendants, l'incertitude de leur conjonction doit être égale à la somme de leurs incertitudes respectives : $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$ (rappelons que, dans ce cas, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$) ;

6°) l'unité de mesure de l'incertitude doit être telle que la valeur de l'incertitude d'un événement de probabilité $\frac{1}{2}$ soit égale à 1 : l'incertitude de A et de son

contraire est la même.

Que choisiriez-vous comme fonction pour représenter simplement cette incertitude ?

Remarque : ce problème, qui aurait pu trouver sa place dans la problématique 4, est classé dans celle-ci. En effet, il vise principalement à montrer quelle est la démarche de modélisation que peut adopter le mathématicien pour rendre compte d'un phénomène réel. En fait, nous adoptons ici la modélisation de Shannon. Il a également comme intérêt de montrer le côté fonctionnel du logarithme.

Cette fonction cherchée devant être positive et décroissante, devant vérifier la propriété 5°) que possède la fonction logarithme, il paraît naturel de choisir une fonction de p qui y fasse référence, par exemple $-\log_a(p)$ dans une base a . Dans ces conditions, elle vérifie également 2°).

Pour vérifier 4°), il suffit d'écrire $i\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = -\log_a\left(\frac{1}{2}\right)$, d'où $a = 2$.

Finale $ment$ la fonction cherchée (dans la modélisation de Shannon), est $i(p) = -\log_2(p)$.

On confond, en théorie de l'information, l'incertitude d'un événement et l'information apportée par la réalisation de celui-ci. En effet, si un événement est sûr, l'information apportée par sa réalisation est très faible ; en revanche, si l'on s'attend à ce qu'il ait peu de chances de se réaliser, l'information tirée de sa réalisation est importante. Souvenons-nous des jeux comme le "pendu" où l'on doit rechercher des mots à partir d'informations sur leur écriture ; l'information du type : il possède un k (ou un z) est plus riche que celle-ci : il contient un e (ou un s).

*** Situation didactique à développer *** les groupes sanguins

Le groupe sanguin d'un individu est déterminé, dans une première approche, à partir de la présence ou non de certains agglutinogènes notés A, B et Rh. Ce groupe est noté A, B, AB ou O suivant que l'individu possède respectivement l'agglutinogène A (et non B), B (et non A), A et B ou ni l'un ni l'autre. On adjoint au nom du groupe, Rh⁺ ou Rh⁻ suivant que l'individu possède ou non l'agglutinogène Rh.

1°) Décrire, à l'aide d'un diagramme arborescent, tous les cas possibles.

2°) En théorie, une personne ne pouvant recevoir de sang que lorsqu'elle a tous les agglutinogènes du donneur, quelles sont les différentes "transfusions" possibles ? Représenter par un graphe le treillis correspondant : ainsi, tout arc du graphe admet pour origine un groupe donneur et pour extrémité un groupe receveur.

3°) Sur l'ensemble des groupes, on définit la relation suivante : le groupe G est antérieur au groupe G' si, en théorie, toute personne du groupe G peut donner son sang à tout individu du groupe G'. Quelles sont les classes de groupes sanguins totalement ordonnées dans cette relation ? Souligner les plus petits et les plus grands éléments de chacune de ces classes.

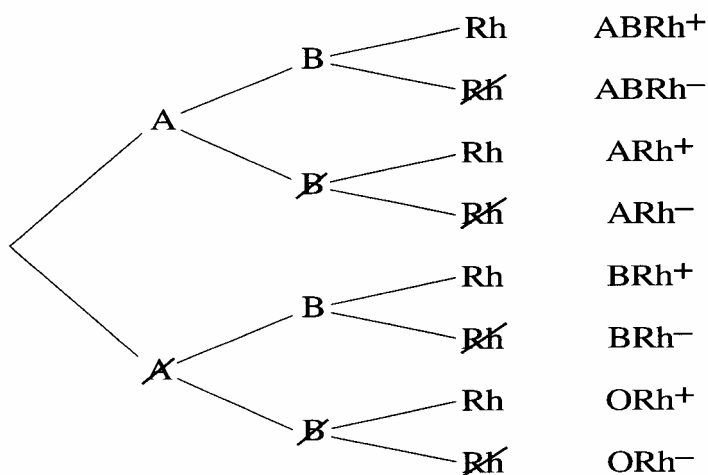


Une analyse *a priori* du problème nous assure l'embarras des élèves devant une telle situation. Où sont les mathématiques ? Par conséquent, les première

Problématique n° 9 - Problèmes

informations de type biologique étant données, les élèves sont placés devant la nécessité de les organiser et cette mise en ordre mobilise la logique élémentaire et naturelle : un individu possède ou non une propriété. L'organisation spontanée des élèves sera plus textuelle que schématique et, de ce fait, sera très variée et peu exploitable. La nécessité de conjointre les points de vue mène à la diminution du poids textuel du traitement fait.

1°) On peut donc représenter l'organisation de la population en groupes sanguins de la façon suivante en examinant la présence ou l'absence, chez un individu quelconque, des 3 agglutinogènes.



ou encore

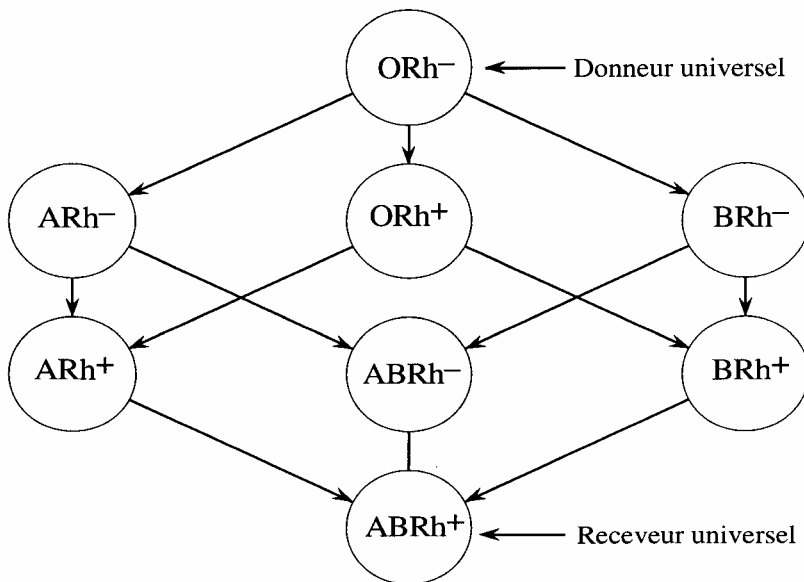
	A	non A
B	ABRh ⁻	BRh ⁻
non B	ARh ⁻	ORh ⁻

ABRh ⁺	BRh ⁺
ARh ⁺	ORh ⁺

La première organisation des informations présente une efficacité en combinatoire car elle conduit à la détermination du nombre de parties d'un ensemble donné (si n est son cardinal, 2^n est celui de l'ensemble de ses parties). De plus, le travail dichotomique qui s'impose est fréquent en mathématiques et donc à réinvestir.

La deuxième organisation présente un intérêt majeur dans les traitements par tableaux à double et triple entrées et donc dans l'organisation des données statistiques. De plus, on se doit de fournir aux élèves les images ensemblistes sous forme de diagramme de Venn. Elles ont des qualités d'objectivité et de richesse intuitive.

2°) On peut organiser les groupes au moyen de la relation non symétrique (si G est donneur pour G' et différent de lui, alors G' ne peut donner à G) mais réflexive (G peut donner à lui-même, en théorie) et transitive (si G peut donner à G' et G' à G'' , alors G peut donner à G'') et obtenir la représentation suivant du **pré ordre partiel** correspondant :



Une question sur la raison du choix du mot “partiel” doit être posée. Si l'on prend deux personnes au hasard dans une population, peut-on affirmer que l'une peut donner son sang, sans danger, à l'autre ?

Un tel graphe offre une image dynamique de la relation en jeu. Il est donc plus informatif que les diagrammes précédents en raison de son absence de symétrie. Il

Problématique n° 9 - Problèmes

permet de traduire aussi bien une relation d'ordre (les élèves en rencontrent dans d'autres problèmes proposés ici) qu'une relation de pré ordre, les boucles de réflexivité étant sous-entendues dans l'image ci-dessus. Il serait bon de faire ré exprimer oralement l'information que l'on en dégage pour préparer la question 3°) suivante.

A titre d'information, voici les pourcentages des individus de chaque groupe, rhésus exclus, respectivement dans le monde et en France.

	Monde	France
O	42%	44%
A	45%	44%
B	11%	8%
AB	2%	4%

Signalons que la répartition mondiale de Rh+ est de l'ordre de 85%. Un calcul de la fréquence de chacun des 8 groupes peut alors être fait par les élèves dès que l'information d'indépendance entre les agglutinogènes apparaissant nécessaire est

fournie.

3°) A partir du graphe précédent, on voit qu'il est possible de dégager 6 chemins transitifs correspondant chacun à une classe au sein de laquelle la relation « est donneur pour ... » permet de classer chaque groupe en “donneur pour ... ” ou “receveur de ... ”, relation que l'on dit réciproque de la précédente. Voici ces classes :

$$\begin{aligned} &\{\text{ORh}^-, \text{ARh}^-, \text{ARh}^+, \text{ABRh}^+\} \\ &\{\text{ORh}^-, \text{BRh}^-, \text{BRh}^+, \text{ABRh}^+\} \\ &\{\text{ORh}^-, \text{ARh}^-, \text{ABRh}^-, \text{ABRh}^+\} \\ &\{\text{ORh}^-, \text{BRh}^-, \text{ABRh}^-, \text{ABRh}^+\} \\ &\{\text{ORh}^-, \text{ORh}^+, \text{ARh}^+, \text{ABRh}^+\} \\ &\{\text{ORh}^-, \text{ORh}^+, \text{BRh}^+, \text{ABRh}^+\}. \end{aligned}$$

Dans chaque classe, il est possible de définir une relation de pré ordre total : deux individus quelconques relevant de deux groupes d'une même classe peuvent être ordonnés en donneur (“est avant” ou “égal”) et receveur (“est après”).

Il est nécessaire, à la fin de ce problème, de dégager du contexte la définition d'un pré ordre (total et partiel) sur un ensemble et de la comparer à celle d'un ordre (total et partiel). Ces définitions devraient être engrangées dans la base de données institutionnalisée par la classe.

Enfin, l'évocation d'autres relations contextualisées, déjà rencontrées en mathématiques, dans d'autres disciplines ou dans la vie courante, doit être faite à cette occasion.

PROBLÉMATIQUE N° 10

CONJECTURES, PREUVES, RÉFUTATIONS ET VALIDATIONS

GÉNÉRALITÉS

Que trouve-t-on comme définition de ces mots dans le Dictionnaire des mathématiques de Bouvier-Georges-Le Lionnais (PUF) ?

“ *Conjecture* : hypothèse émise a priori sur l'exactitude ou non d'un énoncé dont on ignore la démonstration ”

“ *Preuve* : synonyme de démonstration ”

La langue française et notre pratique nous fournissent un nombre important de **mots** se rapportant aux activités mathématiques où la rationalité et son expression sont en jeu. Peut-être est-ce lié au fait que nous appartenons à la patrie de Descartes et que, en conséquence, notre culture conduit nos programmes scolaires à ne jamais négliger de faire une grande place à la démonstration, excessive quelquefois, mais nécessaire à la satisfaction d'objectifs généraux. Peu de pays, en revanche, lui accordent autant de place dans leurs curricula. Cette abondance de références dans les programmes français et leurs commentaires se traduit ainsi, avec des nuances quelquefois subtiles, par des expressions variées que l'on retrouve dans les textes qui les présentent et dans des consignes de problèmes : **conjecturer, prouver, démontrer, montrer, expliquer, justifier, valider, argumenter, établir, ...**

Nous ne nous livrerons pas ici à en rechercher et en donner une définition précise, tâche difficile et peut-être impossible dévolue au groupe “MOTS” de l'APMEP (cf. “Mots flous” bulletin vert n°384 de juin-juillet 1992). Mais reconnaissons qu'ils sont employés très souvent avec des sens ambigus, à l'origine de certaines difficultés des élèves, ambiguïtés entretenues et renforcées depuis le 1er cycle, voire depuis le primaire. Disons, cependant que, contrairement au dictionnaire cité plus haut, nous distinguerons “preuve” et “démonstration” : la **“démonstration mathématique” est une preuve particulière, respectant des règles et une rhétorique codifiées et communément admises, alors qu'il existe différentes formes de preuves** dont : la preuve “physique” (par exemple, réalisation d'une maquette qui fait “preuve”...), le “montrer” (l'**ostension**) où il suffit de mettre en évidence un fait ou un exemple. L'**argumentation**, de son côté, juxtapose des énoncés, éventuellement de façon redondante, sans explicitation des règles générales (axiomes, définitions, théorèmes) qui justifient ces énoncés. Cette forme de discours est très souvent employée dans la vie courante, mais aussi par les élèves qui n'ont pas compris la rhétorique de la preuve mathématique. Enfin, nous n'omettons pas la distinction dans les tâches entre “chercher la solution d'un problème, et donc résoudre”, tâche à la faveur de laquelle apparaissent déjà les raisons mathématiques qui la légitimeront et “démontrer que la solution envisagée est mathématiquement correcte à travers une articulation légitime des énoncés”.

Quels sont, à l'école, les **objectifs** et donc les **fonctions** premières de ces activités mathématiques ? On en distingue généralement de trois sortes (cf. travaux de G.Arsac et E.Barbin) :

- ◆ sociales où il s'agit de convaincre et d'obtenir un consensus assez large pour que la preuve ne se réduise pas à une argumentation ad-hoc chargée seulement de réduire la méconnaissance ou le doute de l'interlocuteur ;

- ◆ psycho-cognitives où il s'agit cette fois, par une explication, irréfutable par soi-même, de réduire sa propre incertitude et d'obtenir un accord absolu avec sa rationalité ;

- ◆ épistémologiques où la preuve accroît la connaissance, élargit la théorie par de nouveaux énoncés établis sur des bases communément admises par les mathématiciens.

Ce sont ces fonctions qui vont donner du **sens** aux activités proposées (imposées ?) aux élèves. Le maître est généralement le référent qui jugera la validité du produit, qui éventuellement, le soumettra à la critique des autres élèves, qui mettra en évidence les acquisitions cognitives individuelles et collectives, l'extension de la mémoire de la classe, l'opérationnalité des nouvelles connaissances capitalisées, etc. Mais, il ne faut pas se bercer de l'illusion didactique consistant à croire que la nécessité de passer de la conjecture ou de la seule consigne "démontrer" à l'apport de preuve mathématique, ainsi que la rhétorique de celle-ci, se feront sans heurts ni sans obstacles : "convaincre" s'obtient par d'autres voies détournées (par exemple, l'argument d'autorité), "se convaincre" peut se réduire à une confiance ou une approbation molles et fallacieuses et, de plus, peut ne pas passer par une démarche canonique. Quant au progrès de la connaissance théorique, n'est-il pas vain pour certains élèves puisqu'il serait préexistant, déjà écrit dans l'histoire du savoir ? C'est donc par une grande variété d'activités que nos objectifs didactiques seront atteints, par un long processus progressivement mis en place et non par une injonction. La conjecture, dont la fonction est excitatrice et entraîner le désir de "savoir plus", par conséquent dont une vertu principale réside dans l'enjeu de sa vérité, n'est d'ailleurs réellement formulable qu'au-dessous d'un seuil de certitude ; un excès d'évidence la scotomise, tuant le désir précédent. L'entrée dans le processus de preuve ne prend lui aussi son sens que dans une certaine fourchette où l'incertitude n'est pas trop importante, vu le coût cognitif de son engagement, et où la certitude n'est pas absolue car le gain serait dans ce cas dérisoire.

On voit donc que les difficultés didactiques ne sont pas minces et qu'elles nécessitent des **enjeux** et donc des **tâches** bien adaptés à la fonction que l'on veut privilégier. Par exemple, le recours au "débat scientifique" (cf. travaux de M. Legrand) ou au conflit socio-cognitif en groupe, bien que très délicats à mener,

présentent un réel intérêt dans un travail collectif où la situation présenterait un caractère suffisamment ouvert. De même, une recherche, pour élèves isolés ou en binôme, sur micro-ordinateur, présente l'avantage de changer la nature des relations avec un nouveau référent (une base de connaissances), d'autoriser un rythme plus personnel et de réduire l'effet des implicites et des tolérances auxquels le maître se trouve bien souvent contraint.

Généralement, en raison des programmes actuels, les **contenus** privilégiés sur lesquels porte une démonstration sont de nature géométrique. Ce qui ne peut que compliquer la tâche didactique car, bien souvent, les propriétés à démontrer présentent un caractère d'évidence perceptive. Trop peu de situations d'analyse nécessitent le passage par la conjecture, puis par sa preuve, sans doute parce que la majorité d'entre elles sont calculatoires ou descriptives (étude de fonctions, par exemple). Cependant, la recherche d'une minoration ou d'une majoration optimales nécessitent des justifications appelant des théorèmes généraux au même titre qu'une démonstration géométrique. C'est aussi le cas de problèmes d'arithmétique dont on peut regretter la disparition des cursus scolaires.

On pense aussi bien souvent que la démonstration se ramène exclusivement à la déduction, réduite elle-même au modus ponens et au syllogisme. D'autres **formes** de preuve intellectuelle se rencontrent en mathématiques et ne doivent pas être négligées en faveur des formes précédentes, particulièrement en second cycle. Il s'agit, par exemple, de la démonstration dite par l'absurde, du "raisonnement par récurrence", de la preuve par contre-exemple, etc. Et comment situer le raisonnement inductif qui trouve une place majeure dans les sciences "non dures" ? La formation mathématique ne peut l'ignorer, ne serait-ce que pour en montrer sa "logique", ses limites, ses dangers mais aussi sa puissance créative.

En résumé, disons que les vertus formatives au niveau socio-cognitif de la preuve mathématique s'expriment en termes de consensualité, d'universalité, de généralité, de prédictibilité, de rigueur, ... Qu'en revanche, l'abus consistant à y limiter l'activité mathématique conduit à nier ou, tout au moins, à scléroser les aspects positifs du recours à l'évidence, au bon sens, à scléroser l'intuition, à systématiser un comportement de doute, ... autant d'attitudes préjudiciables à une image vivante et ouverte de la pensée mathématique.

Situations – Démarches

Les activités en relation avec cette problématique, si elles appellent des travaux de réflexion personnelle de l'élève pour douter, faire des hypothèses, se convaincre de la vérité d'énoncés exprimés ou de propriétés perçues, les activités présentes donc ne doivent pas faire l'impasse de travaux collectifs. Ces derniers accompagnent certes la recherche de solutions mais aussi présentent un aspect social où la nécessité de convaincre du vrai ou du faux, la nécessité de communiquer de façon objective, tout autant que de prendre en compte la subjectivité d'un locuteur sont le moteur des échanges. Bien évidemment, les situations proposées côtoient encore d'autres problématiques puisque la démonstration, restant l'apanage de l'activité mathématique, n'a pu être absente particulièrement des problématiques 1 à 6. Cependant, comme le titre le souligne, la place explicite de mots comme "preuves", avec ses différentes facettes, montre que nous ne voulons pas l'y réduire.

Situations	Démarches
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Construction de polyèdres réguliers convexes (solides de Platon) à l'aide de polygones réguliers convexes. ◆ Régionnements de figures géométriques planes par un choix récurrent de certains de leurs points. Étude de leur combinatoire. ◆ Ensembles de points du plan ou de l'espace astreints à certaines conditions de liaison. Ensembles de nombres astreints à certaines conditions de relations. ◆ Analyse du discours mathématique à travers l'exemple d'une démonstration classique. Mise en évidence des modes fondamentaux du raisonnement mathématique par une pratique du modus ponens, de la contraposition, du raisonnement par l'absurde, ... 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Tâtonner, découper, assembler, conjecturer. Valider ou réfuter avec des arguments "physiques" par ostension. ◆ Conjecturer des récurrences, en réfuter, puis en établir d'autres, les démontrer et vérifier. ◆ Tâtonner, "bricoler", conjecturer par essais successifs sur écran ou sur papier, déduire ou, suivant les cas, procéder de façon exhaustive ("épuisement des cas") et vérifier. ◆ Décomposer un texte mathématique en énoncés élémentaires, expliciter les connecteurs employés et leur fonction. Distinguer les rôles respectifs de l'exemple et du contre-exemple.

Quelques problèmes

2^{nde}

*** 1 ***
 “C’est Noël !”



Dans la salle de classe, on veut installer pour Noël, des guirlandes colorées, les unes rouges, les autres vertes. Pour cela, on va relier par une guirlande les 5 centres des murs et du plafond, ainsi que la base inférieure d’un lustre. Est-il possible de n’avoir aucun des triangles formés par ces 6 points comportant le long de ses côtés des guirlandes de la même couleur ?

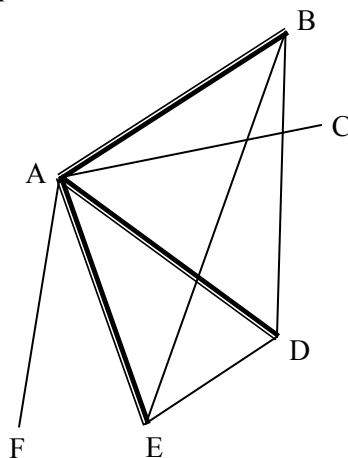
Remarque et indication :

Bien que cet exercice nécessite une petite modélisation, il se résout de façon simple par un raisonnement géométrique de type raisonnement par l’absurde à partir du modèle créé. Il serait intéressant de faire faire l’analyse de la preuve en ces termes. L’ouverture du texte et son aspect ludiques doivent conduire les élèves à l’investir. Il est même prototypique des problèmes dont la solution serait à trouver hors du temps didactique.

Le modèle plan ci-contre correspond à une projection des 6 points par exemple sur le plan horizontal. Soit A un de ces points d’où partent 5 guirlandes dont 3 au moins sont de la même couleur (en gras sur le dessin).

Supposons qu’il soit possible d’éviter que les 3 triangles ABD, ABE et ADE aient chacun des côtés de la même couleur. Alors le triangle BED aurait ses 3 côtés de la même couleur.

L’hypothèse posée n’est donc pas réalisable et l’un des 3 triangles au moins a des côtés de la même couleur.



2^{nde} / 1^{ère}

*** 2 ***

Démontrer que

$$P_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{15}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{(n^2 - 1)}\right) < 2$$

Remarque et indication :

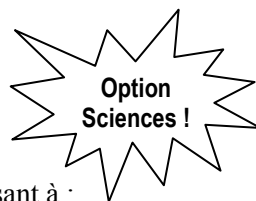
Cet exercice vise à donner aux élèves une simple tâche de raisonnement sur les fractions. En effet, on peut écrire P_n sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \times \frac{9}{8} \times \frac{16}{15} \times \dots \times \frac{n}{n^2 - 1} \\ = \frac{2^2}{3} \times \frac{3^2}{2 \times 4} \times \frac{4^2}{3 \times 5} \times \dots \times \frac{(n-2)^2}{(n-3)(n-1)} \times \frac{(n-1)^2}{(n-2)n} \times \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \end{aligned}$$

expression qui, après simplification, est égale à : $2 \times \frac{n}{n+1} < 2$.

1^{ère}

*** 3 ***



Existe-t-il une fonction numérique f , définie sur \mathbf{R} , satisfaisant à :
pour tout x réel : $f(x) + f(1 - x) = x$?

Remarque et indication :

Ce problème peut être l'occasion de mettre en évidence une propriété de raisonnement formel, celle du rôle du contre-exemple dans la réfutation. En effet, pour prouver que la propriété universelle énoncée n'est pas vraie, il suffit de montrer un exemple où elle est en défaut.

Supposons qu'une telle fonction existe. Choisissons un réel x différent de 0,5. On peut lui associer son complément à 1, différent de lui-même, soit $y = 1 - x$. La fonction f devrait alors satisfaire les égalités :

$$f(x) + f(1 - x) = f(1 - y) + f(y) = x = y,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que $x \neq y$. Donc une fonction dotée d'une telle propriété universelle ne peut exister.

2^{nde}

*** 4 ***



Cinq points distincts sont choisis au hasard dans le plan repéré et tels que toutes leurs coordonnées soient des entiers. Démontrer qu'il existe un segment d'extrémités deux de ces points et dont le milieu ait également des coordonnées entières.

Remarque et indication :

Cet exercice ne sollicite pas des propriétés d'arithmétique savantes, mais un raisonnement de type exhaustif que les élèves redoutent d'employer du fait qu'il n'est pas déductif donc suspect d'absence de rigueur.

Ici, tout point à coordonnées entières, paires (P) ou impaires (I), est donc du type (P, P), (P, I), (I, P) ou (I, I). Parmi les 5 points choisis, deux au moins sont donc du même type. Par suite, les coordonnées du milieu du segment qui les joint, demi-sommes des coordonnées des extrémités, sont donc des entiers.

2^{nde}

*** 5 ***

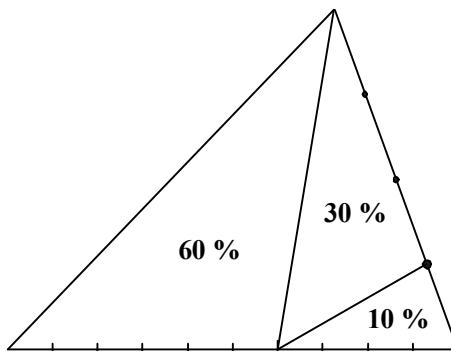


1° Étant donné un triangle quelconque, trouvez une **construction** permettant de le découper en trois triangles ayant un sommet commun et d'aires respectives égales à 10%, 30% et 60% de l'aire totale. (in brochure APMEP n°121 « Maths en Scène » – exposition « Maths 2000 », Rouen 1998)

2° Étant donné un triangle quelconque, trouvez différentes **constructions** permettant de le découper en sept triangles de même aire.

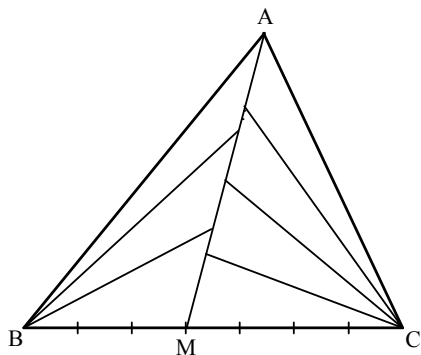
Remarque et indication :

1° *Partager un triangle en deux triangles de même aire (répartition 50/50) fait référence à une propriété de la médiane en principe connue des élèves de Seconde a fortiori depuis la mise en place à la rentrée 2000 de nouveaux programmes de Seconde. Il suffit alors de*



réinvestir cette propriété en lui faisant subir quelques variations pour obtenir tout d'abord la répartition 60 / 40, etc.

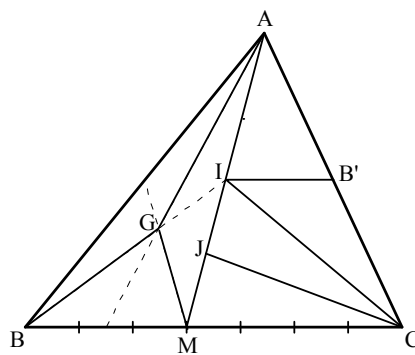
2° Deux exemples donnés dans « Maths en Scène » :



Prendre M sur $[BC]$ tel que

$$BM = \frac{3}{7} BC \dots$$

Il suffit alors de joindre “les tiers”
et “les quarts” sur $[AM]$...

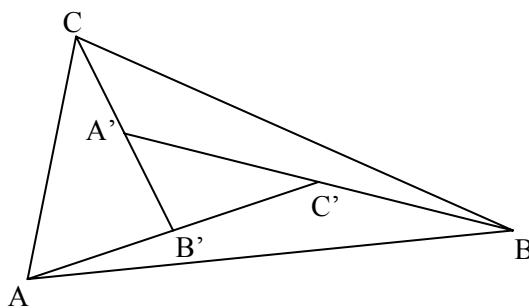


Idem pour la position du point M ,
avec G centre de gravité du triangle
 ABM , I milieu de $[AM]$, J milieu de
 $[IM]$ et B' milieu de $[AC]$...

D'autres constructions qui sont bien connues des lecteurs du Bulletin Vert de l'APMEP... :

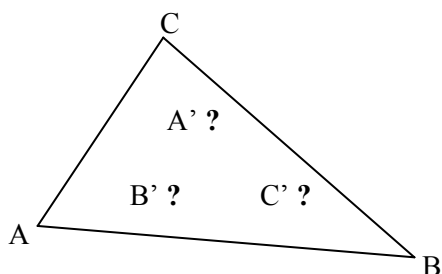
Étant donné un triangle $A'B'C'$, si l'on effectue les constructions suivantes :

- le point A symétrique de C' par rapport à B' ,
- le point B symétrique de A' par rapport à C' ,
- le point C symétrique de B' par rapport à A' .



alors l'aire du triangle $A'B'C'$ est égale à 1/7 de celle du triangle ABC comme celle des triangles $AA'C$, $AB'A$, $AB'B$, ... (propriété de la médiane...)

**Résoudre le problème posé nous ramène donc
à trouver comment construire A' , B' et C' connaissant A , B et C !**



Sous cette forme, cet exercice a fait l'objet de nombreuses recherches qui ont données lieu à diverses solutions recensées pour la plupart dans l'article « Le plaisir de chercher, la joie de trouver » de François Padilla & Jean Aymes (Bulletin Vert de l'APMEP n°406 – Septembre-Octobre 1996)



*** 6 ***

Existentiel et résistantiel...



D'un tonneau de 228 l de muscadet, je retire chaque jour un litre que je bois et que je remplace subrepticement par un litre d'eau. À partir de quel jour, bois-je plus d'eau que de vin ?

Remarque et indication :

Petit problème de recherche d'une solution par satisfaction... d'une contrainte d'analyse et où l'utilisation des logarithmes prend tout son sens opératoire.

Le 1^{er} jour la quantité en litres de vin est : $u_1 = 228$

Le 2^{ème} jour, elle devient : $u_2 = u_1 - 1 = 228 - 1$ soit

$$u_2 = 228 \times \left(1 - \frac{1}{228}\right) = u_1 \times \frac{227}{228}$$

$$\text{Le 3^{ème} jour : } u_3 = u_2 - \frac{u_2}{228} = u_2 \times \frac{227}{228}$$

$$\text{Le } (n + 1)\text{^{ème} jour : } u_{n+1} = u_n - \frac{u_n}{228} = u_n \times \frac{227}{228}$$

La suite de terme général u_n est donc géométrique de raison $q = \frac{227}{228}$. Le $(n +$

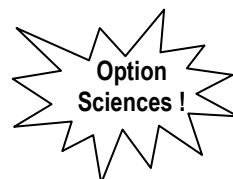
1)^{ème} jour, la quantité de vin restant est ainsi $u_{n+1} = u_1 \times q^n$.

On veut donc connaître n tel que : $u_1 \times q^n < 114$ ou, ce qui est équivalent, tel que : $q^n < \frac{1}{2}$, soit encore tel que : $n \times \ln q < \ln \frac{1}{2}$, c'est-à-dire tel que :

$$n > \frac{\ln(1/2)}{\ln q} = \frac{\ln 2}{\ln 228 - \ln 227} \approx 157,69.$$

Par suite, à partir du 158^{ème} jour, on boit plus d'eau que de vin (et c'est pas la joie !)

*** 7 ***



Peut-on trouver deux entiers n et p tels que : $1! + 2! + 3! + \dots + n! = p^2$.

Si oui, déterminer deux nombres vérifiant l'égalité ci-dessus. Si non, démontrer pourquoi ce n'est pas possible.

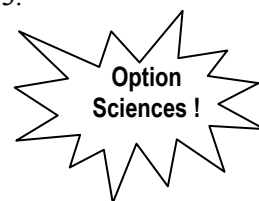
Remarque et indication :

L'ouverture du problème permet d'offrir un champ plus large de réponse. En particulier, cette ouverture doit encourager les élèves à faire des essais, en dégager l'impossibilité de trouver deux tels nombres et conforter cette heuristique. En effet, $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ et comme $5! = 120$, alors pour tout entier $m \geq 5$, $m!$ se termine par 0 et donc $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ se termine par 3 et ne peut donc être un carré.

Il n'y a donc comme solutions que : $n = 1$ avec $p = 1$
 et : $n = 3$ avec $p = 3$.

1^{ère}

*** 8 ***



Remarque que :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$$

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2 \dots$$

Quelles conjectures peuvent-être émises ? Les prouver.

Remarque et indication :

La propriété arithmétique est assez surprenante et la consigne de cet exercice est assez large pour que les élèves puissent trouver intérêt à établir une règle générale. La première conjecture doit se ramener prioritairement à une propriété

Problématique n° 10 – Quelques problèmes

du successeur de 4 nombres consécutifs. La forme générale du carré obtenu peut se dégager de la preuve. Celle-ci est, par exemple, algébrique et peut alors être apportée de la façon suivante :

Soit $A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ le terme général en question. Son développement conduit à un polynôme en n dont on pense qu'il est le carré d'une expression du second degré en n . Cette expression, si elle existe, ne peut présenter que des coefficients particuliers eu égard au développement obtenu à savoir $(n^2 + \beta n + 1)^2$. Une simple vérification conduit à $(n^2 + 3n + 1)^2$.

Une conjecture annexe peut être en débat car, prolongeant les exemples, on trouverait :

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 29^2 ; 5 \times 6 \times 7 \times 8 + 1 = 41^2 \dots$$

Le nombre $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ semble donc le carré d'un nombre premier.

La preuve échoue et, d'ailleurs, au rang suivant, nous avons un contre-exemple :

$$6 \times 7 \times 8 \times 9 + 1 = 55^2 !$$

*** 9 ***



Si a , b et c sont 3 nombres strictement positifs quelconques, non égaux entre eux, démontrer les inégalités suivantes : $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} > 6$ ❶

$$(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc$$
 ❷

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > \frac{3}{2}$$
 ❸.

Remarque et indication :

❶ Il est possible que, par réflexe quasi pavlovien, les élèves cherchent à réduire au même dénominateur mais ceci ne les conduisant guère au résultat, une deuxième tentative, un peu moins réflexe, peut alors consister à “séparer les termes des numérateurs” pour obtenir :

$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \dots$ puis

reconnaître des inverses $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$. Vu qu'elles se déduisent

l'une de l'autre par permutation circulaire, reste alors à démontrer que chacune

de ces trois parenthèses est supérieure à 2.... Or, par exemple, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ résulte de $(a + b)^2 > 0$...

② Il est possible que les élèves commencent à développer le produit, en réflexe algorithmique, ce qui ne conduit à aucun résultat réinvestissable ici. En fait cette deuxième inégalité se déduit également de

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) > 6$$

il suffit de multiplier chaque membre par abc puis d'ajouter $2abc$...

③ En cherchant un “air de famille” une solution peut consister à poser $\alpha = b + c$, $\beta = c + a$ et $\gamma = a + b$, on obtient alors

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} - 3 \right) > \frac{1}{2} \times 6 - \frac{3}{2} \dots$$

Tale spé.

*** 10 ***

Est-il vrai que, si p est un nombre premier supérieur à 5, $p^2 - 1$ soit multiple de 24 ?

Remarque et indication :

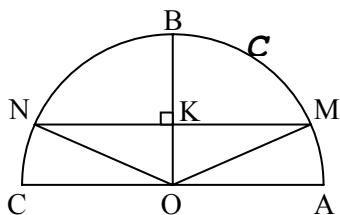
Les propriétés arithmétiques en jeu ici sont élémentaires puisqu'elles ne font appel qu'à la divisibilité par des nombres simples : 2, 3 et 4. En revanche, les déductions à faire à partir des nombres voisins de p sont à capitaliser pour une conclusion favorable à la propriété énoncée.

- $24 = 2^3 \times 3 = 2 \times 4 \times 3$,
- $(p^2 - 1) = (p - 1)(p + 1)$,
- p n'est pas pair, donc $p - 1$ et $p + 1$ sont pairs,
- l'un et un seul des 3 nombres consécutifs $p - 1$, p , $p + 1$ est divisible par 3 et ce n'est pas p puisqu'il est premier et supérieur à 5,
- parmi les cinq nombres consécutifs $p - 2$, $p - 1$, p , $p + 1$ et $p + 2$ il y a au moins un multiple de 4. Ce n'est pas $p + 2$ ou $p - 2$, sinon p serait pair, ce qui contraint $p - 1$ ou $p + 1$ à être multiple de 4, l'autre étant seulement multiple de 2,

Ainsi, globalement, $(p - 1)(p + 1)$ est multiple de 2, puis de 3, puis de 4, donc multiple de 24.

2^{nde}

*** 11 ***



Sur la figure ci-contre :

- les points M et N sont sur le demi-cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 10 cm,
- le point K appartient au rayon [OB] perpendiculaire en O au diamètre [AC].

Déterminer la position du point K pour que le triangle NOM ait la plus grande aire possible.

Remarque et indication :

Dans un premier temps, les élèves vont faire plusieurs figures pour des positions différentes du point K (mais rarement plus de 3 !). Il leur est alors bien difficile d'établir une conjecture. Pour cela une idée pourra consister à poser $OK = x$ puis de calculer l'aire $S(x)$ du triangle NOM. Ayant trouvé $S(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, ils peuvent utiliser leur calculatrice graphique et/ou un tableau de valeurs pour conjecturer une valeur approchée α de x rendant $S(x)$ maximum puis, en faisant la figure correspondante, conjecturer que : « le triangle de plus grande aire semble être rectangle isocèle en O ».

Aujourd'hui, cette conjecture peut être grandement facilitée par l'utilisation d'un logiciel tel que Geoplan, par exemple, permettant d'obtenir à la fois une figure avec K, point mobile que l'on pourra déplacer à volonté sur [OB], et le point S de coordonnées $(x ; S(x))$ dont on pourra demander la trace ...

Une fois cette conjecture établie, plusieurs possibilités de démonstration au niveau de la Seconde peuvent émerger (en classe supérieure la possibilité d'étudier la fonction S en calculant sa dérivée fait perdre beaucoup de son intérêt à cet exercice si ce n'est de montrer la puissance de ce nouvel "outil"). En voici trois :

1) Si, le triangle NOM est rectangle isocèle en O, alors $KO = KN = KM$ et $2\alpha^2 = 10^2$ d'où $\alpha = \sqrt{50}$. Pour tout $x \in [0 ; 10]$:

$$S^2(\alpha) - S^2(x) = 50^2 - x^2(100 - x^2)$$

$$S^2(\alpha) - S^2(x) = x^4 - 100x^2 + 50 = (x^2 - 50)^2 \geq 0$$

et donc pour tout $x \in [0 ; 10]$, $S^2(\alpha) \geq S^2(x)$ soit encore $S(\alpha) \geq S(x)$.

Problématique n° 10 – Quelques problèmes

$$B_1 = 15, B_2 = 105, \dots, B_n = \underbrace{1000 \dots 005}_{n-1 \text{ chiffres } 0} \text{ ou encore } B_n = 10^n + 5.$$

- La suite C des nombres entiers telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$C_n = A_n \times B_n + 1 = \frac{10^n - 1}{9} \times (10^n + 5) + 1 = \frac{10^{2n} + 4 \times 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{A_n \times B_n + 1} = \frac{10^n + 2}{3}$. Reste à s'assurer que

l'on obtient bien un entier... ce qui se démontre par le fait que :

$$\frac{10^n + 2}{3} = \frac{10^n + 3 - 1}{3} = \frac{10^n - 1}{3} + 1 = 3 \times A_n + 1 !$$



*** 13 ***



On écrit sur des petits cartons certains des chiffres 0, 1, 2, ... , 9. Puis on forme un nombre a à l'aide de ces chiffres, puis les mélangeant on reforme un nombre b . On remarque alors que la différence entre a et b est multiple de 9. Est-ce toujours vrai ? Donner une preuve à son affirmation.

Remarque et indication :

Comme l'exercice précédent, cet exercice vise à faire rappeler la signification d'un nombre écrit dans le système décimal en termes de combinaisons de puissances de 10.

S'il y a $n + 1$ cartons, a est de la forme :

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

et b est de la forme : $a_n \times 10^n + b_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + b_1 \times 10 + b_0$

donc

$$| a - b | = \left| (a_n - b_n)(9 + 1)^n + (a_{n-1} - b_{n-1})(9 + 1)^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)(9 + 1)^1 + (a_0 - b_0) \right|$$

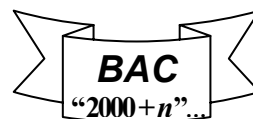
Compte tenu des développements de la forme $(9 + 1)^m$ (m entier de 1 à n), il existe un entier k tel que $| a - b |$ soit égal à :

$$| 9k + \underbrace{(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 - b_n - b_{n-1} - \dots - b_1 - b_0)}_{= 0} | = 9k !$$

En effet, pour tout entier m de 1 à n : $(9 + 1)^m = \sum_{i=0}^{i=m} C_m^i 9^i \times 1^{m-i}$, donc pour $i \neq 0$, $C_m^i 9^i \times 1^{m-i} \in 9N$ et il existe $k_m \in 9N$ tel que $(9 + 1)^m = 9 k_m + 1$. D'où $|a - b|$ est égal à :

$$|(a_n - b_n)(9k_n + 1) + (a_{n-1} - b_{n-1})(9k_{n-1} + 1) + \dots + (a_1 - b_1)(9k_1 + 1) + a_0 - b_0|$$


*** 14 ***



2 entiers naturels a et b étant donnés, on considère :

- le produit de leurs carrés
- et la différence de leurs puissances quatrièmes.

Démontrer que le produit de ces deux termes est divisible par 60.

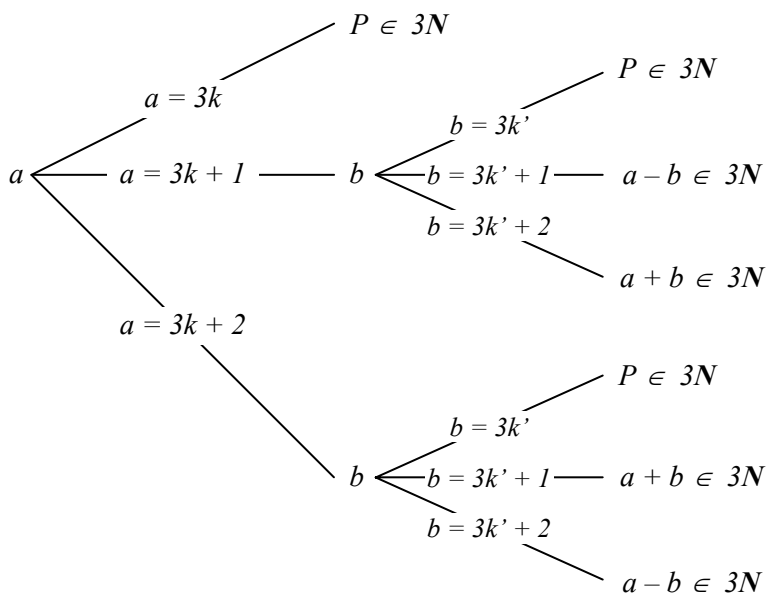
Remarque et indication :

En supposant $a > b$, il suffit de démontrer que :

$P = a^2 b^2 (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ est divisible par 3, 4 et 5. On va encore procéder par exhaustion à partir des différents cas envisageables pour a et b , pour en renforcer l'usage. Par exemple, démontrons que P est divisible par 5. Le tableau symétrique suivant permet d'examiner tous les cas suivant la valeur du reste de la division de a et b par 5 :

$a \quad b$	$5k'$	$5k' + 1$	$5k' + 2$	$5k' + 3$	$5k' + 4$
$5k$	$P \in 5N$ (immédiat)	$P \in 5N$ (immédiat)	$P \in 5N$ (immédiat)	$P \in 5N$ (immédiat)	$P \in 5N$ (immédiat)
$5k + 1$		$P \in 5N$ ($a - b \in 5N$)	$P \in 5N$ ($a^2 + b^2 \in 5N$)	$P \in 5N$ ($a^2 + b^2 \in 5N$)	$P \in 5N$ ($a + b \in 5N$)
$5k + 2$			$P \in 5N$ ($a - b \in 5N$)	$P \in 5N$ ($a + b \in 5N$)	$P \in 5N$ ($a^2 + b^2 \in 5N$)
$5k + 3$				$P \in 5N$ ($a - b \in 5N$)	$P \in 5N$ ($a^2 + b^2 \in 5N$)
$5k + 4$					$P \in 5N$ ($a - b \in 5N$)

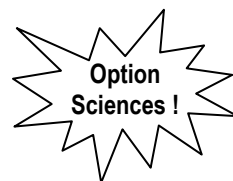
Un tel tableau peut être produit pour l'analyse de la divisibilité par 3. Proposons une autre représentation : l'arborescence qui permet aussi clairement d'examiner tous les cas, mais la symétrie en a et b est moins évidente, bien qu'elle le soit.



On ferait de même pour la divisibilité par 4.
 Donc le produit P est divisible par 60.

2^{nde}

*** 15 ***



On peint une partie de la surface d'une sphère, le globe terrestre par exemple. L'aire de la partie peinte est inférieure aux $7/15$ de l'aire de la sphère. Existe-t-il deux points au moins diamétralement opposés non peints ?

Remarque et indication :

Les objectifs essentiels de cet exercice sont de nature différente :

- ♦ géométrique : travailler sur une représentation intuitive de parties de la sphère ;
- ♦ raisonnement : associer à une partition de la sphère une analyse par disjonction de cas.

La preuve de l'existence de points non peints diamétralement opposés peut être conduite de la façon suivante :

Soit P la constellation peinte sur la sphère. Considérons les deux demi-sphères S et S' disjointes, disons la demi-sphère supérieure S et la demi-sphère inférieure

S' , l'équateur étant rattaché à S . Tout point de S est ou peint ou non peint et a pour point diamétralement opposé un point peint ou non peint (quatre éventualités incompatibles). Posons :

- S_1 l'ensemble des points de S qui sont peints et qui admettent un point diamétralement opposé peint constituant la partie S'_1 de S' ,
- S_2 l'ensemble des points de S qui sont peints et qui admettent un point diamétralement opposé non peint constituant la partie S'_2 de S' ,
- S_3 l'ensemble des points de S qui sont non peints et qui admettent un point diamétralement opposé peint constituant la partie S'_3 de S' . S_3 et S'_3 en correspondance bijective (à l'exception peut-être de points de l'équateur d'aire nulle) ont même aire.

S_1 peint	\Leftrightarrow	S'_1 peint
S_2 peint	\Leftrightarrow	S'_2 non peint
S_3 non peint	\Leftrightarrow	S'_3 peint
S_4 non peint		S'_4 non peint
Total : S		Total : S'

Ainsi, l'aire de P est la somme des aires des parties disjointes S_1 , S_2 , S_3 et S'_1 . Comme cette aire est inférieure aux $7/15$ de l'aire de la sphère, l'aire de la réunion des parties : $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \subset S$ est a fortiori inférieure aux $7/15$ de l'aire de la sphère.

Donc il existe une partie S_4 de S constituée de points non peints dont les points diamétralement opposés dans S' constituent une partie non vide $S'_4 = S' - (S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3)$.

D'où le résultat.

1^{ère} / Tale

*** 16 ***

Sachant que x, y, z sont trois nombres réels positifs tels que : $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

1° Un au moins des 3 nombres peut-il être égal à 1 ?

2° Les 3 nombres peuvent-il être plus grands que 1 ?

Remarque et indication :

L'objectif premier de l'exercice est de conduire avec rigueur un raisonnement par l'absurde. Un objectif plus secondaire est de travailler sur des majorations convenablement choisies. L'engagement des élèves peut être obtenu en soulignant la curiosité des propriétés pour des hypothèses qui mettent en jeu les opérations arithmétiques élémentaires sur les 3 variables.

Voici quelques éléments de démonstration :

1° *La propriété énoncée est de la forme : $p \Rightarrow q$ où p est l'ensemble des deux conditions et q l'énoncé : « un au moins des 3 nombres est égal à 1 ». Des essais sur quelques exemples semblent montrer que l'implication est fautive. Pour la prouver, démontrons que p et q sont incompatibles.*

Supposons donc que, par exemple, $x = 1$.

Par p , on obtient : $yz > 1$ et $y + z < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{y+z}{yz}$, ce qui est impossible.

2° *Opérons de la même manière pour prouver que « les 3 nombres sont plus grands que 1 » est incompatible avec p , ce qui paraît plausible d'évidence.*

Supposons donc que $x > 1$, $y > 1$ et $z > 1$. En conséquence $x + y + z > 3$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 3$, ce qui est incompatible avec la propriété p . Par suite, un au moins des 3 nombres est inférieur à 1.



*** 17 ***



Est-il vrai que le produit de p nombres consécutifs soit divisible par $p!$?

Remarque et indication :

La forme ouverte du problème est un handicap à sa résolution. Cependant la propriété est assez étonnante, voire... problématique, pour que les élèves fassent quelques essais, avec leur calculatrice, si besoin est.

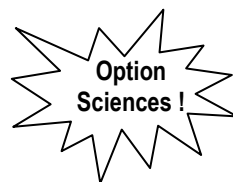
Ces essais incitent à mettre en place la conjecture : « $(n + 1)(n + 2) \dots (n + p)$ est divisible par $p!$ ». Les élèves peuvent en trouver une démonstration quasi immédiate à condition de ne pas avoir une vision uniquement calculatoire des

“formules” de dénombrement que sont les arrangements A_n^p et les combinaisons C_n^p .

Ne retenir que les formules $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ et $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}$ n'est pas toujours de la plus grande aide. Par contre savoir d'où “viennent” ces formules et garder en mémoire que $A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-(p-1))$, c'est-à-dire « le produit de p entiers consécutifs dont le plus grand est n », et que $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ permet de pouvoir donner du sens aux formules classiques et notamment ici, par association, reconnaître que $\frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+p)}{p!}$ n'est ni plus ni moins que C_{n+p}^p qui est donc bien un entier !

2^{nde}

*** 18 ***



Un capitaine de troupe veut ranger ses “hommes” en rang. Mais il reste embarrassé car :

- s'il les range par 5, il en reste 4 non rangés,
- s'il les range par 6, il en reste 5 non rangés,
- s'il les range par 7, il en reste 6 non rangés.

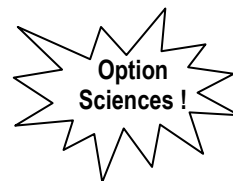
Combien y a-t-il d'hommes à ranger sachant qu'il ne peut pas y en avoir plus de 400 ?

Remarque et indication :

La forme ludique ne supprime pas la nécessité d'organiser et traiter les informations relatives à la division du nombre cherché par 5, 6 et 7. Soit a ce nombre :

- $a - 4$ se termine par 0 ou 5 d'où a se termine par 4 ou 9,
- $a - 5$ se termine par un chiffre pair,
 $\hookrightarrow a$ se termine donc par 9
- a se terminant par 9, $a - 6$ se termine par 3. Comme c'est un multiple de 7, le quotient de $a - 6$ par 7 se termine par 9. C'est donc l'un des nombres : 9, 19, 29, 39 et 49. Seul le nombre 29 convient, donc $a - 6 = 7 \times 29 = 209$.

Le nombre cherché est donc 209 qui vérifie les données.



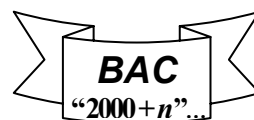
*** 19 ***

La différence des carrés de deux nombres entiers naturels est un nombre premier. Que peut-on dire de ces nombres ?

Remarque et indication :

Il s'agit de rendre opérationnelle la définition du caractère premier de nombres. Le produit de la somme et la différence de ces nombres étant un nombre premier, la différence est égale à 1. Les deux nombres sont donc consécutifs.

*** 20 ***



1° La suite (u_n) est positive et définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ (u_{n+1})^2 = 1 + (u_n - 1)^2 \end{cases}$$

Donner une représentation géométrique de la relation définissant u_1 .

Construire le carré C_0 de côté u_0 et, à l'intérieur de C_0 , le carré C_1 de côté u_1 .

Itérer cette représentation jusqu'à u_{10} .

Conjecturer la limite de la figure représentant $(u_n)^2$ quand n tend vers $+\infty$, puis celle de u_n . Valider cette conjecture par l'étude algébrique de la suite (u_n) .

2° La suite (u_n) est positive et définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ (u_{n+1})^2 = (u_n)^2 - 3u_n + 3 \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$(u_{n+1})^2 = (u_n - 1)^2 + 1 - 2 \times (u_n - 1) \times \cos 60^\circ.$$

En s'inspirant de la situation précédente, interpréter géométriquement la relation entre u_0 et u_1 .

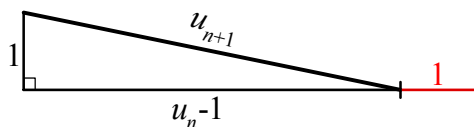
Itérer cette nouvelle représentation. Que se passe-t-il ?

Revenir à l'étude algébrique de la suite (u_n) .

Remarque et indication :

La question 1° vise plusieurs objectifs :

- donner une représentation figurale et non graphique d'une relation définissant



une suite récurrente, perçue généralement comme relevant uniquement du numérique ;

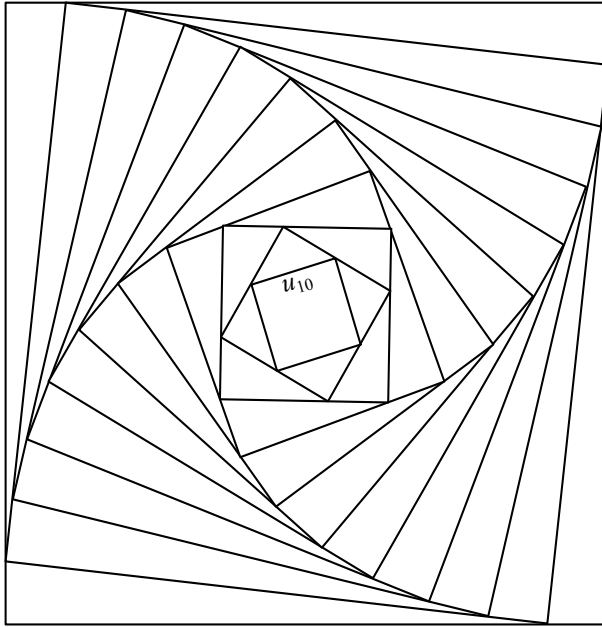
- *utiliser ce nouveau cadre afin de formuler une conjecture ;*
- *soumettre l'émission de cette conjecture à un travail clair et précis (cf. figure ci-contre);*
- *mettre en évidence les limites du cadre figural à la fois dans la confiance en la conjecture et dans sa validité en tant que preuve mathématique ;*
- *résoudre l'exercice avec la rigueur permise dans le cadre algébrique.*

La question 2°, qui semble la simple transposition au cas du triangle de l'exercice précédent, vise à son tour des objectifs nouveaux ou réactualisés :

- *fonctionner par analogie et donc imaginer la représentation figurale associée à la relation de récurrence ;*
- *mettre en conflit le soin apporté à sa réalisation et la résistance du modèle figural non fonctionnel ici ;*
- *remettre en évidence les limites du cadre figural et, ainsi, montrer que deux cadres peuvent n'être que localement isomorphes ;*
- *résoudre l'exercice avec la rigueur permise dans le cadre algébrique.*

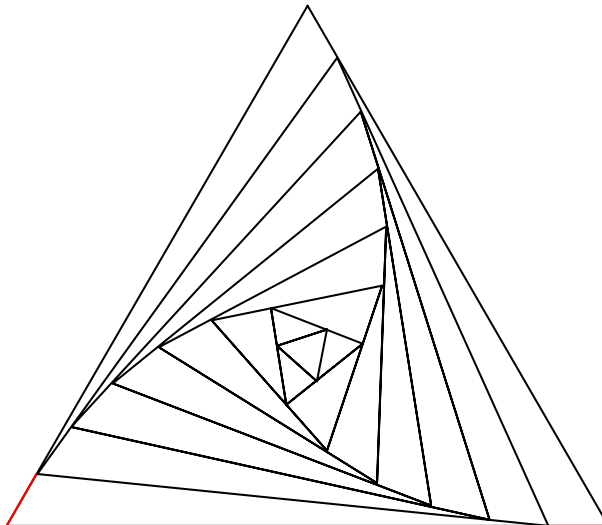
Problématique n° 10 – Quelques problèmes

Suite n° 1



$$u_0 = 10$$

Suite n° 2



*** Situation didactique à développer ***

De la divination !

Un petit jeu pour épater les copains... Faire choisir mentalement un nombre entre 1 et 15, puis dire dans quels tableaux parmi ceux-ci, il se trouve :

13	7	5	9
11	1	3	15

tableau 1

11	15	8	10
14	9	12	13

tableau 2

15	13	6	14
4	12	7	5

tableau 3

10	15	11	7
3	6	2	14

tableau 4

Deviner alors, par un moyen à trouver, quel était le nombre choisi par le partenaire.

Ce jeu peut être proposé en classe dès les premières leçons d'arithmétique et laisser perplexes bon nombre d'élèves. Peut-être trouveront-ils l'algorithme "divinatoire", mais le problème d'une extension en tableaux plus importants à 16, voire 32 nombres poserait problème et pourrait servir de point d'application d'une recherche d'explication arithmétique, seule source de la capacité à créer de nouveaux tableaux.

De nombreux problèmes trouvent leur solution en changeant la base dans laquelle s'écrivent les nombres en présence (ex classique : jeu de Nim). La familiarité avec l'informatique a montré aux élèves le rôle capital que joue le système de numération binaire dans le passage en langage machine. Ici, c'est encore le passage en base 2, qui permet de donner le procédé de découverte du nombre choisi. En effet, le principe de divination consiste à faire la somme des puissances de 2 (dans le système décimal) figurant dans les mêmes tableaux que ceux identifiés par le partenaire. Par exemple, si 12 est le nombre choisi mentalement, il figure dans les tableaux 2 et 3. Or dans ces 2 tableaux, figurent 8 et 4 en tant que puissances de 2. D'où l'annonce : $8 + 4 = 12$. O.K. ? Pourquoi ?

Dans chaque tableau figurent des nombres qui, dans le système binaire, s'écrivent avec un 1 placé au même rang que la puissance de 2 qui y figure. Par exemple, dans le tableau 1, figurent les nombres qui, en binaire, ont 1 comme chiffre des unités. Dans le tableau 2, figurent les nombres qui, en binaire, ont 1 comme chiffre des "mille". Etc. (Il serait bon de demander aux élèves de faire cette validation en écrivant dans la base 2 chacun des nombre d'un tableau quelconque). Donc la somme des puissances de 2, qui appartiennent aux même tableaux, donnera l'écriture binaire du nombre choisi puisqu'il s'agira de l'écrire avec les 1 en bonne place.

Problématique n° 10 – Quelques problèmes

Ainsi, 12 s'écrivant 1100 en binaire est bien la somme de 8, écrit 1000 en binaire, plus 4, écrit 100 en binaire. Subtil, non ?

De tels jeux peuvent apporter, chez certains élèves, une juste ristourne des efforts faits en arithmétique !

S'ils en ont compris le principe, une extension en tableaux plus grands est alors possible : par exemple, 6 tableaux pour aller jusqu'au choix d'un nombre parmi les ... $64 - 1 = 63$ premiers nombres. La complexité des tableaux ne peut que donner plus de chances à l'absence de découverte spontanée de la stratégie divinatoire.

**Titre : Pour un enseignement problématisé
des Mathématique au Lycée**

Tome 2 En référence privilégiée à des objectifs méthodologiques.

Auteurs : Régis GRAS, Philippe BARDY, Bernard PARZYSZ
Michèle PECAL, Jean-Pierre RICHETON

Après une dizaine d’années de travail par correspondance, à travers réunions, exposés, critiques, collaboration étroite avec le groupe de travail “Prospective Bac”, soutien continu des différents Présidents et Comités de l’APMEP, voici enfin en deux volumes une approche originale des programmes d’enseignement au lycée par le groupe “Problématiques Lycée”. Partis de grandes classes de problèmes, de “problématiques” suffisamment générales pour structurer également le premier cycle, nous inscrivons objectifs, compétences et contenus plus en système qu’en une suite éclatée de chapitres de cours, uniquement structurés par des notions mathématiques. Selon un point de vue constructiviste, dans ces ouvrages, les concepts doivent apparaître comme problématisés, c’est-à-dire comme réponses, issues et moyens incontournables, peut-être temporairement, pour résoudre des problèmes significatifs et non comme une fin en soi.

On trouvera au fil de ces deux ouvrages d’une part des “problématiques” plutôt référencées par les contenus comme le traitement et la représentation de données statistiques, d’autre part plutôt référencées par rapport à des objectifs méthodologiques comme le recueil, le traitement, la consultation et la communication de l’information.

