ISSN 0987 7576

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur

APMEP
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Volume 11 2006

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg **Volume 11** **2006**
Université Louis Pasteur

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. (33) 03 90 24 01 30
Fax (33) 03 90 24 01 65
Bibliothèque : (33) 03 90 24 01 61
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

Ce numéro des ANNALES est publié et diffusé avec le soutien de l'APMEP.

SOMMAIRE

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 11 – 2006

EDITORIAL

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives ont toujours tenté de se situer à la confluence des recherches en didactique et de l'enseignement des mathématiques dans les classes. Etroitement associés à l'observation et la mise en oeuvre de séances d'enseignement, les travaux publiés par la revue essaient d'éclairer l'articulation difficile que souligne dans ce numéro Anna Sierpinska, entre le *souhaitable* et le *possible* en cernant d'aussi près que possible la réalité d'un enseignement confronté aux choix idéologiques proposés par les programmes officiels. Comprendre, et peut-être modifier la réalité, grâce à des outils théoriques issus de la didactique des mathématiques mais aussi d'autres sciences, puis atteindre les personnes intéressées à la fois par ces outils et les possibilités qu'ils offrent, tel a toujours été l'un des objectifs des Annales.

Ce numéro ne déroge pas à la règle et profite de son association au Colloque de Mons, organisé en juillet 2005 par Nicolas Rouche et le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), pour accueillir à la fois des auteurs très connus internationalement et aussi s'ouvrir à un lectorat plus large grâce à l'appui de l'APMEP[1] qui s'est associée à la publication et à la diffusion de l'ouvrage.

Le titre ambitieux du Colloque du CREM était « L'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'age adulte ». À cette occasion les participants, didacticiens et pédagogues, ont tenté, chacun à sa manière, de répondre à cette invitation particulièrement stimulante. Certaines contributions embrassent le problème dans son ensemble parfois avec un peu d'ironie comme en témoigne le titre donné en anglais à son article par Alan Schoenfeld « Problem Solving from Cradle to Grave »[2]. D'autres se sont concentrés sur des niveaux d'enseignement, des thèmes mathématiques ou des démarches spécifiques.

Certains des articles retenus par le comité de rédaction sont des témoignages de mise en place de pratiques pédagogiques ou d'activités didactiques, même, et cela surprendra peut-être le lecteur habituel de la revue, lorsque leurs auteurs n'ont pas présenté une argumentation en bonne et due forme pour les étayer ou en discuter le bien-fondé et les limites et se sont ainsi écartés des normes habituelles de la revue[3]

---

[1] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

[2] La résolution de problèmes du berceau au tombeau.

[3] Voir les indications aux auteurs en fin de ce numéro.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 3 – 4.

Nous pensons ici plus particulièrement à l'article d'Erich Wittmann sur la présentation du projet Mathe 2000. Ce projet se propose de modifier de manière radicale les contenus et les formes d'enseignement. Il nous a semblé intéressant de le faire connaître et ceci d'autant plus que certaines activités proposées par l'auteur sont particulièrement riches. Simplement, et nous espérons provoquer un débat, l'approche suivie déconcerte le didacticien habitué à une analyse en terme de tâches données aux élèves et d'organisation du travail du professeur, ici, seule la réflexion mathématique *a priori* semble guider l'action d'enseignement d'où professeurs et élèves semblent être absents. Mais *a contrario*, l'approche didactique française ne reste-t-elle pas trop rétive aux engagements dans des actions rénovatrices de grande ampleur ?

Nous avons aussi choisi de publier le compte rendu de Jorge Soto-Andrade sur sa formation pour étudiants et élèves instituteurs chiliens. Cet article, très clair et bien documenté, a le grand mérite d'attirer l'attention du lecteur sur l'importance des métaphores dans l'enseignement des mathématiques, son optimisme radical a déjà suscité un débat au sein du comité de rédaction dont nous espérons rendre compte dans de futurs numéros.

Pour finir, nous tenons à rendre un hommage particulier à Nicolas Rouche et aux organisateurs du Colloque de Mons sans qui ce numéro n'existerait pas. Comme le contenu total des contributions dépassait largement le volume acceptable pour un numéro de revue, nous avons pris la décision de publier un Supplément au volume 11, spécialement consacré au colloque de Mons et à des interventions de ses organisateurs. Un compte rendu synthétique du colloque y figure, ainsi que des textes d'orientation, qui se veulent les prémisses à des mises en oeuvre sur le terrain ou des expérimentations d'enseignement.

Alain Kuzniak & François Pluvinage

ANNA SIERPINSKA

ENTRE L'IDEAL ET LA REALITE DE L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

Abstract. Between the ideal and the reality of mathematics teaching.
This paper starts from the assumption that every reform of mathematics teaching is based on an ideology, i.e. on a vision of a desirable state of this teaching contrasted with its undesirable but existing state. The question asked is: What are the obstacles to the realisation of this desirable state and what contributes to the tenacity of the non-desirable state? In the main section of the paper, I take this question to review a few idealistic postulates regarding the goals of mathematics teaching, the coordination of curricula and relevance of the mathematical content, the teaching for understanding and autonomy of thought, the problem solving approach to developing students' mathematical thinking, students' motivation, assessment and use of technology. The last section is devoted to a reflection on the possibilities of communication between ideology and theory, in spite of the important differences between the two. I propose that a didactic theory specific to mathematics could constitute a useful channel for this communication, by turning the ideological debate into a pragmatic debate, based on theoretical arguments and questions such as, what are the possible (rather than "desirable" or "good") choices or solutions of a didactic, pedagogical or institutional problem? What do we know about the possible consequences of each choice, based on the available evidence from experience and research?

Résumé. L'article part de l'hypothèse que toute réforme de l'enseignement des mathématiques est basée sur une "idéologie", c'est-à-dire une vision de l'état souhaitable de cet enseignement en contraste avec un état non-souhaitable, mais existant. La question posée est la suivante : Qu'est-ce qui, dans la réalité dans laquelle nous vivons, peut faire obstacle à la réalisation de cet état souhaitable, et être propice au maintien d'un statu quo non-souhaitable ? Dans la section principale de cet article, je regarde de plus près quelques postulats représentant un idéal de l'enseignement et apprentissage des mathématiques. Je discute, en particulier, des buts (idéaux) de l'enseignement des mathématiques, et des postulats sur la coordination des curriculums, les contenus mathématiques pertinents, l'apprentissage avec compréhension, le développement de la pensée mathématique à l'aide de la résolution de problèmes, le développement de l'autonomie et de la mobilité de pensée, l'évaluation des connaissances des élèves, la motivation des apprentissages, et l'utilisation de la technologie. La dernière section contient une réflexion sur les possibilités de communication entre idéologie et théorie, en dépit de différences importantes entre les deux. Je propose qu'une théorie didactique pourrait constituer un canal propice à cette communication, en remplaçant les débats idéologiques par des débats pragmatiques, basés sur des questions telles que : Quels sont les choix possibles – plutôt que 'souhaitables' ou 'bons' – de solution de tel ou tel problème didactique, pédagogique ou institutionnel ?

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 5 – 39.

Quelles sont les conséquences possibles de ces choix, au vu des résultats de recherches en didactique des mathématiques et de l'expérience commune ?

Mots clés. Enseignement, mathématiques, curriculum, idéologie, théorie, didactique, compétences.

> Looking at events in education over a long time period is a fascinating opportunity to chart a kind of intellectual, social and political tug-of-war in which the perspectives and theories of individuals and groups compete for influence on the goals and practices of school mathematics. The story of this struggle over the direction of curricula of teaching in elementary and secondary school mathematics has a predictable pattern of crisis-reform-reaction episodes.
>
> (*Fey & Graeber, 2003, p. 521*)

1. Introduction

L'histoire de l'éducation mathématique paraît à ceux qui l'étudient comme une suite de périodes de crise, où certains groupes politiques et/ou sociaux se déclarent non satisfaits de l'état actuel de l'enseignement, suivies de périodes d'élaboration des bases d'une réforme, de son expérimentation à petite échelle, de son implémentation ensuite à une plus grande l'échelle, accompagnée, inévitablement, des manifestations publiques du doute et de l'incertitude.

Quelles sont les raisons de cette récurrence de l'insatisfaction avec les réformes scolaires ? Voilà une question qui a occupé les esprits de bien de chercheurs, en sociologie de l'éducation en général, ainsi que dans le domaine de l'éducation mathématique (p. ex., Howson, Keitel & Kilpatrick, 1981 ; Burkhardt, 1989 ; Brousseau, 1997 ; Abrantes, 2001 ; Kilpatrick, 2001 ; Garrett & Davis, 2003 ; Fey & Graeber, 2003).

Ces raisons peuvent être étudiées de différents points de vue. Par exemple – d'un point de vue historique et politique, comme l'ont fait Garrett & Davis (2003) dans leur étude des débats autour de l'enseignement des mathématiques aux États-Unis pendant la deuxième guerre mondiale. Ou encore d'un point de vue psychosocial et souligner le phénomène de l'obsolescence des situations didactiques comme motivant les « innovations » didactiques chez les enseignants (Brousseau, 1997, pp. 267-273). Les récompenses, comme l'avancement professionnel, ont aussi été mentionnées.

> "The desire to change, to act as an innovator, to explore new areas is strong in most intelligent people. Many educators, then, welcome the opportunity to deviate from practices that are becoming routine. Innovation is exciting, attracts others' attention to one's work and often brings professional advancement. Moreover, the educator is attempting to solve an insoluble problem : for if a goal is attained it will almost invariably be replaced by a more ambitious one (Howson et al., 1981, p. 5)".

Prenons un exemple extrême et hypothétique pour illustrer ce dont parlent Brousseau (1997) et Howson et al. (1981), cité ci-dessus. Une réforme visant la réussite de tous les élèves atteindrait-elle effectivement son but, les réformateurs seraient déçus et penseraient que le programme qu'ils avaient proposé et réalisé n'avait pas été suffisamment ambitieux. Ils se mettraient à réformer leur réforme.

Le point de vue commercial n'est pas à négliger, non plus : les maisons d'éditions et les auteurs des manuels scolaires perçoivent les réformes comme l'ouverture de nouveaux marchés (Howson, Keitel & Kilpatrick, 1981, p. 5).

Pour ma conférence à Mons (Colloque CREM 2005), j'ai choisi l'optique de contradiction entre « l'idéal » et la « réalité », c'est-à-dire, entre les idéologies promulguées dans les documents destinés aux enseignants et le système des contraintes culturelles, institutionnelles, didactiques, psychologiques, et autres, dans lesquelles travaillent enseignants et élèves. La question que j'ai posée, sans y répondre de façon exhaustive, était donc la suivante :

Toute réforme de l'enseignement des mathématiques est basée sur une « idéologie », c'est-à-dire une vision de l'état souhaitable de cet enseignement en contraste avec un état non-souhaitable, mais existant. Qu'est-ce qui, dans la réalité dans laquelle nous vivons, peut faire obstacle à la réalisation de cet état souhaitable, et être propice au maintien d'un statu quo non-souhaitable ?

Je ne prétends ni à l'originalité ni à la nouveauté de ce point de vue. De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont placées dans cette optique, surtout depuis la fin des années 70. Au début des années 80 des revues ont été lancées dans le seul but d'encourager de telles recherches et de se distinguer des revues destinées à communiquer, aux enseignants, une meilleure compréhension des mathématiques, et à propager des idées, des idéologies, des pratiques pédagogiques et des activités pour élèves, conformes aux réformes consécutives[1].

---

[1] Je pense ici, entre autres, aux revues telles que *Recherches en Didactique des Mathématiques* en France et *Dydaktyka Matematyki* en Pologne, établies toutes les deux en 1980, comme des forums des chercheurs en didactique des mathématiques. Ces revues présentaient des études de la "réalité" de l'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, contrairement aux revues destinées aux enseignants du primaire ou du secondaire publiées dans les deux pays (p. ex. les publications de

Dans la section principale de cet article, je regarde de plus près quelques postulats représentant un idéal de l'enseignement et apprentissage des mathématiques. Ces postulats proviennent d'un petit nombre de sources, tels les standards et principes de l'organisation nord-américaine des enseignants des mathématiques (NCTM, 2000), le document belge (CREM, 1995) ; un article sur une réforme récente au Portugal (Abrantes, 2001) ; le document officiel du Ministère de l'Éducation du Québec (M.E.Q., 2001), et un article sur les problèmes de l'enseignement des mathématiques aux États-Unis (Kilpatrick, 2001). Je discute, en particulier, des buts (idéaux) de l'enseignement des mathématiques, et des postulats sur la coordination des curriculums, les contenus mathématiques pertinents, l'apprentissage avec compréhension, le développement de la pensée mathématique à l'aide de la résolution de problèmes, le développement de l'autonomie et de la mobilité de pensée, l'évaluation des connaissances des élèves, la motivation des apprentissages, et l'utilisation de la technologie.

Dans la troisième et dernière section de l'article, je reviens sur la question de la récurrence des crises et des réformes, en réfléchissant sur les possibilités de communication entre idéologie et théorie, en dépit de différences importantes entre les deux. Je propose qu'une théorie didactique pourrait constituer un canal propice à cette communication, en remplaçant les débats idéologiques par des débats pragmatiques, basés sur des questions telles que, quels sont les choix possibles – plutôt que « souhaitables » ou « bons » – de solution de tel ou tel problème didactique, pédagogique ou institutionnel ? Quelles sont les conséquences possibles de ces choix, en vue des résultats de recherches en didactique des mathématiques et de l'expérience commune ?

2. Discussion (réaliste) de quelques postulats sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

J'organise la discussion des postulats dans cette section en procédant des postulats les plus généraux aux postulats plus particuliers.

2.1. Un enseignement des mathématiques bien justifié du point de vue des buts de l'éducation générale

Les buts de l'enseignement des mathématiques penchent tantôt du côté de la modestie des connaissances de base utiles dans la vie et les professions les plus simples, tantôt vers l'ambition scientifique de comprendre et transformer le monde.

l'A.P.M.E.P. en France ou la revue *Matematyka* en Pologne) qui cherchaient surtout à présenter et soutenir un "idéal".

Par exemple,

> "…the principal function of schooling should be the adjustment (preferably the happy adjustment) of individuals to the social world in which they find themselves. (Garrett & Davis, 2003, citant le credo du mouvement appelé « life adjustment education » aux États-Unis de l'après la deuxième guerre mondiale).
>
> The all embracing common enterprise of mathematics and science is the study of an ordered universe with the aid of an ordered mind, undertaken both for its own sake and for the continuous improvement of human living (Betz, 1940)."

Dans l'optique du premier de ces points de vue, il est parfois difficile de justifier la place importante que les mathématiques veulent garder dans les curriculums d'aujourd'hui, surtout si l'enseignement insiste sur l'apprentissage des techniques arithmétiques et algébriques. Certains auteurs considèrent que, dans les pays dits « développés », ces compétences sont devenues obsolètes (p. ex. Noss, 1994 ; Zevenbergen, 2004).

> "A sizeable proportion of those in work in the 'developed' world have been reduced to little more than human appendages to a computer system; shop assistants no longer need to calculate change, bank clerks need know nothing about banking…, engineering is reduced to following blueprints…. As technology invades all aspects of daily life, people actually need less, not more mathematics…." (Noss, 1994).

Plus tard, l'auteur cité a révisé son point de vue, en soulignant que la technologie ne rend pas les connaissances mathématiques inutiles, surtout aux ingénieurs, mais qu'elle exige une autre manière de penser avec les mathématiques (Noss, 2001).

> "[T]he new roof in the British Museum in London… [is] a structure with more than 3000 tiles, no two of which are the same, consisting of some 3 kilometers of steel beams claimed accurate to within 3 mm. The design – let alone the construction – of such an edifice would, of course, have been impossible without a computer. But the key point is not only that the computer enabled a particular design : it is that the very design was shaped by the computer, the computer gave its designers a new way to think, not just a tool for calculating the details of what they had already thought " (Noss, 2001).

C'est peut-être ce questionnement de la raison d'être des connaissances disciplinaires traditionnelles qui a mené à penser les buts de l'éducation non plus en termes des connaissances, mais en termes de *compétences*[2] – un mouvement qui, depuis une dizaine d'années au moins, s'est répandu dans plusieurs pays.

---

[2] Ce mouvement pourrait être classifié comme appartenant aux approches dites "formatives", c'est-à-dire orientées surtout vers la formation des habiletés générales cognitives et affectives telles la "créativité" ou "l'intelligence" (Howson et al., 1981, p. 116). Il peut-être aussi décrit comme valorisant les connaissances "ouvertes" (provisoires, prêtes à changer en fonction de l'expérience) plus que les connaissances "fermées" (finies, invariables, utilisées toujours de la même manière), et

Le mouvement d'organisation des curriculums autour des compétences intellectuelles générales, comme, par exemple, « observer, repérer, analyser, déduire, induire, appliquer ses connaissances dans des situations nouvelles, identifier et utiliser à bon escient le langage spécifique de chaque discipline » (CREM, 1995, p. 18), fait parfois l'impression que le choix des contenus pour l'enseignement pourrait être arbitraire. Cela suscite, naturellement, une réaction négative chez les mathématiciens, qui se sentent obligés de démontrer l'impossibilité de la dissociation des compétences et des connaissances disciplinaires précises. En réaction au document ministériel intitulé « Socles des compétences » (Mahoux, 1994), les auteurs de (CREM, 1995), écrivaient :

> « Le moteur du développement de la personne, c'est le désir de comprendre le monde, de partager ses interrogations avec d'autres, d'entrer dans une culture. L'enfant… mobilise ses compétences et ses connaissances pour acquérir de nouvelles connaissances. Et ce faisant, il améliore ses compétences et en développe de nouvelles… [P]lus l'élève a de connaissances et mieux il est armé pour résoudre des problèmes… Qu'on le veuille ou non, pour être bien faite, la tête doit être raisonnablement pleine. » (CREM, 1995, p. 18).

D'autre part, le langage des « compétences » est apparu comme utile dans la « guerre » idéologique aux États-Unis (*math wars*) entre différents points de vue sur les buts et les moyens de son enseignement. Pour le comité engagé par le *National Research Council* aux États-Unis en 1999, pour préparer un rapport sur l'enseignement des mathématiques au primaire (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001), la formulation des buts de l'enseignement des mathématiques en termes de cinq composantes de la compétence mathématique (« *strands of mathematical proficiency* ») semblait fournir un cadre conceptuel commun qui permettait de focaliser l'attention des parties engagées dans le débat sur l'essentiel et éviter ainsi « les positions extrêmes vis-à-vis des buts de l'apprentissage des mathématiques » (Kilpatrick, 2001).

> “The five strands of mathematical proficiency are (a) *conceptual understanding,* which refers to the student’s comprehension of mathematical concepts, operations, and relations; (b) *procedural fluency,* or the student’s skill in carrying out mathematical procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately ; (c) *strategic competence,* the student’s ability to formulate, represent, and solve mathematical problems ; (d) *adaptive reasoning,* the capacity for logical thought and for reflection on, explanation of, and justification of mathematical arguments ; and (e) *productive disposition,* which includes the student’s habitual inclination to see mathematics as a sensible, useful, and worthwhile subject to be learned, coupled with a belief in the value of diligent work and in one’s own efficacy as a doer of mathematics”. (Kilpatrick, 2001).

---

les connaissances "génératives" – c'est-à-dire permettant de créer d'autres connaissances – plus que les automatismes (Morf, 1994).

Dans les programmes présentement en force au Québec (M.E.Q., 2001), le langage des compétences apparaît comme un élément unificateur du curriculum, un « axe fédérateur » (Tardiff, 2001). Une compétence est définie comme « un savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources » (M.E.Q., 2001, p. 8). Cette définition, inspirée des travaux de Perrenoud (1997), n'oppose pas les compétences et les connaissances, mais rend les connaissances (qui font partie des ressources) indispensables au développement des compétences.

Malgré les précisions sur le sens du terme, la légalisation du programme au Québec a suscité beaucoup de doute. Le reproche qu'on soulevait souvent était que la notion de compétence n'était qu'un « leurre », une illusion qui ne peut pas être réalisée en pratique (voir Tardiff, 2001).

La situation était semblable au Portugal (Abrantes, 2001). Le public ne voulait pas que les enseignants « expérimentent » sur les enfants ; on exigeait que les curriculums soient bien définis, indépendants des habiletés individuelles des enseignants, et bien testés avant d'être disséminés dans toutes les écoles. L'opinion publique avait du mal à accepter l'idée même d'organiser un curriculum autour d'une notion aussi vague que celle de compétence. Surtout les compétences comme la *disposition* à penser mathématiquement, le *plaisir* à développer des activités intellectuelles et la *tendance* à chercher des régularités dans une structure abstraite, ont soulevé beaucoup de discussions. Un des arguments importants était la difficulté d'opérationnaliser de telles compétences pour des fins d'évaluation des enseignements et des apprentissages.

2.2. Un curriculum coordonné

La notion de compétence et les listes de compétences transversales ou générales apparaissent aux idéologues de ce mouvement comme un moyen de coordination des curriculums (« axe fédérateur » pour Tardiff, 2001 ; « socles de compétences » chez Mahoux, 1994).

Les auteurs de l'ouvrage (CREM, 1995), didacticiens des mathématiques, ont interprété l'idéologie des « socles des compétences » comme un défi de construire un « cadre global » pour l’enseignement de leur discipline de la maternelle à l’âge adulte, basé sur une philosophie cohérente et une vue claire de l’enchaînement des matières et de la maturation des compétences. Ce groupe d'auteurs a refusé de rester au niveau des généralités quant aux contenus mathématiques. Pour eux, ce n'est pas la formulation des objectifs d'enseignement des mathématiques en termes de compétences « transversales » qui va l'unifier. Il faut trouver des *connaissances* unifiantes, spécifiques aux contenus mathématiques. Ils ont proposé d'assurer cet « enchaînement des matières et la maturation des compétences » par l'organisation des contenus mathématiques autour de quelques « fils conducteurs », c'est-à-dire, des idées mathématiques profondes, qui peuvent être développées dans leurs aspects de plus en plus sophistiqués depuis la maternelle jusqu'à l'université (p. ex. la notion de nombre, la notion de linéarité, celle de relation fonctionnelle, *etc*.).

Ce projet est élaboré soigneusement jusqu'aux moindres détails mathématiques en ce qui concerne les situations d'enseignement liées aux différents fils conducteurs. Mais, pour une fois, le diable n'est pas dans les détails (mathématiques et didactiques). Il est dans les aspects de la réalité qui ne sont pas sous le contrôle des didacticiens et des professionnels de l'enseignement des mathématiques. Je pense, par exemple, aux phénomènes tels que le manque de coordination dans la formation des enseignants, l'ignorance, la migration des populations, l'échec scolaire, manque de coordination entre les contenus des cours des mathématiques à l'université et l'orientation professionnelle des étudiants. J'en dis quelques mots de plus dans ce qui suit.

2.2.1. Manque de coordination dans la formation des enseignants

Dans beaucoup de pays, les enseignants des niveaux élémentaire, secondaire, supérieur sont formés dans des institutions différentes, avec des philosophies de mathématiques différentes et des compétences mathématiques différentes. La coordination de l'enseignement pré-universitaire ne peut pas se faire sans la coordination de la formation des enseignants de tous les niveaux à l'université. Les universités ont longtemps résisté à mettre en place une telle coordination, avec les départements des mathématiques s'opposant à prendre en compte des questions pédagogiques et didactiques dans leurs cours de mathématiques pour les futurs enseignants du secondaire, et les départments d'éducation – manquant de développer des cours de didactique des mathématiques au primaire (surtout dans les centres sans une masse critique de chercheurs spécialisés dans ce domaine). Prenons l'exemple canadien :

> "The issue of teachers' knowledge has been a prominent one for several decades now. However, little progress has been made toward a consensus on the question of what they need to know. At the University of Alberta, for example, teacher candidates in the secondary route (Grades 7-12) require a minimum of twelve 3-credit courses in mathematics. A few are designed specifically for teachers, but the bulk is drawn from 'stock' listings that include introductory calculus, linear algebra, discrete mathematics and introductory statistics. This is not atypical. In most English Canadian universities, prospective secondary teachers are required to take similar (i.e. generic) courses and most elementary education programs require only one 3-credit course, usually specially designed, that focuses on process rather than any particular content. These practices seem to be held in place by an assumption that courses in formal mathematics are vital to effective teaching. [But research has] demonstrated at best a weak relationship between generic courses taken by teachers and their students' performances on standard examinations. Such results have prompted a belief that more mathematics in teacher education programs may be

inappropriate. It might be that teachers require more nuanced understandings of the topics in the conventional curriculum". (Barbeau, 2005).

2.2.2. Ignorance du futur et du passé intellectuel des élèves

Même si les programmes sont bâtis sur l'évolution en spirale des idées générales, appelées « fils conducteurs », comme, par exemple, la notion de linéarité, ou celle de la relation fonctionnelle, les enseignants de l'école élémentaire, ne possédant pas les connaissances mathématiques au-delà d'un certain seuil, ne sont pas capables de comprendre que telle ou telle activité fasse partie d'un tel fil conducteur et ne voient pas comment elle est reprise plus tard pour être généralisée ou autrement transformée. Soit l'activité n'a pas de sens pour eux et ils la rejettent, soit ils l'interprètent de façon qui la prive des aspects généralisables. Le fil conducteur est ainsi coupé et il n'y a, pour ainsi dire, plus de courant dans le circuit : plus de coordination, plus de cohérence. D'autre part, les enseignants du niveau secondaire et, encore plus, ceux du tertiaire, ignorent tout du passé mathématique de leurs étudiants et ne reprennent pas les fils conducteurs là où ils étaient terminés au niveau précédent. Ils essaient de construire un circuit tout neuf, mais, encore une fois, le courant ne passe pas, car il n'y a rien pour l'alimenter dans les connaissances des élèves.

2.2.3. Migration

Un système éducatif basé sur l'idée de coordination est très exigeant vis-à-vis de la « mémoire didactique », tant de l'enseignant que de l'élève (voir, p. ex., Flückiger, 2005). Cette mémoire n'est cependant pas accessible au nombre croissant d'élèves qui arrivent d'autres systèmes scolaires en cours de scolarité.

2.2.4. Échec scolaire

L'échec scolaire, l'abandon des études ou, tout simplement, le changement de direction d'études, ne semblent pas être pris en compte par les réformes. Les réformateurs croient toujours que la réforme va prévenir les échecs et les abandons et que, cette fois, tout le monde sera satisfait et les étudiants seront convaincus de la pertinence des mathématiques dans leur vie et profession future. Les réformateurs ont tort à tous les coups ; il y a toujours des étudiants qui dérapent et tombent dans des secteurs parallèles d'enseignement, oubliés des réformes depuis des décennies : des cours de rattrapage, des cours pour des adultes, des cours de niveau pré-universitaire offerts dans des universités comme condition d'admission dans des programmes universitaires…

2.2.5. Manque de coordination entre les contenus des cours des mathématiques et l'orientation professionnelle des étudiants adultes

Dans ces cours de niveau pré-universitaire, offerts dans les universités, les jeunes adultes ont parfois l'impression que les mathématiques ne servent à rien d'autre que sélectionner les candidats aux programmes populaires comme les écoles de commerce (Sierpinska, 2005). Les contenus, en particulier, des cours de calcul différentiel et intégral, leurs semblent avoir peu à faire avec ce qu'ils pensent qu'ils vont étudier dans les programmes universitaires auxquels ils aspirent.

> "Math is good to develop our analytic skills. However, in my case, I am taking up bachelor's degree in commerce, major in accountancy and am already an accountant from another country. I don't think MATH 209 - Calculus is useful to this program. But I really work hard in it because I need to proceed with my accountancy. There are some [students] who failed and got discouraged and will rather not proceed with the program, which is not really reasonable because calculus is not helpful for accountancy. I'd rather spend my time studying something that is related or in preparation to accounting courses. Calculus is good for engineering and math major [programs], I think. But that's the university requirement, so I just have to abide in order for me to have a diploma in accountancy." (Réponse d'une étudiante au questionnaire sur les raisons de la frustration des étudiants forcés de prendre des cours des mathématiques comme condition d'admission à l'université[3]).

Il y a, bien sûr, différentes approches de l'enseignement des mathématiques pour les étudiants d'économie et de commerce. Une approche formelle ou « structuraliste » (pour une définition, voir CREM, 1995, p. 35) des mathématiques peut sembler totalement inappropriée, mais elle est toujours utilisée, car elle est, ironiquement, plus économique, comme l'ont remarqué les auteurs de la pétition suivante :

> « L'usage instrumental des mathématiques semble nécessaire. Mais le recours à la formalisation mathématique, lorsqu'elle n'est plus un instrument, mais devient une fin en soi, conduit à une véritable schizophrénie par rapport au monde réel. La formalisation permet par contre de construire facilement des exercices, de 'faire tourner' des modèles où l'important est de trouver 'le bon' résultat (c'est-à-dire le résultat logique par rapport aux hypothèses de départ) pour pouvoir rendre une bonne copie. Ceci facilite la notation et la sélection, sous couvert de scientificité, mais ne répond jamais aux questions que nous nous posons sur les débats économiques contemporains. » (Pétition des étudiants en économie à l'ENS, publiée dans *Le Monde,* le 20 juin 2000 ; reproduite dans Chevallard, 2005).

[3] Le questionnaire est accessible au http://alcor.concordia.ca/~sierp/ .

2.3. Des contenus mathématiques pertinents

Les auteurs de (CREM, 1995) ont estimé important que « le système d'enseignement a[it] la responsabilité d'apprendre à tous les jeunes les mathématiques pertinentes et utiles aujourd'hui » (p. 29). Cette pertinence doit être appréciable par les apprenants ici et maintenant : « il n'est pas acceptable que, sous prétexte de préparation à la vie et aux professions, l'école transmette des savoirs dont le plein sens ne puisse apparaître qu'après l'école » (p. 30).

Il y a des postulats semblables dans d'autres documents destinés aux responsables de l'enseignement des mathématiques. Par exemple, un des principes du conseil NCTM aux États-Unis, dit que le curriculum doit être fondé sur les mathématiques « importantes ». Au Québec, le document (M.E.Q., 2001, Chapitre 6) propose que les élèves conçoivent « les connaissances comme des outils à utiliser dans la vie de tous les jours ». Mais le document CREM rend la condition de pertinence *hic et nunc* plus explicite et ne met pas l'accent sur la pertinence pour la vie de tous les jours comme c'est parfois le cas. La pertinence peut être intrinsèque aux mathématiques.

La pertinence ici et maintenant est cependant difficile à obtenir aux niveaux post-primaires. Les mathématiques un peu plus avancées demandent l'apprentissage de beaucoup de techniques et de concepts préparatoires et cela prend pas mal de temps. Par exemple, dans mon université, les cours de première année d'algèbre linéaire introduisent les concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de valeur propre, d'espace invariant, pour arriver, à la fin du cours, aux théorèmes sur les formes canoniques (Jordan, rationnelle). Les étudiants peuvent voir comment tous les concepts convergent vers la conceptualisation des formes canoniques, mais il ne reste plus de temps pour leur donner l'occasion d'apprécier la pertinence de ces formes, leur utilité dans la résolution de problèmes (autres que des exercices d'application simple des théorèmes) qui seraient accessibles aux étudiants. Dans les cours, on ne fait rien avec ces formes : on ne fait qu'exposer l'astuce nécessaire pour démontrer les théorèmes correspondants.

À part cette pertinence locale, intrinsèque à la théorie mathématique, il y aussi la pertinence des savoirs mathématiques du point de vue des professions visées par les étudiants. J'en ai déjà parlé dans la sous-section précédente. Nous ne pouvons pas continuer à enseigner les mathématiques à l'université comme si les étudiants se préparaient tous aux études de maîtrise et de doctorat dans ce domaine. D'après les statistiques compilées dans mon université, seulement 36% des étudiants des universités canadiennes considèrent la préparation aux études de ces niveaux avancés comme une raison importante pour entrer à l'université ; 81% sont entrés à l'université pour augmenter leurs chances d'obtenir un bon emploi. Heureusement (pour les professeurs de mathématiques), pour 66% d'étudiants, développer une meilleure connaissance d'un domaine académique demeure une raison importante.

2.4. Apprentissage avec compréhension, sans négliger les compétences procédurales

La question de l'apprentissage des mathématiques « avec compréhension » comme s'opposant à l'apprentissage des « règles sans raisons » revient souvent dans les débats pédagogiques. Mais, selon les critiques, les réformes qui visent le développement d'une compréhension des mathématiques chez les élèves insistent trop sur la créativité en mathématiques et pas assez sur l'apprentissage des savoirs conventionnels. On les blâme pour ne pas apprendre aux élèves les compétences et les connaissances mathématiques de base (calcul arithmétique et algébrique et résolution d'exercices typiques, connaissance des formules fondamentales). Ceci donne lieu à des contre-réformes de type « back-to-basics ».

> "The dominant themes of back-to-basics rhetoric in the 1970s were emphasis on the procedural skills of arithmetic and algebra, definition of curricula in terms of behavioral objectives, direct instruction aimed at developing students' mastery of these objectives, and extensive use of locally and nationally standardized testing to assess the effectiveness of curricula, teaching and schooling in general." (Fey & Graeber, 2003, p. 541).

Ces mouvements rencontrent, à leur tour, la résistance de ceux qui argumentent qu'un apprentissage des opérations et des manipulations sans compréhension ne sert à rien : il ne produit pas de citoyens capables d'appliquer les mathématiques dans leur vie et leurs professions (p. ex. Bishop, 1991 ; von Glasersfeld, 1995 ; Abrantes, 2001).

Certains chercheurs ont fait l'effort d'aller au-delà des disputes idéologiques et politiques en prenant le temps de faire des études à long terme pour comparer l'influence, sur les connaissances mathématiques des élèves, des approches « traditionnelles » et « progressistes » (Boaler, 1997).

Mais il semble que le système d'éducation ait tendance à converger vers un enseignement centré sur l'apprentissage des procédures, parce que celui-ci est plus facile à évaluer, donc plus économique en termes du temps du personnel enseignant. Brousseau (1988) explique ce phénomène par le fait que l'enseignement dit traditionnel distingue et met en opposition l'enseignement visant « l'acquisition des savoirs institutionnalisés tels que les algorithmes de calcul, les définitions canoniques et les propriétés fondamentales » et celui qui vise « la compréhension et l'usage de ces savoirs » (Brousseau, 1988, p. 48). Ces deux types d'enseignements sont considérés comme devant suivre des contrats didactiques différents et des modes d'administration différents, les uns étant plus faciles à gérer que les autres. Les activités de compréhension occupent une place à part dans le temps et l'espace consacré aux mathématiques à l'école. Et elles peuvent avoir un statut différent vis-à-vis de l'institution : par exemple, des questions sur la compréhension ne vont pas figurer sur les tests ou ne vont pas compter pour beaucoup dans l'évaluation. Elles vont donc être les premières à être sacrifiées si le temps manque. Pour Brousseau, cette opposition n'est pas nécessaire et elle nuit à l'apprentissage des mathématiques : il n'y a pas, pour lui, d'apprentissage des techniques mathématiques sans l'apprentissage de leur compréhension ; l'un doit venir simultanément avec l'autre, dans le cadre d'un même type de contrat didactique (qui, cependant, doit être différent de celui de type : présentation par l'enseignant, exemple au tableau, exercices pratiques par imitation de l'exemple).

> « Plus qu'une simple distinction, on rencontre une opposition : La société voudrait bien que l'enseignement obtienne des élèves la compréhension *en plus* de l'apprentissage des savoirs institutionnalisés. Des efforts répétés sont tentés dans ce sens (chaque « réforme » vise, en fait, ce but) mais en l'absence d'une solution « évidente », qui, pour l'instant, devrait respecter la technique basique, toute modification finit par échapper au « contrôle » social ; la recherche de la compréhension se trouve alors directement opposée à celle de l'apprentissage des savoirs institutionnalisés qu'elle est accusée d'abandonner. Ces deux activités ne sont pas logiquement ou techniquement contradictoires, mais apparaissent comme telles, dans le modèle culturel qui régit le contrat didactique. Chaque réforme s'achève par un écrasement plus pesant de l'enseignement élémentaire sur les pratiques dogmatiques et la visée d'objectifs formels. Obligés de « défendre » un minimum d'objectifs de compréhension, les enseignants répondent par des procès contre le formalisme, le dogmatisme… et par un éloge de leurs « antagonistes » (supposés par définition être, de plus, adaptés aux élèves) sans parvenir à produire sinon des méthodes, du moins des contrats didactiques satisfaisants. » (Brousseau, 1988, pp. 48-49).

Dans les discussions sur l'opposition entre un enseignement « mécaniste » et un enseignement « réaliste » (pour les définitions, voir, p. ex. CREM, 1995, p. 35), l'apprentissage des algorithmes standard des opérations arithmétiques est d'habitude classé du côté des apprentissages mécanistes. Par exemple,

> "[T]he topic of long division has been enshrined by law in the curriculum of England and Wales at precisely that point in human development when the ubiquity of the calculator and the computer has made that skill completely redundant. Would not a generation schooled in the repetitive and mathematically useless skills of long division have some qualities which the society of the recession-laden nineties would value?" (Noss,1994, p. 8.)

Mais il n'y a pas de nécessité épistémologique à classifier ainsi les contenus des savoirs. N'importe quel contenu peut être enseigné et appris de manière mécaniste, empiriste, structuraliste ou réaliste (CREM, 1995, p. 35). Pour reprendre la question de l'enseignement de l'algorithme standard de la division, soulevée par Noss dans la citation ci-dessus, il se peut que la valeur de son apprentissage repose dans les processus cognitifs qui y sont impliqués et non pas dans l'habileté de trouver rapidement une réponse. Cette réponse peut effectivement être trouvée plus vite avec une calculatrice. Mais la compréhension de l'algorithme de la division mets en jeu les conceptions des autres opérations arithmétiques et de la représentation décimale des chiffres. Elle permet d'engager les élèves dans des raisonnements riches qui exigent une synthèse de leurs connaissances arithmétiques et, suivant le contrat didactique engagé avec les élèves, les amener à poser des questions mathématiques profondes dépassant le contexte de l'application simple d'une routine. Par exemple, une séquence de leçons sur la division dans une classe de 5^{e} (élèves de 11 ans), qui a commencé sans un enseignement explicite de l'algorithme standard, a amené les élèves à se poser des questions sur l'existence, la pertinence et la grandeur du couple diviseur-reste, et à distinguer entre un diviseur entier et un diviseur décimal (Flückiger, 2005).

> "[T]he question of the remainder gradually took over in the classroom debates. This question was first brought up by a newcomer in the class who had already studied the traditional division algorithm. He declared that the answer to "6 divided by 5" was "1 remainder 1". At the time, the class was unable to decide between the two answers proposed: "1 remainder 1" and "1 point 2"…. This became the topic of some highly interesting and heated debates in subsequent sessions. The existence, relevance, and magnitude of the remainder with respect to the divisor are mathematical questions that supply the grounds for differentiating between the integer quotient and the decimal quotient. Associating a single quotient number to the dividend–divisor pair, or associating the quotient–remainder pair, is a choice which, in the absence of a concrete context, raises touchy questions like the uniqueness of the quotient–remainder pair, the nature of the numbers studied (integers or decimals), etc. These questions ended up leading the class to say to the teacher, 'You have to tell us what set of numbers we're working in, N or R.' Remember that this is grade 5 of elementary school!" (Flückiger, 2005).

La littérature sur l'enseignement des mathématiques est pleine de lamentations sur l'incapacité des étudiants à résoudre des problèmes « non-routiniers », suggérant parfois que la résolution des problèmes « typiques » n'exige pas de compréhension mais seulement l'application des procédures ou de formules. Je ne suis pas tout à fait d'accord avec cette supposition. Reconnaître un problème comme typique et reconnaître le type exige pas mal de connaissances et de compréhension de ce dont on parle dans le problème. Et n'est-ce pas la première chose qu'une personne intelligente ferait en face d'un nouveau problème ? N'est-ce pas une des « heuristiques » de Polyá ? Un problème que j'ai, cependant, avec les problèmes typiques, est qu'ils peuvent assoupir la vigilance des étudiants quant à la validité de leurs réponses, à cause de leur familiarité et caractère répétitif. C'est pourquoi je pense que les problèmes typiques doivent être arrangés en séquences où il y a une variation intentionnelle des variables de façon à mettre en valeur leur caractère essentiel ou non et, en même temps, à maintenir l'esprit éveillé aux pièges possibles.

2.5. Développement de la pensée mathématique par des situations-problèmes

Depuis un certain temps, le but traditionnel de l'enseignement des mathématiques – « apprendre à penser mathématiquement » (CREM, 1995, p. 29) –a été relié aux activités d'étude des « situations-problèmes ». Ces activités sont censées provoquer les élèves à s'engager, entre autres, dans les démarches de preuve, sans que celles-ci soient réduites à la production d'un genre de discours en réponse à des exercises de type : *Démontrer que*…. Elles comprennent une intégration des domaines et des compétences impliquées dans des activités d'exploration des contextes mathématiques et non-mathématiques, de formulation de problèmes, de conjectures, d'explications, de justification, et parfois de construction d'un modèle mathématique. Il s'agit de développer une « disposition à penser mathématiquement » (Abrantes, 2001) dans des situations-problèmes diverses. D'après Kilpatrick (2001), les recherches montrent, effectivement, que les situations de résolution de problèmes aident à développer tous les aspects de la « compétence mathématique ».

L'approche privilégiée est donc « réaliste » et non « mécaniste », « empiriste » ou « structuraliste » (CREM, 1995, p. 33). Au CREM, l'organisation des apprentissages autour des situations-problèmes est une solution du dilemme de l'opposition entre l'enseignement magistral des théories mathématiques où les élèves peuvent admirer les constructions mais ne peuvent pas faire beaucoup par eux-mêmes, et un enseignement où les élèves s'exercent à appliquer des techniques et des formules dont l'enseignant connaît peut-être le contexte théorique et les raisons, mais n'en fait pas part aux élèves.

> « [I]l existe une troisième façon d'enseigner, dans laquelle professeurs et élèves travaillent des mathématiques, où chacun se pose des questions et apprend à penser. Dans cette optique, les grandes théories ne sont pas abandonnées : elles sont reconstruites pour répondre à des questions. » (CREM, 1995, p. 16).

Les auteurs de (CREM, 1995) ne se font pas d'illusion : cet idéal n'est pas facile à atteindre.

> « [C]e type d'enseignement… n'est encore pratiqué que par une minorité. Il ne faut d'ailleurs jeter la pierre à personne, car il est vraiment difficile de donner aux élèves la part d'autonomie intellectuelle la plus favorable à leur formation, et cela ne s'apprend pas en un tour de main. C'est d'autant plus difficile que les cours universitaires, qui par leur position contribuent à donner le ton, se font le plus souvent sur le modèle de la science achevée, déductive. Les cours de ce type, parce qu'ils sont si soigneusement construits, ne communiquent pas aux étudiants la pensée vivante des chercheurs qui les ont écrits. » (CREM, 1995, p. 16).

Pour changer les pratiques des enseignants dans la direction voulue, il ne suffit pas, disent les auteurs de CREM (1995), de produire des présentations idéologiques des buts de l'enseignement ; il faut construire,

> … des recueils de situations-problèmes… accompagnés… d'une argumentation critique, d'exemples vécus dans les classes, de commentaires mathématiques et épistémologiques et d'indications méthodologiques, ainsi que des recommandations pour l'évaluation. (CREM, 1995, p. 22).

L'analyse des situations-problèmes et plus généralement, des tâches offertes aux étudiants, ne semble pas être, en ce moment, un sujet de recherche très populaire. J'ai pu le constater lors d'une étude d'un échantillon de rapports de recherche présentés dans les actes de PME (Sierpinska, 2004). De telles analyses existent, bien sûr. Un bon exemple est celui du travail de Brousseau & Gibel (2005) et autres articles publiés dans le volume 59, en juillet 2005, d'*Educational Studies in Mathematics*.

Ce travail montre que les situations-problèmes tendent pas mal de pièges aux enseignants. Elles se réfèrent à un contexte ouvert ; si on laisse aux élèves la liberté d'interpréter le contexte comme ils veulent, on risque le dérapage de la discussion en dehors des mathématiques. Si l'enseignant intervient en imposant une interprétation mathématique, la situation n'est plus une situation-problème ; si le modèle mathématique est trop difficile pour les élèves, l'enseignant devra intervenir dans la résolution et l'activité deviendra un travail dirigé ou exercice de calcul.

Il est possible qu'en pratique, le travail en classe sur des situations-problèmes converge toujours vers le « point fixe » des situations typiques. Dans les années 1950, au Royaume-Uni, c'étaient des problèmes d'échelles appuyées contre les murs, des projectiles lancés des avions, de collision des balles, *etc*. (Burkhardt, 1989). Aujourd'hui, on a ajouté des problèmes sur les ventes des CD ou de téléphones mobiles, l'organisation d'une fête à l'école, ou des problèmes environnementaux. Mais dans ces situations standard, toute discussion sérieuse des relations entre la réalité et le modèle mathématique serait tout aussi absente. Car une telle discussion demande des connaissances non-triviales mathématiques, physiques, économiques et des contextes de la vie réelle, qu'il n'est pas réaliste d'assumer chez les enseignants.

Burkhardt (1989, p. 2) raconte l'histoire du projet USMES aux États-Unis, inspiré par Henry Pollak et qui a bien marché tant que les activités dans les écoles étaient supervisées par les mathématiciens. Laissés à eux même, les enseignants n'ont pas pu continuer ce type d'enseignement.

> ”The USMES project (Unified Sciences and Mathematics in Elementary Schools)… introduced real problem solving to the elementary school classroom on the basis of substantial six-week projects carried through on a whole class basis. Each project was based on a challenge which had been shown to lead to rich and tractable classroom activities and to decisive conclusions…. It remains an outstanding achievement. Its weakness was in the high demands it made upon the teachers

> involved, both in terms of commitment and the range of skills that were necessary. The great majority of teachers are accustomed to working with detailed guidance and support, even in familiar areas of the curriculum. I do not think the level of support offered would have been adequate for most teachers." (Burkhardt, 1989, p. 2).

Burkhardt (ibid.) a souligné que lorsque les applications des mathématiques ou la modélisation mathématique ne font pas l'objet d'une évaluation directe dans les examens, cette partie du curriculum risque fort d'être « diluée » ou « corrompue » dans la pratique. Il est probablement de même pour la résolution de problèmes en général.

Les situations-problèmes sont souvent vues, par les enseignants, comme un loisir ou un luxe dans la chronogénèse et la topogénèse des savoirs scolaires (Sensevy et al., 2005). Ce que les élèves apprennent dans ces situations ne se prête pas à une évaluation directe ; il peut même être difficile de décrire ce qu'ils apprennent. Les enseignants peuvent juger qu'ils ne peuvent pas se permettre ce luxe, vu le temps qu'ils ont à leur disposition et la place de ce qui, idéalement, pourrait être appris, dans la structure des objectifs d'enseignement.

2.6. Développement de la pensée autonome

Pour les auteurs de (CREM, 1995) l'apprenant idéal est autonome dans sa pensée, c'est-à-dire, « prend des initiatives, … agit et réfléchit avec une intention personnelle » (p. 29) au lieu de « chercher l'unique bonne réponse par l'unique bonne méthode, celle que le professeur a exposée » (p. 41). L'apprenant idéal a aussi confiance en sa capacité de raisonner de façon autonome.

Certains problèmes, tâches ou situations didactiques donnent plus d'autonomie aux apprenants que d'autres. Cela dépend des caractéristiques mathématiques de ces problèmes, mais aussi du contrat didactique établi dans la classe. La recherche et l'expérimentation des problèmes permettant à l'élève de penser et agir de façon autonome est, en fait, l'objectif principal de beaucoup de recherches en didactique des mathématiques. Cela a certainement été la préoccupation principale des travaux de Guy Brousseau et une des sources de sa théorie des situations didactiques.

2.6.1. Manque de souci pour la validité de leurs réponses chez les étudiants

L'autonomie de l'apprenant n'est pas facile à obtenir. Pour être autonome dans sa pensée, il faut avoir un tant soit peu de contrôle sur la validité de ses résultats. Parfois les étudiants n'ont pas de moyens théoriques ou techniques de vérifier leurs résultats (par exemple, lorsqu'il s'agit d'une démonstration dans une théorie qu'ils connaissent à peine ; voir Durand-Guerrier & Arsac, 2005). Mais, même lorsqu'ils ont la possibilité de vérifier leur résultat, ils ne sont pas nombreux à le faire. Ils croient que ce n'est pas leur affaire, mais celle de l'enseignant, de décider si la solution est correcte ou non. Une solution, pour eux, n'est pas vraie ou fausse; sa validité se mesure en pourcentage du nombre de points assigné à la question.

Dans une étude sur le phénomène de frustration parmi les étudiants de mon université obligés à prendre des cours des mathématiques de niveau pré-universitaire comme condition d'admission dans un programme académique de leur choix (p. ex., psychologie, études commerciales), presque deux tiers des répondants (N=96) ont admis qu'ils ont besoin que l'enseignant leur dise si leur solution est correcte ou non. Ils ont aussi massivement choisi comme celle qu'ils préfèrent une solution incorrecte d'une inéquation avec valeur absolue (Figure 1).

74. Given a problem: Solve $|2x - 1| < 5$. Which solution do you like better?

Solution a

$|2x - 1| < 5$

$2x - 1 = 5$ neg. $2x - 1 = -5$

$x = 3$ $x = -2$

Answer: $-2 < x < 3$

Solution b

We use the theorem : $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

$|2x - 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x - 1 < 5 \Leftrightarrow 2x - 1 > -5$ and $2x - 1 < 5 \Leftrightarrow$ $x > -2$ and $x < 3$

Answer: $-2 < x < 3$

Why?

75. Given a problem: Solve $|2x-1| > 5$. Which solution do you like better?

Solution a

$|2x - 1| > 5$

$2x - 1 = 5$ neg. $2x - 1 = -5$

$x = 3$ $x = -2$

Answer: $3 > x > -2$

Solution b

We use the theorem: $|a| > b \Leftrightarrow a < -b$ or $a > b$

$|2x - 1| > 5 \Leftrightarrow 2x - 1 < -5$ or $2x - 1 > 5 \Leftrightarrow x < -2$ or $x > 3$

Answer: $x < -2$ or $x > 3$

Why?

Figure 1 : Deux items d'un questionnaire adressé aux étudiants des cours de niveau pré-universitaire.

Quand on leur a demandé laquelle des solutions, (a) ou (b), à l'inéquation $|2x – 1| < 5$ (item 74 dans la Figure 1) ils préfèrent, 69% (66 des 96) ont répondu qu'ils préfèrent (a) et seulement 19% (18) ont choisi (b). Pour l'item 75, seulement 20% (19) ont choisi (b) et 62% ont choisi (a) sans remarquer que cette solution est fausse. Très peu d'étudiants ont justifié leur préférence par la validité de la solution. Dans l'item 75, seuls 2 répondants ont mentionné que (a) est fausse. Un étudiant a choisi 74(b) pour sa « plus grande généralité », mais il a opté pour 75(a) parce qu'il n'était pas « satisfait » avec le connecteur *or* dans (b) :

> "I prefer (a). The OR in (b) is not quite satisfying. I believe there will always be a part of the disjunction that is going to be false. The biconditional holds in 75(b), but theorem 74(b) is much better". (Étudiant adulte, qui a pris un cours d'algèbre exigé pour admission en Psychologie).

Une étudiante qui a choisi la solution 75(b) a donné l'explication suivante :

> "In solution [75]b you just follow the rule. However, it is important to understand the concept of absolute value, so that you can see that the theorem makes sense. [This is] my least favorite type of problem because I have to think the absolute value concept through every time. The inequality makes it even more complicated." (Étudiante adulte, se préparant pour admission aux études commerciales).

Cette étudiante a appris à résoudre les inéquations à valeur absolue par référence à la définition de la valeur absolue. Cette approche est rare dans les écoles secondaires au Canada ; l'approche par résolution de deux équations, avec des règles de dérivation de la solution est plus commune. Les étudiants choisissent l'approche qui leur est la plus familière. Ils ne songent pas à vérifier la solution.

Les raisons le plus souvent mentionnées pour justifier le choix étaient : *clearer*, *simpler*. Mais il y avait aussi des justifications comme : *not so cluttered*, *less silly symbols, less steps*, *easier to understand*, *the theorem is difficult to remember*. Une répondante a choisi les solutions (a) parce qu'elles étaient écrites de haut en bas et non pas en une seule ligne. L'un des deux étudiants qui ont remarqué que 75(a) est fausse, a justifié son choix non seulement par le fait que 75(a) était fausse, mais aussi parce que la solution 75(b) était claire et simple : « Clear and simple and the only correct answer ».

2.6.2. La dépendance de l'enseignant comme une caractéristique de l'apprentissage des mathématiques

La dépendance à l'enseignant qu'éprouvent les apprenants des mathématiques est reconnue dans les recherches. Par exemple, Stodolsky et al. (1991), qui ont étudié les différences entre les attitudes de 60 élèves du secondaire face aux mathématiques et aux sciences sociales, ont constaté que 50% d'entre eux se trouvaient incapables d'apprendre les mathématiques par eux-mêmes ; 38% ont dit qu'ils étaient incapables d'apprendre les sciences sociales par eux-mêmes. A la demande faite aux étudiants d'indiquer ce que leur donne l'école qu'ils ne pourraient pas faire à la maison en mathématiques, un étudiant a répondu : « L'enseignant me dit si ma solution est incorrecte ; il me donne la bonne réponse ».

Il se peut que la dépendance à l'enseignant soit spécifique aux mathématiques, non pas *de fait*, mais *en principe*. En mathématiques, plus qu'en d'autres sujets, il y a beaucoup plus de connaissances et de compétences qui ne sont pas communicables par écrit, par des textes, par des figures et des images. Il est difficile d'apprendre les mathématiques avec seulement un manuel à sa disposition. Il y a, en mathématiques, des techniques (Castela, 2004 ; Mamona-Downs & Downs, 2004) qui sont difficilement apprises sans interaction avec un « maître ».

2.7. Les changements dans les curriculums devraient être reflétés dans les moyens et méthodes d'évaluation

La condition de représenter les changements des programmes scolaires dans les moyens et méthodes d'évaluations des élèves est considérée comme nécessaire à tout projet d'institutionnalisation de ces changements (cf. Burkhardt, 1989). Mais elle n'est pas suffisante pour éviter la corruption de ces changements, comme le démontre, p. ex., la recherche de Schörr, Bulgar & Firestone (2002). Ces auteurs ont observé les pratiques de 63 enseignants impliqués dans la réalisation d'un programme basé sur les standards et principes NCTM dans un état des États-Unis où les tests étaient adaptés à ces standards et principes. Dans les entrevues, les enseignants déclaraient qu'ils étaient motivés par les tests à changer leurs pratiques, mais les observations ont révélé que ces changements étaient très superficiels, touchant surtout l'organisation de la classe (travail en petits groupes, manipulation d'objets concrets) mais pas les aspects conceptuels des contenus enseignés et l'engagement des élèves dans la pensée mathématique.

Il est peut-être vrai que la plupart des enseignants ne font que préparer les élèves aux examens. Mais ils ne le font pas toujours avec succès. Et alors ce n'est pas l'enseignement qui s'ajuste aux examens, mais les examens – à l'enseignement. Si trop d'élèves échouent à l'examen, la prochaine fois, on va modifier l'examen. L'examen est plus facile à changer que les enseignants (Sierpinska, 2004).

Ce phénomène risque de créer un obstacle important à la réalisation des programmes formulés en termes de compétences, qui, par définition, ne se laissent pas mesurer par des tests à temps limité, composés de petits exercices. C'est de cet obstacle que parle Abrantes (2001) quand il discute de l'incompatibilité entre un enseignement centré sur les compétences et les pratiques traditionnelles de l'évaluation des élèves en termes de marques, mieux adaptées à l'enseignement par objectifs définis par des actions concrètes (p. ex., savoir résoudre une équation de premier degré).

> "Assessment of the development of mathematical competence requires observation in different situations and confidence in the teacher's professional judgments, while the central role of standardised tests and exams may become a strong obstacle to flexibility, adequacy and diversity. A wider range of assessment modes and

> instruments – for example students' written productions – has begun to be increasingly accepted and used in the last years but the recent influence of the way in which international comparative studies tend to be interpreted and used has a powerful effect against educational change…. In Portugal, while the movement of curriculum innovation tries to emphasise flexibility and adequacy of teaching methods to students' characteristics and consideration of their social and cultural backgrounds, the 'societal' values of competitiveness and standardisation – of guidelines, methods and 'objective' results – tend to favour the reinforcement of a technique-oriented curriculum. The Ministry of Education is strongly criticised for not organising rankings of schools based on students' scores in national tests. A popular argument is that everybody has the right to know what are the 'best schools', the 'best teachers' and the 'best teaching methods'. The need to compete with other countries is generally added as well, together with the argument of 'globalisation' ". (Abrantes, 2001).

Tout cela ne veut pas dire qu'une réflexion profonde sur l'évaluation des élèves ne peut pas mener à l'amélioration des pratiques enseignantes (Kraemer, 2002). Il n'en reste pas moins que les moyens et méthodes alternatives d'évaluation sont très coûteux en termes du temps des enseignants. Ceci est aussi vrai pour les enseignants d'écoles secondaires que pour les professeurs des départements des mathématiques, qui ont normalement beaucoup moins de copies à corriger et moins souvent. Mais ils défendent jalousement le temps qu'ils ont pour leurs recherches. Ils aiment parfois enseigner – au sens d'aller dans la salle du cours et parler de leur sujet préféré pendant une ou deux heures – mais je n'en connais pas beaucoup qui aimeraient corriger les examens et surtout les problèmes de démonstration. Ils trouvent le travail d'essayer de comprendre la pensée de leurs étudiants d'un ennui insupportable.

2.8. Maintien de la motivation à apprendre les mathématiques

Qu'est-ce qui peut motiver les élèves à apprendre les mathématiques ?

2.8.1. Besoins militaires

Parfois, ce sont des situations politiques extrêmes. En racontant l'histoire des discussions autour des curriculums aux États-Unis au temps de la deuxième guerre mondiale, Garrett (2003) disait qu'il y avait une pression sociale pour mettre plus d'accent sur les mathématiques à l'école et surtout sur l'enseignement des applications. Il s'agissait de permettre à plus de jeunes d'être admis aux écoles d'officiers de marine et d'aviation, ce qui exigeait de passer un examen de mathématiques. La question de savoir si les étudiants seront mieux préparés à utiliser la haute technologie des armes et des moyens de transport tels les avions et les sous-marins en travaillant sur les problèmes typiques sur les projectiles, était un peu secondaire et plus idéologique que réelle.

2.8.2. Sauvegarde de la dignité humaine

Les raisons sociales et politiques d'enseigner les mathématiques aux jeunes Polonais pendant cette même guerre étaient assez différentes. Les changements d'approche pédagogique vers un enseignement très individualisé et en petits groupes étaient forcés par les circonstances. Le pays était sous l'occupation allemande, les écoles étaient fermées et tout enseignement en polonais était interdit sous peine de mort ou de déportation dans des camps de concentration[4]. L'enseignement se poursuivait donc en clandestinité, dans les appartements privés. Il n'y avait pas de manuels et cela changeait le rapport au savoir aussi bien de l'enseignant que de l'élève. Il s'agissait, dans ce cas, non pas de permettre au plus grand nombre de jeunes de passer les examens des académies militaires, mais de maintenir une dignité humaine en dépit des efforts de l'occupant pour réduire la race slave à constituer les esclaves de la race germanique.

2.8.3. Le plaisir

Dans les temps de paix, dans certaines sociétés occidentales, le plaisir est souvent évoqué comme un facteur de motivation. Une des compétences mentionnées par Abrantes était « plaisir et confiance en soi dans le développement des activités mathématiques impliquant le raisonnement mathématique » (Abrantes, 2001).

Depuis les années 1960, l'apprentissage à l'école primaire devait surtout amuser les enfants qui étaient censés d'apprendre en manipulant des objets de plastique à couleurs vives et en jouant à toutes sortes de jeux (logiques ou autres). Les livres de mathématiques n'étaient plus des recueils sobres de problèmes, mais se sont remplis de graphiques, d'images, de photos. Aussi les situations proposées par Brousseau avaient souvent comme base un jeu, une activité amusante avant de devenir un travail sérieux de développement d'une connaissance et d'un savoir institutionnalisé. En comparant l'enseignement basé sur « l'apprentissage de bonnes réponses » avec un enseignement guidé par l'épistémologie constructiviste, von Glasersfeld (1995, p. 4), a, lui aussi, utilisé l'argument du plaisir :

> “From the constructivist perspective, learning is not a stimulus-response phenomenon. It requires self-regulation and the building of conceptual structures through reflection and abstraction. Problems are not solved by the retrieval of rote-learned "right answers". To solve a problem intelligently, one must first see it as one's own problem. That is, one must see it as an obstacle that obstructs one's progress toward a goal. The desire to reach what one believes to be at the end of an effort is the most reliable form of motivation. To have searched and found a path to

---

[4] Pour ceux qui lisent le polonais, un exemple de l'histoire de l'enseignement clandestin en Pologne pendant la deuxième guerre mondiale : http://www.romer.region-rabka.pl/historia.htm. A participé à cette histoire Mme Zofia Krygowska, connue pour son rôle dans le développement des recherches en didactique des mathématiques en Pologne dans les années 1950 - 80.

> the goal provides incomparably more pleasure and satisfaction than simply to be told that one has given the right answer.” (von Glasersfeld, 1995, p. 15).

L'apprentissage peut-il être motivé le plaisir ? C'est comme cela qu'on entraîne les animaux : lorsqu’un chien a fait ce qu'on demandait de lui, on le récompense avec quelque chose qui lui fait plaisir et on peut être sûr qu'il va recommencer. Est-ce pareil pour les humains ? Le plaisir d'avoir résolu un problème de mathématiques ne dure qu'un instant. Combien sont prêts à le payer avec l'effort parfois énorme du processus de résolution ?

2.8.4. La joie du travail

Qu'est-ce qui caractérise ces étudiants, que nous avons parfois le bonheur de rencontrer, qui ne cherchent pas à minimiser leurs efforts dans nos cours de mathématiques ? Ils veulent savoir si telle ou telle chose est vraie et non si tel ou tel type de problème risque de tomber à l'examen final. Ils ont soif de savoir. C'est ce que m'a dit une étudiante adulte revenue aux études après quelques années de travail comme serveuse : « I am hungry for knowledge ». J'ai parfois l'impression que ce qui motive ces étudiants à chercher, à explorer les questions qu'ils se posent eux-mêmes, ce n'est pas le *plaisir* d'obtenir une récompense mais la *joie du travail*. Ce sont deux choses très différentes. Mais ce que je comprends par « joie du travail » n'est pas, pour autant, au même pôle que le triste sérieux et l'amertume du travail forcené évoqué par certains auteurs en parlant de l'apprentissage des mathématiques en Chine. Par exemple, Leung (2001) mentionne un slogan qu'il a vu sur les murs d'une classe en Chine rurale : « Les racines du savoir sont amères, ses fruits sont doux. »

> “Pleasurable learning has been a slogan in a number of Western countries. Western educators in general consider it important that learning should be a pleasurable experience for the child…. Also, they believe that pleasurable learning is effective learning…. Unfortunately, for some countries, pleasurable learning is equated with merely simplifying what is to be learned… or introducing different sorts of activities to make the learning more fun. Students are enjoying activities while learning mathematics rather than enjoying the activities in the learning of mathematics. In contrast, the traditional view in East Asian countries, especially in China, has been that studying is a serious endeavour. Students are expected to put in hard work and perseverance in their study and are not supposed to "enjoy" the study…. [E]very Chinese is familiar with the many ancient Chinese folk stories about famous figures having had a hard time studying and eventually becoming successful…. During a visit to a school in rural Beijing, [I] observed the following poster on the wall of a junior secondary classroom: "the root of knowledge is bitter; its fruits are sweet".” (Leung, 2001, p. 41).

2.8.5. Les mathématiques ouvrent les portes

Parfois, on veut inciter les jeunes à étudier les mathématiques en leur disant que les mathématiques « ouvrent les portes ». Malheureusement, les mathématiques sont plus souvent perçues comme une clé qui ferme la porte de l'autre côté. Voici ce que nous a écrit une étudiante adulte revenant aux études, forcée à prendre des cours de mathématiques pour être admise aux études commerciales :

> "Math is extremely discouraging when you are forced to take it as a prerequisite. If I was going for a major in math, then I would understand that the course is necessary. However, in the commerce program, there is nowhere near as much or as difficult math as I have just taken. I also have another year of math prerequisites to take in order to get into the program I want. If I fail math, I don't get into commerce. So I feel math is the only thing that's stopping me from getting into the program I want. I can't imagine the number of people who have dropped out of their dream just because of one subject that got in their way. I am currently spending 20 hours of studying math outside of class and I got 30% on my midterm. I'm starting to think that I'm the problem, and that's very discouraging. Hopefully math 208 and 209 will be a little less stressful." (étudiante adulte).

Et voici ce qu'a écrit Bourdieu, à propos de la pratique d'utiliser les mathématiques comme instrument de sélection :

> « [I]l faudrait aussi examiner le lien entre la nouvelle délinquance scolaire… et la logique de la compétition forcenée qui domine l'institution scolaire et surtout l'effet de destin que le système scolaire exerce sur les adolescents : c'est souvent avec une très grande brutalité psychologique que l'institution scolaire impose ses jugements totaux et ses verdicts sans appel qui rangent tous les élèves dans une hiérarchie unique des formes d'excellence – dominée aujourd'hui par une discipline – les mathématiques. Les exclus se trouvent condamnés au nom d'un critère collectivement reconnu et approuvé, donc psychologiquement indiscutable et indiscuté, celui de l'intelligence : aussi n'ont-ils souvent pas d'autre recours, pour restaurer une identité menacée, que les ruptures brutales avec l'ordre scolaire et l'ordre social (on a observé, en France, que c'est dans la révolte contre l'école que se façonnent et se soudent nombre de bandes de délinquants) ou, comme c'est aussi le cas, la crise psychique, voire la maladie mentale ou le suicide. » (Bourdieu, 1994, pp. 49-50).

2.9. Utilisation raisonnable des outils de calcul et de l'informatique

Un des principes de la NCTM déclare : « Technology is essential in teaching and learning mathematics, it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning ».

Mais les recherches empiriques sur l'utilisation des calculatrices dans l'enseignement ne permettent pas, pour le moment, de prendre de telles déclarations pour acquises.

> “[T]here is an enormous body of research on the use of calculators by children in elementary and middle school. The great bulk of that work, however, has been devoted primarily to demonstrating that children’s learning is not harmed, and may be enhanced in some ways, when they use calculators. Relatively few studies have addressed issues of when and how calculators actually assist in the learning of specific mathematical concepts and operations. It is clear that the question is no longer whether calculators should be used but how. But researchers have just begun to address questions of the effectiveness of various uses of calculators. When should they first be introduced? How should young children use them? How much time needs to be spent on written algorithms when calculators are available? These questions themselves are not research questions, but they are the sorts of questions that teachers and others are asking. So far, the research literature offers little assistance in resolving them.” (Kilpatrick, 2001).

Les recherches offrent des théories raffinées et des conclusions nuancées qui ne se traduisent pas en réponses claires aux questions posées dans la citation ci-dessus (p. ex. Guin & Trouche, 1998 ; Zevenbergen, 2004).

Dans ce vide, les voix des enseignants du niveau collégial et universitaire contre l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques résonnent très fort. Par exemple, Wilson & Naiman (2004), suggèrent, par les résultats d'une petite étude statistique, que les étudiants qui ont beaucoup utilisé des calculatrices à l'école réussissent moins bien dans les cours de calcul différentiel et intégral au collège que ceux qui les ont utilisés moins ou pas du tout. Cette étude a plusieurs faiblesses méthodologiques et d'interprétation (Ruthven, 2005), mais son message est simple et, par ce fait, il risque d'être plus facilement repris dans les débats politiques et idéologiques autour de la prochaine réforme, que les considérations subtiles des recherches.

3. Quelques réflexions sur les possibilités de communication entre l'idéal et la réalité

Les textes des programmes scolaires et les articles de recherche utilisent parfois les mêmes expressions techniques ou termes théoriques. Nous ne savons pas si ces éléments du discours passent de la théorie aux programmes scolaires par un processus de vulgarisation dans les écrits destinés aux enseignants ou si, inversement, les chercheurs reprennent les idées populaires et les slogans pédagogiques et en font l'objet de leurs études. Il s'agit, probablement, d'une « osmose » culturelle des deux côtés.

Les recherches, cependant, ne vont pas aussi vite que les mouvements idéologiques et les décisions politiques. En plus, ce que les recherches produisent a tendance à s'éloigner des questions que se posent les enseignants et d'autres responsables de l'enseignement mathématique. Les programmes scolaires auraient besoin de théories didactiques, alors que les théorisations des chercheurs vont dans la direction d'études fondamentales dans les domaines de sociologie, psychologie ou philosophie.

Les théories spécifiquement centrées sur la didactique des mathématiques sont rares ; surtout si nous ne confondons pas théorie et idéologie et cherchons des théories didactiques qui prendraient en compte les conditions de la réalité physique, matérielle, culturelle, *etc*., dans lesquelles l'enseignement se déroule. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997), la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) et leurs multiples applications (voir, p. ex. Arsac & Mante, 1997 ; Laborde & Perrin-Glorian, 2005), la construction et l'étude des « substantial learning environments » (Wittmann, 1995, 2002 ; Steinbring, 2005) ou le champ de recherches et développement appelé « Realistic Mathematics Education » (p. ex. Presmeg & van den Heuvel-Panhuizen, 2003), témoignent de l'effort dans cette direction. Les résultats de cet effort ne se traduisent pas directement, eux non plus, en principes ou méthodes d'enseignement de contenus mathématiques précis ; loin de là. Mais ils avertissent, au moins, de l'extrême difficulté de la réalisation des postulats qui paraissent, sur papier, tellement justes.

Nous ne devons pas nous faire des illusions sur le rôle que pourrait jouer une ou des théories didactiques dans la construction d'un programme scolaire. Les curriculums sont construits par des groupes unis par une même « philosophie » d'enseignement, une même « idéologie », et dont les membres possèdent une certaine expérience de la réalité scolaire ou une connaissance des contenus disciplinaires. Les décisions sont prises au cours des sessions de brainstorming et de discussion ; l'argument est gagné non pas parce qu'il a pu être justifié au sein d'une théorie ou par une expérimentation, mais parce qu'il a été convaincant depuis la perspective des valeurs, partagées par les membres du groupe. La construction du curriculum ne se fait pas, d'habitude, à partir d'un cadre théorique commun. En particulier, le curriculum pour l'enseignement des mathématiques à un niveau donné ne se fait pas à base d'une théorie didactique spécifique aux mathématiques. Bref, ce qui oriente la construction d'un curriculum, c'est l'idéologie et non pas la théorie.

Une idéologie n'est pas une théorie ; une théorie postule et démontre ce qui est, ou est possible, sans, en principe, y attacher de jugement de valeur. Une idéologie postule ce qui est bon ou important, et utilise des moyens rhétoriques pour en convaincre le public. Elle ne se vérifie pas, non plus, comme une théorie pourrait, en principe, l'être. En fait, une idéologie ne se *vérifie* pas ; elle se *défend* contre des critiques avec des arguments basés sur des jugements de valeur. Une idéologie est faite des déclarations à propos de ce qu'il « faut » faire : « pour enseigner l'addition aux jeunes enfants, il faut le faire dans le contexte des objets concrets qu'on ajoute ou met ensemble ». Par contre, une théorie est faite d'énoncés conditionnels de forme telle que, p. ex. : si l'enseignant fait telle ou telle chose dans tel ou tel contexte, la majorité des enfants va réagir de telle ou telle manière. Ces énoncés peuvent être justifiés ou discutés sur un plan non seulement idéologique des valeurs, mais aussi par des moyens théoriques (relations conceptuelles entre les termes, cohérence, complétude logique) et empiriques.

Une théorie précise son objet, son point de vue sur cet objet et les paramètres en termes desquels cet objet va être décrit. Elle décrit les domaines de valeurs de ces paramètres, assume certaines relations entre ces paramètres et en déduit d'autres, par des moyens théoriques ou empiriques. Elle ne déclare pas, a priori, quels choix de valeurs des paramètres sont « bons » ou plus souhaitables que d'autres, comme le ferait une idéologie.

Une théorie *didactique*, donc, pourrait indiquer à quoi l'on va penser en préparant l'enseignement d'un sujet, quels sont les choix qu'on pourrait faire, et quelles seraient les conséquences possibles de ces choix.[5]

J'aimerais croire que si un projet de curriculum était, résolument, basé sur une théorie didactique plutôt qu'uniquement sur une idéologie, ses chances d'échec causé par les pressions politiques et sociales seraient moindres : on perdrait moins de temps et d'énergie dans des luttes idéologiques inutiles. Déjà, distinguer les sens intrinsèques des concepts mathématiques de leurs sens idéologiques[6] faciliterait beaucoup de choses, comme Noss (1994) a essayé de démontrer.

Au début des années 1990, les « éducateurs des mathématiques » en Amérique du Nord étaient engagés dans un débat autour de la question de la transposition de l'épistémologie constructiviste en une théorie didactique (p. ex. Steffe & Gale, 1995 ; Larochelle & Bednarz, 1994). Dans le cadre de cette discussion, Morf (1994) a mis en évidence les différences entre un constructivisme épistémologique (existant) et un constructivisme didactique (à construire) et, ce faisant, a esquissé le cadre général d'une théorie didactique, comme il la comprenait. Ma description, plus haut, de ce que pourrait être une théorie didactique est inspirée de son travail.

Pour Morf, l'objet central d'une théorie didactique sont les connaissances, leurs transformations et les conditions ou facteurs de ces transformations, indépendamment des caractéristiques individuelles du sujet connaissant, qui, elles, pourraient intéresser un psychologue. Le but de la théorie est de dériver une action

---

[5] Mon avis, dans cet article, sur le caractère et les tâches d'une théorie didactique, peut paraître réducteur à certains lecteurs. Mais mon intention n'est pas de définir une théorie didactique ; je veux seulement souligner ce qui l'oppose (en principe!) à une idéologie didactique.

[6] Exemples des sens "idéologiques" de la notion de preuve en mathématiques : "la preuve est l'essence même des mathématiques" ; "la preuve mathématique présente un type de raisonnement qui est supérieur au raisonnement de tous les jours".

résolue sur les connaissances (i.e. une « didactique ») à partir de l'analyse des connaissances et des modèles de leurs transformations (ces modèles peuvent être provisoires). Les connaissances sont considérées comme des « potentiels d'action issus de l'expérience »[7] dont l'origine est aussi l'action volontaire du système cognitif sur ses objets ; ce n'est que dans l'action que les connaissances peuvent se manifester et devenir observables et transformables.

Morf a distingué les paramètres d'une connaissance tels que :

- son degré de stabilité : les chances de la connaissance de ne pas être oubliée ;
- son degré d'ouverture ou de flexibilité ; une connaissance peut être ouverte, provisoire, prête à changer en fonction de l'expérience ou fermée dans une forme définitive et ne pouvant être utilisée que telle quelle ;
- le niveau et type d'organisation de la connaissance (plus ou moins concret, abstrait, informel, formel, *etc*.) ;
- le potentiel d'association : les connaissances peuvent se consolider en formant des liens avec d'autres connaissances, ou par application répétée tout en restant relativement autonomes ;
- sa générativité : la connaissance peut avoir la capacité de provoquer la recherche et l'invention pour produire de nouvelles connaissances dans certaines situations ou elle peut être utile que dans un nombre restreint de contextes.

Morf a proposé quelques exemples de postulats sur la transformation des connaissances. Par exemple : les connaissances fermées ou à faible niveau de générativité « se développent par un processus additif et peuvent résulter en une nouvelle connaissance préadaptée à une situation précise ». C'est le cas des procédures automatisées, qu'on peut appeler « assemblages de connaissances fermées ». Les résultats du développement par assemblage sont déterminés, prévisibles. « [E]n revanche, des connaissances de type génératif se développent par un processus de croissance, soit par l'incorporation d'expériences nouvelles et par différentiation », mais ce développement est incertain, imprévisible (Morf, 1994, pp. 37-38).

Une théorie didactique pourrait aussi énoncer des lois d'économie :

[7] Cette notion de connaissance en tant qu'objet d'une théorie didactique n'est pas loin de celle de Wittmann (1995), pour qui, l'objet de la pensée didactique est "mathematical activity in social contexts".

> « [U]ne habitude limitée et fermée est plus facile à former, moins coûteuse…, qu'une connaissance qui permet l'invention plutôt que l'automatisme… [I]l est plus économique, à court terme, d'informer que d'expliquer…. [C]ertains assemblages de connaissances fermées (ensembles de procédures et d'algorithmes, ou discours qui simulent la connaissance scientifique) sont économiques à court terme (rentables scolairement) mais coûteux à long terme parce qu'ils ne résistent pas aux changements de conditions et sont réfractaires aux modifications…. La croissance des [connaissances] de type génératif apparaît coûteuse… parce qu'elle est lente dans ses phases préparatoires, alors que les assemblages de connaissances fermées manifestent des performances dès le départ. » (Morf, 1994, pp. 38-39).

Brousseau a aussi beaucoup réfléchi sur les principes d'économie qui gèrent les apprentissages et déterminent quelles connaissances vont être mises en jeu par l'élève. Ce sont ces principes qui orientent les choix des valeurs des variables d'une situation didactique. Par contre, cette réflexion est absente dans beaucoup d'analyses des situations d'enseignement faites de nos jours dans les articles des journaux consacrés aux questions de l'enseignement des mathématiques.

Par exemple, Forman & Ansell (2001), analysent en détail une leçon sur la multiplication de nombres naturels en une classe de 3e année de scolarité, où l'enseignante (« Mrs Porter ») a proposé le problème suivant aux élèves : « Vous lisez 15 minutes chaque jour. Combien de temps aurez-vous passé à lire dans une semaine ? » La grande majorité des élèves ont inventé des stratégies personnelles pour faire ce calcul (additionner 15 cinq ou sept fois étant la plus populaire) et deux élèves seulement ont utilisé l'algorithme standard (qu'ils ont appris à la maison). Lorsque les enfants présentaient leurs solutions au tableau, Mrs Porter accueillit avec sympathie et bienveillance les solutions « inventées » ; elle s'assura que chacun dans la classe comprenne ces stratégies et soit capable de les utiliser. Mais elle n'a pas accueilli avec la même bienveillance les solutions par l'algorithme standard, et elle n'a pas essayé de les faire comprendre aux autres élèves. Elle a seulement commenté :

> “[Mrs Porter:] "That's the way a lot of your parents would do. Because that's the only way we were allowed to do it in school. That doesn't mean it's the right way. And it's a very confusing way to a lot of people. Especially for people for whom regrouping is difficult. So, if you want to do it because you understand it and it's a good way for you, great. If not, do it a way that makes sense to you." ” (Forman & Ansell, 2001, p. 128).

L'analyse que font Forman & Ansell de cette leçon est de nature purement psychosociale ; en fait, comme le disent les auteures, le cadre théorique utilisé est celui de « cultural psychology » (Forman & Ansell, 2001, p. 117). Il n'est pas question, dans cette analyse, de la variable didactique *grandeurs des nombres* dans le problème donné aux enfants et de son rôle dans la réalisation des objectifs didactiques que l'enseignante voulait atteindre dans sa leçon. Si l'enseignante demandait aux enfants de calculer le temps passé à lire au cours d'un mois ou d'un an, elle ne pourrait pas ignorer l'importance des algorithmes standards. Son objectif, dans cette leçon, devait donc être différent de celui d'inciter les enfants à dépasser la stratégie d'addition répétée, car elle a choisi (plus ou moins consciemment) des nombres suffisamment petits pour que la multiplication par addition répétée soit possible.

Mais la question des objectifs didactiques de l'enseignante n'occupe pas une place importante dans l'article ; elle apparaît seulement dans une citation de la lettre de celle-ci, écrite en réaction à la lecture de l'analyse de sa leçon faite par les chercheurs (p. 137-8). Les actions de l'enseignante et les productions des élèves ne sont pas discutées en tant qu'une réalisation de son projet didactique ; en fait, ce projet didactique n'est pas, ici, l'objet d'étude. L'objet d'étude est la personne psychologique de Mrs Porter en tant que produit d'une culture et membre d'une communauté.

Malgré cette orientation psychologique, la théorie didactique aurait quelque chose à apprendre de cette recherche. Elle pourrait nous rendre plus conscients des risques de corruption de nos idéaux, et suggérer d'autres lois de la théorie didactique. Par exemple – une loi qu'on pourrait appeler *la loi d'exagération*, ou la *loi de radicalisation*. Nous énonçons le postulat d'autonomie des élèves ; nous suggérons, à titre d'exemple, que les enseignants n'imposent pas *tout de suite* les algorithmes standards dans leurs classes et laissent les élèves inventer leurs propres stratégies. Les enseignants réagissent en *éliminant* l'enseignement de ces algorithmes ou, au moins, en les dénigrant aux yeux des élèves. Nous recommandons, « les stratégies de solution sont aussi importantes que trouver la bonne réponse ». Les enseignants traduisent cela en, par exemple, « la validité de la réponse n'est pas importante ; il est important de laisser les enfants expliquer leurs stratégies ». La recommandation, « ne faites pas seulement X, comme vous l'avez toujours fait ; faites aussi Y », devient : « il n'est pas correct de faire X, il est correct de faire Y ».

Il est possible que les recherches existantes sur l'enseignement des mathématiques, lorsqu'elles contiennent des descriptions détaillées des situations de classe, même si elles sont théorisées depuis des perspectives psychologiques ou sociales et font peu attention aux contenus mathématiques, puissent servir au développement de la théorie didactique en mathématiques. Ce sont des documents de la réalité de l'enseignement des mathématiques, qui peuvent être utilisés par d'autres chercheurs.

Je vais terminer ici, avant que cette petite lueur d'espoir ne s'éteigne devant mes yeux.

Mon discours à Mons (qui était une version très abrégée de ce que viens de dire dans cet article) a paru très pessimiste et sombre aux participants. Pendant la période de discussion, on m'a posé la question : « Alors quoi, il faut baisser les bras ? » Mais ce n'est pas le message que je voulais communiquer. Je voulais dire, qu'au contraire, il faut arrêter de rêver, retrousser les manches et se mettre au travail sans avoir peur de se faire des ampoules aux mains au contact avec la réalité.

Bibliographie

ABRANTES P. (2001) Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles, *Educational Studies in Mathematics,* **47(2)**, 125-143.

ARSAC G. & MANTE M. (1997) Situations d'initiation au raisonnement déductif, *Educational Studies in Mathematics,* **33.1**, 21-43.

BARBEAU E. (2005) Education Notes: Annual Greetings, *CMS Notes,* **37.5**, 15-18.

BETZ W. (1940) The present situation in Secondary Mathematics with particular reference to the new national reports of the place of mathematics in education, *Mathematics Teacher,* **33**, 339-360.

BISHOP A. (1991) *Mathematical Enculturation*, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht.

BOALER J. (1997) *Experiencing School Mathematics. Teaching Styles, Sex and Setting*, Open University Press, Buckingham.

BOURDIEU P. (1994) *Raisons pratiques*, Éditions du Seuil, Paris.

BROUSSEAU G. & GIBEL P. (2005) Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations, *Educational Studies in Mathematics,* ***59***, 13-58.

BROUSSEAU G. (1988) Représentations et didactique du sens de la division, dans G. Vergnaud, G. Brousseau, M. Hulin (éditeurs), *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres, Mai 1987*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, 47-64.

BROUSSEAU G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht.

BURKHARDT H. (1989) Mathematical modelling in the curriculum, in W. Blum et al., (eds), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1-11.

CASTELA C. (2004) Institutions influencing students' private work: A factor of academic achievement, *Educational Studies in Mathematics,* **57(1)**, 33-63.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19(2)**, 221-266.

CHEVALLARD Y. (2005) L'homme est un animal didactique. La théorie des situations et les progrès de l'instruction publique, in M.-H. Salin, P. Clanché, B. Sarrazy (éd.), *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, 81-90.

CREM (1995) *Les mathématiques de la maternelle de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Nivelles, Belgique.

DURAND-GUERRIER V. & ARSAC G. (2005) An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, *Educational Studies in Mathematics,* **60(2)**, 149-172.

FEY J.T. & GRAEBER A.O. (2003) From the New Math to the Agenda for Action, in G.M. Stanic & J. Kilpatrick (eds), *A History of School Mathematics,* **I**, NCTM, Reston, VA, 521-557.

FLÜCKIGER A. (2005) Macro-situation & numerical knowledge building: The role of pupils didactic memory in classroom interaction', *Educational Studies in Mathematics,* **59**, 59-84.

FORMAN E. & ANSELL E. (2001) The multiple voices of a mathematics classroom community, *Educational Studies in Mathematics,* **46**, 115-142.

GARRETT A.W. & DAVIS O.L. jr. (2003) A time of uncertainty and change: School mathematics from World War II until the New Math, , in G. M. Stanic & J. Kilpatrick (eds), *A History of School Mathematics,* **I**, NCTM, Reston, VA, 493-519.

GLASERSFELD E. von (1995) A constructivist approach to teaching, in L. P. Steffe & J. Gale (eds), *Constructivism in Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ, 3-16.

GUIN D. & TROUCHE L. (1998) The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* **3(3)**, 195-227.

HOWSON A.G., KEITEL C. & KILPATRICK J. (1981) *Curriculum Development in Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

KILPATRICK J., SWAFFORD J., FINDELL B. (eds) (2001) *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, National Academy Press, Washington, D.C.

KILPATRICK J. (2001) Understanding mathematical literacy: the contribution of research, *Educational Studies in Mathematics,* **47(1)**, 101-116.

KRAEMER J.M. (2002) Évaluer pour mieux comprendre les enfants et améliorer sa pratique, *Educational Studies in Mathematics,* **51(1-2)**, 95-116.

LABORDE C. & M.-J. PERRIN-GLORIAN M.-J. (eds) (2005) *Teaching Situations as Object of Research : Empirical Studies Within Theoretical Perspectives*, Special Issue of Educational Studies in Mathematics, Springer, New York, Heidelberg.

LAROCHELLE M. & BEDNARZ, N. (1994) À propos du constructivisme et de l'éducation, *Revue des Sciences de l'Éducation,* **20(1)**, 5-20.

LEUNG, F.K.S. (2001) In search of an East Asian identity in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics,* **47(1)**, 35-51.

M.E.Q. (2001) *Programme de formation de l'école québecoise. Education préscolaire. Enseignement primaire*, Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation 01-00374.

MAHOUX P. (1994) *Socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier cycle de l'enseignement secondaire*, Cabinet du Ministre de l'Education, Bruxelles.

MAMONA-DOWNS J. & DOWNS M. (2004) Realization of techniques in problem solving: The construction of bijections for enumeration tasks, *Educational Studies in Mathematics,* **56(2-3)**, 235-253.

MORF A. (1994) Une épistémologie pour la didactique : spéculations autour d'un aménagement conceptuel, *Revue des Sciences de l'Éducation,* **22(1)**, 29-40.

NCTM (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

NOSS R. (1994) Structure and ideology in the mathematics curriculum, *For the Learning of Mathematics,* **14(1)**, 2-10.

NOSS R. (2001) For a learnable mathematics in the digital cultures, *Educational Studies in Mathematics,* **48(1)**, 21-46.

PERRENOUD PH., 1997, *Construire des compétences dès l'école*, ESF, Paris.

PRESMEG N. & van den Heuvel-Panhuizen M. (Guest Editors) (2003) Realistic Mathematics Education Research: Leen Streefland's work continues. A PME Special Issue, *Educational Studies in Mathematics,* **54(1)**, 2003.

RUTHVEN K. (2005) Short Communication: Alternative interpretation of the Dataset on K-12 calculator usage and college grades as analysed by Wilson and Naiman (2003, 2004), *Educational Studies in Mathematics,* **60(3)** (à paraître bientôt).

SCHÖRR R. BULGAR S. & FIRESTONE W.Y. (2002) Testing and fourth grade teaching, in *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 21 – 26 July 2002, Norwich, U.K., **4**, 193-200.

SENSEVY G., SCHUBAUER-LEONI M-L., MERCIER A., LIGOZAT F., PERROT G. (2005) An attempt to model the teacher's action in the mathematics class, *Educational Studies in Mathematics, **59*** (à paraître).

SIERPINSKA A. (2004) Research in mathematics education through a keyhole: task problematization, *For the Learning of Mathematics,* **24(2)**, 7-15.

SIERPINSKA A. (2005) "Papa veut que je raisonne". Quelques réflexions sur la valeur du raisonnement mathématique dans la formation de futurs citoyens et professionnels. *Colloque GDM 2005, Montréal, Mai 4-5*. Accessible au http://alcor.concordia.ca/~sierp/ .

STEFFE L.P. & GALE J. (1995) *Constructivism in Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.

STEINBRING H. (2005) *The Construction Of New Mathematical Knowledge In Classroom Interaction*, *An Epistemological Perspective*, Springer, New York & Heidelberg.

STODOLSKY S.S., SALK S., GLAESSNER B. (1991) Student views about learning math and social studies, *American Educational Research Journal,* **28(1)**, 89-116.

TARDIFF J. (2001) Les compétences dans le programme de formation: fantaisie, leurre ou axe fédérateur de l'ensemble des apprentissages ?, dans B. Côté, C. Lajoie, J. Portugais, S. René de Cotret (éditeurs), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, in Actes du Colloque GDM – 2001, 7 au 9 mai 2001, Université de Montréal, 28-55.

WILSON W.S. & NAIMAN D.Q. (2004) K-12 calculator usage and college grades, *Educational Studies in Mathematics* **56(1)**, 119-122.

WITTMANN E. CH. (1995) Mathematics education as "design science", *Educational Studies in Mathematics,* **29(3)**, 355-374.

WITTMANN E. CH. (2002) Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in Mathematics,* **48**, 1-20.

ZEVENBERGEN R. (2004) Technologizing numeracy: Intergenerational differences in working mathematically in New Times, *Educational Studies in Mathematics,* **56(1)**, 97-117.

Remerciements

La recherche sur la frustration des étudiants adultes dans les cours préparatoires de mathématiques a été subventionnée par l'organisme Canadien SSHRC, fonds no. 410 2003 0799.

ANNA SIERPINSKA
Concordia University, Mathematics & Statistics – 7141 Sherbrooke St. W.
Montréal, QC – H4B 1R6 Canada
sierpan@alcor.concordia.ca

ALAN H. SCHOENFELD

PROBLEM SOLVING FROM CRADLE TO GRAVE

Abstract. This rather speculative paper proposes an overarching theoretical perspective for characterizing human decision-making and problem solving "in the moment." The scope is deliberately broad. My intention is to address the following question: "How and why do people make the decisions they do, as they are engaged in acts of problem solving?"

Some fundamental assumptions in this enterprise are:

1. "Problem solving" is used in a deliberately broad way here. It includes a child's actions in interacting with its parents, a student working on a mathematics problem in class or in the laboratory, and a teacher's decision-making while teaching a mathematics (or other) lesson. More broadly, I assume that almost all human action is goal-oriented – and that attaining high-priority goals can be characterized as a "problem."

2. Most human behavior is rational, in the following sense. The actions people take in any particular context are fundamentally aimed at solving problems that are important to them. (These may or may not be the problems they have been "assigned" to solve!) If one is capable of understanding what problem a person is trying to solve at any given time, that person's actions will often be seen to be rational and consistent. In certain contexts, such as teaching and problem solving (by the standard definition), that consistency in behavior can be strong enough to allow the individuals' actions to be modeled.

3. In any given context, decision-making is a function of beliefs, goals, and knowledge. In brief outline: an individual's beliefs, in interaction with the context, shape the formation and prioritization of goals. Given a particular constellation of goals, the individual looks for and implements knowledge that is consistent with his or her belief systems and is designed to satisfy one or more high-priority goals. As goals are satisfied (or not), or as the context changes, new goals take on high priority, and actions are then taken in the pursuit of these goals.

Examples are given to suggest the way in which this theoretical perspective can play out.

Résumé. Résolution de problèmes du berceau au tombeau.
Cet article assez spéculatif propose une mise en perspective théorique globale de la prise de décision et de la résolution de problème "en temps réel". Le domaine est volontairement très large. Mon but est de traiter de la question suivante : "Comment et pourquoi les gens prennent-ils les décisions qu'ils prennent lorsqu'ils se soit engagés dans une activité de résolution de problèmes."

Quelques hypothèses fondamentales de ce travail sont les suivantes :

1. L'expression "Résoudre un problème" est utilisée dans un sens très large. Elle comprend les actions d'un enfant dans ses relations avec ses parents, un étudiant travaillant sur un

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 41 – 73.

problème de mathématique dans une classe ou dans un laboratoire, et la prise de décision par un enseignant lors d'une leçon, par exemple de mathématique. Plus généralement, je suppose que presque toute action humaine est orientée vers la réalisation d'un objectif et que réaliser les objectifs de haute priorité peut être caractérisé comme un "problème".

2. La plupart des comportements humains sont rationnels au sens suivant. Les actions entreprises par un individu dans n'importe quel contexte particulier ont pour but fondamental de résoudre les problèmes qui sont importants pour lui. (Ces problèmes peuvent être, mais ne sont pas nécessairement ceux qui lui ont été "assignés"!) Si l'on est capable de comprendre quel problème une personne essaye de résoudre à un moment donné, les actions de cette personne paraîtront souvent rationnelles et cohérentes. Dans certains contextes, tels que l'enseignement et la résolution de problèmes (au sens standard du terme), cette cohérence de comportement peut être assez forte pour que les actions de l'individu puissent faire l'objet d'une modélisation.

3. Dans tout contexte, la prise de décision dépend des croyances, des objectifs et des connaissances. En raccourci schématique: les croyances d'un individu, en interaction avec le contexte, modélisent la formation et la hiérarchisation des objectifs. Devant une constellation particulière d'objectifs, l'individu recherche et implémente la connaissance qui est cohérente avec sont système de croyances et qui lui permet d'atteindre un ou plusieurs objectifs de première priorité. Lorsque ces objectifs sont atteints (ou ne le sont pas), ou lorsque le contexte change, de nouveaux objectifs acquièrent une priorité élevée, et les actions sont alors dirigées vers la réalisation de ceux-ci.

Des exemples sont donnés pour indiquer de quelle façon cette perspective théorique peut être exploitée.

Mots-Clés. Résolution de problème, rationalité, prise de décision, heuristique, croyance, objectif.

---

1. Introduction

The purpose of this paper is to outline a very broad theoretical framework for thinking about human decision-making, and to provide suggestive evidence from a number of different domains (childhood behavior, mathematical problem solving, teaching) that the framework can be useful.

I start with a statement about the theoretical enterprise and my goals, not just for this paper, but for the more than thirty years of research it represents, and the decades of research that it proposes for the future. In my 1985 book *Mathematical Problem Solving* I presented a framework for the analysis of mathematical problem-solving behavior. There I claimed that in order to understand why someone is successful or unsuccessful in an attempt to solve a mathematical problem, one must examine that person's (a) knowledge base, (b) use of problem-solving strategies, (c) metacognitive aspects of behavior such as monitoring and self-regulation, and (d) beliefs. The argument – since confirmed in multiple fields (see, e.g., deCorte, Greer, & Verschaffel, 1996) – was that all these aspects of knowledge and behavior are fundamental determinants of success or failure in problem solving.

I make two observations about that work. First, in it I restricted myself to a discussion of "non-routine" problem solving. I was interested in what people did when they worked on problems that, in some way or other, were new to them – problems that they did not know how to solve. Second, what was lacking from that work was a theory at a level of mechanism. There was no theory of how and why people made the decisions they did – why they chose one option over another, for example. Nor was there a theory of how the various aspects of performance (knowledge, strategies, metacognition, beliefs) interacted with each other.

In the research I have done since then, I have tried to explore those issues. On the surface, that work may look different: I have studied the behavior of tutors working with individual students, and of teachers in the midst of interacting with their classes. My goal has been to explain how and why the tutors and teachers made the decisions they did.

At a deep level, the research on teaching is an extension of the work on problem solving. In problem solving, there is one over-arching task: to obtain a solution to the particular goal or goals the individual has set for him-or-herself. (As we will see below, that goal may or may not be to find a solution to the mathematical problem that the individual has been asked to solve!) I posit that teaching is also a goal-directed activity: the teacher is using his or her knowledge, strategies, and metacognitive skills in the service of trying to achieve some high-priority goals. Those goals are shaped, of course, by the teacher's beliefs and knowledge. Hence the studies of tutoring and teaching I have conducted over the past two decades are, in fact, studies of problem-solving – but at a level of mechanism, where there is an explicit focus on how and why each decision is made.

My goal in this paper is to begin to unify these two strands of work theoretically – to develop, if you will, a grand theory of problem solving that addresses the question of how and why, and with what success, people make the choices they do as they try to solve problems (that is, to achieve goals they have set for themselves). This is an extremely broad and ambitious goal. It includes not only non-routine problems, but all problems; it includes not only mathematical problem solving but all goal-directed behavior. As such, this paper is a theoretical manifesto. I point to a theoretical synthesis of my prior work and make a plausibility case for it, using some new data and reconsidering extant data. Ultimately, years of analysis will be necessary to see how well these ideas pan out, and to work out the details of a full-blown theory.

By way of preliminaries, let me define problem solving for the purposes of this paper. I noted above that in my earlier work on mathematical problem solving (see, e.g., Schoenfeld, 1985, 1992) I focused on *non-routine* problem solving – on what Hatano (1982) would call "adaptive expertise." The goal in that work was to describe the kinds of mathematical understandings possessed by people who were good at solving problems that that they did not, *a priori*, know how to solve – that is, they did not have a solution method accessible to them when they began to work on the problems. That work showed the importance of heuristic strategies (tools for making progress on difficult problems), metacognition (especially monitoring and self-regulation, for the effective use of the knowledge at one's disposal), and beliefs. Here I wish to employ a much broader definition of problem solving. For purposes of this paper, a *problem* for an individual at any point in time is something that individual wants to achieve. To put this another way, *solving a problem* will be interpreted as *working toward achieving a high-priority personal goal.* Some of the things that qualify as "problems" in this categorization are: a neonate's need to be fed; a mathematics task taken seriously by the individual trying to arrive at an answer to it; and, trying to teach a successful lesson on any particular topic. As will be seen below, this definition is deliberately broad – yet, it will allow for some very fine-grained studies of problem-solving behavior.

2. On rationality

This narrative begins with an assertion and a story, to suggest the scope of the ideas being discussed here. The assertion is that most human behavior is fundamentally *rational*, in the following sense: the actions that people take, at any moment, are designed to address problems that are (at that moment) of significant importance to them. As will be seen below, this form of rationality represents a particular form of *internal consistency* on the part of the problem solver; it does not necessarily produce behavior that appears "rational" to an outside observer. I note that this terminology, while problematic to some, does have a long lineage within the cognitive science community: In his first Presidential Address to the American Association for Artificial Intelligence, Allen Newell described a fundamental aspect of his approach to characterizing purposeful problem solving: "The behavior law [to explain an intelligent agent's actions] is the *principle of rationality*: Actions are selected to attain the agent's goals" (Newell, 1981, p. 6). What is important to understand in this context is that an individual's goals are internal and established by that individual. Those goals may or may not be to solve the tasks given to them researchers or teachers, but rather to meet some other high priority (perhaps psychological or social) needs.

Here I will re-tell some stories from my 1985 book *Mathematical Problem Solving,* with an emphasis on the rationality of the behavior described.

One problem that I used in my problem solving research is this:

> Problem 1
> You are given two intersecting straight lines and a point *P* marked on one of them, as in Figure 1 below. Show how to construct, using straightedge and compass, a circle that is tangent to both lines and that has the point *P* as its point of tangency to one of them.

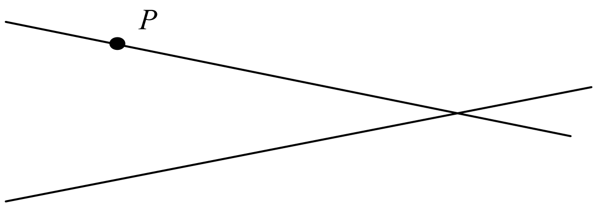


Figure 1: A construction Problem.

Typically I handed students a photocopied sheet of paper with this problem on it; the students made their construction on that sheet. When I gave this problem to one pair of students, however, they took out a blank sheet of paper and began, laboriously, to copy the figure onto that sheet of paper. They used the standard straightedge-and-compass construction for copying an angle, then measured off the distance from the vertex to *P*. From my perspective at the time (and from that of most people who have seen a videotape of the problem session), their actions seemed a complete waste of time. They certainly didn't help solve the problem – and, it should have been clear that I had more copies of the problem, so that they wouldn't be "spoiling" the problem sheet by writing on it. From that perspective, their behavior hardly makes sense.

Similarly, here is a "Fermi-type" or "back of the envelope" problem that requires little formal knowledge but a bit of ingenuity:

> Problem 2
> Estimate, as accurately as you can, how many cells might be in an average-sized adult human body. What is a reasonable upper estimate? A reasonable lower estimate? How much faith do you have in your figures?

Here is how I think about the problem. One needs to estimate the size of an "average" cell, the size of an average-sized adult human body, and divide the latter by the former. The estimate of human volume can be "quick and dirty." If you guess that an average male adult weighs 75 kg, you are certainly within a factor of 1.5; for ease of computation make it 100 kg, and you're still within a factor of 2. That's certainly as good as you need. Estimates of cell size are more tricky. How big is a cell? Cells were discovered by the use of early microscopes. They couldn't have been very powerful – perhaps between 10 and 100 power. The naked eye can resolve down to 1/10 mm, so a cell might be between 10^{-2} and 10^{-3} cm across. If one assumes, for the sake of simplicity, that an "average" cell is a cube, then there are between 10^6 and 10^9 cells per cm^3 of flesh. The volume of a 100 kg human is roughly 100 liters, so there are perhaps between 10^{11} and 10^{14} cells in that volume. Note that nearly all the error in volume estimation comes from the estimate of cell size – one can be cavalier about the estimate of human volume.

I gave this problem to a number of talented undergraduate mathematics majors, who worked the problem by themselves. Their behavior was oddly consistent. After reading the problem, the students would begin their work by making very detailed computations of body volume. They would approximate the head by a sphere, the arms and legs by either cylinders or sections of cones, and the torso by a circular or elliptical cylinder; they then made close guesses as to dimensions, and detailed computations of volume. Having spent perhaps ten minutes on those computations, they dispatched with cell volume in a matter of seconds – "say 1/100 of an inch" or "it's bigger than an angstrom unit, how about maybe 100 or 1000 angstroms?"

What makes these students' behavior all the more interesting is that once I started having students work the problem in pairs, I never again saw such behavior.

Here is the main point of these stories. From the experimenter's perspective, the students' behavior made little sense. There was a specific mathematical problem to be solved, and the students' attention to irrelevant mathematical detail made no sense. Indeed, from the experimenter's perspective, such behavior can be seen as *irrational.*

There is another point of view, however – that of the student. Consider the first problem, and imagine yourself as an undergraduate. Your professor has asked you to come into his laboratory, and to be videotaped as you work on a problem. In the first case, he hands you a geometry problem. You read it and your mind goes blank. You don't know how to solve it, and you guess that you won't be able to solve it. You don't want to look stupid. You also don't want to really try to solve the problem: if you do try, you'll have to acknowledge to yourself that you failed to solve it, whereas if you don't try very hard, then you can explain away your failure by telling yourself that you never really tried. So: your goal is *not* to solve the problem. Your goal is to exit gracefully from this situation, with your ego and your professor's judgment of you both intact. What can you do? The problem involves geometric constructions. Can you demonstrate geometric knowledge, showing that you *do* know some geometry, while not really trying hard to solve the problem itself? Aha! What if you copy the figure in the problem, using correct geometric procedures? That way you demonstrate some relevant mathematical knowledge, *and* you stall for time. Perhaps you will have an inspiration, in which case you can solve the problem. And if you don't, you'll have spent so much time on the construction that, of course, you couldn't possibly have had time to solve it. Hence your ego emerges intact either way.[1]

Now consider the "cells" problem. This problem seems to come out of nowhere – one can imagine a student saying (to him-or herself), "I don't know a thing about biology. What in the world can I do?" For the student, the goal may *not* be to engage fully with the problem – this can just reveal his or her ignorance! Rather, the student has a goal similar to the one above – to engage in behavior that appears to be mathematical on the surface, and escape with your ego intact. With this as a goal, what can one do that is mathematically relevant? The problem involves computing either masses or volumes. Aha! You know how to compute the volumes of geometric solids. This involves estimation and the use of mathematical formulas – good mathematical behavior. So, you engage in the careful estimation of human body volume. When you get to the part of the problem that deals with cell volume, you zip through it as rapidly as possible. As a result, you spend 90% of your time "being mathematical." You emerge from the problem session having produced some legitimate mathematics for the professor, and (by virtue of having done something relevant) with your ego intact. In the words of Warren Hinckle (1990), the students succeeded at the following task: "if you have a lemon, make lemonade."

Looked at from this point of view, the students' actions in working both mathematical problems were absolutely and perfectly rational. In both cases, the students entered the laboratory context with a certain set of beliefs: this is who I am, this is what I know and can do, *etc.* In both cases, they were confronted with a task, but in a larger context: a mathematics professor was going to judge their behavior as they worked on the task. In both cases they established goals for themselves, as a function of beliefs and context. The goal-setting depended on their perceptions of the difficulty of the task, their ability to solve it, and the likely reaction of the professor (and themselves) to their efforts. In both cases the primary goal turned out not to be mathematical (i.e., solve the mathematics problem). Instead, the goal was to find a comfortable exit strategy from an uncomfortable situation – to display mathematical behavior, and to leave with one's ego intact. With this goal established, the students searched their knowledge bases. In each case (though with different mathematics, of course) the students found some mathematical behavior in which they could engage – behavior that would have them acting mathematical, displaying some knowledge, and not be seen flailing.

[1] One of the students discussed here later became my research assistant. She told me that this is what she had done.

This was an excellent choice of tactics, given their goals! In sum, their behavior could be seen as *totally rational*, once one understands what their goals (in that particular context, at that particular moment) actually were!

For purposes of this paper, I will stipulate that most human behavior is of that type. That is, if you know what problem an individual is *really* trying to solve (which may or may not be the problem that the person is "officially" trying to solve), then the person's actions are likely to be rational in the following sense: given what the individual *knows,* the choice of that action represents a plausible mechanism for achieving the person's *real* goals. The challenge, then, is to understand what problems people are really trying to solve.

(I should note the following. I mentioned this idea in a recent presentation. I was joined after the talk by a psychotherapist, who said that he had much the same idea in his psychotherapy practice. He often worked with patients who had difficulty changing what was clearly dysfunctional behavior. On the surface, the behavior seemed to make no sense. But, he would ask, "what are you getting out of this?" Often, for example, an obviously dysfunctional behavior (e.g., alcoholism) would result in the individual's getting a great deal of attention from family members. *That* was the major problem being "solved" by the individual – and once that was understood, things fell into place.)

My first premise, then, is rationality of the kind described here.

My second premise is that rational behavior of the type described here can be modeled, in very fine-grained detail – if one has a good sense of the knowledge, goals, and beliefs of the individual whose behavior is being modeled. More specifically, I will argue that the "architecture" of the model is an abstraction of the stories told above. That is:

– an individual enters into a particular context with a particular body of knowledge, goals, and beliefs;

– as events take place in that context, the individual prioritizes goals in response to those events. Thus, for example, a student is given a problem to work and establishes a set of top-priority goals to work toward. (In the cases described above, the top-priority goals involved aspects of self-preservation, and students acted accordingly. In the vast majority of problem-solving sessions I have recorded, the highest priority goal of the problem solver *is* to solve the given problem, and he or she acts accordingly);

– what is considered to be relevant and appropriate knowledge to employ toward achieving those goals is shaped by the individual's beliefs. For example, a student may react to a question from a teacher one way, because he or she expects the teacher to expect a formal mathematical argument in response to the question. The same question from a peer might trigger a different (and equally mathematical but informal) response;

- the individual pursues a path toward achieving the high priority goals by choosing and applying relevant and appropriate knowledge, as described in the previous bullet;
- as events unfold, goals can be re-prioritized and new knowledge can be used to achieve the new high-priority goals. Thus, for example, if a problem has been broken up into sub-problems, the individual will work on one or more of the sub-problems. If there is a perception of making progress, the individual may persevere by working on those sub-problems. If there is a perception that things are not going well, the individual may consider alternatives;
- the quality of the decision-making described in the previous bullet is very much a function of the individual's metacognitive skill;
- the process described here is recursive, in the sense that goal prioritization and knowledge selection occur at multiple levels.

I recognize that the preceding is a very abstract description. Thus I shall provide some worked-out examples, in another problem-solving domain – the domain of teaching.

3. Teaching "in the moment" as problem solving: A model

Teaching is problem solving, in the broad sense described above. On any given day, the teacher enters the class with an agenda – a set of (typically multiple) goals. The attempt to meet these goals is an act of problem solving.

My claim is that the teacher's problem solving can be seen as (indeed, modeled as) a function of the complex interaction of teacher's goals, beliefs, knowledge, and decision-making procedures. I begin by elaborating on each of these categories.

Goals

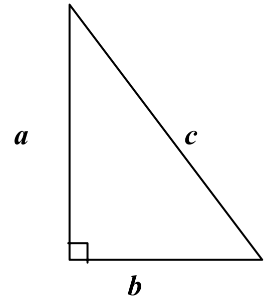
In the spirit of the previous section, I note that these may be quite varied. On the surface, the main goal of a lesson is usually to have students learn a body of subject matter. As Lampert (2001) notes, this is just one of many goals. In the fifth-grade class she discusses, her goal is also to help students learn to work collaboratively; to grow as human beings; to learn to study effectively; and more. Subject-matter goals may include mastery of the particular topic, developing a broad sense of mathematical inquiry, and more. Other teachers may have other, sometimes more personal or idiosyncratic goals as well: maintaining discipline or avoiding classroom conflict, nurturing particular students, staying on safe ground for themselves with regard to content, or just getting through the day. In any particular situation, some of these goals will have highest priority.

Beliefs (and values)

A teacher's beliefs and values shape the prioritization both of goals and of the knowledge employed to work toward those goals. Does a teacher believe that students can learn from mistakes, for example, or that students should be given clear presentations of correct mathematics? Does the teacher see mathematics as a body of facts and procedures, or as a form of sense-making? Does the teacher believe that a particular student or group of students has the capacity to learn in particular ways? Does the teacher consider oral or written communication in mathematics to be important? Are there (perceptions of) external pressures, like the need for students to do well on exams? All of these beliefs and values serve to determine which goals have highest priority. When a teacher's work is modeled in fine-grained detail (see, e.g., Schoenfeld, in press), the beliefs that need to be delineated include: beliefs about the nature of learning and what supports it; beliefs about teaching; beliefs about students, both individually and collectively; beliefs about what is appropriate and inappropriate for classroom environments; and beliefs about the nature of mathematics, both in general and specifically with regard to the topic(s) currently being studied.

Knowledge

In broad-brush terms, I make the standard cognitive assumptions about knowledge and its organization: our knowledge is organized by way of schemata, which are "triggered" by particular contexts or associations. Readers of this paper, for example, when they see the following diagram,



are likely to think of the Pythagorean theorem and other related mathematics. A teacher's knowledge includes many categories of knowledge: of mathematics; of curriculum; of various pedagogical strategies; of specific student understandings and misunderstandings, and ways to deal with them (also known as *pedagogical* *content knowledge*); of recent events in the classroom; of individual students, their (perceived) strengths and weaknesses; and more.

Beyond that, I need to point out that in any given context, some of an individual's knowledge is likely to be more accessible than other knowledge – if you are working geometry problems, much of your geometric knowledge is likely to be "activated," whereas in another context (say coming across a geometric clue in a crossword puzzle) the activation level of that knowledge is lower, and it may be more difficult to bring that knowledge to conscious awareness. There is a large psychological literature relevant to this point, which I will take as a given for purposes of this paper.

Decision-making

Here is the basic mechanism by which the model works. At any given time, the teacher has a particular set of high priority goals and, most likely, a larger agenda within which those goals are situated. To make the situation concrete, imagine a teacher about to begin a lesson. The teacher expects to conduct routine introductory business, go through the day's assigned homework, and then turn to new material. The teacher begins the class session, as intended, by taking roll, and then asking if the students have any questions. The question-and-answer session goes on for a few minutes, with the teacher responding to questions according to a determination of the importance of the issues raised, and the time it will take to answer them. In some cases, the teacher may defer answering a question ("see me after class"); in others, a question may lead to a long discussion. the choices are made on the basis of the teacher's beliefs and values. (This issue is important, this one is not; how much time can I spare; do I want to answer this one now; do I want to answer this one now in public; *etc.*) When students run out of questions or the teacher decides that enough time has been spent on this activity, the activity is brought to a close and the class proceeds to the next part of the intended agenda – reviewing homework.

Suppose the teacher has assigned a collection of problems that the students are supposed to have worked. The teacher has many choices about how to review these. These include a series of possible classroom routines, all of which the teacher could implement:

- having students volunteer or be called on, and work through some or all the problems in sequence;
- leading a "Socratic" discussion of some or all of the problems
- presenting solutions at the board, and asking students for comments or questions;

– asking students to identify problems that caused them difficulty, and focusing only on them;

and more. The teacher's choice may be made on the spot, as a function of the time remaining in the class, or of other things the teacher wishes to accomplish that day. Once that choice is made, the top-level goal has been established: to go through the homework in the fashion chosen. The first subgoal is to work through the first problem. If nothing unusual happens, this task is accomplished and the class moves on to the next problem. At any given time, however, something can happen to change plans. Here are some examples.

a. The teacher has chosen for students to work through the problems, but a particular student's explanation seems incoherent and is confusing the class. With a particular set of beliefs, the teacher might decide to step in and demonstrate a correct solution. With a different set of beliefs, the teacher might lead the student through a solution. With yet a different set of beliefs, the teacher might air the student's (mis)understandings, and use them as a vehicle for addressing such issues with the whole class. Note that there are various ways to address these issues, as discussed in the list above. This is a matter of knowledge and choice – knowledge and ability to implement the options, and choice, with regard to values and beliefs, subject to the constraints of time, *etc.*

b. In the middle of a routine problem solution, the student makes an error indicating a fundamental misconception – one that may be shared by other members of the class. For example, the student may write

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2.$$

The teacher then faces the same kinds of decisions as discussed in (a).

c. The class mays become restive, at which point the teacher may decide either to persevere or to embark on a new activity.

d. The middle of a discussion, a student may make a comment that contains the seed of an interesting mathematical idea – but one that would take 10-15 minutes to work through with the class, causing a significant disruption in the teacher's planned agenda.

Note that the teacher has many choices, among them:

i. The teacher may say "That's interesting, I'll talk to you about it after class";

ii. The teacher may say "We'll discuss this in tomorrow's class" and plan to do so;

iii. The teacher may say "Your question raises an interesting issue. Let me explain it to you" and take 2 minutes to do so;

iv. The teacher may invite the class to work through the issue, taking 10-15 minutes to do so.

Which of these choices the teacher makes will depend on the teacher's beliefs about what is important, how comfortable the teacher is about implementing any of these choices (a function of what knowledge is available at that moment), and his or her perception of the value of that choice compared to the cost (in time and disruption of the lesson agenda).

I note that this is not a hypothetical – we will work through such an example in the next section.

4. Using the model to characterize the actions of specific teachers – a summary and one brief worked-out case

Before proceeding with specific examples, I want to provide some context for what follows.

First, as noted above, I have argued that most human behavior is *rational* in the sense that people act in ways designed to meet goals that are important to them. Indeed, in example (d) above, I suggested that their choice of strategies or knowledge may often be made on the basis of what will "yield" the best results at least cost. This characterization may make it sound as though humans are acting like computers, mechanically establishing goals and making deliberate choices. I do NOT mean this! Most of the time, people make instantaneous decisions based on what "feels right." What I am suggesting is that a post hoc analysis will reveal that their decisions are *consistent with* rational choices – and that such consistency can be modeled.

Second, I want to stress that the model of problem solving described here is a model of decision-making *in* action. There is much more to teaching than is described here – there is planning, for example; there is a teacher's learning, over the course of his or her career. The model does not address those things directly. What it does address is what the individual is doing at the moment, while teaching.

Third, my descriptions have been very general up to this point. They have been deliberately so – I am conjecturing, after all, that the model applies to all problem solving! In the examples that follow, however, I will indicate that the model can be made very specific and fine-grained – so that it applies to explain, on a line-by-line basis, the decisions that a teacher makes in the middle of teaching.

Cases studied, and partially worked-out examples

Over the past decade my research group has studied a number of cases of teaching, in very fine-grained detail. The goal, as discussed above, has been to explain every action the teacher makes while teaching, as a function of the teacher's knowledge, goals, beliefs, and decision-making. Because of the level of detail involved, the typical papers are very long: the two main papers, describing lessons taught by Jim Minstrell and Deborah Ball, are over 100 pages long each. Here I shall simply summarize some of the main points, and give some brief examples. The detail can be found in Schoenfeld (1998, 1999, 2000 in press) and Schoenfeld, Minstrell, and van Zee (2000).

Case 1, a beginning teacher with traditional content

The first case we modeled was of a beginning teacher teaching a rather traditional lesson. What we saw was that the teacher reached a "roadblock" in his lesson, where he was simply unable to continue as planned. The key aspects of the situation studied were this:

A. The teacher had a plan for the lesson that was somewhat under-specified. The plan was to have students work through the algebraic simplification of expressions such as (x^5y^3/x^3y^2), and, on the basis of that experience, to have them conclude that

$$x^0 = x^{5-5} = x^5/x^5 = 1.$$

His plan was to call upon students who had obtained the right answer, have them explain how they arrived at that answer, and elaborate on the answer for the class.

B. Because he was inexperienced, he did not know to anticipate a substantial degree of confusion when students "cancelled" x's in the expression

$$\frac{x\,x\,x\,x\,x}{x\,x\,x\,x\,x}$$

and saw "nothing" when they were done:

$$\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\;\cancel{x}\;\cancel{x}\;\cancel{x}}{\cancel{x}\;\cancel{x}\;\cancel{x}\;\cancel{x}\;\cancel{x}\cdot}$$

He had no back-up plan for having the students deal with the subject matter.

C. He believed (as many beginning teachers in the U.S. believe) that it is inappropriate to simply "tell" students the correct answer – that a "constructivist" teacher must work with ideas generated by the students.

The factors A, B, and C combined to create the problem for the teacher. He wrote the problem x^5/x^5 on the blackboard for the students to work, expecting at least one student to get the right answer. When none of the students called out the right answer, he could not implement his intended strategy of elaborating on a student explanation. He searched his knowledge base for an alternative strategy, but none was available. Since he believed that he should not "tell" the students the answer, he was stuck. (If you see the videotape of the class, you can see him slump at the blackboard at this point – he is unable to go further.)

Note that if the teacher had a different belief system, which allowed him simply to lecture the content to the students, he would have been able to proceed perfectly well. He had the relevant knowledge, but his beliefs about how to teach prevented him from using it.

Case 2, an experienced teacher with novel content

In Schoenfeld (1998) I present the very detailed examination of a full lesson taught by Jim Minstrell, a high school teacher-researcher widely recognized for his skill. Minstrell had created a lesson to help his students understand the issues one confronts when gathering and analyzing data. The issues in the lesson are, which data does one use (e.g., does one include or exclude "outliers"), and how does one compute the "best value" (e.g., would mean, median, or mode be a better choice as a measure of central tendency) for the situation?

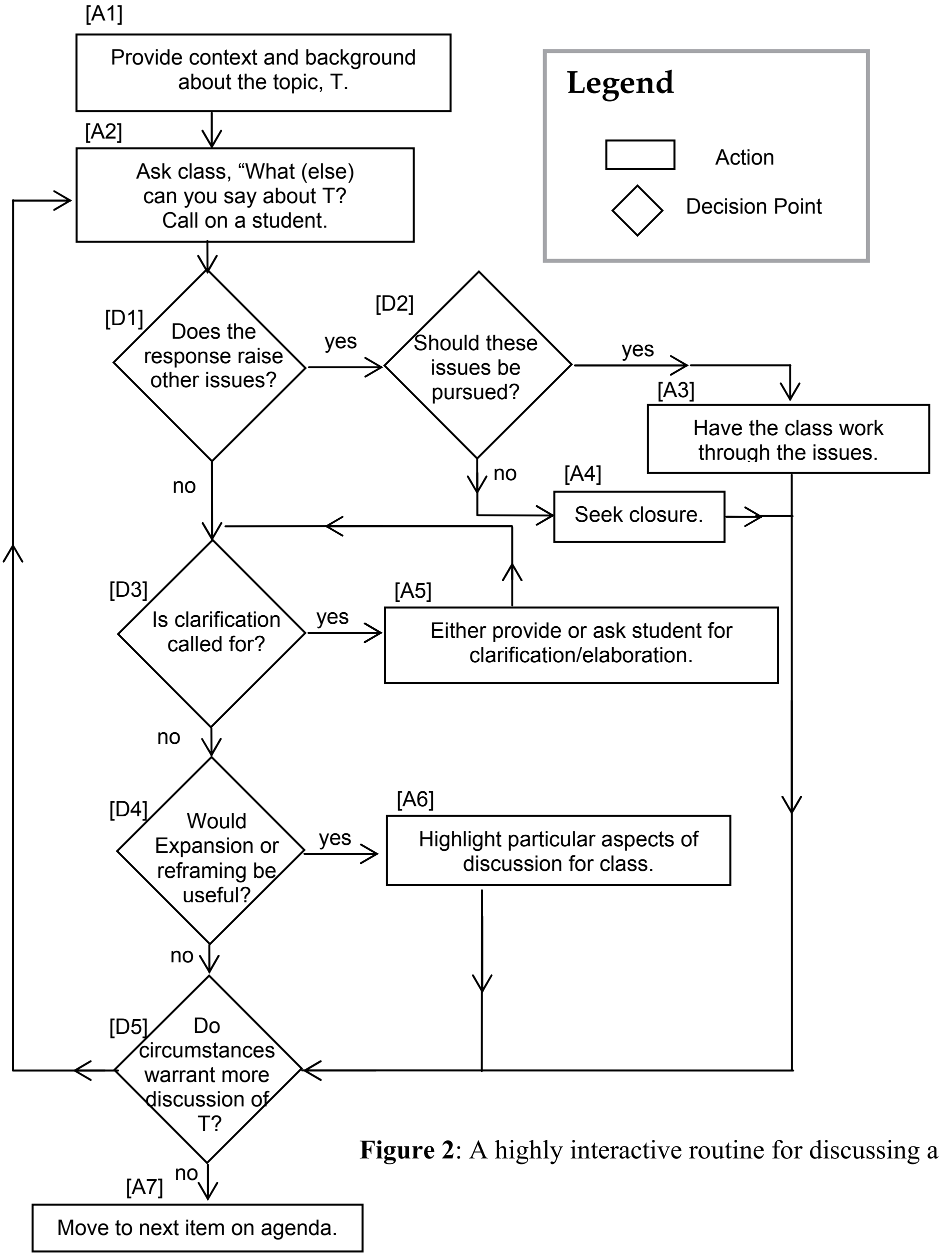


Figure 2: A highly interactive routine for discussing a topic.

Minstrell has developed a unique interactive style, in which he rarely makes declarative statements, but instead asks questions and works with the answers (correct or not) provided by the students. He also has a particular kind of classroom routine that he employs for soliciting comments from students – one that, as it turns out, is also employed by teachers such as Deborah Ball and myself. That routine is given in Figure 2. (See next page.)

The previous day Minstrell had asked a group of 8 students to measure the width of a table. They had obtained the following values:

106.8; 107.0; 107.0; 107.5; 107.0; 107.0; 106.5; 106.0.

The question before the class was, "what is the best value to use for the width of the table?"

Minstrell's plan was to start out the class with "routine business" (any questions the students might have about class organization, *etc.*), and then engage the class in the issue of "best value." That discussion would have three parts: the consideration of which data to include (both in general and in this case), the consideration of how to get the "best value" for the numbers they had, and a discussion of "precision" – how to describe the magnitude of the possible error regarding the "best value." As always, he planned to interact with students using his questioning strategy. He also had some very high priority goals for the class, among them:

- to foster the students' understanding of science as a sense-making activity;
- to have students become comfortable asking questions;
- to model the process of inquiry.

The lesson begins with "routine business." Minstrell asks students in the have any questions regarding the conduct of the course, grading policy, *etc.* After these preliminaries have been taken care of, he turns to the question of analyzing data.

Minstrell asks the students why, in general, they might consider some or all of the data. A student responds by saying "eliminate [the] highest and lowest," which Minstrell pursues by asking if the students can explain where one might do that. Among the responses are that high and low scores are sometimes dropped in sporting events.

Minstrell clarifies this, and then asks the question again: "OK. What's another way at going at taking some of the numbers and not all of them?" This time a student answers in terms of "extreme values," and Minstrell pursues this – calling atypical values "outliers" and explaining that one might be suspicious of such numbers. He continues, "OK? What was another one?" and spends some time discussing the credentials of those who took the measurements – some numbers might be seen as more "trustworthy" than others because they were gathered by people with greater expertise. He tries again: "OK? Any other reasons you can think of to only take some of the numbers?" There is no response, and he has no reason to bring other suggestions into the conversation, so he brings this part of the lesson to a close. (In the terms of the model, he has met the goal of working through "which numbers should we consider; thus the next goal, "how should we combine them" becomes highest priority.) In doing so that he has made consistent use of his knowledge base, selecting and implementing the iterative strategy described in Figure 2. The routine described in Figure 2 corresponds, on a line-by-line basis, to his actions over this part of the lesson.

Minstrell now begins the second part of the data analysis discussion. He asks,

> "So now we've got some numbers there, what are we going to do with those numbers? What's one thing that we might do with the numbers?"

A student says "Average them" and Minstrell, consistent with his questioning style, asks "Now what do you mean by 'average' here?" He elaborates on the definition of *mean*, and then returns to the question:

> "Any other suggestions for what we might do? So we can average them. [8 second pause]
> Any other suggestions there for what we might do to get a best value?"

A student says "You've got a bunch of numbers that are the same number," a statement Minstrell pursues with his questioning style. The result is a clarification of the *mode.*

Consistent with the implementation of the routine in Figure 2, Minstrell returns to the top-level question: "Anybody think of another way of giving a best value?" A student provides an unexpected response:

> "This is a little complicated but I mean it might work. If you see that 107 shows up 4 times, you give it a coefficient of 4, and then 107.5 only shows up one time, you give it a coefficient of one, you add all those up and then you divide by the number of coefficients you have."

Up to this point, Minstrell has been implementing the routine in Figure 2 smoothly.[2] One can think of each iteration of the routine as corresponding to the establishment of a subgoal – "let's hear if the students have another idea, and work through it" – and the completion as meeting that subgoal. This new suggestion

---

[2] Note, again, that I am not claiming that Minstrell is following this routine consciously – I am merely claiming that his behavior is consistent with this routine. I uncovered this specific routine when doing an analysis of Deborah Ball's teaching (Schoenfeld, 2002; in press). When I described it to Deborah, her reaction was "That's interesting. I wasn't doing it consciously, but now I can see that I use that routine quite a lot."

changes things, however. It is “outside the space” of things Minstrell has set up. The issue in terms of modeling: Can we say, in a principled way, what he will do? (Note that we have presaged this situation in the general discussion. A priori, Minstrell could respond in any of a number of ways, from (i) telling the student he’ll talk to her about this idea after class, to (iv) inviting the class to work through the issue, perhaps taking as long as 10-15 minutes to do so.

The model works as follows. In terms of Figure 2, Minstrell has asked question [A2] and the student’s response, [D1], does indeed raise other issues. Hence Minstrell must decide (in [D2]) whether and how to respond. The student’s comment is relevant in terms of subject matter, and represents a legitimate attempt at sense-making on her part. Recall that Minstrell has certain top-level goals for the class, among them that the students see science as a form of sense-making. He wants the students to feel free to raise relevant issues (that is, he wants the environment to be “risk-free” when students make conjectures or inquiries). He knows that he can work to create the right kind of environment (and encourage other students to take the same risks) by responding positively to the student’s question. Hence, Minstrell will choose option (iv) – he will invite the class to work through the issue, even though the cost will be a temporary deflection of his agenda for the lesson. One this decision is made, the next question is how he will pursue the issue. This too is a matter of beliefs, values, and knowledge. Minstrell has more than enough content knowledge to pursue the issue. He favors the questioning strategy that invites student input, rather than telling; he also wants to make sure all the students understand the issue before pursuing it. Thus, (the model of) Minstrell will ask the student to repeat or clarify what she has said, and then ask the class for ideas or suggestions. This is, in fact, what the real Minstrell did.

Working through the suggestion with the class – showing that one interpretation of what the student said led to an inappropriate formula, but another interpretation led to the formula for what we call the weighted average – did indeed take some time. When the discussion was concluded, Minstrell returned to his original agenda. He had the students discuss the median (the third measure of central tendency, which had not yet been raised). The discussion of median finished the second main chunk of the lesson (how to choose the “best value”), at which point he could turn to a (condensed) discussion of “precision.”

In sum, Minstrell’s behavior, even in unexpected circumstances, was entirely “rational” (consistent with his goals and values), and his decision-making during the full hour of class could be explained on a line-by-line basis. The model works exactly as described in general. At any moment Minstrell has certain goals, and he sorts through his knowledge base to find an approach that is consistent with those goals. As events proceed, some goals are met, or new goals emerge because of contingencies. When this happens, goals are re-prioritized, and actions consistent with the new high priority goals are taken.

Case 3, An experienced teacher and an "emergent" lesson

The third body of instruction discussed here is a segment of a lesson taught by Deborah Ball, which has become rather famous as the "Shea number" tape. (See Schoenfeld, in press, for detail.) Ball had been teaching a third-grade class. The previous day she had had the class meet with a group of fourth graders (her previous year's class) to discuss some of the mathematical issues that had emerged in both classes as they considered the properties of even and odd numbers. Some troubling issues had arisen for the students – for example, is the number zero even, or odd, or "special" (not fitting into either category). Some students argued that zero is even, some that it is special. The issue had not been resolved.

Ball starts the class by asking her students reflect on their experience the previous day. Her intention, at least in part, is to have them "go meta" – to reflect on how the meeting shaped their thinking. When a first student comments, Ball interacts with her and sums up: "so you thought about something that came up in the meeting that you hadn't thought about before." After another interaction between two students, she points out that some issues (e.g., whether zero is even or odd) take a long time to figure out – that even the fourth graders hadn't resolved it yet! Then, when a student makes the following comment:

> "Um, first I said that um, zero was even but then I guess I revised so that zero, I think, is special because um, I– um, even numbers, like they they *make* even numbers; like two, um, two makes four, and four is an even number; and four makes eight; eight is an even number; and um, like that. And, and go on like that and like one plus one and go on adding the same numbers with the same numbers. And so I, I think zero's special",

Ball makes a rather unusual move:

> "Can I ask you a question about what you just said? And then I'll ask people for more comments about the meeting. Were you saying that when you put even numbers together, you get another even number, or were you saying that all even numbers are made up of even numbers?"

This is a striking intervention, in that it derails Ball's announced reflective agenda. The class spends a substantial amount of time discussing the issue, and it is not easy to return to reflections. People who have seen the tape have been very surprised at Ball's move, arguing that it makes no sense.

The issue here: does it make sense? Ball is a highly accomplished teacher. Why would she do such a thing?

The answer depends on knowing the history of the classroom discussions that took place prior to the meeting of the third and fourth grade classes, and on knowing Ball's agenda. Ball had planned for the reflections on the previous day's meeting to take a few minutes at the beginning of class. After that, she planned to return to the main line of work the class had been pursuing – discussions about the properties of even and odd numbers. Students had noticed that doubling gave rise to even numbers. (The class's working definition was that a number was even if you could divide it into two equal piles without leaving anything over. Hence doubling produced even numbers.) Some students had conjectured that the sum of any two even numbers was even. Another conjecture that had been aired was that any even number was the double of an even number – that is, that all even numbers "come from" other even numbers, in the same way 4 "comes from" 2 and 8 "comes from" 4.

For Ball, understanding what her students think is always a key to a successful lesson – so the success of the latter part of her planned lesson, the exploration of student conjectures, depended in part on understanding what her students believed about combinations of even numbers. Did this student (and others) believe that every even number can be written as the double of another even number, or only that the double of every even number is also even? If they believed the former, the lesson would evolve differently – and this was important. Hence Ball decided to make a brief, announced *detour*, which she signaled by saying she was going to ask about what the student had just said, and then return to her agenda by "ask[ing] people for more comments about the meeting." Whatever one's judgment about the appropriateness or wisdom of this move, the fact is that it is consistent with Ball's beliefs about what is important (understanding her students' understandings) and with her goals and agenda (spending most of the class period facilitating a conversation about the students' conjectures about the properties of even and odd numbers). Moreover, it is clear she expected the exchange to be over quickly, so that the cost of the detour would be small. Under these circumstances, her decision can be seen as fundamentally rational in the sense that I have discussed. Moreover, a cost-benefit analysis of the cost of asking the question (a brief disruption to the flow of the argument) versus the benefits (setting the planned discussion on a more stable base) shows it to be a reasonable, though not obvious, choice. This a model of Ball's knowledge, goals, and beliefs reveals this choice to be both rational and within the realm of possibility.

In sum, this kind of analytic model produces behavior that is entirely consistent with a broad range of teaching – all of which can be seen as problem-solving behavior.

5. Using the model as a model of mathematical problem solving

I will now argue that the theory outlined above also serves as a theory of mathematical "problem solving in the moment" – a theory that serves to explain how and why people do what they do as they are engaged in solving mathematics problems.

A prefatory comment is appropriate here. I am about to revisit some of the data from my 1985 book *Mathematical Problem Solving.* The question is, how do things differ in his interpretation?

In that book, I offered what I called a *framework* for the analysis of mathematical problem solving behavior. I described four categories of mathematical knowledge and behavior:

- resources (the knowledge base);
- heuristic (problem-solving) strategies;
- "control" (Monitoring and self-regulation, aspects of metacognition);
- beliefs.

(These were joined in 1992 by the category of Practices, the consistent activity patterns of a particular intellectual or other community).

My argument was that if you wanted to understand someone's success or failure in a problem solving attempt, you needed to examine all of these categories. That is, any one of these (the presence or absence of particular knowledge; access or lack of access to heuristic strategies; effective or ineffective metacognitive decision-making; productive or counter-productive beliefs and practices) could provide the reason for an individual's success or failure as he or she tried to solve a problem. Moreover, I argued that these categories were sufficient for explanations – that success or failure could be explained in these terms.

What was *missing* in this approach was a sense of how all these things fit together – a description of *mechanism*. How did the categories interact with each other? Why did people do what they did when they were in the midst of a problem solving attempt? There were suggestions of the interactions, specifically in the ways that beliefs served to prioritize knowledge. For example, I argued that students who believe that "proof has nothing to do with discovery or invention" would fail to access some relevant proof-related knowledge when they were working construction ("discovery") problems, even though they could clearly be shown to have that knowledge. But, a theory is more than that.

I suggest that the description of people's decision-making in the act of problem solving described here now has the potential to be a theory of problem-solving-in-action. To recap, the key elements of the theory are

- knowledge;
- goals;
- beliefs;
- decision-Making[3],

The basic idea is that an individual enters *any* problem solving situation with particular knowledge, goals, and beliefs. The individual may be given a problem to solve – but as we saw early in this paper, it is not necessarily the case that solving that problem will become *the* problem the individual sets out to solve! Thus, what happens is that the individual establishes a goal or set of goals – these being the problems the individual sets out to solve. The individual's beliefs serve both to shape the choice of goals and to activate the individual's knowledge – with some knowledge seeming more relevant, appropriate, or likely to lead to success. The individual makes a plan (often establishing subgoals, *etc*.) and begins to implement it. As he or she does, the context changes: with progress, some goals are met and other take their place. With lack of progress, a review may suggest a re-examination of the plan and/or re-prioritization of goals. When unexpected events happen (e.g., new information becomes available), a re-prioritzation also occurs. This cycle continues until there is (perceived) success, or the problem solving attempt is abandoned or called to a halt.

In what follows I am going to re-visit a problem solving session described in my 1985 book, and re-interpret what happened. Time and space do not permit me to do the kind of exhaustive analysis for this paper that I did in the teacher-model work (e.g., Schoenfeld, 1998; in press), so this analysis is still on the speculative side. I will assert at this point that I am confident that with enough time, I could do a much more detailed analysis.

The problem-solving episode in question, which is given in full in the Appendix, was discussed in Chapter 9 of *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985). In the discussion I focused largely on aspects of metacognition. The key point of the analysis was that the problem solver managed to terminate a number of fruitless

[3] The relationships between the old and new categories are straightforward. Resources and strategies (and some practices) are part of the knowledge base, beliefs remain much as they were (but prioritize both goals and knowledge), and metacognition becomes part of decision-making, which includes the prioritization of goals. Success or failure will still depend on the efficacy of the knowledge base, the appropriateness of the individual's beliefs, and the quality of decision-making.

attempts to solve the problem, thereby giving himself enough time to find a correct solution. I wrote that his solution attempt was "an illustration of the way that executive [metacognitive] skills can make a positive contribution to problem solving performance."

I suggest that the reader read through the Appendix, then return here for a narrative description.

In line 1 (and beyond) it is clear that GP (the problem solver) does establish finding a solution to the given problem as his major goal. He acknowledges (line 2) not knowing where to start on the problem, and then explicitly employs a heuristic strategy (drawing a diagram that looks close to correct, in the hope of gaining insight) in line 5. The figure does indeed suggest an approach – in line 6 he notes that the two triangles are similar, and that it may be possible to determine the answer analytically. This triggers more knowledge and the establishment of a subgoal – solve analytically for the size of the altitude of the smaller triangle. He does so in line 9. Then, he has a second sub-problem – how to construct a line that has the value he has found analytically, $A/\sqrt{2}$. This triggers an explicit memory search (line 12), which is partly successful – he remembers how to construct $\sqrt{2}$ (line 16), then $\sqrt{2}/2$ (line 17), and ultimately, in lines 18-19, he constructs $A\sqrt{2}/2 = A/\sqrt{2}$. He gets there by doing a series of successively more complex constructions, each one a new subgoal established after the preceding one has been met.

In line 22 he turns to the second (and more difficult) part of the problem. He spends lines 24-27 exploring the problem (again, a good heuristic strategy – as Pólya says, "first, you have to understand the problem"). In line 28 he poses a possible misdirection, trying to apply his solution to the first part of the problem inductively. Here metacognition and decision-making kick in: he decides (line 33) that the approach is not profitable. This calls for re-selecting a top-priority subgoal. He begins working on the problem of constructing the top triangle, with area 1/5 that of the original triangle *T*. Using the same approach that he used to solve the first part of the problem, he makes some progress, and in line 40 determines an algebraic expression that he needs to construct: $\sqrt{3}/\sqrt{5}$. Since an expression with two roots is too complex (again, a goal-directed heuristic), he re-expresses this as $\sqrt{15}/5$. This raises another issue, whether $\sqrt{15}$ or $\sqrt{15}/5$ is constructible (line 42). It calls for another knowledge search (lines 43-48). He realizes firmly that division by 5 is not a problem, so the solution to the problem hinges on his ability to construct $\sqrt{15}$ (line 48). He engages in some more conscious memory search (lines 49-54) and finds an appropriate approach, passing by some unprofitable ideas (line 53) and ultimately settling in on a correct approach (lines 55 and 56).

This brief narrative suggests the way in which the theory works, providing a potentially complete description of the problem solving session at a level of mechanism – saying how and why the problem solver did what he did, and to what effect. GP's beliefs about himself and about mathematics are clearly relevant: he starts out with the assumption that he can tackle problems like this, and work his way through them. In numerous places, his decision-making facilitates his solution – in the establishment of goals and subgoals, in effective monitoring and self-regulation (lines 33, 54), in goal-directed memory search (e.g., lines 46-47) and in the selection of appropriate heuristic strategies (lines 5, 31). Moreover, we see the ways in which things interact: his use of the heuristic "draw a diagram (of the goal state)" triggers the recognition of similar triangles, which then suggests a solution path that had not been apparent beforehand.

In short, this kind of approach and interpretation suggest that if one knew enough about GP's knowledge, goals, beliefs, and decision-making, one could model this solution down to a very fine level of detail. As such, this would be a model in substantiation of my broad theoretical claim – that nearly all problem solving (in the moment) can (a) be seen as rational, and (b) can be modeled as a function of individuals' knowledge, goals, beliefs, and decision-making. I am confident that all of the problem solving protocols discussed in *Mathematical Problem Solving* can be re-analyzed this way.

6. A tongue-in-cheek example from the cradle

I hypothesize that this theoretical perspective can be applied to characterize the problem-solving activities of the very young. I can not resist a reductio ad absurdum here, but I think there is some truth to it.

Consider a hungry week-old infant. That child has one overriding goal: food! And, that child has one strategy in its knowledge base: cry! Typically, the strategy works, although sometimes with delay – the infant's mother may not immediately identify the cause of the child's discomfort. As the child gets older, its collection of strategies gets larger – eventually, for example the child can say "mama" and "papa." Now when it is hungry, it may cry – but it may also call a specific parent! (This is knowledge at work). As its vocabulary grows, it may know how to identify the sources of its discomfort, *and* who is likely alleviate them – hence choosing one parent over another, and asking specifically for food or drink. Hypothetically, a rather simple model could describe a young baby's actions; as the child developed, increasingly complex knowledge, goal-setting, and decision-making (shaped by the child's evolving beliefs) could characterize the development of the child's problem solving skills. Hence it might be possible, at least theoretically, to characterize problem solving from cradle to grave.

7. Brief Discussion

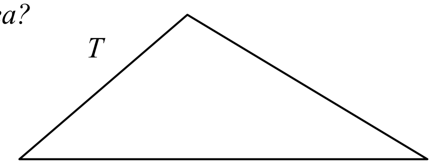
As indicated in the introduction, this paper is a theoretical manifesto. I claim that it is possible to unify the earlier work I conducted on the solution of non-routine mathematical problems (Schoenfeld, 1985, 1992) with more recent work modeling teachers' decision-making (Schoenfeld, 1998, 1999, 2000, in press; Schoenfeld, Minstrell, and van Zee, 2000). If this effort is successful, it will provide a theoretical mechanism for characterizing a very large part of human goal-directed activities[4]. Time will tell whether this attempt will be successful. But, I hope to have provided enough evidence to convince the reader that the attempt is plausible and worth undertaking.

[4] Some percentage of human behavior is random, of course. But, especially when one is acting in familiar contexts, much behavior is rational in the sense that I have described.

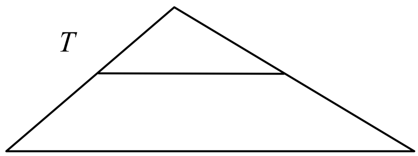
Appendix

The full text of a mathematics faculty member's attempt to solve a problem. Taken (with my permission) from Schoenfeld, 1985.

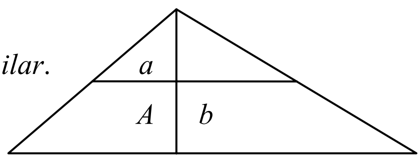
1. (Reads problem): You are given a fixed triangle *T* with Base *B*. Show it is always possible to construct, with ruler and compass, a straight line parallel to *B* that divides *T* into two parts of equal area. Can you similarly divide *T into five parts of equal area?*



2. Hmm. I don't know exactly where to start.
3. Well, I know that the ... there's a line in there somewhere. Let me see how I'm going to do it. It's just a fixed triangle. Got to be some information missing here. *T* with base *B*. Got to do a parallel line. Hmmm.



4. It said the line divides *T* into two parts of equal area. Hmmm. Well, I guess I have to get a handle on area measurement here. So what I want to do ... is construct a line ... so that I know the relationship of the base ... of the little triangle to the big one.
5. Now let's see. Let's assume I draw a parallel line that looks about right, and it will have base little *b*.
6. Now, those triangles are *similar*.



7. Yeah, all right then, I have an altitude for the big triangle and an altitude for the little triangle so I have little *a* is to big *A* as little *b* is to big *B*. So what I want to have happen is $\frac{1}{2}ba = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}ba$. Isn't that what I want?

8. Right! In other words I want $ab = ½AB$. Which is ¼ of A times [mumbles; confused] $(1/\sqrt{2}) \times A \times (1/\sqrt{2}) \times B$.

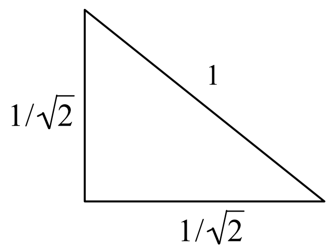
9. So if I can construct the $\sqrt{2}$, which I can! Then I should be able to draw this line ... through a point which intersects an altitude dropped from the vertex. That's little $a = A/\sqrt{2}$, or $A = a\sqrt{2}$, either way.

10. And I think I can do things like that because if I remember, I take these 45-degree angle things, and I go 1, 1, $\sqrt{2}$.

11. And if I want to have $a \times \sqrt{2}$ … then I do that ... mmm. Wait a minute ... I can try to figure out how to construct $1/\sqrt{2}$.

12. OK. So I just gotta remember how to make this construction. So I want to draw this line through this point and I want this animal to be - $(1/\sqrt{2}) \times A$. I know what A is, that's given, so all I gotta do is figure out how to multiply $1/\sqrt{2}$ times it.

13. Let me think of it. Ah huh! Ah huh! $1/\sqrt{2}$ … let me see here ... ummm. That's ½ plus ½ is 1.



14. So of course if I have a hypotenuse of 1 ...

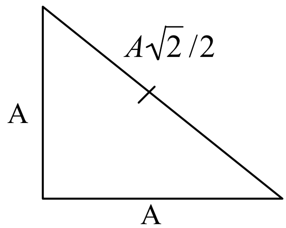
15. Wait a minute ... $(1/\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}/2)$ ... that's dumb!

16. Yeah, so I construct √2 from a 45, 45, 90. OK, so that's an easier way. Right?

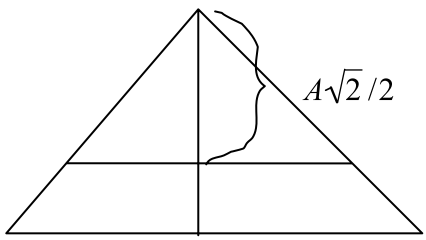
17. I bisect it. That gives me $\sqrt{2}/2$. I multiply it by A ... now how did I used to do that?

18. Oh heavens! How did we used to multiply times A? That ... the best way to do that is to construct A ... A ... then we get $\sqrt{2}$ times A, and then we just bisect that and we get A times $\sqrt{2}/2$. OK.

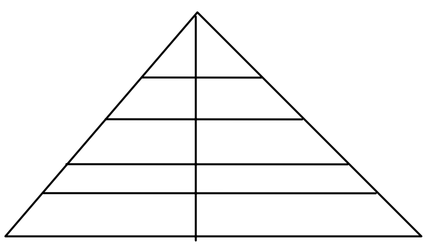
19. That will be ... what! ... mmm ... that will be the length. Now I drop a perpendicular from here to here. OK, and that will be ... *ta, ta* ... little a.



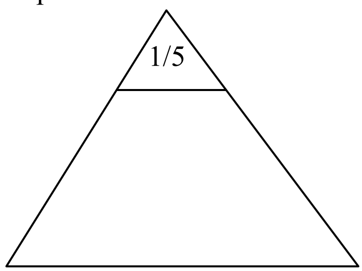
20. So that I will mark off little a as being $A\sqrt{2}/2$. And automatically when I draw a line through that point ... I'd better get $\sqrt{2}/2$ times big B. OK
21. And when I multiply those guys together I get $(2/4)AB$. So I get half the area ... what? ... yeah ... times ½ - so I get exactly half the area in the top triangle, so I better have half the area left in the bottom one. OK.



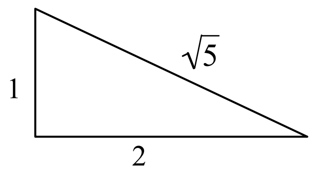
22. OK, now can I do it with 5 parts?
23. Assuming 4 lines.
24. Now this is going to be interesting because these lines have to be graduated ... that ...
25. I think, I think, rather than get a whole lot of triangles here, I think the idea, the essential question is can I slice off ... 1/5 of the area ... hmmm ...
26. Now wait a minute! This is interesting. Let's get a ... How about 4 lines instead of ...
27. I want these to be ... all equal areas. Right? A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, right?
28.



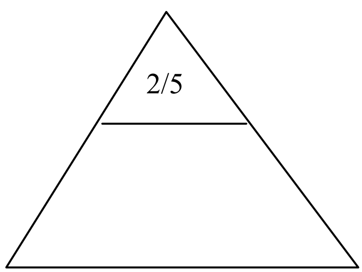
29. Sneak! I can ... I can do it for a power of 2. That's easy because I can just do what I did at the beginning and keep slicing it all the time.
30. Now can I use that kind of induction thought?
31. I want that to be 2/5. And I want that to be 3/5. (pointing to relevant regions)
32. So let's make a little simpler one here.



33. If you could do that then you can construct $\sqrt{5}$. But I can construct $\sqrt{5}$ to 1 ... square root of 5, right?
34. So I can construct ... OK. So that certainly isn't going to do it. No contradiction ...
35. Now, I do want to see, therefore, what I have here.
36. I'm essentially saying it is possible for me to construct it in such a way that it is 1,2,3,4,5, 1/5 the area ... OK.
37. So little *a* times little *b* has got to equal 1/5 *AB*. So I can certainly chop the top piece off the area and have it be 1/5. Right? Right?

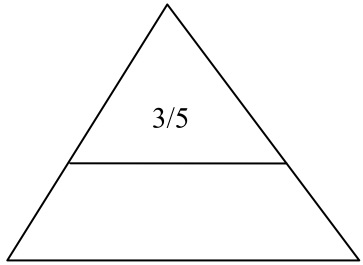


38. Now the first part of the problem, I know the ratio of the next base to draw ... because it is going to be $\sqrt{2}$ times this base. So I can certainly chop off the top 2/5.



39. Now from the first part of the problem I know the ratio of the top ... uh, OK, now this is 2/5 here, so top 4/5. OK. All right. So all I gotta be able to do is chop off the top 3/5 and I'm done.

40. It would seem now that it seems more possible ... let's see ...



41. We want to make a base here such that little *a* times little *b* is equal to ... the area of this thing is going to be 3/5 ... 3/5 *AB* ... in areas, right! And that means little *a* times little *b* is $[(\sqrt{3}/\sqrt{5})A][(\sqrt{3}/\sqrt{5})B]$. OK, then can I construct $\sqrt{3}/\sqrt{5}$? If so then this can be done in one shot.

42. Well let's see. Can I construct $\sqrt{3}/\sqrt{5}$? That's the question. $\sqrt{3}/\sqrt{5} \times \sqrt{5}/\sqrt{5} = \sqrt{15}/5$.

43. $\sqrt{15}, \sqrt{15}$. Wait a minute. $\sqrt{15}/5$. Is $\sqrt{15}$ constructible? $\sqrt{15}$ is ...

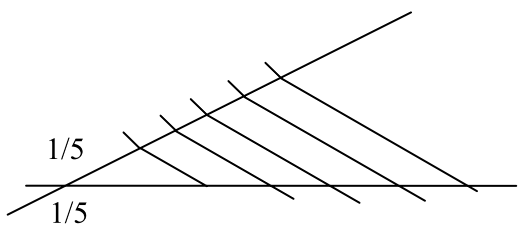
44. It is $\sqrt{16-1}$. But I don't like that. It doesn't seem the way to go.

45. 16^2 - 1^2 equals ... [expletive deleted]

46. Somehow it rests on that.

47. [Expletive] If I can do $\sqrt{15}$. Can I divide things and get this?

48. Yeah, there is a trick! What you do is lay off five things. One, two, three, four, five. And then you draw these parallel lines by dividing them into fifths. So I can divide things into fifths so that's not a problem.



49. So it's just constructing $\sqrt{15}$, then I can answer the whole problem.

50. I got to think of a better way to construct $\sqrt{15}$ than what I'm thinking of ... or I got to think of a way to convince myself that I can't ... ummm ... x^2 ... 15.

51. Trying to remember my algebra to knock this off with a sledgehammer.

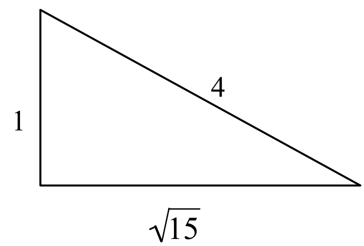
52. It's been so many years since I taught that course. It's 5 years. I can't remember it.

53. Wait a minute! Wait a minute!

54. I seem to have in my head somewhere a memory about quadratic extension.

55. Try it differently here. mmm…

56. So if I take a line of length 1 and a line of length … And I erect a perpendicular and swing a 16 [he means a $\sqrt{16}$, or 4] here. Then I'll get $\sqrt{15}$ here, won't I?



57. I'll have to, so that I can construct $\sqrt{15}$ times anything because I'll just multiply this by A and this by A and this gets multiplied by A divided by 5 using that trick. Which means that I should be able to construct this length [$A\sqrt{3}/\sqrt{5}$] and if I can construct this length then I can mark it off on here [the altitude to from the top vertex to B] and I can draw this line [the parallel to the base] and so I will answer the question as YES!!

Bibliography

DECORTE E., GREER B. & VERSCHAFFEL L. (1996) Mathematics teaching and learning, In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology*, 491-549, MacMillan, New York.

HATANO G. (1982) Cognitive consequences of practice in culture specific procedural skills, *The quarterly newspaper of the Laboratory of Comparative Human Cognition,* **4**, 15-18.

HINCKLE W. (1990) *If you have a lemon, make lemonade (reissue edition),* W. W. Norton & Co, New York, NY.

LAMPERT M. (2001) *Teaching problems and the problems of teaching*, Yale University Press, New haven.

NEWELL A. (1981) The knowledge level, *AI Magazine,* Summer 1981, 1-33.

SCHOENFELD A.H. (1985) *Mathematical problem solving*, Academic Press, Orlando, FL.

SCHOENFELD A.H. (1992) Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, in D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334-370, MacMillan, New York.

SCHOENFELD A.H. (1998) Toward a theory of teaching-in-context, *Issues in Education*, **4(1)**, 1-94.

SCHOENFELD A.H. (1999) (Special Issue Editor) *Examining the Complexity of Teaching.* Special issue of the *Journal of Mathematical Behavior*, **18(3)**.

SCHOENFELD A.H. (2002) A highly interactive discourse structure, in J. Brophy (Ed.), *Social Constructivist Teaching: Its Affordances and Constraints* (Volume 9 of the series *Advances in Research on Teaching*), 131-170, Elsevier, New York.

SCHOENFELD A.H. (In press) On modeling teachers' in-the-moment decision-making. *To appear in Alan H. Schoenfeld* (Ed), A study of teaching: Multiple lenses, multiple views, *a volume in the Journal for Research in Mathematics Education* monograph series.

SCHOENFELD A.H., MINSTRELL J., & VAN ZEE E. (2000) The detailed analysis of an established teacher carrying out a non-traditional lesson, *Journal of Mathematical Behavior*, **18 (3)**, 281-325.

ALAN H. SCHOENFELD
Elizabeth and Edward Conner Professor of Education
Graduate School of Education
University of California
Berkeley, CA 94720-1670, USA
alans@berkeley.edu

JEAN-CLAUDE RAUSCHER

ÉCRITURE REFLEXIVE ET ACTIVITE MATHEMATIQUE : LE CAS DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES DE PROPORTIONS

Abstract. Reflexive writing and mathematical activity: case of proportion problem solving.
How can the writing of a pupil's reflections contribute to the development of his or her knowledge? This question is considered at the end of primary school in an experiment on problem solving about proportionnality. The problems consist of comparing mixtures, and they are inspired by Noelting's problems (1980) about orange juices. Based on the work of Duval (1998), our observations show a conceptual obstacle when the texts written by the pupils are used in class to pass from a situation of expression to a situation of proof : the pupils consider the written texts as spoken expressions. Spontaneously, the pupils write as they speak, never going back to what they have written. Our experiment aims to lead the pupils to consider their texts really as written productions and not as simple transcriptions of oral expressions. We analyse the extent to which this aim is achieved, the consequences on the nature of the proofs produced by the pupils, and the development of their knowledge. Finally, we indicate other experiments which can be carried out with the pupils according to our observations.

Résumé. Quelle contribution peut apporter le recours à la production « d'écrits réflexifs » par les élèves au développement de leurs connaissances ? C'est la question qui est envisagée ici dans le cadre d'une expérimentation menée en fin d'école primaire à propos de la résolution de problèmes relevant de la notion de proportionnalité. Les problèmes considérés sont des problèmes de comparaison de mélanges inspirés de Noelting (1980). Inspirées par les travaux de Duval (1998), nos observations repèrent un obstacle dans l'exploitation des écrits des élèves en classe pour passer d'une situation de formulation à une situation de validation : une « pratique orale » de l'écrit par les élèves. Spontanément, les élèves écrivent comme ils parlent, sans retour sur ce qu'ils écrivent. Le dispositif élaboré et mis à l'épreuve a alors le but d'initier les élèves à une « pratique écrite » par l'objectivation de leurs écrits. L'écriture réflexive devient alors le centre de l'activité mathématique en cours. Nous analysons dans quelle mesure cette initiation à une posture d'écriture réflexive est réussie et quelles sont ses conséquences sur le développement des connaissances des élèves.

Mots-clés. Ecrits réflexifs, pratique orale, pratique écrite, validation, résolution de problèmes, proportionnalité.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 75 – 102.

Introduction

Dans le cadre d'une expérimentation menée en fin d'école primaire, nous abordons la question de la contribution au développement des connaissances apportée par des écrits produits par les élèves lors de la résolution de problèmes relevant de l'initiation à la notion de proportionnalité.

A travers les recherches et les instructions accompagnant en particulier le dernier programme de mathématiques à l'école primaire en France, on peut voir que les écrits ont une place de plus en plus reconnue dans le processus de développement des connaissances en mathématiques. Mais quel est le rôle dévolu à cette activité d'écriture ? Souvent l'écrit est envisagé en tant que production utilisable pour servir de matériau à un échange ou d'outil de mémoire à consulter. Les écrits n'interviennent alors qu'au terme ou en marge de l'activité mathématique. Dans cette perspective, c'est l'écriture en tant qu'activité d'expression spécifique et le rôle important qu'elle joue dans la prise de conscience et la réflexion qui sont ignorés. Or Vygotski (1934/1997) a été un des premiers à attirer l'attention sur les différences cognitives entre l'activité d'expression orale qu'il n'hésitait pas à qualifier d'automatique et l'activité d'expression écrite qui exige une véritable prise de conscience et une réorganisation de la part de celui qui écrit par rapport à ce dont il peut avoir conscience en s'en tenant à la seule communication orale. Sous ce point de vue, l'écriture comme activité spécifique d'expression devient un moment essentiel dans la « conceptualisation ».

Pour notre part, en nous référant aux considérations de Vygotski et aux travaux de R. Duval, nous avons été amenés à donner une place provoquée et contrôlée dans ses effets à la production et à l'observation par les élèves d'écrits. L'écriture est alors une composante essentielle de l'activité mathématique des élèves.

Quels progrès pour les élèves apporte alors la mise en place d'une telle perspective ? Tous les élèves en profitent-ils de la même façon ? Telles sont les questions que nous aurons à examiner (partie IV) après avoir présenté le dispositif initial (partie II) et la situation de réflexion finalement proposée aux élèves (partie III). Mais afin de pouvoir situer plus précisément notre travail d'un point de vue théorique, nous commencerons par poser la question des fonctions que revêt la production d'écrits par les élèves dans quelques travaux de recherche en didactique et aussi dans les indications des programmes de l'école primaire qui mettent en avant cette activité comme moyen de développement des connaissances (partie I).

1. La production d'écrits par les élèves : en accompagnement ou au centre de l'activité mathématique ?

La classification proposée dans la rubrique « Ecrire en mathématiques » des documents d'application des programmes (Ministère de la jeunesse, de l'Education nationale et de la Recherche, 2002, p. 9) distingue trois types d'écrits qui peuvent étayer les apprentissages en mathématiques :

– *les écrits de type « recherche » correspondant au travail privé de l'élève pour mener sa recherche ;*

– *les écrits destinés à être communiqués et discutés qui peuvent prendre des formes diverses (affiches, transparents..). Ils doivent faire l'objet d'un souci de présentation, de lisibilité, d'explicitation tout en sachant que, le plus souvent, ils seront l'objet d'un échange entre les élèves au cours duquel des explications complémentaires seront apportées ;*

– *les écrits de référence élaborés en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève ou de la classe.*

Cette perspective dressée par les programmes se démarque des pratiques où seuls les écrits terminaux par lesquels les élèves communiquent leurs démarches et leurs résultats à l'enseignant sont pris en considération par celui-ci. Elle prend aussi en compte tous le travail d'élaboration préalable par des écrits de recherche, des écrits intermédiaires destinés à être communiqué aux pairs de la classe pour soit relancer les recherches, soit être débattus et aussi des écrits destinés à constituer une « mémoire » de la classe considérée comme une communauté qui élabore du savoir.

En fait, dans cette présentation, on peut repérer différents moments proposés dans la théorie des situations (Brousseau, 1998) pour conduire graduellement les élèves à préciser les connaissances utilisées pour résoudre un problème au sein de la communauté que constitue la classe. Le premier type d'écrits, les écrits de type « recherche » accompagne la situation d'action où les élèves abordent individuellement le problème et sont en recherche. Les « écrits destinés à être communiqués et discutés » correspondent à une situation de formulation pour préparer une situation de validation. Enfin par « écrits de référence » on peut comprendre des phases de décontextualisation et d'institutionnalisation.

Les travaux qui prennent en considération la production d'écrits par les élèves pour développer les apprentissages en mathématiques se situent en général dans ce modèle en prenant principalement en compte l'une ou l'autre de ces phases. De ce fait les potentialités de traitement qu'offre le matériau écrit lui-même ne sont pas mis en avant. En effet, comme nous allons le voir dans les travaux considérés, les fonctions principales qui sont attribuées aux écrits produits par les élèves sont principalement la fonction d'objectivation, la fonction de communication et la fonction de mémoire.

Ainsi dans la pratique innovante des narrations de recherche (Chevalier, 1993) c'est d'abord une fonction d'objectivation de sa propre action de recherche qui est mise en avant. Elle concerne la phase initiale de recherche dans la résolution d'un problème : « C'est l'exposé détaillé de la suite des activités qu'un élève met en œuvre lors de la recherche des solutions d'un problème ». Les écrits produits ont pour fonction pour les élèves de se convaincre eux même et convaincre un auditoire d'une idée, d'un chemin, vers une vérité (IREM PARIS 7, 2002). En second lieu, c'est donc aussi une dimension sociale qui est introduite avec une fonction de communication qui amène à développer les idées de recherche mais aussi des processus de validation de proposition au sein du groupe ou de la classe.

C'est cette perspective que l'on retrouve aussi clairement explicitée dans la brochure de l'IREM de Montpellier 2 à propos de l'enseignement de la racine carrée en troisième (Bronner, Pellequer, 2000) où les écrits des élèves à propos d'un test initial vont être confrontés et intervenir ainsi « pour modifier un milieu de façon à créer un conflit socio-cognitif » et « modifier le rapport personnel des élèves à l'objet racine carré élaboré en classe de quatrième et de construire de nouveaux savoirs sur la racine carrée ».

Avec les modalités d'enseignement proposées par Sensévy (1996), c'est aussi une dimension sociale qui est introduite par les écrits qui servent de support de communication pour développer un travail de réflexion et provoquer un accroissement épistémologique du travail de l'élève (Sensevy, 1996, p. 15) sur le modèle des communautés de chercheurs en mathématique. Le dispositif s'appuie sur le cahier individuel appelé « Le journal des fractions » où chaque élève d'une classe est amené à expliciter et à développer les rapports qu'il a avec certains objets d'enseignement du domaine concerné. Ce développement est provoqué par des questions comme par exemple « Qu'est-ce qui vous a semblé le plus intéressant ces derniers temps dans le domaine des fractions ? Qu'aimeriez-vous étudier, dorénavant ? » et par le traitement lors de débats organisés en classe des questions posées ou induites par les contenus de ces journaux comme par exemple « Lorsqu'on inverse le numérateur et le dénominateur d'une fraction, obtient-on le même nombre ? ». Ces écrits confrontés et discutés permettent aussi l'émergence d'une mémoire de la classe. Les écrits produits par les élèves mis en avant par Sensévy sont donc essentiellement vus comme des outils d'objectivation et de développement du savoir au sein de la communauté de la classe.

Même si les écrits collectifs produits servent moins systématiquement de support au développement de l'enseignement en cours, on retrouve ces orientations dans le cadre des « Bilans de savoir » proposés par Butlen et Pezard (2003). Les élèves doivent régulièrement résumer ce qui a été appris d'important et ce qu'il est important de retenir lors de certaines activités mathématiques. Les écrits individuels sont soumis au débat de l'ensemble de la classe et sont éventuellement améliorés puis recopiés dans chaque classeur individuel et le classeur collectif de la classe. Le but est ainsi « d'amener les élèves, par un retour collectif et réflexif sur leurs activités, à dépasser le stade de l'action et de prendre de la distance, par rapport au contexte des activités. » (Butlen, Pezard, p. 46). Les auteurs montrent ensuite que ce dispositif agit sur le processus de conceptualisation chez les élèves dont les écrits témoignent de degrés de décontextualisation et de généralisation qui évoluent au cours du temps.

En résumé, on peut donc dire que la dimension de réflexion et d'objectivation que suscite la rédaction ou la lecture des écrits demandés aux élèves apparaît chaque fois bien nettement dans les travaux et les instructions des programmes que nous venons d'évoquer. Les écrits produits permettent aux élèves de prendre conscience et d'exprimer leur degré d'engagement, de certitudes, de doutes, de questionnement par rapport aux énoncés qu'ils avancent. L'écriture apparaît alors comme étayant une marche vers les processus de validation en classe et vers la décontextualisation des savoirs dans la communauté constituée par la classe.

Mais la nécessité d'organiser et la possibilité matérielle de réorganiser individuellement sa pensée lorsqu'on est amené à écrire ou à se relire ne sont pas mises en avant dans ces travaux comme source d'apprentissage en mathématiques. Il s'agit là d'une fonction de traitement que permet l'écrit mise en avant par Vygotski qui est ignorée. L'importance de cette fonction est soulignée par les travaux de Duval (2000, p. 135) : « Pour l'apprentissage des mathématiques, il est crucial de passer à une production écrite qui utilise les possibilités cognitives spécifiques d'organisation et de contrôle qu'offre la représentation visuelle du discours ».

Duval développe cette perspective dans la compréhension de ce qu'est une démonstration en mathématiques. Pour lui ce n'est pas dans la recherche que se nouerait et se dénouerait la compréhension de la démonstration mais dans l'écriture (Duval, 1998, p. 184). C'est parce que l'expression écrite donne accès au discours, à son organisation, à ses opérations, à la portée de ses questions ou de ses assertions, (Duval, 1998, p. 193) que les élèves peuvent comprendre la différence entre une argumentation à laquelle ils ont spontanément recours pour convaincre un interlocuteur en géométrie et une démonstration qui possède une structure sous-jacente radicalement différente et qui n'est pas subordonnée à une situation d'interaction sociale. En l'occurrence pour permettre l'accès à cette compréhension, Egret et Duval (1989) proposent une objectivation par les élèves de leurs propres discours à l'aide d'une représentation par réseau. « Je me rends compte que je n'avais pas compris ce que j'avais écrit » déclare une élève après ce travail découvrant ainsi les secrets de la structure ternaire d'un pas de démonstration. A travers ce moyen les élèves accèdent ainsi progressivement à la compréhension de la structure d'une démonstration, compréhension qui déclenche la « jubilation » des élèves qui ont le moyen de valider de façon autonome leur raisonnement grâce au contrôle de leurs écrits en prenant appui sur une représentation du discours par un réseau.

On retrouve cette orientation qui prend appui sur les potentialités des modes de représentation pour développer la pensée dans le travail de Pressiat (2001) à propos de la résolution de problèmes de proportionnalité avec l'organisation des données en tableau. Ce travail met à l'épreuve dans des classes de sixième une stratégie d'enseignement qui « consiste à problématiser l'écrit comme partie intégrante du savoir, et en particulier comme composante des techniques de résolutions de problèmes et de contrôle de ces techniques. » (Pressiat, 2001, p. 82). La mise en tableau des données de problèmes relevant de la notion de proportionnalité y apparaît en effet comme un outil pour poser le questionnement, résoudre et contrôler les résultats des problèmes. Il n'est pas proposé d'emblée mais est découvert par les élèves eux-mêmes lorsqu'ils ont à produire et à analyser des écrits qui doivent permettre à d'autres élèves de répondre à la question de l'énoncé sans qu'ils aient cet énoncé sous les yeux.

Pour notre part, nous étions initialement dans une perspective qui utilise la production d'écrits comme un accompagnement objectivant du travail mathématique des élèves. Nous allons voir comment nous avons été amenés à mettre aussi à notre façon très radicalement le travail d'écriture et d'examen des écrits au centre de l'activité mathématique des élèves.

2. La perspective initiale du dispositif : des écrits réflexifs en appui à l'activité mathématique

2.1. Le contexte de l'expérience

La classe de CM1/CM2 de 24 élèves (9/11 ans) où s'est déroulée l'essai pris en considération ici était la classe de Mme Régine Baltz PEMF à l'école Karine de Strasbourg Hautepierre. L'école est située dans une « zone d'enseignement prioritaire » où des difficultés sociales dans l'environnement des élèves sont donc reconnues par l'Éducation Nationale. L'expérience s'est déroulée en novembre 2001 pendant 4 séances d'une heure chacune, espacées de 2 à 4 jours chaque fois.

2.2. Le contenu de l'enseignement

Le projet visait à initier les élèves à la notion de proportionnalité. Il s'agissait ici de l'aborder par la résolution d'un ensemble de problèmes mettant en jeu des traitements relevant de cette notion, les élèves étant pour cela libres de développer les rhétoriques qui leur semblent appropriées.

2.3. Un dispositif initial s'appuyant essentiellement sur les interactions sociales en classe

En première approximation nous nous situions globalement dans un dispositif s'appuyant sur les interactions sociales en classe. En effet, la perspective dans laquelle s'inscrivait a priori notre démarche était de proposer des problèmes abordables par les élèves avec leurs conceptions initiales. Des situations de communication entre pairs au sein de la classe devaient alors permettre aux élèves d'une part de formuler leurs raisonnements, puis de remanier leurs conceptions en fonction des défaillances et des contradictions qui peuvent se révéler dans une phase de débat qui se fait classiquement à l'oral.

2.4. Un accompagnement par des écrits réflexifs

Mais dans notre cas, ce dispositif s'appuyant sur les interactions sociales au sein de la classe, se spécifiait par un accompagnement explicite de la situation de formulation par des « écrits réflexifs » produits par les élèves. Nous avions déjà développé par le passé des expériences qui avaient pour but de favoriser chez les élèves la prise de conscience de leurs connaissances (Rauscher, 2001).

Dans le cas présent, nous pensions que l'étayage de la situation de formulation par des activités d'écriture réflexive permettrait de développer au sein de la classe un milieu au sens de la théorie des situations (Brousseau, 1998), un milieu qui faciliterait le passage de la situation de formulation à la situation de validation.

Pour cela nous ne faisions pas uniquement résoudre les problèmes proposés immédiatement. Nous avons proposé aux élèves un échantillon de problèmes et demandions aussi aux élèves de qualifier par écrit individuel, après discussion en binômes, ces exercices de « facile » ou « difficile » et de justifier leurs qualificatifs. Nous voulions ainsi créer une « distance réflexive » entre l'élève et son action qui l'amènerait à objectiver ce qu'il ferait pour résoudre certains exercices en repérant les différences et les similitudes entre les problèmes proposés. Nous savions bien que cette procédure constituait une rupture par rapport au contrat habituel où il s'agit de résoudre immédiatement le problème. Mais les expériences que nous avions développées dans des travaux précédents nous rendaient optimistes sur les potentialités réflexives de tels dispositifs. Dans une séance suivante, nous projetions de proposer un échantillon d'écrits d'élèves à toute la classe à fin de comparaison et de débats. L'échantillon sélectionné que nous envisagions devait permettre de mettre en lumière des points de vue divergents ou des procédures variées pour nourrir les échanges et le débat.

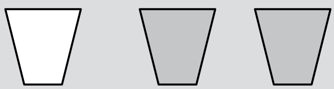
Le scénario initialement prévu au départ était donc le suivant :

	Corpus proposés à la réflexion des élèves	Tâches à effectuer par les élèves
Phase 1	Énoncés de 5 problèmes. Contenus sous jacent : la notion de proportionnalité	Après lectures individuelles et discussions par binômes, classement par écrits individuels des problèmes en facile/difficile et justifications
Phase 2 (3 jours après)	Des écrits sélectionnés de la phase 1	Comparaison et confrontation à l'oral, au sein de la classe.

2.5. Les problèmes choisis

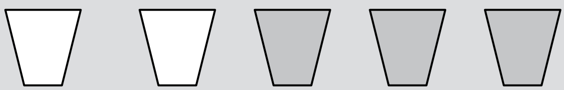
Dans une séance antérieure à la phase 1 nous avions remarqué un grand engouement qui se manifestait par des discussions animées au sein des binômes pour un problème de comparaison de mélanges.

On mélange dans une grande cruche ces deux verres de sirop de grenadine avec un verre d'eau.
N°1



On mélange dans une grande cruche ces trois verres de sirop de grenadine avec deux verres d'eau

N°2



Quel mélange a le plus le goût de la grenadine ?

Ce genre de problèmes paraissait donc susceptible de provoquer un questionnement suffisamment riche pour que les élèves puissent adhérer à l'idée d'écrire sur leur façon de les appréhender. Ils sont construits sur le modèle des problèmes analysés par Noelting (1980) et repris par Alarcon (1982) et Adjiage (2003).

Les réponses d'importants échantillons d'élèves devant de tels problèmes de comparaison de mélanges ont été analysées par Noelting (1980) en fonction des rapports en jeu et de l'âge des élèves. Le problème tel qu'il a été proposé ici la première fois est difficile pour des élèves de 9/10 ans car il ne peut se résoudre par la comparaison de quantités absolues mais fait intervenir de façon sous-jacente la comparaison des rapports 1/3 et 2/5. Certains élèves qui se sont exprimés la première fois à propos de ce problème ont produit la justification erronée suivante : *«Pour la première ligne, je prends le verre d'eau et le mets dans le premier verre de grenadine pour en enlever le goût, il reste un verre de grenadine dont on n'a pas enlevé le goût. Dans la deuxième ligne, je prends les deux premiers verres* *d'eau pour enlever le goût des deux premiers verres de grenadine, donc dans deux lignes, c'est le même goût. »*

De nombreux élèves ont été convaincus par ce raisonnement alors que d'autres sont restés bloqués. En fait une exploitation immédiate de ce problème s'est révélée impossible. Comment faire mettre en question un raisonnement erroné qui suscitait une forte adhésion ou l'incompréhension ?

Notre idée fut alors de replacer pour la phase 1(comparaison par écrit de la difficulté de problèmes) ce problème de comparaison de mélanges dans un échantillon de problèmes de même type mais pouvant se résoudre par des raisonnements plus accessibles aux élèves. L'échantillon de problèmes choisis devaient donc offrir des possibilités de traitements variés accessibles aux élèves. Voici les problèmes proposés (le 1er nombre désigne le nombre de verres d'eau, le 2ème celui de sirop) :

	Problème n°1	Problème n°2	Problème n°3	Problème n°4
1er mélange	1 pour 2	2 pour 1	2 pour 2	2 pour 2
2ème mélange	2 pour 3	4 pour 2	3 pour 3	3 pour 2

Remarque : les problèmes étaient bien sûr proposés avec la présentation figurative vue précédemment.

Voici une analyse a priori des procédures possibles :

– le problème n°1 est le même que celui proposé initialement et revient en terme de rapports à comparer 1/3 et 2/5. Dans la classification de Noelting (1980) se référant aux stades du développement logique de Piaget ce problème est placé à un niveau assez élevé (opérations formelles). Néanmoins Noelting y discerne la facilité suivante : les deux premiers termes de chaque paire sont dans un rapport entier. Cela veut dire ici que par exemple on pourrait doubler les quantités du premier mélange pour avoir deux verres d'eau dans chacun des mélanges et comparer ensuite les quantités de grenadine ;

– le problème n°2 revient à comparer 2/3 et 4/6. Il permet a priori d'obtenir et de confronter des avis différents résultant soit de procédures multiplicatives correctes (par exemple « *prendre deux fois le premier mélange pour obtenir le deuxième mélange* »), soit de procédures additives erronées (par exemple « *au deuxième mélange il y a deux verres d'eau de plus qu'au premier mélange et seulement un verre de grenadine de plus* »). Dans la classification de Noelting, ce problème trouve sa place dans les opérations concrètes avec la spécificité de mettre en jeu des rapports équivalents ;

- Les troisième et quatrième problèmes permettent a priori aux élèves de se situer par rapport 1/2 à l'intérieur de chaque mélange *(« moins ou plus que la moitié* ») et le problème 4 peut à vraie dire se traiter par une procédure additive (« *il y a deux verres de grenadine dans chaque mélange mais il y a un verre d'eau de plus dans le deuxième mélange* ». Dans la classification de Noelting, ces problèmes trouvent leur place dans les opérations concrètes mais de moindre niveau que le problème 2 parce que mettant en jeu des rapports équivalents à 1.

3. Le remaniement du dispositif : des écrits réflexifs au centre de l'activité mathématique

3.1. La posture naturelle des élèves par rapport à l'écriture : un obstacle

La phase 1 du dispositif initialement prévu a bien été expérimentée mais nous avons été amenés à reconsidérer la suite du processus prévu. En effet, la situation de formulation mise en place par la comparaison écrite des problèmes, ne permettait pas l'entrée dans une situation d'explicitation, de comparaison et de validation des traitements possibles. Nous étions devant le fait que les productions des élèves étaient trop disparates et incomplètes pour pouvoir en extraire des éléments qui permettraient d'amorcer un travail sur la comparaison des problèmes et les différents traitements possibles dans les situations de comparaison de mélanges. Dans les écrits produits, on trouvait bien quelques développements complets sur le modèle de l'exemple 1 qui suit ou quelques repérages assez précis des difficultés rencontrées comme pour l'exemple 2.

Exemple 1 : « Le problème n°4 est *plutôt facile car il y a 2 verres d'eau et 2 verres de grenadine donc on sent encore la grenadine et au 2ème mélange il y a 3 verres d'eau et 2 verres de grenadine alors maintenant on ne sent plus le goût alors c'est le premier mélange qui sent la grenadine. »*

Exemple 2 : « Le problème n°3 est plutôt difficile *parce qu'il y a le même nombre de verre de grenadine et d'eau et je n'arrive pas à comparer. »*

Ces productions auraient pu éventuellement servir de support pour amorcer une confrontation de points de vue entre élèves. Mais dans la grande majorité des cas les raisonnements et les informations sur lesquels ils étaient basés n'étaient pas décelables comme le montre les trois exemples 3, 4 et 5.

Exemple 3 : « Le problème n°4 est *le plus facile car le 1er mélange a deux verres d'eau et de grenadine »*

Exemple 4 : « Le problème n°1 est facile : parce que on a mis un peut de l'eau »

Exemple 5 : « Le problème n°4 est difficile parce qu'il faut faire un petit calcul »

En fait par leurs écritures bien incomplètes, on pouvait repérer deux faits. Le premier c'est que certains élèves étaient loin d'avoir prise sur les traitements possibles pour réaliser ces comparaisons de mélange. Le deuxième est que les élèves, même s'ils avaient une idée de ces traitements, étaient dans une posture de communication de type orale ou de pensée pour soi qui laisse implicite des éléments de leurs raisonnements (Duval, 1998). Pour distinguer l'oral de l'écrit Vygotski (1934/1997) analyse que dans les communications orales habituelles les sous-entendus se produisent parce qu'ils s'appuient sur le contexte partagé de la conversation et qu'il y a toujours un interlocuteur qui peut demander des précisions sur ce qui a été dit. En revanche lorsqu'on écrit pour être compris il faut donner ces précisions d'emblée sans interlocuteur pour vous relancer. L'écriture a donc des exigences que l'oral n'a pas.

3.2. Les enjeux d'un changement de posture par rapport à l'écriture

Ici, dans un premier jet, l'écrit des élèves était un reflet de leurs pensées avec toutes les incomplétudes non gênantes quand on pense habituellement pour soi mais rédhibitoires lorsqu'on veut être compris. Nous ne pouvions pas nous appuyer sur les écrits produits dans une posture orale pour faire comparer aux élèves leurs raisonnements. On peut penser que dans la plupart des cas, c'est ce qui fait que les enseignants renoncent alors à l'idée de s'appuyer sur les écrits des élèves en classe. Pour notre part nous pensions qu'abandonner le travail à ce moment là revenait à abandonner des élèves qui avaient déployé une activité d'écriture réflexive non négligeable. Certaines productions écrites laissaient apparaître un travail de réflexion et d'objectivation de la pensée de la part de ces élèves comme le montre l'exemple 6 suivant : « Le problème n°2 est plutôt difficile *: ~~Parce que~~ c'est plus facile que le 4ème parce que c'est là où j'ai le mieux compris entre le 4 et le 2 il y a plus d'eau que de grenadine au 1er mélange.* »
Il se dégageait alors la nécessité d'envisager une nouvelle dimension dans les activités proposées aux élèves : celle de la possibilité ou de l'initiation au passage d'une « posture orale » par rapport à l'écriture à une « posture écrite » qui permettra aux élèves de produire des écrits compréhensibles par autrui. Ecrire pour être compris dans le développement d'un raisonnement en mathématiques nécessite une prise en compte des contraintes de l'expression écrite. Mais non seulement le scénario remanié que nous avons alors élaboré allait les prendre en compte par nécessité d'être compris mais il allait en faire un point d'appui pour l'élève pour se comprendre par le contrôle de sa propre écriture. Alors que dans le dispositif initial l'écrit ne pouvait intervenir qu'en appui à l'activité mathématique comme matériau d'échanges entre élèves, cette fois ci nous faisions l'hypothèse qu'il pouvait y occuper une place centrale.

3.3. Le dispositif remanié

Pour passer d'une posture orale dans l'écriture à une posture d'écriture, l'idée était de faire passer les élèves d'un *« j'écris »* qui est équivalent au départ à un *« je dis »*

à un *« qu'est ce que j'écris ? »* et ceci non pas sur le fond de ce qui est dit mais sur la forme. Il s'agit de provoquer une observation réfléchie de la structure des discours produits et non pas immédiatement des contenus des discours. C'est ce travail d'observation qui devrait permettre a priori aux élèves d'avoir prise sur leurs pensées.
Pour neutraliser la question des contenus des problèmes nous avons choisi comme support d'observation les réponses des élèves relatives à un même problème qu'une grande majorité d'élèves avait qualifié de facile. Il constituait donc un bon support parce que la majorité des élèves y avait eu accès et avaient développé un raisonnement à son sujet. On pouvait donc attirer l'attention des élèves sur la structure de ce qu'ils avaient écrit. Quel était le scénario proposé aux élèves pour cela ?
Nonobstant le changement d'objet à faire observer aux élèves, il est dans la continuité du processus amorcé : il s'agissait de faire comparer six productions écrites sélectionnées par le professeur et de les comparer. Le but de la séance était annoncé aux élèves : il s'agit en fin de compte de rendre les argumentations plus compréhensibles et complètes. Le travail de comparaison a d'abord été mené par deux avec production écrite des remarques. Une mise en commun dirigée par la maîtresse au tableau a eu pour but de dégager de façon synthétique les défauts et les qualités des différentes productions soumises. A la fin de la séance, après la récréation, il a été demandé aux élèves de reprendre le plus complètement possible par binômes au problème 4.

Le scénario final complet qui a été mené à son terme était alors le suivant :

	Corpus proposés à la réflexion des élèves.	Tâches à effectuer par les élèves.
Phase 1	Énoncés de problèmes. Contenus sous jacent : la notion de proportionnalité.	Après lectures individuelles et discussions par binômes, classement par écrits individuels des problèmes en facile/difficile et justifications.
Phase 2 (quelques jours après la phase 1)	4 énoncés de problèmes de comparaison de mélanges se distinguant par des possibilités de traitements variés.	Après lectures individuelles et discussions par binômes, classement par écrits individuels des problèmes en facile/difficile et justifications.
Phase 3 (3 jours après la phase 2)	6 productions écrites relatives à l'un des problèmes jugés majoritairement faciles par les élèves. Les productions se différencient par leurs structures.	Après lectures individuelles et discussions à deux, explicitation par écrit des différences formelles entre les productions. Synthèse organisée à l'oral par la maîtresse et résumée au tableau.
Phase 4 (dans la même séance que la phase 2)	L'énoncé du problème jugé majoritairement facile.	Rédiger la solution du problème.

3.4. Le support de réflexion proposé aux élèves dans le dispositif remanié

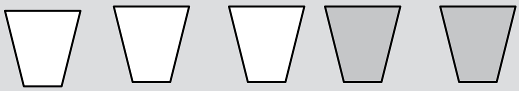
Nous avons choisi comme support d'observation les réponses des élèves relatives au problème n°4 :

On mélange dans une grande cruche ces deux verres de sirop de grenadine avec deux verres d'eau

N°1

On mélange dans une grande cruche ces trois verres de sirop de grenadine avec deux verres d'eau

N°2



Quel mélange a le plus le goût de la grenadine ?

Notre choix des écrits initiaux (résultant de la phase 2) soumis à l'observation des élèves dans la phase 3 peut se comprendre à partir de l'analyse a priori des traitements possibles pour résoudre le problème.

Le problème présente deux mélanges (le 1^{er} et le $2^{ème}$) et deux ingrédients (eau et grenadine). La comparaison des mélanges pour déterminer le mélange qui a le plus le goût de la grenadine demande une prise en compte organisée des ces quatre données pour pouvoir aboutir à une conclusion en passant éventuellement par des conclusions intermédiaires. Nous appelons ici « traitement » le processus qui comporte la prise en compte organisée des données, les conclusions intermédiaires et la conclusion. La prise en compte organisée est une reprise ou une réorganisation des données telles qu'elles sont présentées dans l'énoncé initial. Une présentation sous la forme d'un tableau 2x2 rend compte des données et des différentes prises en compte possibles.

	Eau	*Grenadine*
1^{er} mélange	*2 verres d'eau*	*2 verres de grenadine*
$2^{ème}$ mélange	*3 verres d'eau*	*2 verres de grenadine*

Nous pouvons distinguer deux entrées possibles, l'une par ligne, l'autre par colonnes. Elles donnent lieu à des traitements pertinents du problème de comparaison. Nous écartons une entrée par les diagonales, formellement possible mais qui ne permet pas de déboucher sur un traitement pertinent.

1ère entrée possible par les lignes que nous appellerons « entrée par les mélanges »

Cette entrée reprend les données telles qu'elles sont présentées en ligne dans l'énoncé et compare les quantités à l'intérieur de chaque mélange avec des conclusions intermédiaires, avant de mettre en parallèle les conclusions intermédiaires pour conclure.

Dans le premier mélange

Rappel des données *: Il y a* *2 verres d'eau* *et* *2 verres de grenadine.*

Comparaison des quantités *« Il y a donc autant d'eau que de grenadine dans le 2ème mélange ».*

Dans le deuxième mélange

Rappel des données *: « Il y a* *3 verres d'eau* *et* *2 verres de grenadine* *».*

Comparaison des quantités *: « Il y a donc plus d'eau que de grenadine dans le 1er mélange ».*

Mise en parallèle des deux mélanges

1) *« Il y a* *autant* *d'eau que de grenadine dans le premier mélange ».*
2) *« Il y a* *plus* *d'eau que de grenadine dans le deuxième mélange ».*

Conclusion :

« Le premier mélange a plus le goût de la grenadine que le deuxième ».

2ème entrée possible par les colonnes que nous appellerons « entrée par les ingrédients »

Cette entrée réorganise les données telles qu'elles sont présentées en lignes en privilégiant une lecture par colonnes (qui ne s'impose pas a priori dans la présentation du problème). Elle considère successivement chaque ingrédient en comparant chaque fois les quantités présentes.

Comparaison des quantités d'eau

Rappel des données *: « Il y a* *2 verres d'eau* *dans le premier mélange et* *3 verres d'eau* *dans le deuxième mélange ».*

Comparaison des quantités *« Il y a donc moins d'eau dans le 1er mélange que dans le 2ème ».*

Comparaison des quantités de grenadines

Rappel des données *: «Il y a* *2 verres de grenadine* *dans le premier mélange et* *2 verres de grenadine* *dans le 2ème mélange. »*

Comparaison des quantités *: « Il y a autant de grenadine dans chaque mélange »*

Mise en parallèle des deux mélanges

1) *« Il y a* *plus* *d'eau dans le 2ème mélange que dans le 1er ».*
2) *« Il y a* *autant* *d'eau que de grenadine dans chaque mélange ».*

Conclusion :

« Le premier mélange a plus le goût de la grenadine que le deuxième ».

Il est à remarquer que même si les élèves peuvent utiliser le rapport ½ dans chacun des deux raisonnements, ils peuvent s'en tirer en comparant uniquement des quantités absolues (plus, moins, autant). Nous avons donc bien un problème qui est accessible aux élèves. Cela peut expliquer qu'une majorité d'élèves ait qualifié ce problème de « facile » et ait produit des amorces de raisonnements corrects pour le justifier. Néanmoins la mise en parallèle des deux mélanges en tenant compte des deux ingrédients est nécessaire car sinon on peut arriver à une conclusion correcte avec un raisonnement faux si l'on ne tient compte que d'un seul des deux ingrédients : *« Il y a plus d'eau dans le 2ème mélange que dans le 1er donc il a plus le goût de l'eau »* ou encore *« Il y a autant de grenadine dans chacun des mélanges donc ils ont le même goût »* . La mise en parallèle des deux mélanges en tenant compte des deux ingrédients est donc nécessaire pour produire un traitement pertinent complet. Or les productions écrites des élèves étaient souvent incomplètes sur ce point essentiel dans la compréhension et la maîtrise du problème.

Les six textes constituant l'échantillon proposé à l'observation des élèves ont alors été choisis parce qu'ils se différencient sur les aspects suivants qui déterminent le degré d'explicitation de ces traitements :

- *nombre de mélanges évoqués ;*
- *répétition des données ou non ;*
- *présence d'arguments ou non ;*
- *présence d'une conclusion ou non.*

Voici l'échantillon d'écrits initiaux proposés à l'observation des élèves :

Le problème 4 est :
Réponse 1 : *plutôt facile car il y a trois verres d'eau et deux verres de grenadine au 2ème mélange, tandis qu'au 1er mélange, il y a deux verres d'eau et 2 verres de grenadine donc c'est sûr.*
Réponse 2 : *plutôt facile car le 1er mélange est égaux, ça a le même goût.*
Réponse 3 : *le plus facile car le 1er mélange a deux verres d'eau et de grenadine.*
Réponse 4 : *plutôt facile car il y a 2 verres d'eau et 2 verres de grenadine donc on sent encore la grenadine et au 2ème mélange il y a 3 verres d'eau et 2 verres de grenadine alors maintenant on ne sent plus le goût alors c'est le premier mélange qui sent la grenadine.*
Réponse 5 : *le plus facile parce qu'au 1er mélange, il y a deux verres d'eau et deux verres de grenadine. Au 2ème il y a trois verres d'eau et deux verres de grenadine.*
Réponse 6 : *le plus difficile car il y a moins de grenadine que de l'eau alors plus d'eau.*

Voici alors les profils des six textes :

Aspects repérés	Rép. 1	Rép. 2	Rép. 3	Rép. 4	Rép.5	Rép.6
Qualificatif du problème 4	Facile	Facile	Facile	Facile	Facile	Difficile
Nb. de mélanges évoqués	2	1	1	2	2	0
Répétition des données	oui	non	non	oui	oui	non
Présence d'arguments	non	oui	non	oui	non	oui
Présence d'une conclusion	non	oui	non	oui	non	non

Le dispositif proposé aux élèves les appellent à objectiver et à contrôler la structure de leurs écrits. Il reste maintenant à savoir quels effets il a eu sur la forme de leurs écrits mais aussi sur la découverte et la compréhension des traitements en jeu dans les problèmes de comparaison des mélanges.

4. Les écrits réflexifs au centre du dispositif : évaluation des effets

4.1. L'objet et la méthode d'évaluation

Pour évaluer les effets du dispositif, nous nous poserons deux questions. D'une part peut-on constater un travail de reprise et de réorganisation par les élèves de leurs propres pensées initiales ? D'autre part peut-on constater une avancée dans l'appréhension des traitements possibles dans les problèmes de comparaison de mélanges ?

Au cours du déroulement des trois séances nous avons recueilli les écrits produits par les élèves. A savoir, successivement, les écrits obtenus lors de la comparaison par les élèves des quatre problèmes de comparaison de mélanges, puis les écrits obtenus lors de la comparaison par les élèves des six raisonnements relatifs au problème n°4 et enfin les écrits obtenus lors de la reprise par les élèves du problème n°4. Nous pouvons donc repérer les évolutions des élèves à partir de là.

Nos observations ont porté sur deux points qui permettent de voir dans quelle mesure il y a un travail de réorganisation de la pensée et une acquisition de connaissances à travers la procédure expérimentée :

1) Peut-on repérer des évolutions dans les traitements mathématiques effectuées pour comparer les mélanges ? En particulier voit-on des abandons de traitements

erronés ? Des amorces de traitements corrects ? Des acquisitions de traitements corrects ?

2) Peut-on repérer des postures réflexives dans les écrits produits ? Il s'agit pour cela de repérer des indices de prise en charge par les élèves de leurs propres discours, par exemple des verbes conjugués à la première personne ou encore des connecteurs logiques qui indiquent un retour sur ce qui vient d'être écrit. Si oui, il s'agit de signes qui montrent qu'un processus de compréhension ou une tentative de validation interne sont en cours.

4.2. Les profils de progressions repérés

Après examen de l'ensemble des productions nous distinguons trois groupes d'élèves qui se différencient par des points de départ différents et des évolutions différentes. Nous allons globalement caractériser ces groupes pour ensuite présenter les productions de quatre élèves et les analyses que nous en avons faites.

Un premier groupe d'élèves pour qui le problème était d'emblée à portée. Ces élèves se caractérisent par des écrits qui témoignent d'emblée d'un traitement pertinent et repérable de la situation de comparaison de mélanges proposée même si des parties de leurs raisonnements restent implicites. Ce groupe compte 4 ou 5 élèves de la classe. Les progrès qu'ils ont réalisés résident dans un contrôle affirmé des traitements qu'ils ont effectués. Nous analyserons plus précisément le cas d'**Anna** représentatif de ce groupe.

Un deuxième groupe d'élèves pour qui le problème était difficile au départ mais qui ont progressé. Beaucoup d'élèves étaient au départ dans des dispositions a priori défavorables dans la compréhension et le traitement du problème. Il s'agissait alors de repérer si parmi ces élèves certains feraient des progrès importants ainsi que la nature de ces progrès. Le cas d'**Hassan** est représentatif d'un groupe non négligeable de tels élèves (une dizaine) qui progressent sur la compréhension et le traitement du problème par une activité réflexive de reprise et de réorganisation de leurs pensées à travers l'examen des textes produits.

Un troisième groupe d'élèves pour qui le problème était difficile au départ mais pour lesquels les changements observés ne témoignent pas réellement de progrès. Nous retrouvons dans ce groupe à peu près une dizaine d'élèves qui sont en majorité, mais pas exclusivement, des élèves de CM1. Comme représentatif de ce groupe, nous présenterons le cas de **Steve** qui au départ ne donne aucune indication sur des traitements possibles. En fin de travail, il apparaît nettement que lire et écrire reste pour lui des actes formels qui ne permettent pas encore d'avoir prise sur sa pensée.

4.3. Anna, Hassan et Steve : trois exemples représentatifs d'évolutions observées

Pour chaque cas d'élève, nous présentons en encadré ses écrits, à savoir successivement les écrits produits lors de la phase 2 (comparaison des 4 problèmes), puis de la phase 3 (comparaison des raisonnements relatifs au problème n°4) et enfin de la phase 4 (reprise du problème n°4). Nous procédons ensuite à l'analyse de ces écrits. Nous n'avons jamais effectué de correction aux écrits des élèves et nous les rapportons dans leur intégralité.

4.3.1. L'évolution d'Anna (CM2) représentative du groupe 1

Les écrits d'Anna

Comparaison des 4 problèmes

Le problème n°4 est facile : *car dans les deux lignes il y a deux verres de grenadine mais dans la première ligne il y a deux verres d'eau et dans la deuxième 3 verres d'eau, donc il est simple.*

Le problème n°1 est difficil**e** : *car dans la première ligne il y a deux verres de grenadine et 1 verre d'eau ; dans la deuxième 3 verres de grenadines et* $\boxed{2}$ *d'eau. C'est trop dure à comparer.*

Le problème n°2 est plutôt : *facile car 1 : il a un verre de grenadine et 2 d'eau.*
2 : 2 grenadine et $\boxed{4}$ *d'eau.*

Le problème n°3 est plutô**t** : *dure car je n'arrive pas à comparer.*

Comparaison des raisonnements relatifs au problème n°4

Ce qui manque à la réponse 1 **:** *il n'a pas dit la réponse.*
donc c'est sûr que c'est le 1er mélange qui a le plus le goût de la grenadine.

Ce qui manque à la réponse 2 :*il a oublié de d'écrire le 2ème mélange.*
*…et le 2ème mélange à 2 verres de grenadine et 3 d'eau, donc c'est le 1er mélange qui a le plus de goû**t.***

Ce qui manque à la réponse 3 : *il a pas dit la réponse et de décrire le 2ème mélange***.**

Ce qui manque à la réponse 4 *:il a tout dit*

Ce qui manque à la réponse 5 **:** *il a oublié de décrire qu'elle cruche à le plus de goût.*

Ce qui manque à la réponse 6 : *il a pas dit le premier mélange et la réponse.*

Reprise du problème n°4

C'est le premier mélange qui a le plus le goût de la grenadine car dans le premier mélange il y a deux verres d'eau et deux de grenadine ; et dans le 2ème mélange il y a trois verres d'eau et deux de grenadine, donc il y a pareille de grenadine, mais dans le 2ème mélange il y a plus de verres d'eau que dans le premier ; et comme ça se mélange donc c'est le 1er qui a le plus le goût de la grenadine.

Analyse du travail d'Anna

1ère étape

Traitements

Entrée par les ingrédients au mélange 4 : mise en parallèle des quantités d'eau avec les quantités de grenadine. Anna repère qu'il y a deux verres de grenadine dans chacun des mélanges et met en parallèle ce fait avec les quantités différentes d'eau qu'il y a dans les deux mélanges. Pour le problème n°1 : elle met en parallèle les deux mélanges cette fois-ci. Mais le fait qu'elle souligne le $\boxed{2}$ d'eau laisse supposer qu'elle essaye d'appliquer la même stratégie et se heurte au fait qu'il n'y a pas de quantités communes de grenadine. Pour le problème n°2 : ce problème est qualifié de facile. Mais le traitement qu'elle applique n'est pas explicite. Le fait qu'elle souligne le $\boxed{4}$ d'eau laisse imaginer qu'elle a repéré un coefficient multiplicateur. Nous pencherions par le repérage en colonne car dans le problème n°3 qui prête à un traitement accessible en ligne, elle déclare forfait. Il est vrai que 3 n'est pas un multiple de 2.

Indices d'une posture réflexive

On peut repérer des expressions qui indiquent une implication personnelle d'Anna dans son écrit. Elles témoignent d'une objectivation de sa posture réflexive : *« je n'arrive pas », « c'est trop dure ».*

2ème étape

Traitements

Anna fait une analyse très minutieuse des éléments formels qui manquent pour que les traitements indiqués par les six productions soient complets.

Indices d'une posture réflexive

Le constat est énoncé en rapportant les manques à un *« il »* qui désigne l'élève dont on examine la production : *« il a », « il n'a pas ».*

3ème étape, la production finale

Traitements

L'écrit final est très complet du point de vue du traitement qu'il expose. On peut observer une modification formelle par rapport à sa première référence au problème n°4 : alors que la première fois, Anna se focalisait sur les quantités de grenadine, cette fois-ci elle reproduit fidèlement la description des deux mélanges comme ils sont présentés dans l'énoncé, à savoir « en lignes ». On peut imaginer qu'il s'agit là d'un effet de la prise en compte du cahier de charge formel élaboré par la classe en synthèse de la 2ème étape. Mais ce changement n'entraîne pas de changement de traitement puisque Anna se focalise à nouveau très vite sur un traitement en colonnes : « *donc il y a pareille de grenadine, mais dans le 2ème mélange il y a plus de verres d'eau que dans le premier ».* Il y a donc stabilité dans le traitement qu'applique Anna au cours de ce travail pour résoudre le problème 4.

Indices d'une posture réflexive
Si le traitement du problème 4 était déjà visible au début, l'écrit final apparaît plus étoffé par des conclusions intermédiaires, et des expressions qui témoignent de reprises par Anna de son propre discours : *« donc il y a », « et comme ça se mélange »*.... Cela donne à cet écrit final un aspect de discours très cohérent.

En conclusion pour le cas d'Anna
Anna savait déjà traiter le problème n°4 au début du scénario. On peut alors se demander quel est le bénéfice qu'elle retire à propos de cette situation, au-delà d'une amélioration formelle de son écrit. On peut estimer que ce progrès est assez minime et qu'il n'était pas nécessaire de déployer tout ce dispositif pour cela. Nous ne le pensons pas car on peut constater que sa prise de distance réflexive lui a permis d'affirmer davantage encore sa conviction en explicitant et en contrôlant complètement son raisonnement en bout de course. Elle est entrée dans une posture écrite par rapport à l'écriture qui lui sera utile pour aborder des problèmes plus difficiles pour elle. La question qui subsiste néanmoins est de permettre à Anna de trouver d'autres traitements possibles pour résoudre les trois autres problèmes qui dans un premier temps lui résistent. Nous émettrons à ce sujet quelques hypothèses en conclusion de notre étude.

4.3.2. L'évolution d'Hassan (CM2) représentative du groupe 2

Les écrits de Hassan

<u>Comparaison des 4 problèmes</u>
Le problème n°1 est facile : *car il y a deux verres de grenadine et un verre d'eau alors on prend la moitié du verre et en le mais dans le premier verre de grenadine et en prend l'otre moitier et on le mais dans l'otre verre de grenadine.*
Le problème n°2 est difficile : *car il y a 4 verre de grenadine et deux verres d'eaux, avec les deux verres d'~~eaux~~ grenadine on prend le premier verre et on prend la moitier et en le mais dans le premier verre d'eau instsuite*
Le problème n°3 est plutôt : *facile car ils sont égaux*
Le problème n°4 est plutô**t** : *moyen car defois il faut faire la moitier de la moitier*

<u>Comparaison des raisonnements relatifs au problème n°4</u>
Ce qui manque à la réponse 1 :
C'est que le premier mélange a le plus de goût. Au deuxième goût il y a 3 verres d'eau et 2 vers de grenadine c'est évident et ~~y~~ il y aura plus de gout d'eau.
Ce qui manque à la réponse 2 :
Ce que j'ai compris c'est que il y a deux verres d'eau et deux verres de grenadine ca va donner le même gout, mais c'est avec des chiffres pére c'est pour cela qu'il a dit que sa va donner le même gout.
Ce qui manque à la réponse 3 :
C'est la même chose que la réponse 2 sauf c'est mieux expliqué, que la réponse 2.

Ce qui manque à la réponse 4 **:** *bien expliqué*
Ce qui manque à la réponse 5 :
Le premier mélange ~~et~~ est la même chose que la n°2 réponse 2 et 1. Au deuxième mélange il y a trois vere d'eau et deux vere de grenadine alors l'eau est supérieur au vere de grenadine on ora plus du gout d'eau.
Ce qui manque à la réponse 5 :
Je l'ai pas bien compris car il y a combien de vere d'eau et de grenadine "on le c'est pas"

<u>Reprise du problème n°4</u>
Quel mélange a le plus le goût de la grenadine *? Le mélange qui à le plus de la grenadine est le premier mélange.* Pourquoi ? *Car il y a deux vers de grenadine et de vers d'eaux c'es égaux car sa va donner le même gout et que le 2ème mélanges plus d'eau que le premier mélange alors il y aura plus du goût d'eau »*

Analyse du travail d'Hassan

1ère étape

Remarque préalable. Hassan trouve que le problème le plus facile est le n°1 et le plus difficile le n°2. Il considère ensuite les problèmes 3 et 4. On peut penser qu'il les a considérés dans l'ordre ce qui laisse planer un doute sur les qualificatifs (imprimés) attribués aux deux premiers problèmes. En revanche on peut être sûr qu'il a lui-même choisi les qualificatifs pour les deux derniers problèmes.

Traitements

Hassan expose une manipulation à répéter : un demi-verre d'un des ingrédients à verser dans un verre contenant l'autre ingrédient *(« instsuite »* comme il écrit). Mais chaque fois qu'il fait cela, il ne considère que le premier des deux mélanges sans apporter de conclusion. On peut alors se poser des questions sur sa représentation du problème (Julo, 1995). Le fait qu'il pense que le problème n°3 est facile parce qu'il y a égalité ne nous éclaire pas davantage. Ni sa remarque pour le problème n°4 où il envisage la nécessité de faire évoluer sa procédure.

Indices d'une posture réflexive

Dans la première étape, il n'y a pas trace de personnalisation de l'écrit.

2ème étape

Traitements

Dans cette étape, Hassan effectue un repérage très minutieux des défauts et des manques dans les six productions qu'il a à examiner.
Manque d'arguments qu'il ajoute (pas toujours judicieusement) : *« mais c'est que avec des chiffres pére c'est pour cela qu'il a dit que sa va donner le même gout. »*
Manque d'indication de données : *« il y a combien de vere d'eau et de grenadine "on le c'est pas" ».*

Il repère le manque d'évocation des deux mélanges : cela n'apparaît pas dans l'examen des réponses 2 et 3 où il se laisse emporter dans la focalisation sur un seul des mélanges mais dans l'examen de la réponse 5 où il marque le point commun avec les réponses 2 et 3 mais complète par l'évocation du deuxième mélange et conclut globalement pour l'ensemble de la comparaison des mélanges.

Indices d'une posture réflexive

Si dans la première étape, il n'y a aucune trace de personnalisation de l'écrit. En revanche dans la deuxième étape les *« il y a »* et *« on »* très neutres de la première étape laissent place à des expressions plus personnelles. On voit petit à petit comment il objective les éléments des textes : *« ce que j'ai compris » « je l'ai pas bien compris » « c'est mieux expliqué »*. On voit le travail de compréhension et de contrôle qu'il fait par là en reprenant les six productions pour en pointer les manques. Il prend à cœur ce travail, essaye de se convaincre à partir des écrits de ses camarades.

3ème étape, la production finale

Traitements

Dans la dernière étape en revanche il présente un traitement complet de la situation avec une entrée par les mélanges : comparaison des ingrédients à l'intérieur de chaque mélange et mise en parallèle des deux mélanges avec des conclusions intermédiaires pertinentes même si elles sont maladroitement exprimées : « *sa va donner le même gout*. » *; « il y aura plus du goût d'eau »*

Indices d'une posture réflexive

Alors que dans la première étape, il n'y avait qu'une description neutre de manipulations, les connecteurs logiques (*« car » ; « alors »*) indiquent ici un discours réfléchi.

En conclusion du cas d'Hassan

Avec Hassan, on a l'exemple d'un élève qui a progressé sur la compréhension du problème : à la fin il prend en compte les deux mélanges et les deux ingrédients. Il a aussi progressé sur la coordination de ces données pour effectuer un traitement assumé du problème. Il nous semble que le moment-clé qui lui a permis de progresser ainsi est la deuxième phase du dispositif où on voit qu'il exerce un travail de réorganisation de sa pensée à partir de l'examen des productions écrites des autres élèves du point de vue de leur forme. De la forme au fond, il franchit le pas pour arriver à ce qu'on peut considérer un processus de validation interne.

4.3.3. L'évolution de Steve (CM2) représentative du groupe 3

Les écrits de Steve

<u>Comparaison des 4 problèmes</u>
Le problème n°3 est facile : *parce que y a le même goût.*
Le problème n°1 est difficile : *car il faut faire un petit calcul. .*
Le problème n°4 est plutôt : *facile car il faut faire un petit calcul.*
Le problème n°1 est plutôt : *facile car il faut faire un petit calcul.*

<u>Comparaison des raisonnements relatifs au problème n°4</u>
Ce qui manque à la réponse 1 : *vous diser pas quel est la deuxième réponse.*
Ce qui manque à la réponse 2 : *mais il a pas mit le deuxièmes.*
Ce qui manque à la réponse 3 : *mais il a pas mis le deuxièmes.*
Ce qui manque à la réponse 4 : *il est bien il a mis le deuxièmes est le premier*
Ce qui manque à la réponse 5 : *il est bien car il a mis le premier et le deuxièmes.*
Ce qui manque à la réponse 6 : *il a pas pas mis la réponse du deuxièmes.*

<u>Reprise du problème n°4</u>
« C'est le premier qui a le plus le goût parce-que le premier a deux verres d'eau et deux verre de grenadine et le deuxièmes a trois verre d'eau et deux verre de grenadine ».

Analyse du travail de Steve
1ère étape
Traitements
Steve qualifie de facile l'exercice 3 et justifie son appréciation de façon succincte *: « parce qu'il y a le même goût ».* Il n'explicite pas les caractéristiques qui permettent cette conclusion. Aucun mélange, ni ingrédient n'est indiqué. On peut supposer qu'il a remarqué les équilibres qui caractérisent chacun des mélanges. Dès qu'on n'est plus dans ce cas de figure, il évoque la nécessité d'un *« petit calcul »*. A part cela, il n'y aucune amorce de présentation d'un traitement à effectuer.
Indices d'une posture réflexive
Dans la première étape, il n'y a pas trace de personnalisation de l'écrit.

2ème étape
Traitements
Steve signale de façon très formelle la présence ou la non présence de l'évocation de certains éléments dans les textes. Mais dans la plupart des cas on ne sait pas s'il parle d'un mélange ou d'une conclusion : *« il a pas mis le deuxièmes ».*
Indices d'une posture réflexive

Dans cette étape, il semble entrer dans une posture dialogique. Dans sa première remarque il s'adresse à l'élève qui a écrit le texte *: « vous diser pas.. »*. Il revient ensuite à une position plus distanciée en utilisant ensuite la 3ème personne du singulier : *« il a pas mis.. »*. Mais il en reste à un constat très formel sans jamais dire ses difficultés de compréhension et sans jamais reprendre un traitement comme ont pu le faire Anna ou Hassan.

3ème étape, la production finale

Traitements

Il y a un changement important par rapport aux écrits de la première étape : les deux mélanges et les deux ingrédients sont évoqués. Mais il n'y a pas de conclusions intermédiaires qui indiqueraient un traitement de ces données.

Indices d'une posture réflexive

Aucun connecteur logique, aucune expression personnelle ne laisse supposer qu'il y a production d'un discours réfléchi.

En conclusion du cas de Steve

Steve fait partie des élèves chez lesquels on ne peut pas déceler d'indices d'un véritable travail de reprise et de réorganisation des écrits initiaux : il apparaît nettement que lire et écrire reste pour lui des actes formels qui ne permettent pas encore d'avoir prise sur sa pensée. Le fait que plusieurs élèves de CM1 fassent partie de cette catégorie d'élève pose question. S'agit-il d'une question de développement logique de ces élèves ? Ou d'un développement trop rudimentaire encore des capacités d'écriture et de lecture ? En tout cas ces élèves nous interrogent sur la pertinence de notre dispositif à leur égard.

Conclusion

Avec le projet remanié nous avons été amenés à mettre le travail de comparaison et de contrôle de la structure des écrits produits au premier plan de l'activité. Pour ce travail de contrôle de la structure des écrits, nous avons choisi de centrer les élèves sur un problème qui ne présentait pas de difficulté pour être résolu et, qu'à juste titre, les élèves estimaient « facile ». De ce fait, il n'y avait pas de travail heuristique trop important à la charge des élèves.

Au moment de la conclusion on peut alors se poser deux questions. La première se rapporte aux bénéfices qu'ont tiré les élèves des activités proposées. L'autre est de savoir si en centrant l'attention des élèves sur un problème facile nous avons permis aux élèves de progresser sur les apprentissages mathématiques.

Une observation nous donne d'emblée une indication : l'engouement des élèves que nous avions noté initialement à propos du problème des mélanges avec des proportions difficiles à comparer ne s'est pas démenti lors du travail d'observation de la structure des écrits produits à propos du problème plus facile. Tant dans la phase individuelle d'examens des productions des camarades que dans la synthèse des remarques et la réécriture du raisonnement, ces élèves qui a priori pouvaient éventuellement rechigner à « écrire » ont pleinement été concentrés, actifs et intéressés. Libérés de la charge heuristique, ils ont pu pleinement se concentrer sur le travail d'analyse de leurs écrits initiaux pour les améliorer à partir de l'observation des écrits des autres élèves. Et de fait, les évolutions des écrits d'Anna et d'Hassan montrent qu'un véritable travail de réflexion s'est développé. Ils ont quitté une posture d'écriture « pour dire » pour entrer véritablement dans posture d'écriture pour « contrôler et développer leurs pensées ». En outre, même si dans la majorité des cas le problème facile était déjà résolu implicitement, on peut voir qu'un travail de repérage et d'appropriation de traitements s'est effectué. La majorité des élèves qui au départ avaient une mauvaise représentation du problème ou entamaient des traitements erronés ont rejoint des élèves qui dès le départ avaient une bonne représentation du problème et des idées de traitements pertinents.

Néanmoins, évoquons une limite de ce travail et les précautions à prendre pour attirer l'attention sur le cas des élèves du groupe 3 (comme Steve) qui ne sont pas entrés dans un travail de reprise et de réécriture assumées de leurs écrits et qui de ce fait ne progressent pas dans l'appréhension et a fortiori dans le traitement du problème. Nous émettons l'hypothèse qu'a priori ils ont une maîtrise insuffisante de l'écrit pour pouvoir s'exprimer par écrit dans une « posture orale » qui est de dire ce qu'ils pensent. Ils sont encore trop accaparés par l'effort que constitue l'écriture.[1]

En revanche, l'ensemble des élèves qui sont entrés dans le travail de reprise et de réorganisation des écrits ont eu l'occasion de développer et de s'assurer de la validité de leurs rhétoriques de façon personnelle. Ils ont appris à expliciter, à développer et à conforter leurs raisonnements sur un cas sur lequel ils ont pu s'exercer. On peut faire l'hypothèse que cet apprentissage leur sera utile par la suite pour développer et contrôler leurs idées lorsque les difficultés heuristiques et les notions en jeu seront plus complexes.

Nous sommes par ailleurs convaincus que ce genre de travail qui s'appuie sur le potentiel de traitements que permet l'écriture dans sa matérialité horizontale et verticale prépare bien les élèves à entrer dans les apprentissages en mathématiques. Il les prépare bien sûr à la maîtrise ultérieure de la notion de proportionnalité où les

[1] La prise en compte de différentes façons de représenter les données peuvent à ce propos donner des pistes de travail avec les élèves en difficulté de lecture et d'écriture comme le montrent les travaux de François Pluvinage (1998) et Florence Fauvet (2003).

différents modes de représentation des données permettent de projeter, d'effectuer et de contrôler les traitements à effectuer. Mais il les prépare aussi à entrer par la suite dans des domaines comme l'algèbre ou la géométrie hypothético-déductive où la seule appréhension linéaire et unidirectionnelle des expressions ou des écritures ne suffit pas pour comprendre les traitements en jeu.

Nous pensons ainsi avoir mis en évidence un aspect important du développement des capacités d'écriture et de lecture des élèves, un aspect qu'il est important à prendre en compte dans l'enseignement proposé aux élèves dès l'école primaire.

Bibliographie

ADJIAGE R. (2001) Maturations du fonctionnement rationnel, Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de programme 2000 pour l'école élémentaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **7**, 7-48.

ALARCON J. (1982) *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4ème et de 5ème*, thèse de 3ème cycle, IRMA, ULP de Strasbourg.

BELMAS P. (2003) Apprentissage de la notion de proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **8**, 167-190.

BRONNER A., PELLEQUER S. (2000) *Fonctions de l'écrit dans la classe de mathématiques*, Étude dans le cas de l'enseignement de la racine carrée et de la reprise de la géométrie en classe de 3ème, *IREM de Montpellier*.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble.

BUCHETON D., CHABANNE J-C. (2002) Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire ; l'écrit et l'oral réflexifs, *Éducation et Formation*, Presses Universitaires de France, Paris.

CHEVALIER A. (1993) Un nouveau type d'exercices scolaire, *Petit x,* **33**.

DUVAL R., EGRET M.A. (1989) L'organisation déductive du discours, Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **2**, 25-40.

DUVAL R., EGRET M.A. (1989) Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **2**, 41-64.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

DUVAL R. (1998) *Écriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves*, Actes du colloque : *Produire et lire des textes de démonstration*. 23-24 janvier 1998, Laboratoire de Didactique des Mathématiques, Université de Rennes 1, 79-98.

DUVAL R. (2000) Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **20**, 135-170.

ERMEL (équipe de didactique de mathématiques), DOUAIRE Jacques (Dir.), HUBERT Christiane (Dir.) (1999) *Vrai ? Faux ?... On en débat ? De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, INRP, Paris.

FAUVET F. (2003) Traitement de pathologies de l'apprentissage : démarches issues de la didactique des mathématiques, étude d'un cas, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **8**, 151-165.

JULO J. (1995) Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, *Presse Universitaire de Rennes*.

Ministère de la jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche (2002) *« Mathématiques cycle des approfondissements (cycle3) »,* Collection École, Documents d'application des programmes, CNDP.

NOELTING G. (1980) The Developpement of Proportional Reasoning and the Ratio Concept, *Educational Studies in Mathematics*, 217- 253.

PLUVINAGE F. (1998) Mathématiques et communication, ressources en cas de difficulté. Quand l'écrit se distingue de la reproduction de l'oral dans la situation d'enseignement standard, *entretiens d'orthophonie 1998,* 121-127, Paris, Expansion Scientifique Française, Entretiens de Bichat.

PRESSIAT A. (2001) *L'écrit en mathématiques au collège*, in Colomb J. et Martinand J-L. (eds), Éléments pour une didactique comparée. Langue écrite, graphismes et constructions des savoirs, INRP, collection Documents et travaux de recherche en éducation, Paris, 61-95.

RAUSCHER J-C. (2001) Une production écrite des élèves au service des apprentissages dans le domaine numérique *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **7**, 49-76.

RAUSCHER J-C. (2003) Mise à l'épreuve de l'accompagnement d'activités mathématiques par des écrits réflexifs au cycle 3 et en début de collège, in Cédérom *Actes du colloque « Constructions des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement » Université Victor Segalen Bordeaux 2, avril 2003,* IUFM d'Aquitaine-Université Bordeaux 2.

RAUSCHER J-C (à paraître 2006) *Écrire en mathématique pour situer et négocier les écarts. Un outil d'évaluation partagé*, in *« Écarts de langue, écarts de culture : à l'École de l'autre* » Peter Lang, Hambourg.

VYGOTSKI L. (1934/1997) *Pensée et langage*, La Dispute, Paris.

Jean-Claude RAUSCHER
Institut Universitaire de Formation des Maîtres d'Alsace
200 Avenue de Colmar, 67100 Strasbourg
LISEC EA2310 ULP Strasbourg ; IREM de Strasbourg
Jc.Rauscher@Wanadoo.fr

PATRICIA MARCHAND

COMMENT DÉVELOPPER LES IMAGES MENTALES LIÉES À L'APPRENTISSAGE DE L'ESPACE EN TROIS DIMENSIONS ?

Abstract. Developing mental imagery linked to spatial geometry learning. This article puts forward specific results from our interdisciplinary Ph. D. thesis, involving mathematics and sports, in order to progress towards a framework for the elaboration of activities aiming to develop three dimensional mental images. We illustrate this framework with examples of activities from elementary and secondary level.

Résumé. Cet article vise à reprendre quelques résultats tirés de notre thèse de doctorat interdisciplinaire (mathématique et sport) afin d'élaborer un cadre de référence pour la création d'activités visant le développement des images mentales liées à l'espace en trois dimensions. Ce cadre est explicité à l'aide d'exemples d'activités tirées du corpus primaire et secondaire.

Mots-clés. Enseignement de la géométrie, primaire-secondaire, espace en trois dimensions et images mentales.

Préambule

Notre sujet de recherche a émergé de l'interaction entre deux domaines spécifiques d'enseignement : l'enseignement des mathématiques et l'enseignement du patinage artistique. Ces domaines peuvent paraître éloignés de prime abord, mais ils partagent un champ commun de connaissances, soit la géométrie des transformations liées à l'espace en trois dimensions. La pratique simultanée de ces deux domaines d'enseignement nous a exposé à des réalités divergentes autant du point de vue des approches d'enseignement que des connaissances et savoirs développés chez les élèves.

En classe de mathématiques de niveau secondaire (12 à 17 ans), nous observons qu'il y a peu d'outils disponibles pour supporter les enseignants dans l'enseignement des connaissances spatiales de façon globale. Ce manque d'outils se traduit par une lacune au point de vue de la continuité d'un niveau scolaire à l'autre, à l'intérieur des programmes de formation de mathématiques des niveaux primaires et secondaires et d'une similarité entre les objectifs fixés pour ces deux niveaux d'enseignement (Marchand, 2004). Cette réalité reflète le contexte

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 103 –- 121.

québécois, mais des résultats semblables ont été observés en France par Berthelot et Salin (1993-1994).

De plus, les manuels scolaires employés dans les classes de mathématiques présentent majoritairement des activités centrées sur l'observation et l'identification[1] de formes géométriques en deux ou en trois dimensions représentant en moyenne 42,2% des activités géométriques proposées à la fin du primaire et 37% en troisième année du secondaire (Marchand, 2004). Cette centration sur l'observation et l'identification dans l'enseignement des connaissances spatiales au primaire a aussi été constatée par Bouckaert (2005) en Belgique. Ainsi, les enseignants sont actuellement peu outillés face à cet enseignement. Ce constat se répercute évidemment sur le développement de connaissances et de savoirs des élèves, pour qui, l'apprentissage de la géométrie ne se fait pas sans difficultés comme l'ont démontré plusieurs recherches (Bessot, 1994 ; CREM, 2001 ; Parzysz, 1990).

Un tout autre portrait de l'enseignement des connaissances spatiales nous est révélé par le domaine sportif. Depuis une vingtaine d'années, les recherches dans ce domaine se sont orientées vers la création de programmes d'entraînement mental visant une meilleur maîtrise technique et un plus haut niveau de performance des athlètes (Blaize, 1984 ; Pellissier & Billouin, 1989). Ainsi, les entraîneurs possèdent actuellement différents programmes permettant de développer les connaissances spatiales de leurs athlètes. Il existe différentes composantes à un entraînement mental[2], mais la composante la plus importante et la plus efficace reste la visualisation qui amène les athlètes à s'imaginer réaliser leurs mouvements mentalement, à se créer des images mentales d'objets en mouvement faisant ainsi référence à la géométrie des transformations (Orlick, 1990, 1992 ; Partington, 1990 ; Porter & Foster, 1990). Ces programmes sportifs permettent un développement plus spécifique des connaissances spatiales chez les athlètes qui se reflète par leur réussite scolaire liée à ce champ mathématique, même pour ceux éprouvant des difficultés dans d'autres champs mathématiques (Marchand, 2004)[3].

---

[1] Tâches géométriques (Piaget 1973) : observation-identification, description-classification, construction, représentation, recherche-transformation et argumentation-démonstration ; Une tâche d'observation-identification serait, par exemple, d'observer un objet ou une représentation d'un objet et de lui associer son nom.

[2] L'entraînement mental traite de la relaxation, de la pensée positive, de la visualisation, de l'élaboration d'objectifs et de mots-clés (Porter & Foster, 1990).

[3] Attention, il serait erroné de généraliser et d'affirmer que tous les sportifs développent de bonnes connaissances spatiales. Ceci s'applique principalement aux athlètes ayant un programme d'entraînement mental spécifique et bien établi.

Les réalités plutôt contradictoires de ces deux domaines d'enseignement face à l'apprentissage et l'enseignement des connaissances spatiales et des images mentales liées à l'espace en trois dimensions (IM-3D) représentent, pour nous, un moment déclencheur et décisif dans l'orientation de notre champ de recherche.

1. Introduction

Cet intérêt à faire un parallèle entre l'enseignement sportif et scolaire des connaissances spatiales a d'abord fait l'objet d'une étude doctorale, dirigée par Louise Poirier de l'Université de Montréal, où nous avons analysé deux interventions didactiques portant sur les connaissances spatiales auprès de trois profils d'élèves du secondaire (sportif, musicien et standard) (Marchand, 2004)[4]. Le but de cette recherche était de caractériser une approche d'enseignement des connaissances spatiales imprégnée de l'approche sportive en comparaison d'une approche plus traditionnelle. Des analyses préalables sur l'enseignement usuel (programme, manuels scolaires et approche d'enseignement) et sur les contraintes de l'enseignement actuel des connaissances spatiales, autant d'un point de vue épistémologique que cognitif et didactique, nous ont permis d'avoir une vue d'ensemble de la situation de cet enseignement et un canevas pour construire des interventions didactiques. Un cadre théorique interdisciplinaire a aussi été développé mettant en lien les domaines didactique, psychologique et sportif dont certains éléments seront repris dans cet article. Deux interventions didactiques ont été élaborées et expérimentées auprès de groupes d'élèves. Une analyse *a posteriori* des interventions didactiques à l'aide de grilles faisant ressortir des aspects comme la nature et le contenu des interventions et du questionnement, le type de tâches exploitées et le rôle de la visualisation autant du point de vue de l'enseignant que des élèves a été réalisée et confrontée à l'analyse *a priori*. Les caractéristiques spécifiques de l'approche «sportive» pour développer les connaissances spatiales ayant été jugées comme potentiellement bénéfiques à ce développement seront reprises dans le cadre de cet article car elles constitueront le point de départ des variables didactiques à considérer pour développer, de façon plus spécifique, les IM-3D.

Ainsi, nous commencerons par émettre des pistes de réponses à une question élémentaire mais primordiale concernant la pertinence même de notre champ de

[4] Le champ de recherche exploité dans cet article, mettant en jeu les connaissances spatiales développées à travers différentes portes d'entrée (sport, musique ou école) pour en dégager une approche d'enseignement plus explicite, systématique et efficace dans un contexte de classe de mathématiques, représente un champ de recherche novateur. Ce texte doit être considéré comme un point de départ, car ce champ de recherche demeure en ébullition. Mais nous croyons, justement, qu'il est important de partager les découvertes à ce moment pour lui permettre d'évoluer.

recherche : pourquoi nous intéressons-nous aux connaissances spatiales ? Ensuite, nous exposerons notre cadre théorique identifiant les définitions des concepts clés et les différents modèles illustrant le développement des connaissances spatiales. Les variables didactiques importantes au développement des IM-3D seront exposées et traitées à l'aide d'un exemple d'activité tiré de notre expérimentation et en guise de conclusion, nous énoncerons deux autres activités favorables à ce développement ainsi que des pistes de recherches éventuelles.

2. Pourquoi s'intéresser aux connaissances spatiales ?

Les connaissances spatiales sont traitées en classe de mathématiques lors de l'enseignement de la géométrie. Les connaissances géométriques et spatiales représentent des connaissances distinctes, mais, en même temps, indissociables (Berthelot et Salin, 1993-1994). Elles représentent très souvent deux faces d'une même démarche (Wheatley, 1990 ; Laborde, 1988). Ainsi, lorsque nous traitons de la géométrie à l'école, nous ne pouvons négliger le développement des connaissances spatiales (NCTM, 2001). Cet enseignement connaît, de plus, actuellement un virage important :

> « La géométrie, qui a souvent (et longtemps) été cantonnée à l'enseignement du raisonnement logique et de la méthode hypothético-déductive, retrouve ainsi (à présent) son attrait visuel et l'un de ces rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace. » (p. 3, CREM, 2004).

Ce virage ainsi que la réalité du monde actuel orienté vers les technologies impliquant l'espace en deux et en trois dimensions remettent à l'avant-plan le développement des connaissances spatiales dans le cadre de l'enseignement au primaire et au secondaire. D'ailleurs, selon le NCTM (2001), la création et la manipulation d'images mentales impliquant des figures et des transformations en deux et trois dimensions représentent une des plus importantes conclusions à tirer de l'étude de la géométrie.

De plus, plusieurs recherches montrent qu'il existe une corrélation positive entre le développement des connaissances spatiales et la réussite mathématique à tous les niveaux (Clements & Battista, 1992 ; Hallet, 1991 ; Whiteley, 2002, 2004). Whiteley (2002) va même jusqu'à affirmer que les connaissances spatiales jouent un rôle central dans l'enseignement des mathématiques puisque leur construction ne relève pas principalement d'un langage comme certains le pensent, mais plutôt de connaissances visuelles comme les connaissances spatiales.

Les recherches récentes en neurologie nous renseignent aussi sur le fonctionnement du cerveau lors de la réalisation d'activités mathématiques. Le cerveau est divisé en deux hémisphères (Houdé, 2004 ; Whiteley, 2002) :

– l'hémisphère droit comporte l'intelligence visuo-spatiale et celle liée à la vision globale, à l'imagination, aux liens, relations et associations ;
– l'hémisphère gauche comporte l'intelligence linguistique et celle liée à la vision locale ou partielle (précision et détails du tout), à la logique, au comptage, à la linéarité et l'analyse.

Lorsque nous réalisons une activité mathématique, les deux hémisphères, et non seulement l'hémisphère gauche sont sollicités (p. 62, Houdé, 2004) :

> Lorsque l'on doit résoudre des problèmes de mathématiques… les régions activées (sont surtout les) régions visuo-spatiales… L'intelligence visuo-spatiale permet de visualiser les opérations à réaliser tout en mémorisant les résultats intermédiaires… Ainsi, logique et intelligence linguistique d'une part, mathématiques et intelligence visuo-spatiale, de l'autre, sont associées.

L'intelligence visuo-spatiale joue, par conséquent, un rôle important dans l'activité mathématique et, la création et manipulation d'images mentales permettent de relier les différentes régions des deux hémisphères (Whiteley, 2004).

Ces facteurs, justifiant notre intérêt pour ce sujet, mettent en évidence que les connaissances spatiales jouent un grand rôle dans la résolution de problèmes et, globalement, dans le développement de la pensée mathématique, mais qu'elles ne semblent pas être prises en charge dans notre enseignement, comme elles le sont dans le domaine sportif, entraînant des difficultés chez nos élèves.

3. Définitions et développements liés aux connaissances spatiales et IM-3D

Nous traitons de différents concepts liés aux IM-3D depuis le début de cet article, le temps est maintenant venu de préciser ce que nous entendons par connaissance spatiale, image mentale et visualisation. Voici un tableau résumant ces définitions (Marchand, 2004) :

Connaissance spatiale : processus qui, par le biais des cinq sens, amène l'apprenant à contrôler, anticiper et communiquer les états, les transformations ou les déformations des données (forme, position, orientation) d'objets relatifs à l'espace en deux ou en trois dimensions. Par exemple, être en mesure d'anticiper la forme, l'apparence, d'un solide d'après son développement relève des connaissances spatiales. **Image mentale :** représentation mentale d'objets ou d'événements qui ne sont pas physiquement présents. Il y a trois types d'image mentale : statique, cinétique (transformation isométrique) et transformatrice (déformation). Ces types d'image peuvent être reproductrices dans le cas où l'objet/événement a

déjà été vu concrètement par le sujet, ou anticipatrices quand l'objet/événement n'a jamais été vu concrètement. (Piaget & Inhelder, 1947).

Visualisation : processus de création et de modification d'images mentales. Technique de créativité consistant à générer et à manipuler une image mentale (Legendre, 1993). En sport (PNCE, 1991), nous parlons davantage d'imagerie mentale que de visualisation puisque cette action mentale n'implique pas uniquement la vue, mais aussi d'autres sens générés par le mouvement (kinesthésique – auditif).

La définition de connaissance spatiale nous est propre, mais elle découle directement d'une combinaison de définitions déjà existantes de Berthelot & Salin (1992), Chevallard & Jullien (1990), Clements & Battista (1992), Laborde (1988). Outre la précision que ces définitions apportent pour chacun des concepts, elles évoquent que la visualisation et les images mentales sont directement liés au développement des connaissances spatiales étant donné leur nature d'intériorisation d'aspects physiques d'un objet : pour développer des connaissances spatiales, nous devons intérioriser les propriétés physiques d'objets et donc faire référence à la visualisation qui elle-même fait référence aux images mentales. Ainsi, pour développer les connaissances spatiales, le passage de l'espace physique vers l'espace représentatif est nécessaire. Plusieurs modèles de développement des connaissances spatiales ont d'ailleurs exploité ce principe, mais ils n'utilisent pas la même porte d'entrée pour réaliser le passage d'un espace à un autre. Nous décrivons brièvement les quatre modèles, soit celui de van Hiele (1959), de Dion, Pallascio & Papillon (1985), de Hoffer (1977) et de Piaget & Inhelder (1947)[5].

– Le modèle de van Hiele traite des différents niveaux de la pensée géométrique en deux dimensions réparties en cinq niveaux : visuel, descriptif, logique ou déductif informel, déductif formel et rigoureux. Il est orienté sur le langage et le développement axiomatique (dont la notion de preuve) de niveau primaire et secondaire ;

– le modèle de Dion et al. traite de tâches mathématiques et de types de géométries d'après cinq étapes : observation-visualisation (mémorisation d'objets), structuration (construction de solides topologiquement équivalents), transfiguration (description de solides topologiquement équivalents), détermination (description métrique de solides) et la

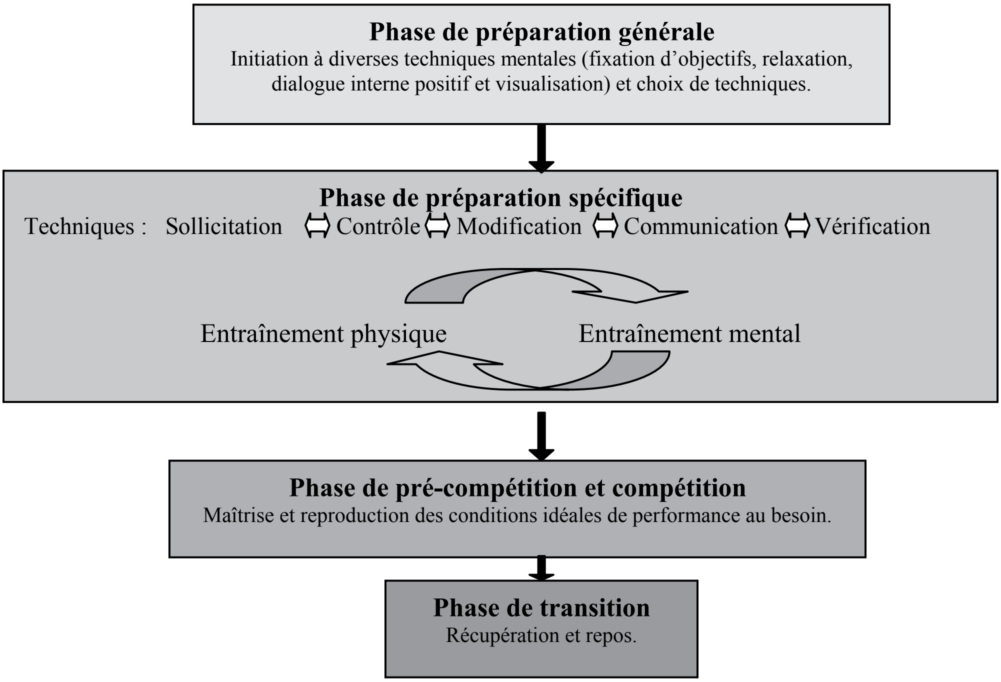
[5] N.B. : Brèves descriptions impliquent nécessairement une vulgarisation du contenu et du contenant des différents modèles, nous sommes conscients que cette simplification n'illustre pas toute la complexité de ce développement, mais nous voulions présenter qu'un aperçu global des différents modèles pour en dégager leur porte d'entrée. Veuillez vous référer aux textes originaux pour avoir la description complète et détaillée de chacun des modèles. Ces quatre modèles sont repris dans un article de Lunkenbein (1982).

classification (classes métriques d'une famille de solides). Ce modèle est orienté vers l'enseignement/apprentissage de l'espace en trois dimensions au niveau secondaire ;

– le modèle de Hoffer (1977) traite de tâches visuelles liées aux développements des connaissances spatiales de l'environnement en 7 étapes : coordination (œil-mouvement), perception d'objets qui l'entourent, constance (reconnaissance d'invariants), orientation spatiale d'un objet par rapport à sa position, perception de relations spatiales entre deux objets, discrimination visuelle (différenciation et association) et la visualisation (images mentales des objets). Hoffer met l'accent sur le développement des connaissances spatiales allant de l'enfance à la fin du primaire par le biais de la perception ;

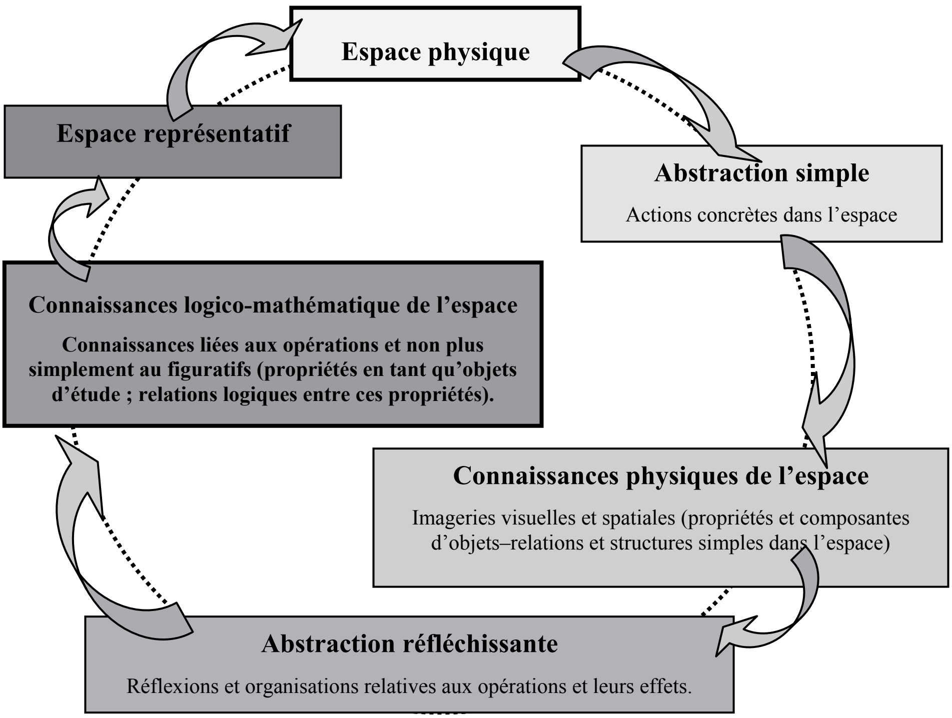
– le modèle de Piaget & Inhelder (1947) traite explicitement du passage d'un espace à un autre : de l'espace physique (environnement réel et actions concrètes), aux connaissances physiques de l'espace, par le biais d'une abstraction simple (abstraction des qualités d'un objet comme sa forme et sa couleur) à l'espace représentatif (actions intériorisées – visualisation) par le biais d'une abstraction réfléchissante (abstraction des propriétés et des conséquences d'une action). Ainsi, la représentation de l'espace se construit progressivement chez l'apprenant en passant par l'espace perceptif, l'espace topologique, l'espace projectif et enfin l'espace euclidien. Ce modèle traite spécifiquement du développement des **connaissances spatiales** liées à l'enseignement de niveau **primaire-secondaire** et le passage de l'espace physique à l'espace représentatif met de l'avant le rôle important que joue l'**action** de l'apprenant autant concrète qu'intériorisée.

L'analyse de ces quatre modèles nous a permis de sélectionner le modèle de Piaget & Inhelder correspondant davantage aux caractéristiques de notre champ de recherche visant le développement des connaissances spatiales à travers l'enseignement primaire-secondaire et faisant le lien entre l'action concrète (le sport) et l'action intériorisée (la visualisation – images mentales). En parallèle à ce modèle, nous avons également considéré ceux élaborés dans le cadre des différents programmes d'entraînement mental du domaine sportif (Chevallon, 1995 ; Porter & Foster, 1990). Ces programmes d'entraînement visent à améliorer la préparation pour la compétition, développer les aspects techniques de l'athlète et remédier aux différents obstacles en lien avec l'entraînement et les compétitions. L'entraînement mental est prévu dans l'entraînement quotidien de l'athlète et échelonné, de façon progressive, jusqu'à la période de compétition où il devrait avoir atteint un rendement optimal.



La période créant un lien entre les deux champs d'enseignement/apprentissage est celle où se développent les images mentales impliquant des visualisations et anticipations d'états ou de transformations d'objets en mouvement, soit la phase de préparation spécifique. Selon l'approche sportive, la capacité à visualiser et à anticiper le résultat d'une transformation nécessite une sollicitation explicite de la création et la manipulation des IM-3D. Les athlètes sont amenés à **générer**, **anticiper**, **contrôler** et **modifier** leurs images mentales pour tendre vers les conditions idéales de compétition. Tout au long de ce processus, ils doivent aussi **communiquer** leurs processus mentaux, soit à leurs collègues, leur famille ou leur entraîneur de façon orale ou écrite à l'aide d'un journal de bord. Ce développement des images se fait simultanément avec l'entraînement physique, les deux étant complémentaires. Il y a, par conséquent, une interaction constante entre les actions concrètes et intériorisées dans le processus de développement des IM-3D. Cette interaction sera au centre de notre modèle de référence et deviendra la variable didactique centrale au développement des IM-3D en classe de mathématiques. Voici donc notre modèle de référence pour une activité donnée[6] :

[6] Les interactions entre les actions concrètes et intériorisées contenues de ce schéma nous sont propres (inspirées du modèle sportif) et le contenu, du point de vue de Piaget, s'inspire du schéma que Lunkunbein a présenté de ce modèle (p. 8, 1982).



L'explicitation des définitions et du modèle illustrant le développement des connaissances spatiales nous offre une vue théorique de la situation ; nous verrons à présent comment ce cadre peut se décomposer concrètement, d'après des variables didactiques pouvant servir de point d'appui pour élaborer des activités propices au développement des IM-3D en classe. Comment pouvons-nous y provoquer le passage de l'action concrète à l'action intériorisée ? Comment solliciter, générer, anticiper, modifier et communiquer les IM-3D en classe ?

4. Variables didactiques à considérer pour le développement des IM-3D

L'analyse comparative de deux interventions didactiques portant sur l'enseignement des connaissances spatiales nous a permis de dégager les constats suivants :

1. À partir d'un même objectif mathématique, deux activités très différentes peuvent être créées et il faut donc établir d'autres variables didactiques si

nous voulons obtenir des activités valorisant le développement spécifique des connaissances spatiales et des IM-3D ;

2. Un glissement des connaissances spatiales vers d'autres connaissances géométriques est possible : ce phénomène s'est produit lors de notre expérimentation et il illustre bien le contexte québécois de cet enseignement, de même que le contexte français rapporté par Berthelot et Salin (1993-1994) ;
3. Une centration sur les actions concrètes, préconisée par le programme, les manuels et l'approche traditionnelle de notre expérimentation ne favorise pas le développement des connaissances spatiales et des IM-3D. Les actions intériorisées devraient être centrales à notre approche pour développer ces connaissances ;
4. Le questionnement portant sur la construction des images mentales n'est pas habituel dans le contexte actuel des classes, bien que le développement des connaissances spatiales soit l'aspect central de l'enseignement de la géométrie à ce niveau scolaire (troisième secondaire) et que des recherches, publiées il y a déjà plusieurs années, recommandent l'exploitation de la visualisation dans les classes de mathématiques (Hill & Baker, 1983 ; Hutton & Lescohier, 1983 ; numéro spécial de la revue *Arithmetic Teacher* de février 1990, vol. 37, no. 6).

À partir de ces constats, nous procédons à un regroupement et une généralisation des caractéristiques liées à l'approche «sportive» mises de l'avant par notre cadre théorique interdisciplinaire et notre analyse *a posteriori* de l'expérimentation dans le but de les rendre applicables à d'autres interventions didactiques portant sur les IM-3D. Ainsi, nous regroupons les variables didactiques en cinq thèmes : les solides, le développement, les tâches, les images mentales et la «clé magique» de la réussite.

La variable **«solide»** implique une prise en compte de la nature et de la complexité des solides proposés lors de nos interventions. Il ne suffit pas de présenter des solides droits ou typiques, nous devons également travailler sur des solides obliques, tronqués et composés. De plus, nous pouvons aussi varier le nombre de solides impliqués dans une tâche : tout comme la grandeur des nombres, cette variable peut influencer la nature et la complexité des raisonnements des élèves.

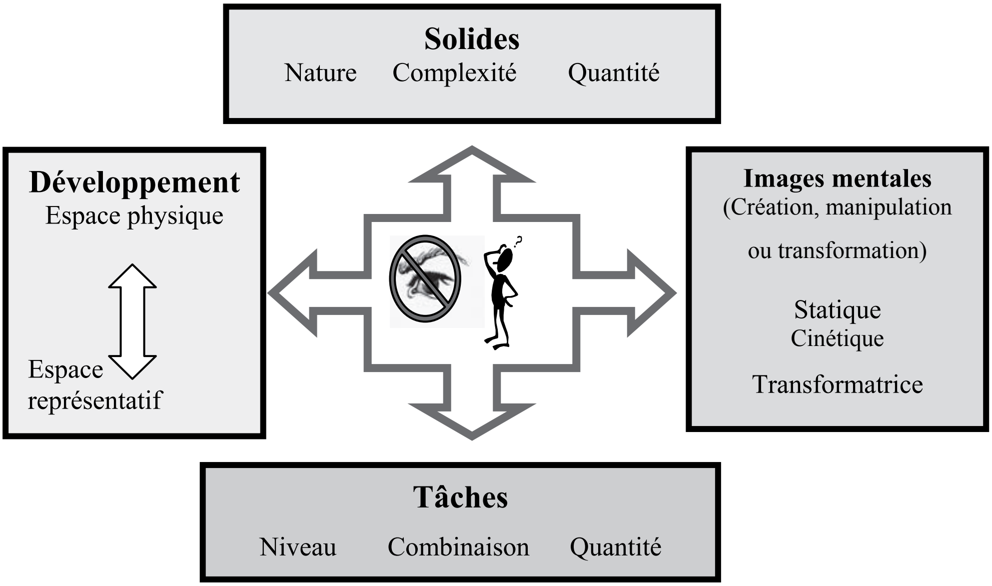
La variable **«développement»** met en évidence que pour développer les IM-3D des élèves, il faut non seulement passer de l'espace physique à l'espace représentatif, mais aussi créer une interaction entre ces deux espaces en faisant des passages inverses, soit de l'espace représentatif à l'espace concret.

La variable **«tâche»** implique que nous ne devons pas uniquement demander aux élèves d'observer et d'identifier des solides comme le font majoritairement les manuels scolaires actuels. Des tâches plus complexes comme la description, la construction, la représentation, la recherche (anticipation) et la justification (Piaget, 1973) devraient aussi être traitées. Il faut varier la quantité de tâches qu'une activité nécessite et ne pas s'en tenir, surtout au niveau secondaire, à des activités n'impliquant qu'une ou deux tâches. Enfin, toujours dans l'optique du développement des IM-3D, nous devons proposer une combinaison de tâches incluant une tâche de recherche (anticipation) ; cette tâche valorise fréquemment un passage aux actions intériorisées (visualisation).

La variable **«image mentale»** indique que nous devons varier la nature des images mentales impliquées dans nos interventions didactiques. Il ne faut pas se limiter aux images statiques reproductrices. Il faut orienter les activités vers les images anticipatrices (jamais observées concrètement) pour développer davantage les IM-3D et employer aussi des images cinétiques (impliquant une transformation isométrique) et transformatrices (impliquant une déformation).

La dernière variable, la **«clé magique»**, est la plus importante. Vous pouvez créer une activité comportant les quatre premières variables et ne pas valoriser le développement des IM-3D chez les élèves. Il ne faut pas croire qu'un enfant réalisant des manipulations, travaillant avec des objets concrets (Poirier, 1999) ou même effectuant des mouvements développera des images mentales (ce ne sont pas tous les sportifs qui développeront une visualisation efficace). La «clé magique» que nous avons dégagée de l'analyse de nos interventions didactiques et de nos interventions sportives doit être présente. Les IM-3D ne se développeront que si nous les sollicitons dans notre approche d'enseignement. Ainsi, nous devons prévoir des phases à l'intérieur de nos interventions didactiques où, premièrement, ***les élèves ont accès uniquement à leurs images mentales et ne peuvent recourir à la vue*** pour observer les solides ou les transformations de solides (tout comme le sportif ne peut se fier à sa vue pour réaliser des pirouettes dans les airs), deuxièmement, prévoir une phase de ***questionnement portant sur leur création des IM-3D*** (tout comme l'athlète qui doit partager quotidiennement, avec son entraîneur, sa préparation mentale afin d'en vérifier sa progression). Ces éléments peuvent paraître triviaux à première vue, mais ils sont très rarement mis en application lors de l'enseignement des IM-3D.

Voici une schématisation des variables didactiques à considérer dans l'élaboration des interventions didactiques ciblant le développement des IM-3D :



Afin d'illustrer davantage ce que chaque variable didactique implique concrètement dans l'élaboration d'une intervention didactique, nous les reprenons une à une, dans le point suivant, pour la planification d'une activité expérimentée en classe de troisième secondaire (13-14 ans).

5. Exemple d'une activité visant les IM-3D

Lors de notre expérimentation (Marchand, 2004), une des activités mathématiques avait pour objet d'étude la construction d'une maison, à partir d'une description, composée d'un pavé droit et d'une pyramide à base rectangulaire. Ce type d'activité n'est pas envisagé nécessairement, *a priori*, pour développer les IM-3D ; cette raison justifiait notre choix, car ce n'est pas tant le choix de l'activité qui importe, mais bien son exploitation en classe (les variables didactiques impliquées)[7]. Nous exposons brièvement la description de l'activité en mettant en évidence les cinq variables didactiques.

La première consigne donnée aux élèves est de construire, à l'aide de cure-pipes et pailles de trois longueurs différentes, la maison décrite. La description écrite était de «construire une maison dont le corps est un pavé droit où les rectangles latéraux

---

[7] Les deux exemples choisis pour la conclusion sont plus intrinsèquement liés au développement des IM-3D.

sont plus grands que les rectangles des bases et le toit est une pyramide dont le sommet est dans le prolongement d'une des arêtes du prisme.»

La deuxième consigne impose à l'élève d'anticiper, en une seule fois, le nombre exact de pailles des longueurs respectives (petite, moyenne ou longue) avant de commencer la construction. Le matériel n'est pas accessible aux élèves ; l'enseignant leur distribue uniquement la quantité demandée. Lors du retour, l'enseignant questionne les élèves sur leur processus de construction (Quel type de maison avez-vous vu dans votre tête ? La maison construite correspond-t-elle à l'image que vous en aviez ? La maison construite correspond-t-elle à celle décrite au départ ?).

La planification de cette activité met en jeu les cinq variables didactiques :

1. Les solides présentés ne se limitent pas à des solides droits, car il y a longtemps que les images mentales d'un pavé et d'une pyramide sont acquises à ce niveau. Ainsi, nous leur proposons une maison composée de deux solides dont un est oblique. Trop souvent les manuels scolaires et les programmes se limitent à des solides simples ne permettant pas une progression dans la construction des IM-3D ;

2. Le modèle de référence sur le développement des IM-3D est pris en considération puisque les deux espaces sont impliqués. L'élève doit d'abord faire référence à ces IM-3D pour anticiper l'allure de la maison décrite pour ensuite la construire concrètement. Il réalise, au moment de cette phase de construction, le passage de l'espace représentatif à l'espace physique et le passage réciproque se produit lors des ajustements nécessaires de sa construction et, ultérieurement, lors du retour collectif ;

3. Les tâches impliquées ne se résument pas uniquement à l'observation et l'identification. Les élèves doivent interpréter la description, anticiper l'allure de la maison ainsi que le matériel nécessaire à la construction, construire la maison et comparer leur construction finale avec leur construction mentale ainsi que la description de départ. La deuxième consigne amène une tâche supplémentaire d'anticipation à l'activité menant à un enrichissement du développement des IM-3D. Sans cette consigne, les élèves n'auraient pas eu à anticiper l'allure globale de la maison, ils auraient pu simplement l'imaginer partiellement et revenir à la description, au besoin, pour plus d'informations et prendre le matériel au fur et à mesure ;

4. Les images mentales impliquées dans cette activité sont de nature statique reproductrice ou anticipatrice. La construction du pavé droit, faisant appel à une image reproductrice, ne semble pas causer problème pour la majorité des élèves de ce niveau, même si certains l'ont construite plus large que

haut. La description de la pyramide implique, pour un élève moyen de ce niveau scolaire, une image anticipatrice et elle constitue un obstacle majeur pour plusieurs. La comparaison, lors du retour, représente pour les élèves un outil permettant d'expliciter et d'ajuster leurs IM-3D ;

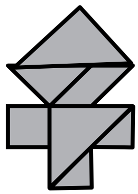
5. La «clé magique» découle directement des choix didactiques considérés pour les consignes et pour le retour de l'activité. Le choix d'une description écrite demande à l'élève de se créer une IM-3D de la maison ; la consigne leur demandant de se procurer tout le matériel avant même le commencement de la construction ajoute à ce facteur. Ainsi, au départ, les élèves ne peuvent recourir à la vue pour anticiper l'allure du solide, ils doivent nécessairement recourir à leurs IM-3D et les manipuler pour prédire la longueur et le nombre des pailles exigés. Cette première phase de l'activité permet aux élèves de générer, de contrôler et de modifier leurs IM-3D. Lors du retour, le questionnement de l'enseignant lui permet de communiquer et de comparer ces IM-3D avec la solution attendue et lui assure un suivi sur son apprentissage. Le questionnement pourrait porter sur d'autres propriétés des solides construits comme le nombres de faces, le nombres de sommets ou le volume du solide, mais nous questionnons alors les élèves sur le solide présent et non plus sur les IM-3D. Ce type de glissement vers d'autres connaissances géométriques est fréquent en classe, mais il s'agit d'un moment clé pour le développement des IM-3D qu'il ne faut surtout pas négliger.

Cet exemple, même s'il demeure ponctuel et succinct, permet une meilleure compréhension des cinq variables didactiques impliquées dans ce cadre de référence et qui devraient être pris en considération dans l'élaboration d'activités scolaires visant le développement des IM-3D.

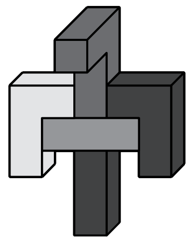
6. Conclusion

Ce cadre nous permet d'élaborer des activités valorisant le développement des IM-3D, mais il facilite aussi une meilleure exploitation des activités actuellement présentées dans le milieu. Il existe plusieurs activités potentiellement pertinentes présentées dans les classes du primaire et de la troisième année du secondaire pour le développement des IM-3D, mais elles ne sont actuellement pas orientées vers les connaissances spatiales. Voici deux exemples accompagnés de leur exploitation tirés des deux corpus ciblés :

Au primaire (6 à 11 ans), une activité permettant de développer les images mentales est la construction d'un modèle composé de pièces de Tangram préalablement observé grâce au rétroprojecteur (Wheatley, 1990) : les élèves ont en leur possession les pièces, ils observent la construction présentée au rétroprojecteur pendant trois secondes pour ensuite la reconstruire en son absence (l'objet peut être présenté de une à trois fois). Suite à la construction, l'enseignant pose des questions sur ce qu'ils ont vu dans leur tête (« comment t'es-tu rappelé de la forme ? » *Je me suis rappelé de la forme globale… j'avais vu les quatre triangles…* « Qu'as-tu vu ? » *J'ai vu un petit bonhomme chinois… j'ai vu un bateau sur une tablette…*). Pour développer les IM-3D, nous pouvons reprendre la même activité, mais présenter un objet construit avec les pièces SOMA[8] que nous cachons dans une boîte après trois secondes. Voici deux exemples de formes possibles :



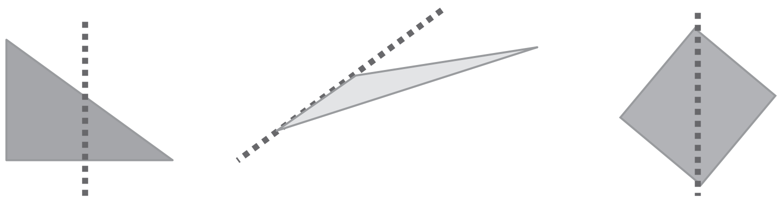
Tangram



SOMA

Ces deux activités (2D ou 3D), telles qu'exploitées, mettent en jeu des figures et solides divers selon le grade des élèves, impliquent les deux espaces (action concrète et action intériorisée), demandent des tâches d'observation, de construction et de comparaison d'images statiques. Elles possèdent aussi la «clé magique», puisque lors de la construction de l'objet, ce dernier n'est plus visible, les élèves doivent donc obligatoirement recourir à leurs images mentales. De plus, le questionnement utilisé porte explicitement sur les images mentales.

Au secondaire (12 à 17 ans), une activité permettant de développer les IM-3D est l'étude des solides de révolution. Nous présentons, sur carton, la figure et l'axe de rotation et les élèves doivent imaginer le solide résultant de la rotation. Ainsi, les élèves observent (images), ils cherchent le résultat et décrivent ce qu'ils anticipent. Le questionnement de l'enseignant porte explicitement sur la construction des images mentales (« *Que vois-tu dans ta tête ?* » «*Le vois-tu tourner ?* » « *Vois-tu le résultat en 2D ou en 3D ?* » « *Explique-moi ce que tu vois* »…).



[8] SOMA : solides en bois ou en mousse de différentes formes et couleurs.

Cette activité, telle que présentée, comporte les variables didactiques nécessaires au développement des IM-3D pour ce niveau scolaire : d'abord, une variété de figures et d'emplacements de l'axe de rotation est exposée, les deux espaces sont impliqués (action concrète et action intériorisée), les élèves sont amenés à observer, anticiper la rotation et communiquer leur résultat, les images générées sont cinétiques reproductrices ou anticipatrices et la «clé magique» réside dans le fait que la rotation n'est pas réalisée concrètement et que le questionnement *a posteriori* porte sur le résultat de cette rotation mentale[9].

Pour résumer nos propos, l'interaction entre l'enseignement des mathématiques et du patinage artistique et les divergences existant dans les pratiques entourant le développement des IM-3D, nous a mené à l'élaboration d'un cadre inspiré du domaine sportif, pour développer de façon plus systématique et explicite les IM-3D dans un milieu scolaire. Ce cadre théorique, ayant été caractérisé et expérimenté pour une première fois, va nous permettre de poursuivre nos recherches à chaque niveau d'enseignement de façon plus spécifique. Nous en sommes donc à l'étape d'établir, non plus simplement des activités ponctuelles pour développer les IM-3D, mais une séquence complète d'activités valorisant ce développement. Notre prochaine tâche sera d'élaborer une séquence d'enseignement visant le développement des IM-3D pour les élèves du primaire et, ensuite, de créer des séquences d'enseignement pour les autres niveaux d'enseignement. Cette continuité entre les différents niveaux d'enseignement nous permettra de traiter de l'arrimage entre les différents niveaux afin d'amenuiser les ruptures et les lacunes actuellement présentes dans le curriculum.

---

[9] D'autres exemples auraient pu être exposés en lien avec l'enseignement mathématique collégial et universitaire, mais nous avons opté de nous limiter à ces deux exemples pour ne pas alourdir le texte.

Bibliographie

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1993-1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, I, **53**, 39-53.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

BESSOT A. (1994) *Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace*, Séminaire sur la représentation, CIRADE, UQAM, septembre 1993, 34 pages.

BLAIZE P. (1984) *The effects of internal and external imagery in psychologically preparing skaters for performing figures*, Maîtrise es arts, University of Western Ontario, 115 pages.

BOUCKAERT C. (2005) *Transformation geometry in primary school according to Michel Demal*, CREM, article à paraître.

CHEVALLARD Y. & JULLIEN M. (1990) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, première partie, *Petit x*, **27**, 41-76.

CHEVALLON S. (1995) *L'entraînement psychologique du sportif*, Édition De Vecchi S.A., Paris, imprimé en Italie, 106 pages.

CLEMENTS D. H. & BATTISTA M.T. (1992) Geometry and spatial reasoning, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Douglas A. et Grouws, Macmillan publishing compagny, New York, Chap. 18, 420-464.

CREM : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (2004) *Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogique pour le développement des compétences citoyennes*, Nivelle, Belgique.

http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/100/index.asp

CREM (2001) *Formes et mouvements. Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, Luc Lismont et Nicolas Rouche, coordinateurs, Nivelle, Belgique.

http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/081/formes.asp

DION D., PALLASCIO R. & PAPILLON V. (1985) Perception structurale d'objets polyédriques, *Bulletin AMQ*, Octobre 1985, 10-21.

HALLET D. H. (1991) Visualization and calculus reform, *Visualization in teaching and learning mathematics: a projet*, Zimmermann et Cunningham (ed.), Washington, M.A.A., **19**, 121-126.

HILL D.M. & BAKER S.R. (1983) A visual imagery typology for instructional design, *Mental imagery and learning,* Hutton et Lescohier (ed.), chapitre 9, 133-154.

HOFFER A.R. (1977) *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualisation,* Creative Publications (ed.), Californie, Palo Alto.

HOUDE O. (2004) Vers une pédagogie mieux adaptée, *Cerveau & Psycho*, **3**, 60-63.

HUTTON D.W. & LESCOHIER J.A. (1983) Seeing to learn: using mental imagery in the class room, *Mental imagery and learning*, Hutton et Lescohier (ed.), chapitre 8, 113-132.

LABORDE C. (1988) L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactiques des mathématiques*, **9/3**, 337-364.

LEGENDRE R. (1993) *Dictionnaire actuel de l'Éducation. 2e édition*, La collection «Le défi Éducatif», Guérin, Montréal, et ESKA, Paris, 1500 pages.

LUNKENBEIN D. (1982) Géométrie dans l'enseignement au primaire. *Instantanés Mathématiques*, Novembre, 5-15.

MARCHAND P. (2004) *Analyse de deux interventions didactiques portant sur les connaissances spatiales auprès de trois profils d'élèves du secondaire*, Thèse de doctorat, Université de Montréal, Canada, dirigée par Louise Poirier, 222 pages.

ORLICK T. (1992) *Freeing children from stres : Focusing and tress control activities for children,* Willits, CA : ITA.

ORLICK T. (1990) Chapter 8: Mental Imagery, *Pursuit of Excellence: How to Win in Sport and Life Through Mental Training*, Champaign, IL: Leisure Press, 65-77.

PARTINGTON J. (1990) *Personal knowledge in imagery: Implications for novice gymnasts, figure skaters and their coaches*, Conférence annuelle "the Canadian Society for Psycho-Motor Learning and Sport Psychology", Windsor, ON.

PARZYSZ B. (1991) Espace, Géométrie et Dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée, *Recherches en didactiques des mathématiques*, **11/ 23**, 211-240.

PELISSIER P. & BILLOUIN A. (1989) *Patinage*, Éditions Robert Laffon, S. A., Paris, 239 pages.

PIAGET J. (1973) *La géométrie spontanée de l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, 491 pages.

PIAGET J. & INHELDER B. (1947) *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, (ed. 1977).

POIRIER L. (1999) *Réflexion autour du matériel de manipulation*, Instantanés mathématiques, septembre, 1999.

PORTER K. & FOSTER J. (1990) *Visual Athletics: visualizations for peak sports performance*, Wm.C. Brown (ed), Dubuque, Iowa, 202 pages.

PNCE (Programme National de Certification des Entraîneurs) théorie niveau 2 (1991), Publié par l'association canadienne des entraîneurs, Gloucester, Ontario, 230 pages. Imprimé par le CCASCP.

VAN HIELE P.M. (1959) La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'APMEP*, **198**, 199-205.

WHEALTEY GRAYSON H. (1990) Spatial sense and mathematics learning, *Arithmetic teacher*, Février 1990, 10-11.

WHITELEY W. (2004) *Visualization in Mathematics: Claims and Questions towards a Research Program*, 6 pages, http://www.math.yorku.ca/~whitely/

WHITELEY W. (2002), *Teaching to see like a Mathematician,* 11 pages, http://www.math.yorku.ca/who/faculty/whiteley/menu.html

PATRICIA MARCHAND
Université du Québec à Rimouski (UQAR)
Professeure en didactique des mathématiques
300 allée des Ursulines, c.p. 3300
Rimouski (Québec), Canada G5L 3A1
patricia_marchand@uqar.qc.ca

JORGE SOTO-ANDRADE

UN MONDE DANS UN GRAIN DE SABLE : METAPHORES ET ANALOGIES DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Abstract. A world in a grain of sand: Metaphors and analogies in mathematics Education.
Metaphors are not just rhetorical devices, but also very powerful cognitive tools. We can check through learning experiments that they help us, not only to learn new ideas, but also that they provide very efficient means to calculate. They have a bigger cognitive thrust than analogies, which are more familiar in didactics: A metaphor is an analogy that doesn't warn you in advance! We present here concrete examples that bring grist to our mill…

Keywords: Mathematics education, metaphor, analogy, comparison, representation, cognition.

Résumé. Les métaphores ne sont pas qu'un recours rhétorique, mais aussi des outils cognitifs très puissants. On peut constater au cours d'expériences d'apprentissage, qu'elles nous aident, non seulement à comprendre des idées nouvelles, sinon qu'elles fournissent en plus des moyens de calcul fort efficaces. Elles portent un impact cognitif plus important que les analogies, plus familières en didactique : Une métaphore est une analogie qui ne crie pas gare ! Nous en présentons ici des exemples concrets, qui apportent de l'eau a notre moulin…

Mots-clés. Métaphores, analogies, comparaisons, représentations, cognition, apprentissage des mathématiques.

Introduction

Métaphores, analogies et comparaisons sont des « figures de langage », des *tropes*, comme on dit en rhétorique.

Trope (du grec *tropos* « tour ») désigne un mot ou phrase détourné de sa signification habituelle au profit d'un autre, inhabituelle. En somme, une figure de langage portée hors de sa signification littérale.

Jadis, les tropes étaient considérés comme des ornements ou des embellissements de la langue, c'est-à-dire, des artifices rhétoriques. Plus récemment, déjà au dix-huitième siècle, on a commencé à les considérer comme des modes de pensée fondamentaux, indispensables à une communication précise. À présent, ils deviennent de vrais outils cognitifs.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 123 – 147.

Dans ce texte, après avoir survolé brièvement les maints avatars de la métaphore et ses similitudes et différences avec l'analogie, la comparaison (*simile*, en anglais) et la représentation, nous voulons présenter quelques exemples de son rôle cognitif en rapport avec l'apprentissage des mathématiques.

1. La métaphore et ses proches…

1.1. Les avatars de la métaphore

Une métaphore (du grec *metaphora*, « transfert » ou « déplacement ») désigne à l'origine une « figure de signification » par laquelle un mot se trouve recevoir dans une phrase un sens différent de celui qu'il possède dans l'usage courant (Pouilloux, 2004). Elle opère donc un transfert de sens, d'un domaine, dit domaine source, à un autre, dit domaine cible. Une métaphore est ainsi, plutôt une flèche, qui pointe d'un objet à un autre, qu'un lien entre deux objets.

Déjà Aristote l'avait dit, dans sa *Poétique* :

> « La métaphore est le transport à une chose d'un nom qui en désigne une autre, transport ou du genre à l'espèce, ou de l'espèce au genre ou de l'espèce à l'espèce ou d'après le rapport d'analogie. »

Mais bien de l'eau a coulé sous les ponts depuis :

> « La métaphore est une brebis qui broute dans le pré du voisin » propose de Vinsauf (Prandi, 2001).

« L'essence d'une métaphore est qu'elle permet de comprendre quelque chose (et d'en faire l'expérience) en termes de quelque chose d'autre », nous dit Lakoff (2003). Pour lui, une métaphore s'avère être un mécanisme neural qui nous permet d'adapter les systèmes neuraux utilisés par l'activité sensorimotrice, pour créer des formes de raisonnement abstrait.

Nous voyons ainsi apparaître un nouvel avatar de la métaphore classique, à savoir la métaphore conceptuelle. Celle-ci est une flèche d'un domaine source, plus transparent, en principe, sur un domaine cible, plus opaque, qui transporte avec elle la structure inférencielle du premier sur le second, ce qui nous permet de comprendre le domaine cible à partir du domaine source.

En même temps, le terme « métaphore », de plus en plus dans le vent, commence à être pris, en didactique et sciences cognitives, dans un sens de plus en plus large : il pourra signifier aussi bien « analogie », que « représentation », « image », « modèle », *etc*. (Parzysz B. et al., 2003). Pour ces derniers avatars, nous renvoyons aux Actes des groupes de travail sur les métaphores dans CERME 2, 2001 ; CERME 3, 2003 ; CERME 4, 2005.

Plusieurs chercheurs se penchent aujourd'hui sur les *processus métaphoriques*, qui émergeraient dès la prime enfance des systèmes sensoriels et perceptuels et seraient subordonnés aux régions du cerveau où le système moteur et le système non-moteur (cognitif) se chevauchent (Seitz, 2001).
À présent, on admet aussi qu'il n´y a pas que les métaphores verbales : il en a aussi des gestuelles, des visuelles, ainsi que de jeux d'enfants métaphoriques, comme celui de l'enfant qui prend un bâton pour un fusil, sans discours.
On commence à entrevoir le rôle fondamental du « mode métaphorique » en tant que moyen privilégié pour atteindre « l'esprit mathématique » qui sommeille dans l'inconscient de tout un chacun, en passant outre les blocages mis en place par son caractère, produit de son histoire personnelle (Pesci 2005). L'efficacité des métaphores en psychothérapie est bien connue (Pesci, 2005 ; Barker, 1987 ; Gordon, 1992).

1.2. Métaphores, analogies, comparaisons ou représentations ?

Une analogie est une comparaison entre deux choses similaires sous plusieurs rapports. Elle est aussi, en général, plus « prosaïque » que la métaphore, qui est plus poétique, et aussi plus aspectuelle que la métaphore, qui est plus holiste. Souvent, elle se rapporte à des objets qui sont sur le même pied, encore que l'on s'en sert aussi pour expliquer ce qui est non habituel par ce qui est habituel.

Il y a métaphore quand on condense l'analogie, en omettant d'exprimer certains de ses termes (Reboul, 1986).

Certains signalent, de manière plus précise, que l'analogie établit un lien entre deux concepts déjà construits, ce qui lui confère une nature symétrique, tandis que la métaphore est l'utilisation d'un concept déjà existant pour construire un nouveau concept, ce qui lui confère une nature asymétrique (Sfard, 1997).

Certains voudraient donc rapprocher une métaphore d'une représentation, ou image, d'un objet, souvent plus abstrait, par un autre, plus concret.

Par exemple, la page (http://www.plataforma.uchile.cl/fg/home_cfg.htm) de notre cours de formation générale à l'Université du Chili, intitulé « Promenades au hasard dans le pays des métaphores » (voir Annexe) s'ouvre avec une animation, où l'on voit une bille qui rebondit à l'intérieur d'un tétraèdre régulier au fur et à mesure que celui-ci tournoie sur lui-même. La première idée originelle, d'ailleurs, qui n'a pas été retenue par des raisons techniques, envisageait à la place de la bille, un papillon qui voletait aléatoirement à l'intérieur de la pyramide.

Est-ce une métaphore visuelle, une représentation ou une image du cours en tant que processus cognitif ? Peut-être toutes les trois, mais nous penchons plutôt pour la première, par des raisons d'intentionnalité et de style : la métaphore est plus poétique et percutante. Par contre, nous dirions que le modèle de N. Bohr qui décrit l'atome comme un système solaire en miniature, est plutôt une représentation qu'une métaphore.

Encore un exemple : Pour étudier le comportement d'une fonction, d'une ou deux variables réelles, disons, on dessine volontiers son graphe. Nous disons que nous avons alors plutôt une représentation, graphique, qu'une métaphore de la fonction. Par contre, quand nous regardons le graphe de la fonction comme un relief montagneux, comme une topographie, et nous parlons de côtes, de pentes, de sommets, d'un fond de vallée, ou d'un sentier ou courbe de niveau, nous sommes en pleine métaphore. Nous avons recours à une métaphore topographique, qui soutient notre intuition.

On pourrait aussi retenir qu'une représentation *tend*, ou au moins *prétend*, être « fidèle », chose que l'on ne demande pas trop à une métaphore. Par exemple, quand l'on parle de deux rangs de perles pour se référer aux dents, on est loin de la fidélité, car l'on ne tient pas compte du caractère mordant et tranchant des dents, seulement de sa couleur ou texture… C'est une métaphore, mais pas vraiment une représentation. Par contre, le modèle atomique de Bohr prétendait être fidèle, et mérite donc l'étiquette de représentation, encore que quand Bohr dit « le soleil de l'atome » pour se référer au proton, il devient métaphorique… D'autre part, c'est le point de vue de R. Núñez, par exemple, on *représente* un objet déjà existant, tandis que l'on se sert, même inconsciemment, d'une métaphore (conceptuelle) pour construire des objets nouveaux. Elles sont, toutes les deux, des flèches, mais qui pointent dans des sens opposés : la métaphore pointe du domaine source (connu ou « acquis ») vers le domaine cible (nouveau ou « étranger ») et la représentation pointe au contraire du domaine cible vers le domaine source. Si l'on envisage – à l'aide d'une métaphore spatiale - le domaine source comme étant plus « terre à terre » et le domaine cible au-dessus du premier, on peut voir les métaphores comme des flèches montantes, les représentations comme des flèches descendantes et les analogies comme des flèches horizontales.

Enfin, une comparaison est une figure de langage qui exprime explicitement la similitude entre deux objets, à l'aide des indicateurs du genre « comme », « ressemble à ». La comparaison partant « montre son jeu ».

Une métaphore relève de la comparaison, mais c'est une comparaison qui « ne crie pas gare ! ». Par exemple, si l'on dit, « cet homme est aussi rusé qu'un renard », ou « cet homme est rusé comme un renard », on fait une comparaison. Mais, si l'on lance : « cet homme est un renard », on fait une métaphore. De même, si l'on rapporte : « L'assassin blanc a envahi le jardin ! » à propos du givre….

2. Le rôle cognitif des métaphores

Les métaphores sont bien connues en tant qu'artifices rhétoriques, mais elles sont aussi des outils cognitifs, par ce que nous connaissons au travers des métaphores (Johnson & Lakoff, 2003 ; Lakoff & Núñez, 2000).

En particulier, nous pouvons apprendre et même résoudre efficacement des problèmes concrets, en mathématiques, en nous appuyant sur des métaphores…

Dans le cadre de cet article, nous distinguerons deux usages des métaphores dans l'apprentissage des mathématiques :

- des métaphores pour le processus d'apprentissage ;
- des métaphores pour les contenus et les objets mathématiques.

2.1. Des métaphores pour le processus d'apprentissage

Le plus souvent, on envisage l'apprentissage ou l'enseignement des mathématiques comme un voyage.

On voit différentes manières d'aborder, ou de s'approcher, d'un sujet. On cherche des « fils conducteurs ». On trouve plusieurs chemins qui mènent à la solution du problème, en contournant des difficultés… On parle de résultats profonds, ou de vues d'ensemble ou de panoramas.

Mais, d'autre part, on voit souvent l'apprentissage comme une transmission des connaissances, des « contenus », que les étudiants devraient recevoir, assimiler, digérer…

Nous avons donc une foule de métaphores topographiques et alimentaires dans ce domaine, qui façonnent, que nous le voulions ou pas, que nous le sachions ou pas, notre manière d'envisager et de mettre en œuvre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elles ne sont pas si innocentes qu'elles en ont l'air et certaines, les métaphores alimentaires, tout particulièrement, sont sûrement à la source des échecs réitérés, dans beaucoup de pays, aussi bien de l'enseignement traditionnel que de l'enseignement « moderne » des mathématiques (CREM 1995, Kahane 2001, Gardner 2005). Une conséquence de l'adhésion inconsciente à cette métaphore est la sensation d'être dupés qu'éprouvent maints étudiants au cours d'un atelier constructiviste, où ils ne reçoivent pas un « sandwich cognitif » tout fait, des mains de l'enseignant (Bills, 2003). Nous avons entendu des élèves, et aussi des enseignants en formation continue, témoigner de leur sensation d'égarement cognitif et du sentiment de « ne plus savoir où l'on va ». Après quelques séances de travail, ils commencent néanmoins à s'apercevoir qu'ils doivent fabriquer eux-mêmes leur sandwich avec les ingrédients et les moyens qui émergent au cours de l'atelier. Cela fait, bien sûr, basculer positivement leur attitude envers le travail en cours.

2.2. Des métaphores pour des objets mathématiques

Nous présentons ci-dessous quelques exemples simples de métaphores pour des objets et procédés mathématiques, qui permettent de résoudre efficacement des problèmes variés et qui ont été testés dans les cours 1 à 5 décrits en Annexe.

2.2.1. Les fréquences relatives et les probabilités sont des poids…

Après avoir entrepris l`étude statistique d'une variable aléatoire simple (par exemple, le temps d'attente du six au lancer d'un dé), les étudiants auront dressé une « photo » de cette variable, c'est-à-dire le graphe de ses fréquences relatives, issu d'un certain nombre de répétitions de l'expérience en question. Ou bien, ils auront dressé son « portrait », c'est-à-dire, le graphe de sa loi de probabilité. Aussi, ils en auront calculé la moyenne, ou l'espérance, suivant le cas.

À ce moment, s'ils ne le voient spontanément, on leur demande si ces graphes, avec leurs moyennes ou espérances, ne ressemblent pas à quelque chose de connu et quotidien. Souvent, quelques étudiants y « voient » une distribution des masses ou des poids et leur point d'équilibre. La plupart, néanmoins, ayant subi auparavant un enseignement plutôt répressif, ont besoin de se sentir autorisés et stimulés pour voir quelque chose d'autre dans leur graphe. Ils sont en général loin d'avoir fait l'expérience que les mathématiques, c'est l'art de voir l'invisible. Cette autorisation relève donc d'un contrat didactique selon Brousseau (1986).

Une fois que le déclic s'est produit, ils découvrent avec un certain émerveillement qu'ils sont transférés dans un autre domaine, celui de la mécanique, plus spécifiquement, celui de la statique, où l'on peut jouer à trouver le point d´équilibre d'un système de masses disposées sur une réglette. Dorénavant, ils peuvent se servir, avec profit, de leur intuition statique, bâtie sur les expériences de balançoire dans l'enfance, pour estimer, et ensuite calculer, une moyenne ou une espérance, et ainsi de suite… Notons que, pour un calcul précis, ils peuvent s'appuyer sur leur expérience enfantine du jeu de bascule : Où devraient s'asseoir sur la pièce de bois un garçon et une fillette, pour atteindre l'équilibre, si le garçon pèse le double de la fillette ?

En résumé, la moyenne ou l'espérance de la variable aléatoire X devient le point d'équilibre ou, si l'on préfère, le barycentre ou centre des masses de la distribution des poids qui est la métaphore statique d'une photo ou du portrait de X, suivant le cas.

Ensuite, placés devant le problème de mesurer, de manière simple, la dispersion des valeurs de X, les élèves peuvent s'apercevoir que ce problème se ramène à un problème de dynamique, grâce à notre métaphore. Pour travailler sur celui-ci, nous demandons souvent aux étudiants, comment ils pourraient ressentir, cinesthésiquement, l'éparpillement des masses en question, s'ils avaient la réglette en main, dans une chambre obscure, sans tripoter les masses une par une.

En travaillant en groupes, ils s'aperçoivent vite qu'ils n'auront aucune chance s'ils restent statiques et qu'il faut donc faire bouger la réglette à poids. Dans chaque groupe de travail, il n'est pas rare que quelqu'un ait l'idée de faire tourner la réglette sur elle-même, autour du pivot défini par le point d'équilibre. Le problème est alors transféré au domaine de la dynamique des corps tournants, qui est aussi un terrain de jeux d'enfance. Il arrive que leurs avis soient partagés sur ce qui arrive quand quelqu'un qui tourne sur lui-même, bras écartés, avec deux briques aux mains, replie les bras. Un peu d'expérimentation, même sans tabouret tournant, leur permet cependant de conclure.

Ainsi, grâce à notre métaphore et à un travail guidé, en groupes, les étudiants arrivent à avoir l'idée d'utiliser le système de poids le plus simple qui soit, de poids total 1, susceptible de tourner autour de son centre des masses, pour mesurer le degré d´éparpillement des poids dans notre réglette. Il s'agit, bien sur, d'un haltère (avec un demi-kilo à chaque bout), équilibré sur son centre. Il leur semble d'habitude clair qu'en jouant sur la longueur du bras (distance au centre de masse) de l'haltère, on peut imiter parfaitement l'inertie giratoire (moment angulaire) de chacune de nos distributions de poids. Or, ce bras est justement l`écart-type. Il pourra être estimé avant d'être calculé, grâce à l'intuition giratoire dont la métaphore nous permet de disposer.

La formule explicite habituelle pour l`écart-type résulte de l'égalisation des moments angulaires (inerties giratoires) de la distribution de poids et de l'haltère type, une fois que l'on s'est aperçu – par une expérimentation soigneuse – que le moment angulaire d'un objet giratoire est proportionnel au produit de sa masse par le *carré* de son bras.

Ainsi, l`écart-type de X devient le bras de l'haltère qui imite parfaitement l'inertie giratoire (moment angulaire) de notre distribution de poids.

Ce cheminement cognitif, basé sur la métaphore « les probabilités sont des poids » a été mis en œuvre, avec succès, dans les cours décrits en annexe. En répondant à des questionnaires de fin de semestre, la plupart des étudiants évoquent la découverte de l`écart-type, à partir du mouvement giratoire, comme un des points forts et inattendus du cours. En voici un échantillon (témoignage de Ragnar[1], à présent étudiant d'Anthropologie, après avoir achevé le cours 1 décrit en annexe) :

1 *« Es decir, creo que las metáforas son un especie de "cable a tierra"* (otra metáfora) *para hacer vivible lo aún no vivido, para abrir espacios que de buenas a primeras no a*

> « Je crois que les métaphores sont une espèce de “fil de terre” (encore une métaphore…) pour rendre sensible ce qu’on n’a pas encore éprouvé, pour ouvrir des espaces qui n’apparaissent pas d’emblée. Ce fil métaphorique branche une expérience nouvelle, éthérée, aérienne, abstraite, peut-être, avec notre terre sensorielle où nous sommes, ici, assis, debout, en lisant ou écoutant ceci. Je crois qu’en employant des métaphores dans le discours, on rend l’expérience cognitive plus proche, c’est-à-dire une vraie connaissance, une connaissance faite aussi avec le corps. L’un des épisodes le plus intéressants (du cours) a été quand nous avons appris l’écart-type, en nous rappelant de l’expérience de jouer avec les appareils tournants d’un square (de jeux d’enfants) ou de tourner sur nous-mêmes, avec des livres dans les mains, et (de constater) la différence dans la vitesse de nos révolutions suivant l’éloignement du poids des livres de notre centre de gravité. Nous avons compris ainsi combien est significative une donnée pour (le calcul de) l’écart-type dans la mesure où elle s’éloigne de la moyenne. » (Traduit de l’espagnol).

2.2.2. Les marches aléatoires sont des morcellements…

Les marches aléatoires, autrement dit, les « promenades au hasard », constituent un possible fil conducteur à travers plusieurs sujets mathématiques : les probabilités, la statistique, la combinatoire, l’algèbre, l’analyse… L’exemple paradigmatique de marche aléatoire est le mouvement brownien des grains de pollen en solution aqueuse, découvert en 1827 par le botaniste anglais Robert Brown.

Un « petit frère » du mouvement brownien est la marche aléatoire d’une puce qui se promène au hasard par les arêtes d’un polygone régulier, en sautant chaque fois d’un sommet à un voisin immédiat avec la même probabilité 1/2.

Si la puce part d’un sommet quelconque s, où la trouverons-nous après m sauts ?

Plusieurs métaphores émergent, au moment d’aborder « à la main » le calcul de la probabilité de présence de la puce aux différents sommets, pour *m* petit.

Dans les cours décrits en annexe, nous avons fait travailler les étudiants, en groupes autant que possible, en les autorisant et stimulant à métaphoriser. Nous cherchons donc qu’ils construisent ses propres métaphores, plutôt que leur imposer

---

aparecen. Este cable metafórico conecta una experiencia nueva etérea-aérea-tal-vez-abstracta con nuestra tierra sensorial corporal desde donde estamos aquí sentados o parados leyendo o escuchando esto. Creo que ocupando metáforas en el discurso uno hace de la experiencia del conocimiento una experiencia más cercana, es decir, un real conocimiento, un conocer también con el cuerpo.
Uno de los episodios más interesantes fue cuando aprendimos estadísticas y desviación estándar recordando la experiencia de jugar en los aparatos giratorios de una plaza, o el girar con libros en la mano y la diferencia en la velocidad de nuestras revoluciones dependiendo si teníamos el peso de los libros lejos o cerca de nuestro centro de gravedad. Así comprendimos cuánto más significativo para la desviación estándar era la importancia de un dato en medida que se alejaba del promedio. »

les nôtres. Éventuellement, avec un peu d'aide, il n'est pas rare qu'au sein des groupes, émergent certaines des métaphores suivantes.

La métaphore « salomonique »

Dans cette métaphore, on voit la puce se cassant en deux demi-puces, qui vont débarquer aux deux sommets voisins à l'issue du premier saut, et ainsi de suite…On se retrouvera donc avec de petits bouts de puce partout, que l'on pourra mettre ensemble sans difficulté, pas à pas.

Cette métaphore, qui ramène le calcul de probabilités à un calcul déterministe de fractions, est souvent la plus accessible aux étudiants. Elle leur permet de calculer de manière commode et sûre les probabilités en question, pourvu qu'ils maîtrisent suffisamment le calcul de fractions, ce qui n'est d'ailleurs pas toujours le cas…

Il est à remarquer que la métaphore salomonique nous permet de relier la marche aléatoire de la puce à l'évolution d'un marché de consommateurs en économie, par exemple : La probabilité de trouver la puce à un sommet donné devient alors la part du marché détenu par un producteur donné. Ce genre de liaison inattendue motive fort les étudiants, en général.

Nous voyons ainsi que la marche aléatoire de la puce peut apparaître comme une métaphore, utile, de l'évolution d'un marché économique. Mais, d'autre part, ladite évolution, ou encore un processus de fission d'une particule, peuvent apparaître, à leur tour, comme une métaphore de la marche aléatoire de notre puce.

La métaphore hydraulique

C'est une variante de la métaphore salomonique, où nous voyons maintenant s'écouler un fluide, par gravité, par un graphe de tuyaux, en se partageant à chaque point de bifurcation selon la loi de promenade de la puce.

On pourrait proposer à des élèves du secondaire, comme défi, de mettre au point, artisanalement, un réseau de tuyaux, qui donnerait une résolution analogique de la promenade aléatoire de la puce par les sommets du triangle équilatéral.

Une activité plus simple, qui a été réalisée par des enseignants du secondaire avec leurs élèves, dans des écoles socio-économiquement défavorisées de Santiago du Chili, consiste à décrire la marche aléatoire symétrique d'une puce par les entiers (visualisés par la droite numérique).

La puce part, disons, de l'entier 0, et saute à n'importe lequel de deux voisins immédiats, 1 et –1, dans ce cas, avec égale probabilité, et ainsi de suite. Les étudiants pourront alors assigner, de proche en proche, les probabilités de présence de la puce à chaque entier, en laissant s'écouler notre fluide probabiliste, par gravité, à partir du plus haut sommet de la grille triangulaire de tuyaux de la Fig. 1.

Bien sûr, ils retrouveront ainsi, à l'aide d'une métaphore hydraulique, le célèbre triangle de Pascal et la loi de probabilité du nombre de piles obtenues en lançant *n* fois une pièce. Mais, on aurait pu, aussi bien, les retrouver avec notre métaphore pédestre, par exemple…

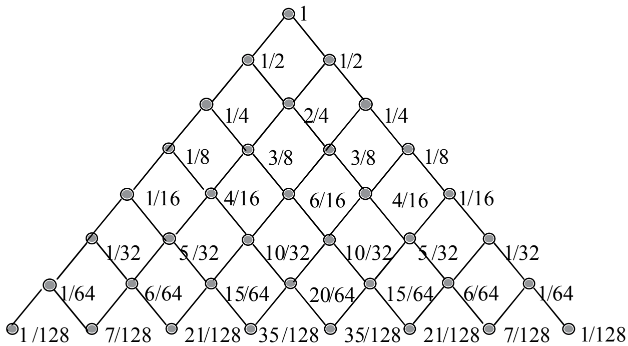


Figure 1 : Diagramme pour la métaphore hydraulique.

La métaphore généalogique

Une variante de la métaphore hydraulique est la métaphore généalogique, où l'on voit maintenant un arbre généalogique, dont le patriarche (ou la matriarche), qui est la racine de l'arbre, distribue son héritage à ses descendants. Elle le fait de manière équitable, dans notre cas, et tous ses descendants font de même…

La métaphore pédestre

Nous essayons de motiver les groupes qui n'aiment pas du tout le calcul des fractions, à chercher d'autres métaphores qui l'évitent autant que possible…, au moins jusqu'au dernier pas. Il arrive souvent que quelqu'un songe à lâcher, à la racine, un nombre convenable de puces qui se partageront en moitiés égales, et qui feront de même à partir de chaque sommet où elles arrivent. Pour *m = 10,* disons, les étudiants s'aperçoivent vite que 1024 puces conviennent, car elles auront à se partager 10 fois de suite. Il leur suffira de faire le compte des puces débarquées à chaque sommet, juste après le 10^e partage, et de calculer le pourcentage respectif, pour trouver les probabilités cherchées. Nous laissons aux étudiants la possibilité de découvrir par eux-mêmes, au moment d'aborder d'autres situations problématiques, la portée fort générale de ce type de métaphore.

2.2.3. Les équations sont des balances en équilibre

Comment un petit enfant pourrait-il résoudre l'équation

$$3x + 2 = x + 10 ?$$

En s'appuyant sur des métaphores statiques du genre « balance en équilibre» !

Il travaille au début avec du matériel concret, avec une vraie balance, où se trouvent en équilibre trois boîtes inconnues identiques et deux boîtes unités sur l'un des plateaux et une autre boîte inconnue identique aux précédentes et 10 boîtes unités sur l'autre plateau. En manipulant ces objets et en veillant à préserver l'équilibre, l'enfant arrive à équilibrer la boîte inconnue avec 4 boîtes unités. Il a donc trouvé $x = 4$ et résolu l`équation ! Après cette première étape concrète, on a même observé des enfants qui arrivent à résoudre l'équation mentalement (Araya 2000), en s'appuyant sur des métaphores gestuelles (Edwards 2005). Cette activité, fondée sur la métaphore de la balance en équilibre, fait partie des expériences pilotes que nos étudiantes du cours 2, décrit dans l'Annexe, testent ensuite, avec succès, en salles de classe, lors de leurs pratiques pédagogiques.

2.2.4. Métaphores pour la multiplication

Nous nous appuyons sur la métaphore des nombres comme des quantités d'objets regroupés. On demande aux élèves comment ils représenteraient 2×3. Le plus probable est qu'ils songent a regrouper 2 fois 3 jetons en forme de rectangle. Le professeur suggère d'adopter une convention fixée, pour cette représentation. Après discussion, on tombe accord sur une convention : soit 2 files de 3 jetons chacune ou 3 files de 2 jetons chacune. Si l'on choisit la représentation « rectangle de m files de n jetons» pour m x n , alors *la commutativité de l 'adition se voit comme un simple quart de tour du rectangle 2x3, qui était « couché », et se met donc « debout »,* son « aire », restant bien sûr la même (Figure 2). Il est a remarquer qu'il n'est pas nécessaire de conter ni de savoir que l'on a 6 jetons en tout, pour « voir » que ce nombre reste le même, et que l'on a donc bien 2 fois 3 égal 3 fois 2. Nous sommes donc bien à la hauteur des aborigènes amazoniens étudiés récemment par Dehaene (2004), qui ne savent pas compter ni nommer des nombres plus grands que 5 mais qui se débrouillent fort bien en arithmétique estimative, métaphorique, en mode cognitif non verbal et non séquentiel. Ceci montre bien la puissance cognitive des métaphores !

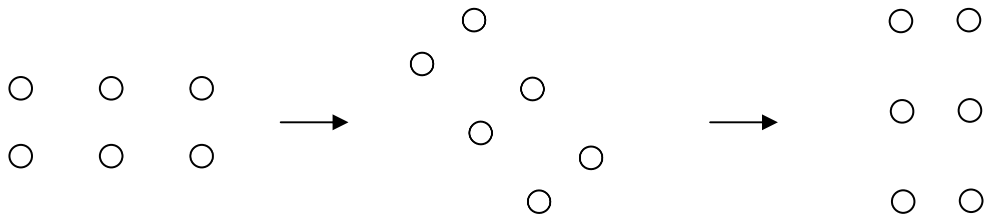


Figure 2 : « 2 fois 3 égale 3 fois 2 ».

Notons que l'on pourrait envisager cet exemple comme une transition entre la représentation et la métaphore. En effet, quand les élèves groupent leurs jetons en 2 files de 3 jetons, ils sont plutôt en train de construire une représentation de 2 × 3. Mais quand ils réalisent la commutativité : 2 × 3 = 3 × 2, comme une rotation de leur rectangle en un quart de tour, nous dirions plutôt qu'ils sont en pleine métaphore…

Or, on pourrait aussi représenter la multiplication de *2* par *3*, par un arbre, en adhérant – par exemple – à la convention de choisir l'arbre à *2* branches qui se bifurquent en *3* sous branches (Figure 3). Si l'on convient donc que *m x n* correspond à un arbre à *m* branches et *n* sous branches, nous aurons un arbre à 3 branches, à 2 sous branches chacune, à la place de 3 × 2, comme dans la Figure 3.

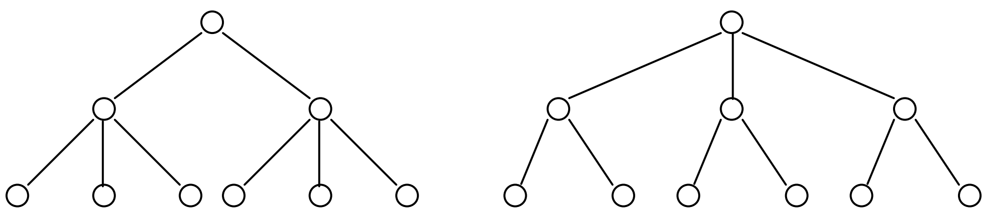


Figure 3 : Arbres multiplicatifs.

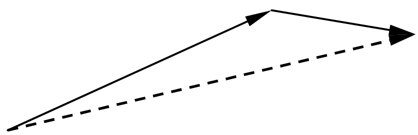
Traduit en langage généalogique :

Ève eut deux filles, et chacune d'elles, trois filles à son tour. Pour sa part, Lilith eut trois filles et chacune d'elles eut 2 filles à son tour. Combien de petites filles ont eu Ève et Lilith ?

Nous sommes ici à mi-chemin entre la représentation et la métaphore : on pourrait aussi bien dire que notre premier arbre est une représentation de la multiplication de 2 par 3, ou qu'il est une métaphore de celle-ci. Peut-être Lakoff et Núñez diraient-ils que nous avons ici une métaphore « forestière », ou « généalogique » de la multiplication, ou bien que le branchement est une métaphore de la multiplication (des entiers positifs).

Il est à remarquer, en tout cas, que nous trouvons ici une *limitation* de la métaphore forestière : on voit moins bien, en termes d'arbres, la commutativité de la multiplication : $2 \times 3 = 3 \times 2$, même si elle y est, implicitement. Cependant, si l'on se range au point de vue de R. Núñez, cette « limitation » de la métaphore n'en est pas une, au contraire, car elle fait ressortir le fait que la multiplication n'est pas « foncièrement commutative » comme l'addition. Autrement dit, elle n'est pas a priori commutative, elle ne l'est qu'après coup (dans le cas des nombres) !

Ce fait apparaît très naturellement si l'on s'appuie sur une troisième métaphore pour la multiplication : « multiplier, c'est accoler des flèches ». Il s'agit en fait de la métaphore sous-jacente à la composition d'applications ou des transformations (figure ci-contre).



Pour retrouver nos « 2 fois 3 » et « 3 fois 2 », il faudrait donc songer à : « tripler », puis « doubler » d'une part, et « doubler », puis « tripler », de l'autre. Autrement dit, voir 2 et 3 comme les opérateurs, qui doublent et triplent une grandeur quelconque.

On remarque que nos étudiants ont très souvent besoin de se sentir autorisés, en plus d'encouragés, pour entreprendre cette recherche. Aussi, il est fréquent qu'ils demandent au professeur sa permission pour faire ceci ou cela. On constate, en premier cycle universitaire, que presque aucun n'oserait se servir d'une métaphore ou une représentation convenable pour résoudre un problème concret. On peut imaginer quel type d'enseignement ils ont reçu.

2.2.5. Des métaphores animistes

Certains mathématiciens, en essayant de communiquer leurs idées, utilisent volontiers des métaphores, de manière spontanée et fort créative. Ils emploient même des métaphores animistes, comme René Thom, quand il écrit :

> « …On tue la topologie de la variété en l'appliquant sur l'axe réel, mais la topologie résiste, elle « crie », et ses cris se manifestent par l'existence de points critiques » (Thom, 1989).

La grande majorité des enseignants des mathématiques élémentaires, cependant, ne suivent pas, malgré les efforts des ministères concernés pour mettre en œuvre la réforme de l'enseignement à l'école.

En effet, ils ont le sentiment que le fait de s'appuyer sur des métaphores, pour enseigner des concepts mathématiques, ce n'est pas sérieux. Et les mathématiques, pensent-ils, c'est quelque chose de sérieux…

Nous avons pu constater, au cours de maints ateliers avec des instituteurs et professeurs, que c'est surtout le cas des enseignants de l'école secondaire, dans beaucoup de pays ; les instituteurs et institutrices de la maternelle et l'école primaire ont, par contre, une attitude beaucoup plus réceptive envers les métaphores et perçoivent mieux leur rôle cognitif.

2.3. La dynamique des métaphores

2.3.1. Comment interagit l'apprenant avec les métaphores ?

Dans l'enseignement traditionnel des mathématiques il n'y a pas de mention explicite des métaphores. Il y a néanmoins des métaphores implicites ou inconscientes, que l'enseignant transmet, ou impose même, à l'apprenant. Beaucoup d'entre elles sont des métaphores consacrées par la pratique mathématique : « la droite numérique », le graphe d'une fonction en tant que trace d'un mouvement fictif (Acevedo, 2005), etc. D'autre part, l'apprenant n'ose surtout pas « métaphoriser » quand il aborde un problème posé par l'enseignant. En plus, il a le sentiment que les métaphores sont quelque chose d'illégal, qui n'est pas dans les règles. C'est ce qu'avouent les étudiants des cours décrits en Annexe, que nous avons interviewés. En outre, les plus éveillés disent préférer créer leurs propres métaphores, avec un peu d'aide, à la rigueur, plutôt que les recevoir toutes faites de l'enseignant. Partant, un point fondamental concernant l'opération des métaphores est d'*autoriser* explicitement les étudiants à s'en servir. En plus, il faudra les stimuler et les aider à construire leurs propres métaphores, au lieu de toujours leur proposer des métaphores toutes faites.

Une condition nécessaire au succès cognitif d'une métaphore auprès d'un étudiant est un haut degré de familiarité de celui-ci avec le domaine source de la métaphore. Autrement, nous aurions des métaphores qui « tombent dans le vide ». Bien sûr, l'enseignant devrait être au courant du vécu préalable de l`étudiant, mais en même temps la participation des étudiants à la construction des métaphores à employer tend à assurer un degré de familiarité plus élevé. Ensuite, une fois la métaphore en place et le transfert de sens opéré, l'apprenant peut travailler dans le domaine source de la métaphore, en y puisant dans sa propre expérience.

2.3.2. Encore un exemple : Le système binaire fait chair

Notre métaphore de base est ici celle de l'arithmétique comme manipulation des ensembles finis d'objets.

Nous l'avons employée avec les instituteurs-élèves du cours 5, décrit en Annexe, qui n'avaient que des idées vagues sur le système binaire de notation des nombres et le voyaient surtout comme un artifice gratuit concocté par les mathématiciens.

Activité : Tous les élèves du cours se mettent debout et forment autant de couples (sans regard au sexe) que possible. On note s'il reste ou non un élève solitaire. Ensuite, les couples se regardent et se mettent ensemble, par paires, pour former des quadruplets. On note s'il reste un couple solitaire. En suite, les quadruplets de regardent et se mettent ensemble, deux par deux, pour former des octuplets, *etc*. Quand le processus s'arrêtera, l'ensemble des élèves sera partagé en une collection de groupes, tous de tailles différentes, où il y aura, *peut-être*, un groupe d'un élève, *peut-être* un groupe de 2 élèves, *peut-être* un groupe de 4 élèves, etc. Par exemple : 1, 8, 32. De cette manière, la classe trouve la décomposition binaire de son cardinal (le nombre des instituteurs en formation) sans l'avoir même compté au préalable. Ils trouvent, par exemple

$$1 + 2^3 + 2^5 = 1 + 8 + 32 = 41.$$

En notant par 1 et 0, respectivement, la présence ou l'absence d'un groupe solitaire de 1, de 2, de 4, etc. dans le regroupement binaire de leur nombre, et en écrivant de droite à gauche, on trouve l'écriture binaire du nombre total d'instituteurs : 101001.

Les instituteurs ont témoigné qu'ils n'avaient jamais vu « se faire chair » le système binaire, de cette façon ou d'une autre. En répondant à des questionnaires, ils ont signalé qu'ils s'étaient sentis beaucoup plus concernés et engagés que d'habitude au cours de cette expérience, difficile à oublier. Leur compréhension opérationnelle du système binaire a fait un bond en avant, ou plutôt, un saut quantique. Ils ont pu découvrir naturellement comment additionner en système binaire, par exemple. En même temps, on constate qu'ils ont compris qu'ils peuvent « faire de même » pour d'autres bases que la base 2. Et ils l'ont fait !

2.3.3. Les métaphores, nous sauvent-elles la vie ?

On a constaté maintes fois, avec inquiétude, l'insuccès de l'enseignement, traditionnel ou « moderne », des mathématiques, surtout dans le cas des étudiants qui n'ont pas de vocation mathématique particulière, et qui subissent donc un enseignement qui les repousse et les démotive (CREM 1995, Comission Kahane, 2001).

Or, dans les approches habituelles, on se méfie des métaphores, en allant même jusqu'à les bannir (Detienne, 2005 ; Molino, 1979) :

> « La lumière de l'esprit humain, ce sont des mots clairs, épurés, en premier lieu, et purgés de toute ambiguïté, par des définitions exactes. (…) les métaphores, les mots ambigus ou qui ne veulent rien dire, sont comme des feux follets ; s'en servir pour raisonner, c'est errer parmi d'innombrables absurdités », prêchait Hobbes (1971).

> « Une science qui accepte les images est, plus que tout autre, victime des métaphores. Aussi l'esprit scientifique doit-il sans cesse lutter contre les images, contre les analogies, contre les métaphores » enjoignait Bachelard (1975).

À l'opposé de ce discours, nous avançons que les métaphores « nous sauvent la vie ». En effet, le fait de les mettre au premier plan, et de s'appuyer sur elles, permet de lancer des processus cognitifs d'apprentissage fort différents des processus habituels.

Dans nos cours (cf. Annexe), qui s'adressent surtout à des non mathématiciens, soit à des élèves à vocation humaniste, non scientifique « dure », soit à des professeurs en formation continue, nous avons pu constater qu'une approche métaphorique a des effets très encourageants sur l'apprentissage des élèves et la qualité des compétences acquises.

Les métaphores mettent les mathématiques à la portée de tout le monde, au lieu de rester l'apanage d'une élite. Elles seront peut-être inventées par les plus doués, mais elles pourront être utilisées par tous.

Une enseignante, qui venait de faire avec nous l'expérience de résoudre aisément un problème probabiliste à l'aide de la métaphore pédestre, l'a exprimé de façon fort spontanée, bien que péjorative : « Ce n'est pas mal ! Comme ça, même le plus grand âne comprend ! »

Bien entendu, une métaphore donnée sera didactiquement utile pour tous ceux qui ont assez de familiarité avec le domaine source de la métaphore. On peut espérer néanmoins que si l'on met en œuvre un éventail assez large de métaphores relatives a un thème mathématique donné, on pourra « toucher » pratiquement tout le monde. Le défi reste ouvert, cependant, de créer des métaphores de tous bords qui pourraient rendre accessibles des sujets complexes même aux élèves (apparemment) moins doués.

L'ampleur de l'éventail de métaphores disponible est important, aussi bien parce qu'elles s'adressent à des apprenants qui risquent d'avoir des domaines d'expérience variés, que parce que souvent une métaphore ne capture pas toutes les facettes possibles d'un objet mathématique; il vaut donc mieux avoir plus d'une flèche dans son carquois.

3. Récolte didactique

Puisque les métaphores transfèrent des objets d'un domaine à un autre, elles nous permettent de tirer profit de notre intuition dans un domaine, pour travailler dans un autre et transférer même notre compréhension, d'une science à une autre. On peut le voir dans nos exemples, où émergent des métaphores relevant de l'hydraulique, de la statique, de la dynamique, de l'économie, entre autres, qui nous aident a découvrir et a appréhender des concepts tels que la moyenne ou l`écart-type d'une variable aléatoire, par exemple.

Les métaphores fournissent souvent des réalisations concrètes des concepts ou des procédés mathématiques, à la portée même des petits enfants. Il s'avère ainsi fécond de leur proposer, de bonne heure, un éventail de jeux, avec du matériel concret, basés sur ces métaphores, qui prépareront le terrain pour un emploi cognitif efficace de celles-ci, ultérieurement.

Les métaphores ont besoin d´un terrain fertile pour pousser… Or, ce terrain est fourni, dans une grande mesure, par les expériences psychomotrices de la prime enfance. On voit ainsi l'intérêt d'un jeu de bascule, par exemple, à la lumière de nos métaphores statiques, en probabilités et statistique.

Nos métaphores, qui ont poussé dans ce terrain, sont en fait des « met-befores » au sens de Tall (2006). Nous prétendons que ces expériences préalables de l'enfance seront déterminantes, plus tard, quand l'étudiant rencontrera des concepts mathématiques comme la moyenne ou l'écart-type d'une variable aléatoire, ou d'un ensemble de données, par exemple.

Nos métaphores se rattachent à la pensée commune, au sens de Rouche (2006), car elles poussent dans un terrain commun. En plus, la pensée commune ignore les frontières disciplinaires, que nos métaphores traversent sans peine.

En somme, notre proposition didactique pourrait s'exprimer ainsi : « Pour monter, il faut d'abord descendre ». En effet, si nous voulons aider un apprenant à « monter », du point de vue cognitif, nous ne pouvons que difficilement le « hisser » jusqu'au niveau souhaité, si d'abord nous ne descendons pas, creusons même, jusqu'à trouver un sol ferme d'expérience préalable, foncièrement psychomotrice, où des métaphores efficaces, pour ce sujet, puissent pousser et soutenir son ascension cognitive.

Pour conclure, en nous rappelant qu'aussi bien la mathématique que la poésie voient ce qui est invisible, nous proposons une lecture cognitive de ce poème de William Blake :

> To see a world in a grain of sand
> And a heaven in a wild flower
> Hold infinity in the palm of your hand
> And eternity in an hour
> *(Voir un monde dans un grain de sable*
> *et un paradis dans une fleur sauvage,*
> *tenir l'infini dans la paume de ta main*
> *et l'éternité dans une heure)*

Annexe : Quelques évidences expérimentales

L'approche métaphorique de l'apprentissage des mathématiques que nous avons ébauchée ici a été mise en œuvre lors de plusieurs cours de mathématiques générales, faits majoritairement à des étudiants de filières non scientifiques, et à l'occasion de nombreux ateliers de formation continue et recyclage pour des professeurs de l'enseignement secondaire et primaire.

Plus précisément, il s'agit des cours suivants :

1. Un cours de Mathématiques Générales, semestriel, donné depuis 2001, à une quarantaine d'étudiants de la filière Sciences Sociales et Humanités, du programme de « Baccalauréat » de l'Université du Chili (analogue d'un DEUG français, option Sciences Humaines et Sociales, ou d'un « Bachelor » anglo-saxon). Ces étudiants, au nombre de 30 a 50 par an, s´orientent vers les sciences humaines et sociales, mais aussi vers la Faculté de Droit, par exemple.

   Ce cours traite, à un niveau introductif, les sujets suivants : Probabilités, Statistique, Combinatoire, Séries, Géométrie Fractale, Trigonométrie et Nombres Complexes, Calcul Infinitésimal, Théorie des Systèmes. Ces sujets sont articulés par un fil conducteur qui démarre avec le hasard (motivé par les variables aléatoires quotidiennes et les promenades aléatoires), s'enfuit à l'infini (l'attente de « pile » lors du lancer d'une pièce…), découvre et somme les séries géométriques à l'aide des arbres probabilistes, dissipe les Paradoxes de Zénon, explore les formes limites à l'infini, telles que les fractales, rencontre la dérivation comme procédé limite motivé par des problèmes d'optimisation, explore les formes des graphes des fonctions, ondes en particulier, découvre le lien entre dérivation et intégration, explore les états limites du devenir de systèmes simples, déterministes ou stochastiques, découvre comment les nombres complexes nous simplifient la vie à ce sujet.

2. Un cours de Cognition Mathématique, annuel, pour de futures institutrices et instituteurs, qui enseigneront à la maternelle et au premier cycle de l'école élémentaire. Ce cours a été donné en 2004 et 2005, avec une vingtaine d'élèves en moyenne.

   On y traite les nombres, leurs différents rôles, leurs systèmes d'écriture, dont le système binaire, les opérations, les formes géométriques, leurs rôles et fonctionnalité, en 2D et 3D, les symétries, la géométrie grecque versus la géométrie fractale. Pendant le cours, on mène en parallèle une réflexion didactique, où les étudiants pratiquent métaphores et modes cognitifs et s'interrogent, devant chaque concept ou méthode, sur les questions auxquelles les concepts ou méthodes fournissent des réponses. Elles se demandent donc : À quoi ça sert ? Dans quelles situations quotidiennes cela peut émerger ? Ce cours se situe en dernière année d'études, quand les étudiants sont déjà engagés dans des pratiques pédagogiques périodiques dans les écoles, où ils peuvent essayer de mettre en œuvre les idées et stratégies didactiques qu'ils sont en train de découvrir.

3. Un cours de Formation Générale semestriel, optionnel, intitulé « Promenades au hasard au pays des métaphores », qui s'adresse aux étudiants de l'Université du Chili, toutes filières confondues. Ce cours a été donné depuis 2003, avec une soixantaine d'élèves en moyenne chaque semestre. La page du cours <**http://www.plataforma.uchile.cl/fg/home_cfg.htm**> s'ouvre avec une animation, où l'on voit une bille qui rebondit à l'intérieur d'un tétraèdre régulier au fur et à mesure que celui-ci tournoie sur lui-même. Une métaphore visuelle donc, plutôt qu'une représentation du cours en tant que processus cognitif.

   Les 4 facettes du tétraèdre, et du cours, sont respectivement nommées : Le hasard et la nécessité, la fuite à l'infini, les symétries, la vision systémique. Il n´y a pas d'ordre naturel entre ces facettes, qui ensemble constituent un objet cohérent : le tétraèdre régulier. Le déroulement du cours lui-même, est conçu comme un cheminement aléatoire entre ces 4 grands thèmes.

   Un parcours typique démarre avec une discussion sur le hasard et la nécessité, des exemples de hasard et non hasard, le mouvement brownien et ses petits frères, continue avec le saut à l'infini, la dissipation des paradoxes de Zénon, les sommes géométriques, les limites de toutes sortes, les formes fractales en tant que formes limites, la dichotomie « géométrie lisse –géométrie fractale », les symétries en géométrie et ailleurs, le point de vue systémique, le devenir des systèmes et leur destin ultime, l'autoréférence…

   L'évaluation du cours se fait d'après les exercices et problèmes que les étudiants abordent pendant le semestre, en choisissant dans une liste proposée à la page du cours. Il y en a pour tous les goûts, en allant des plus techniques aux plus « humanistes ». Par exemple : Comment faisaient les franciscains de l'Italie du XII^{e} siècle pour choisir « au hasard » une route chaque fois qu'ils arrivaient à un carrefour, au cours de leurs pèlerinages ?

4. Un cours semestriel d'Algèbre Linéaire et Calcul Vectoriel, pour des étudiants de Licence ès Sciences, mention Biologie et Chimie. Ce cours a été donné depuis 2004, avec une soixantaine d'élèves en moyenne. Il prend comme fil conducteur les systèmes et leur devenir, en se concentrant sur le cas linéaire, bien sûr, où la diagonalisation est un outil de choix. Ensuite, on transite vers l'univers non linéaire, où l'on se ramène localement au cas linéaire. On développe ainsi le calcul différentiel de fonctions à plusieurs variables, que l'on représente par leurs graphes et que l'on étudie avec l'aide des métaphores topographiques (surtout en dimension 2 et 3 à la source). Enfin on explore la

théorie du potentiel, intégrant le long des chemins, pour aboutir au théorème de Green.

5. Un Certificat annuel de formation continue adressé à des instituteurs et institutrices en exercice qui veulent parfaire leur formation mathématique. Ce cours, de 30 étudiants, boursiers du Ministère de l'Éducation Nationale, traite des nombres et leurs systèmes de notation, opérations numériques, géométrie élémentaire en 2 et 3 dimensions, statistique élémentaire, informatique éducative, résolution de problèmes. Les contenus disciplinaires et les méthodologies didactiques y sont traités de façon intégrée, en évitant les cloisonnements. On pratique les différents modes cognitifs (Flessas & Lussier, 2005) à propos des notions mathématiques fondamentales et leur transposition didactique (Chevallard, 1985). Les approches métaphoriques y trouvent, bien sûr, une place de choix.

Même si des études quantitatives plus poussées restent à faire, nous avons pu faire, jusqu'à présent, les constatations suivantes.

Des étudiants de vocation humaniste, comme ceux du cours 1, pas spécialement doués pour les mathématiques, en principe, sont arrivés à résoudre des problèmes non triviaux et mathématiquement intéressants, en s'appuyant sur des métaphores convenables. Certains ont découvert qu'ils avaient des aptitudes mathématiques remarquables, ignorées jusqu'alors. Ils sont arrivés aussi à manier métaphoriquement des concepts et des méthodes mathématiques plus avancés, que l'on aurait cru hors de leur portée. Par exemple, calculer à l'aide d'une métaphore hydraulique adéquate, des espérances données par des séries (apparemment) non géométriques. En plus, chez les futurs biologistes, par exemple, on a trouvé des étudiants qui se sont avérés fort doués pour les mathématiques et qui ont beaucoup profité de l'approche métaphorique. Notamment, celle-ci leur a permis de transférer des intuitions biologiques (spécialement, de la biologie systémique) au domaine mathématique.

Les étudiants qui ont suivi ces cours ont témoigné, presque unanimement, une fois le semestre achevé, combien l´expérience cognitive vécue a été marquante pour eux, et comment elle a bouleversé leurs idées reçues et l'expérience des mathématiques qu'ils avaient eue auparavant.

Parfois nous avons demandé aux élèves du Baccalauréat, s'ils voyaient un rapport quelconque entre le cours qui venait de s'achever et l'extrait du poème de William Blake ci-dessus. La plupart ont très bien vu le rapport, et ont donc fait une lecture cognitive spontanée du poème.

Ils ont perçu l'identité entre les courts-circuits et les rapprochements inattendus qu'expriment les métaphores en poésie et en mathématiques. Ils ont bien vu tout le parti que l'on peut tirer d'un modeste « exemple bébé », qui s`avère, après coup, une métaphore de beaucoup d'autres choses. Certains ont même expliqué pourquoi, pour eux, ce poème était une métaphore du cours.

Ces idées ont aussi été mises en œuvre dans la rédaction des textes édités et distribués par le Ministère de l'Éducation chilien pour l'enseignement secondaire en mathématiques, suite à des appels d'offres, entre 2000 et 2005 (cf. González & Soto Andrade 2003, 2004a, 2004b, 2005). Ces textes ont encouragé un certain nombre d'enseignants du secondaire (encore minoritaire, hélas…) à employer des approches métaphoriques dans sa pratique, avec des résultats fort positifs.

Bibliographie

ACEVEDO I. (2005) *Metaphors in mathematics classrooms: Analysing the dynamic process of teaching and learning to graph functions,* http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/1/acevedo.pdf

ARAYA R. (2000) *La inteligencia matemática,* Editorial Universitaria, Santiago, Chili.

BACHELARD G. (1975) *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, Paris.

BARKER P. (1987) *Using Metaphors in Psychotherapy*, Brunner/Mazel Publishers, New York.

BILLS C. (2003) *Metaphor in young children's mental calculation* http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_bills_cerme3.pdf

BROUSSEAU G. (1986) "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherche en didactique des mathématiques*, **72**, 33-114. http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Brousseau/Didactica1.pdf

CERME 2 (2001) *Proceedings of the Second Conference of the European Research in Mathematics Education (CERME)*, Mariánské Lázně, République Tchèque, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/cerme2procee.pdf

CERME 3 (2003) *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italie, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/TG1_draft/index.htm

CERME 3 (2003) *Proceedings, Thematic working group 1, Role of metaphors and images in learning and teaching mathematics, Introduction,* Bellaria, Italie, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/TG1_draft/index

CERME 4 (2005) *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Sant Feliu de Guíxols, Espagne, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME4/

CHARBONNEL N. (2005) *Métaphore et philosophie moderne,* http://www.info-metaphore.com/articles/pdf/charbonnel-metaphore-et-philosophie-moderne-tache-aveugle-rhetorique.pdf

CHEVALLARD Y., JOSHUA M.A. (1985) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

CREM (1995) *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques,* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgique.

COMISSSION KAHANE (2001) *Présentation des rapports et recommandations,* http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportsCommissionKahane.pdf

DEHAENE S. (2004) Cognition et capacités arithmétiques : Ce que nous apprennent les indiens Mundurucu, http://www2.cnrs.fr/presse/communique/566.htm?debut=24

DETIENNE C. (2005) *La métaphore dans le discours scientifique,* http://www.info-metaphore.com/articles/epistemologie.html

DUBINSKY E. (1999) *Review of Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images,* L. English (Ed.), in Notices of the Amer. Math. Soc., **46**, 5, 555-559, http://www.ams.org/notices/199905/rev-dubinsky.pdf

EDWARD L. (2002)*, The nature of Mathematics as viewed from Cognitive Science*, Proc. CERME 3, Bellaria, Italie, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_list.html

EDWARD L. (2005), *Metaphors and Gestures in Fraction Talk,* Working Group 1, Proc. CERME 4, Sant Feliu de Guixols, Espagne, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/1/edwards.pdf

FERRARA F. (2003) Bridging perception and theory: What role can metaphors and imagery play?, WG 1 , Proc. CERME 3, Bellaria, Italie, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_ferrara_cerme3.pdf, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/TG1_draft/TG1_ferrara_draft.pdf

FLESSAS J. & LUSSIER F. (2005) "*La neuropsychologie de l'enfant*", Dunod, Paris.

GARDNER H. (2005) *Las cinco mentes del futuro: Un ensayo educativo*, Paidós, Buenos Aires, http://www.pz.harvard.edu/PIs/HG_Multiple_Lenses.pdf

GONZALEZ P. & SOTO ANDRADE J. (2003) *Matemática Activa, Primer Año Medio,* Editorial Marenostrum, Santiago du Chili.

GONZALEZ P. & SOTO ANDRADE J. (2005) *Matemática Activa, Cuarto Año Medio,* Editorial Marenostrum, Santiago du Chili.

GONZALEZ P. & SOTO ANDRADE J. (2004a) *Matemática Activa, Segundo Año Medio,* Editorial Marenostrum, Santiago du Chili.

GONZALEZ P. & SOTO ANDRADE J. (2004b), *Matemática Activa, Tercer Año Medio,* Editorial Marenostrum, Santiago du Chili.

GORDON D. (1992) *Therapeutic Metaphors: Helping Others Through the Looking Glass*, Meta Publications, Cupertino, California, 1978.

HOBBES Th. (1971) *Léviathan*, Sirey.

JOHNSON M. & LAKOFF G. (2003) *Metaphors we live by,* The University of Chicago Press, New York (version française : *Les métaphores dans la vie quotidienne*, Editions de Minuit, Paris).

LAKOFF G. & NUÑEZ F. (2000) *Where Mathematics comes from?,* Basic Books, New York.

MOLINO J. (1979) *Métaphore, modèles et analogies dans les sciences*, Langage, **54** : la métaphore, 83-102, Larousse, Paris.

PARZYSZ B. et al. (2003) *Introduction to Thematic Working Group 1, Role of metaphors and images in learning and teaching mathematics,* Proc. CERME 3, Bellaria, Italie, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/TG1_draft/TG1_introduction_corr2.pdf

PESCI A. (2005) *Mediation of metaphorical discourse in the reflection on one's own individual relationship with the taught discipline: an experience with mathematics teachers***,** WTG1, Proc. CERME 4, Sant Feliu de Guíxols, Espagne, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/1/pesci.pdf

POUILLOUX J-Y. (2004) *Article sur la Métaphore*, Encyclopædia Universalis.

PRANDI M. (2001) *Grammaire philosophique de la métaphore*, Paris.

PRESMEG N.C. (1997) *Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning*, dans L. D. English (Ed*.), Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, 267-279, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

REBOUL O. (1986) *La figure et l'argument*, dans *De la métaphysique à la rhétorique*, M. Meyer (éditeur)*,* Eds. de l'Université Libre de Bruxelles.

REDDY M.J. (1979) *The Conduit Metaphor: A Case of Frame Conflict in our Language About Language,* dans A. Ortony (Ed.), *Metaphor and Thought*, Cambridge University Press, Cambridge.

ROUCHE N. (2006) Sur la nécessité des lignes conductrices pour l'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'age adulte*,* à paraître aux *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **11** supplément spécial colloque de Mons.

SEITZ J. (2001) *The biological and bodily basis of metaphor,* http://philosophy.uoregon.edu/metaphor/neurophl.htm

SFARD A. (1994) Reification as the birth of metaphor, *For the Learning of Mathematics,* **141**, 44-54.

SFARD A. (1997) *Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth.* dans L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, 339-371, Erlbaum, London.

TALL D. (2006) A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **11**.

VARELA F., THOMPSON E. & ROSCH E. (1991) *The embodied mind: Cognitive science and human experience,* MIT Press, Cambridge.

JORGE SOTO-ANDRADE
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Casilla 653
SANTIAGO, CHILI
sotoandr@uchile.cl

ERICH CH. WITTMANN

LES MATHEMATIQUES VUES COMME LA SCIENCE DES STRUCTURES (*)

COMPTE RENDU DU PROJET MATHE 2000

À la mémoire de Hans Freudenthal

Abstract. Mathematics as the Science of Patterns, ***A guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood.***
The aim of the present paper is to give an account of the holistic approach to mathematical education developed in the project *Mathe 2000*. The emphasis is on the mathematical roots. It will be shown how a special view of mathematics as the science of patterns can be made practical in developmental research. The paper consists of three sections: A short introduction into the project's philosophy in the first section is followed by the description of some typical learning environments. In the third section some underlying theoretical principles are explained by referring to the learning environments of section 2.

Keywords. Patterns, learning environments, learning by discovery, representations, operative proofs, teacher education.

Résumé. L'objectif de notre article est de rendre compte de l'approche globale adoptée dans le projet *Mathe 2000* en ce qui concerne l'éducation mathématique. L'accent est mis sur les origines mathématiques. Nous montrerons comment les mathématiques vues comme la science des structures peuvent être utilisées dans la recherche développementale. L'article est structuré en trois sections. La première section est consacrée à la philosophie de notre projet, la seconde est consacrée à la description de quelques environnements substantiels d'apprentissage (ESA) « substantial learning environnments », tandis que la troisième explique certains principes théoriques sous-jacents aux environnements substantiels d'apprentissage développés dans la deuxième section.

Mots-clés. Structures, environnements d'apprentissage, découverte, représentations, démonstrations opératoires, formation des professeurs.

(*) Traduction de l'anglais, par Charlotte Bouckaert, UREM ULB, Présentée au colloque de Mons.
Consult the English version of this article on line at http://irem.u-strasbg.fr menu publications.

1. Le projet *Mathe 2000*

En 1985, l'état de Rhénanie du Nord–Westphalie a adopté un nouveau programme de mathématiques au niveau primaire (première primaire à quatrième primaire). Ce

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 149 – 174.

programme conçu par Heinrich Winter, le "Freudenthal" allemand, a radicalement changé l'éducation mathématique en Allemagne et a exercé une énorme influence à tous les niveaux de l'éducation mathématique. Les innovations suivantes sont particulièrement remarquables :

1. Les quatre objectifs « généraux » de l'enseignement mathématique qui reflètent les composantes de base de l'activité mathématique à tous les niveaux jouent un rôle prééminent (Winter, 1975) :

   – mathématiser ;

   – explorer ;

   – raisonner ;

   – communiquer.

2. Un paragraphe est consacré explicitement à la complémentarité de l'aspect pur et appliqué des mathématiques et les conséquences sur l'enseignement des mathématiques sont décrites en détail.

3. Le principe de l'apprentissage par la découverte active est explicitement prescrit comme le principe de base de l'enseignement et de l'apprentissage.

Nous avons fondé *Mathe 2000* en 1987 afin de soutenir les enseignants dans la mise en œuvre de ce programme. Notre projet de recherche développementale s'est placé dans l'optique selon laquelle l'éducation mathématique est la science du « design » (Wittmann, 1995) et les objectifs fondamentaux suivants ont été connectés entre eux et développés simultanément :

– la conception (design) et la mise en oeuvre d'unités substantielles d'apprentissage (trajectoires d'apprentissage) comme l'essentiel de la formation et de la formation continuée des maîtres en mathématiques et en didactique ;

– les études expérimentales du mode de pensée des enfants, de la communication dans la classe ainsi que du *counseling*[1].

Mathe 2000 puise surtout ses sources de recherche développementale dans les mathématiques – à l'inverse de beaucoup d'orientations de recherche en éducation mathématique, y compris dans le mouvement international des « standards mesurables[2] » qui sont basés sur la psychologie, les sciences cognitives et

---

[1] Pour en savoir plus sur *Mathe 2000*, consulter le site web : http://www.uni-dortmund.de/mathe2000

[2] Pour une vision critique de PISA voir Müller, Steinbring & Wittmann (2004).

l'éducation générale. *Mathe 2000* a choisi de comprendre les mathématiques comme la science des structures (Sawyer, 1955 et Devli, 1996), en insistant sur le fait que ce n'est pas la science des structures toutes faites et statiques mais bien la science vivante des structures dynamiques qui peuvent être développées globalement dans tout le programme, mais aussi explorées, prolongées, reformulées, réinventées à un niveau local par les apprenants eux-mêmes. En d'autres termes, les processus mathématiques à court terme et à long terme comptent bien plus que les produits finis. Le travail de spécialistes de l'éducation mathématique britanniques, écossais, néerlandais et japonais dans les années 1960 et 70 ainsi que le travail structurant de Heinrich Winter nous ont servi de modèles (Fletche, 1965 ; Wheeler, 1967 ; Iowo, 1976 ; Becker & Shimada, 1997 ; Winter, 1984, 1987, 1989).

A l'instar d'autres projets de recherche développementale comme Iowo à Utrecht sous la direction de Hans Freudenthal et plus récemment au CREM à Nivelles (Ballieu & Guissard, 2004), *Mathe 2000* s'est fixé comme objectif de développer un programme cohérent de la maternelle à l'université. Jusqu'à présent notre recherche s'est focalisée sur les niveaux de l'enseignement maternel et primaire ainsi que sur la formation des maîtres. C'est la raison pour laquelle les exemples d'environnements substantiels d'apprentissage présentés dans la section 2 proviennent de ces niveaux-là.

2. Quelques exemples représentatifs d'environnements substantiels d'apprentissage

Dans Wittmann (2002) un environnement substantiel d'apprentissage est défini de la manière suivante :

1. *Il est représentatif des objectifs fondamentaux, des contenus et des principes de l'enseignement mathématique à un certain niveau.*
2. *Il est relié à des contenus et des processus mathématiques significatifs qui dépassent ce niveau et il est une source importante d'activités mathématiques.*
3. *Il est flexible et peut être adapté aux conditions spéciales d'une classe.*
4. *Il intègre les aspects mathématique, psychologique et pédagogique de l'enseignement mathématique et constitue ainsi un terrain fertile de recherche expérimentale.*

Les deux premières qualités d'un ESA (environnement substantiel d'apprentissage) sont profondément ancrées dans le programme et dans les mathématiques élémentaires d'un point de vue avancé. La dernière qualité garantit que celui-ci reflète les processus d'enseignement et d'apprentissage de manière globale. L'adjectif « substantiel » se réfère à la substance mathématique.

Quand il construit un environnement substantiel d'enseignement, le designer est guidé par le déroulement naturel de l'activité mathématique. Le point de départ d'une investigation est toujours une situation réelle ou une situation mathématique. Lors de la première phase, cette situation est mathématisée ou inscrite dans une structure mathématique plus large. Ensuite, l'on explore les structures émergentes expérimentalement avec pour objectif de trouver des structures et des solutions. Si des structures potentielles sont confirmées par différentes vérifications, on fait appel au raisonnement pour expliquer et valider les structures et les solutions. la dernière phase du processus mathématique consiste à communiquer les résultats oralement ou par écrit. Il va de soi que les quatre objectifs généraux de Winter reflètent parfaitement ces quatre phases. C'est pour cela qu'elles sont si importantes. Pour *Mathe 2000*, la conception des ESA est également guidé par l'intention affichée d'intégrer la pratique des savoir-faire de base dans l'investigation des structures. Comme nous le montrerons dans la section 3, cet aspect est crucial pour une implémentation réussie de tout programme novateur.

Nous verrons dans la section ci-dessous que cette philosophie du design est mise en oeuvre grâce à quelques trajectoires d'environnements substantiels d'apprentissage choisies dans le matériel de *Mathe 2000* : *Das kleine Zahlenbuch* écrit à l'intention des enfants de l'école maternelle (Müller & Wittmann, 2002-2004) et *Das Zahlenbuch*, manuels à l'intention de la première, deuxième, troisième et quatrième primaire (Müller & Wittmann, 2004-2005).

2.1 La "course à 20" et quelques variations

Le volume 1 de Das kleine Zahlenbuch contient une version simple du jeu bien connu « La course à 20 » (voir Figure 1). Dix petits cercles alignés sont numérotés de 1 à 10 (dans une autre version, il y a 12 cercles). Le premier joueur place un ou deux jetons sur le premier cercle ou sur les deux premiers, le second joueur place alors lui aussi un ou deux jetons sur les cercles suivants. Les joueurs jouent à tour de rôle et celui qui arrive le premier à 10 a gagné.

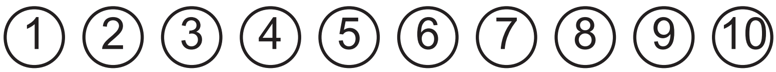


Figure 1 : La course à 10.

La course à 10 permet de découvrir des idées fondamentales de l'arithmétique, par exemple, des relations des nombres sur la droite des nombres, l'addition et l'addition répétée. Lorsque les enfants jouent souvent à ce jeu, ils se familiarisent non seulement avec la droite des nombres mais aussi avec la structure mathématique du jeu. L'analyse des mouvements du dernier au premier permet aux enfants de se rendre compte graduellement que les positions 7, 4 et 1 sont des positions gagnantes. De ce fait, le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante :

s'il place un seul jeton au premier coup et réagit à un coup de deux jetons joué par son adversaire par un coup de un jeton et à un coup de un jeton joué par l'adversaire par un coup de deux jetons. De cette manière, le premier joueur passe d'une position gagnante à la suivante et il arrive à 10. Dans le cas de la course à 12, les positions gagnantes sont 9, 6, 3.

La course à 10 est réellement une activité mathématique. Les idées de base pour analyser ces jeux peuvent être généralisées à une classe plus grande de jeux de stratégie déterministes de classe finie à deux joueurs et dont l'issue n'est pas l'égalité. On peut démontrer que pour chacun de ces jeux, il existe une stratégie gagnante pour le premier ou le second joueur, à l'aide d'un diagramme en arbre et l'algorithme de marquage.

Nos études expérimentales ont montré que des enfants de 4 ou 5 ans jouent à ce jeu avec plaisir et développent une première compréhension de la stratégie gagnante. En général, cette connaissance est assez instable à ce stade. Quelques jours après avoir joué, les enfants doivent redécouvrir ce qu'ils semblaient avoir maîtrisé auparavant. En première année, le jeu est revisité avec comme objectif 20. En deuxième année, l'on joue une variante sur le tableau de 100 (voir Figure 2).

●	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	●

Figure 2 : La course de 1 à 100.

Au début du jeu, un joueur place un jeton rouge sur la case 1 et l'autre joueur place un jeton bleu sur la case 100. Les joueurs jouent à tour de rôle. Le jeton rouge peut avancer de 1, 2, 10 ou 20 cases et le jeton bleu peut reculer de 1, 2, 10, 20 cases. Le jeton rouge doit toujours se trouver dans une position inférieure à celle du jeton bleu. Le jeu s'arrête quand les deux joueurs se rencontrent. Le dernier joueur qui peut effectuer un mouvement a gagné.

L'écart entre 1 et 100 est constitué de 98 nombres et 98 est congru à 2 modulos 3. Le premier joueur a donc une stratégie gagnante : on place le jeton rouge sur 3 ou le jeton bleu sur 98. L'écart est constitué de 96 nombres et 96 est divisible par 3.

Comme 1, 2, 10 et 20 ne sont pas divisibles par 3 et les sommes 1 + 2 = 2 + 1 = 3, 10 + 2 = 2 + 10 = 12, 10 + 20 = 20 + 10 = 30 et 20 + 1 = 1 + 20 = 21 sont toutes divisibles par 3, le premier joueur peut toujours s'arranger pour conserver un écart divisible par 3 tandis que le second joueur ne le peut pas. Chaque coup réduit l'écart qui doit finalement être égal à 0. Comme 0 est divisible par 3, cette position est atteinte par le premier joueur, pour autant qu'il respecte la stratégie gagnante.

En troisième primaire, une généralisation de ce jeu est proposée sur le Livre de mille, le jeton rouge commence en 1, le bleu en 1000. Les mouvements autorisés sont +1, +2, +10, +20, +100, +200 pour le jeton rouge et −1, −2, −10, −20, −100, −200 pour le jeton bleu. La stratégie gagnante est la même que celle du jeu sur le tableau de 100.

En cinquième primaire, on revisite tous les jeux et on les analyse à l'aide des arguments de divisibilité mentionnés plus haut.

2.2. Structures de jetons

Le premier volume de *Das kleine Zahlenbuch* propose le jeu suivant. On propose aux enfants des jetons rouges et bleus disposés selon certaines règles (voir Figure 3).

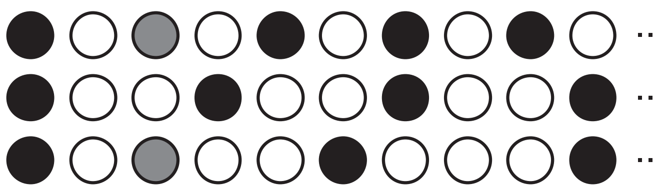


Figure 3 : Les structures de jetons d'après Feynman.

Ce jeu s'inspire d'une citation de Richard Feynman extraite de son discours d'attribution du prix Nobel de physique en 1965 (Feynman, 1969).

> "Quand j'étais encore très petit, assis sur ma chaise haute à la table où nous venions de manger, mon père me proposait un jeu. Il avait acheté tout un lot de carreaux de faïence rectangulaires dans un magasin de Long Island. Nous les disposions sur la tranche les uns à côté des autres et je pouvais pousser le premier et observer l'effet provoqué sur les autres. Jusque-là, tout allait bien. Ensuite, le jeu se corsait. Les carreaux étaient de différentes couleurs. Je devais d'abord placer un blanc et puis deux bleus, un blanc, deux bleus, *etc*. Si je voulais encore placer un carreau bleu à côté des deux carreaux bleus, mon père plaçait lui-même un carreau blanc. Vous reconnaissez déjà le côté insidieux : d'abord lui procurer le plaisir du jeu et ensuite, lui injecter progressivement un matériau de valeur éducative. Ma mère qui était une femme sensible, devinant les pensées secrètes de mon père, disait « Mel, s'il te plaît, laisse-le placer un carreau bleu s'il en a envie ! » Mon père rétorquait alors « Non, je veux qu'il fasse attention à la structure. Ce sont les seules mathématiques que je peux faire avec lui à son âge. »

Nos études expérimentales ont montré que la plupart des enfants ont besoin de temps pour comprendre ce que cela signifie de suivre les règles et de s'y tenir. S'ils ont atteint ce niveau, ils aiment inventer leurs propres structures. Cependant, beaucoup d'entre eux ont tendance à changer les règles pendant qu'ils forment une structure – surtout quand ils jouent avec un partenaire dont le rôle est de découvrir la structure. La construction de séquences selon certaines règles est une idée mathématique fondamentale qui est présente dans toutes les mathématiques. C'est pour cela que la construction de séquences structurées est présente tout au long du programme.

2.3. Nombres pairs et impairs

Les jetons sont un matériel fondamental pour représenter les nombres. En général, on les envisage comme une aide pédagogique. Cependant, leur statut n'est pas prioritairement didactique mais épistémologique. L'arithmétique grecque du temps de Pythagore a connu une période d'arithmétique psyphoi qui peut être considérée comme le berceau de l'arithmétique (Becker, 1954 ; Damerow & Lefevre, 1981). Psyphoi désigne en Grec de petites pierres que les mathématiciens grecs de l'Antiquité utilisaient pour représenter les nombres et les classes de nombres. Par exemple, ils représentaient les nombres pairs par des doubles rangées de pierres et les nombres impairs par des doubles rangées plus un singleton. Des structures plus complexes permettent de définir de nouvelles classes de nombres : les nombres triangulaires, les nombres carrés, les nombres pentagonaux, *etc*. *Mathe 2000* introduit les nombres pairs et impairs en première année primaire à la manière des Grecs Anciens avec des jetons (voir Figure 4).

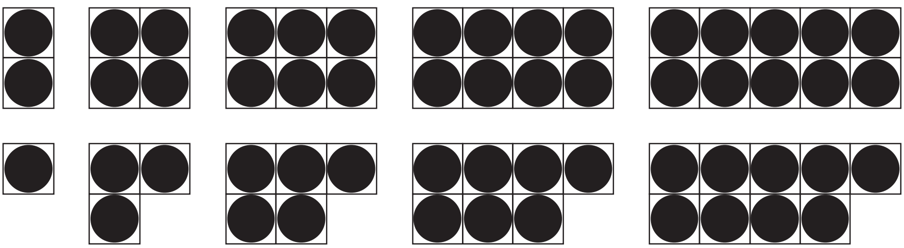


Figure 4 : Les nombres pairs et impairs comme dans l'Antiquité.

Ces structures sont imprimées sur du carton de manière que les enfants puissent les combiner et former des sommes. Les premiers exercices permettent aux enfants de se familiariser avec le matériel. Sur base de leur expérience, les enfants sont en mesure de chercher des sommes qui conduisent à un résultat pair. On demande d'abord aux enfants de regarder la structure plus soigneusement. Ensuite, on leur propose une activité plus directe (voir Figure 5) Après avoir calculé les quatre colonnes de sommes de la figure 5, on demande aux enfants :

4 + 6 =	5 + 1 =	2 + 1 =	1 + 8 =
6 + 8 =	7 + 3 =	4 + 3 =	3 + 6 =
8 + 4 =	9 + 5 =	6 + 5 =	5 + 4 =
10 + 2 =	9 + 9 =	10 + 9 =	9 + 0 =

Figure 5 : Sommes paires et impaires.

Avez-vous remarqué quelque chose ? Pouvez-vous l'expliquer ? à ce niveau-là (première primaire), nous attendons des enseignants qu'ils évitent de bousculer les enfants. La seule chose qu'ils doivent faire, c'est d'écouter les tentatives spontanées des enfants pour expliquer ce qu'ils ont remarqué. Les nombres pairs et impairs sont revisités en deuxième et en troisième primaire dans des espaces de nombres plus vastes. On propose aux enfants des exercices analogues à ceux de la figure 5 avec des nombres plus grands et on leur pose les mêmes questions. à ce niveau, les enfants reconnaissent les structures des nombres pairs et impairs et ils les formulent avec leurs propres mots. Le livre du maître recommande de se contenter des explications spontanées et de ne pas exiger une démonstration.

En quatrième primaire, les enfants ont suffisamment d'expérience avec les nombres pairs et impairs et on peut leur proposer l'activité suivante qui demande explicitement une démonstration.

Les nombres pairs peuvent être représentés par des rangées doubles, les nombres impairs par des rangées doubles plus un singleton. Utilisez cette représentation pour démontrer que

1. La somme de deux nombres pairs est toujours un nombre pair ;
2. La somme de deux nombres impairs est toujours un nombre pair ;
3. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

Les enfants se rendent compte qu'il n'y a pas de singleton qui apparaisse lorsqu'on combine des structures paires, que dans les cas des structures impaires les deux singletons en présence forment une paire et que cela conduit à nouveau à un résultat pair, de plus les enfants reconnaissent que le singleton est préservé lorsque l'on combine une structure paire et une structure impaire et que dans ce cas, le résultat est donc impair. Le rôle de l'enseignant est de prendre en compte les tentatives des enfants et de les assister dans la formulation de leur argumentation. Comme la démonstration habituelle exprime exactement ces relations dans le langage de l'algèbre, elle est bien préparée par le travail avec les jetons.

2.4. Les arithmogones

Il s'agit d'un environnement très substantiel d'apprentissage qui a pris naissance à la lecture d'un merveilleux article publié il y a trente ans (McIntosh &

Quading, 1975). Nous avons modifié quelque peu la disposition géométrique choisie par les auteurs afin de pouvoir utiliser les jetons (voir Figure 6).

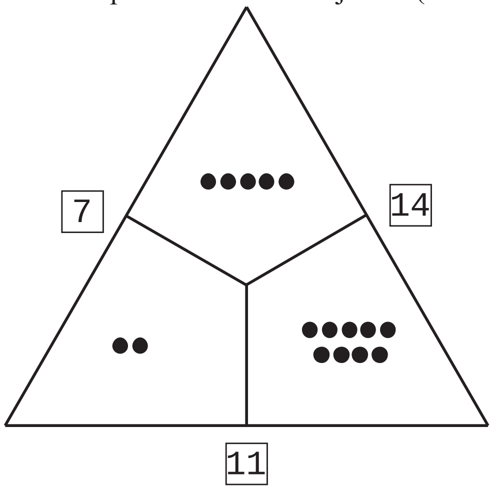


Figure 6 : Un arithmogone.

Un triangle est divisé en trois zones. Nous plaçons des jetons ou nous écrivons des nombres à l'intérieur de ces zones. Il faut ajouter les nombres de deux zones adjacentes et écrire cette somme dans la case extérieure correspondante. Plusieurs problèmes découlent de ce contexte. Quand on dispose des nombres à l'intérieur, on peut calculer les sommes à l'extérieur. Quand on dispose d'un ou deux nombres à l'intérieur et respectivement de deux ou un nombre à l'extérieur, on peut obtenir les nombres manquants par addition ou soustraction. Quand on donne les trois nombres à l'extérieur (voir Figure 7), un calcul immédiat n'est plus possible et la réflexion est nécessaire. Les élèves de première année peuvent trouver la solution en faisant varier de manière systématique le nombre de jetons dans les zones intérieures. Nous poursuivons une étude systématique des arithmogones dans les années suivantes.

En quatrième année, on guide les enfants afin qu'ils découvrent une solution systématique. Ils commencent par remplir quelques arithmogones et on leur demande de calculer la somme des zones intérieures et celle des cases extérieures. Ils découvrent que la somme des cases extérieures est égale au double de celle des zones intérieures et ils démontrent cette relation en remarquant que chaque nombre intérieur entre dans le calcul de deux nombres extérieurs.

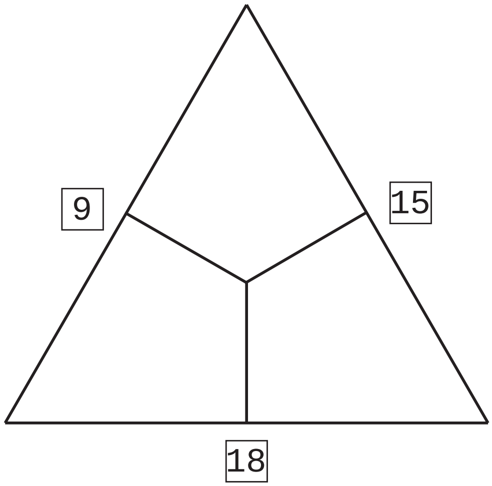


Figure 7 : Un arithmogone triangulaire.

L'étape suivante consiste à demander aux enfants de soustraire un nombre extérieur de la somme des nombres intérieurs et de découvrir que le résultat est le nombre intérieur opposé au nombre extérieur. Ces deux premières étapes permettent de déterminer les nombres intérieurs à partir des nombres extérieurs.

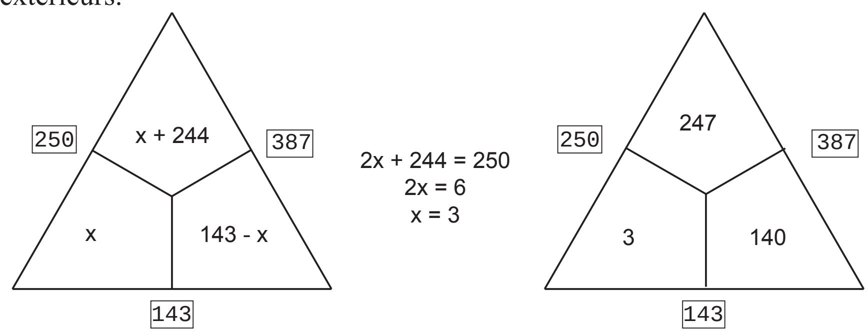


Figure 8 : Un arithmogone et le calcul algébrique.

Au niveau secondaire, on résoudra les arithmogones grâce à l'algèbre. La première méthode de résolution qui faisait varier le nombre de jetons de manière systématique est une grande aide pour trouver les équations (voir Figure 8).

On peut généraliser les arithmogones à des carrés, pour lesquels de nouveaux phénomènes surgissent. Certains arithmogones peuvent avoir plusieurs solutions (voir Figure 9), tandis que d'autres n'ont pas de solution (voir Figure 10).

Pour garantir l'existence de solutions, il est nécessaire et suffisant que les sommes des nombres opposés soient égales entre elles. (Chacune de ces sommes est égale à la somme de tous les nombres intérieurs).

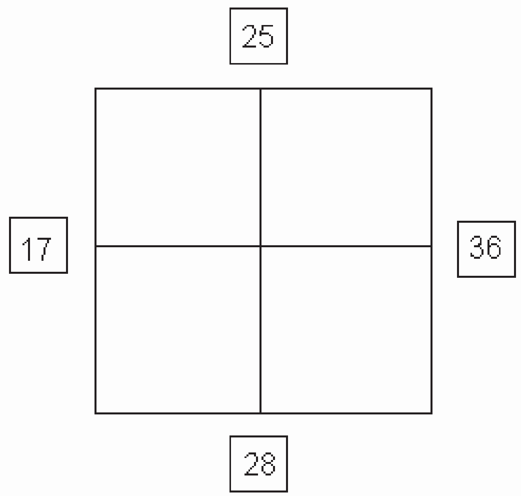


Figure 9 : Un arithmogone carré.

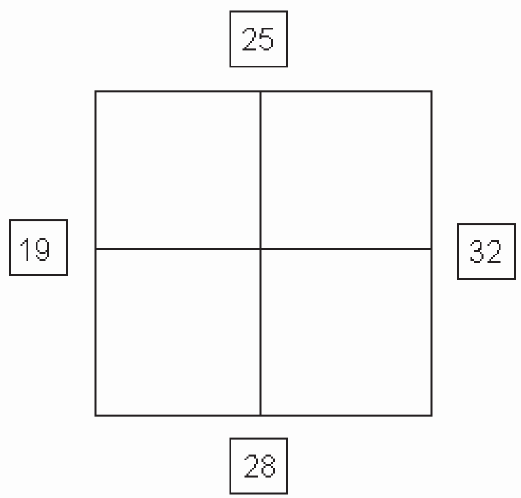


Figure 10 : Un arithmogone carré.

Bien entendu, les arithmogones peuvent être généralisés à des polygones à n côtés. L'arithmétique sous-jacente aux arithmogones est relativement avancée. Les nombres intérieurs et extérieurs peuvent être écrits comme des vecteurs et la relation entre eux est une application linéaire de Rn dans Rn. Il est intéressant de noter que pour n impair la matrice est non singulière, tandis que pour n pair elle de rang n − 1 (Mc Intosch et Quadling, 1975).

La structure bidimensionnelle des arithmogones peut être généralisée à une structure spatiale : les arithmoèdres. On affecte des nombres aux sommets et aux faces d'un polyèdre de manière que les nombres affectés aux faces soient la somme des nombres affectés aux sommets de cette face. On peut créer une très grande variété d'exemples de cette manière. Des étudiants de l'enseignement supérieur et de futurs enseignants ont étudié ce matériel avec grand profit alors qu'ils suivaient un cours d'algèbre linéaire. Tous les phénomènes et tous les concepts pertinents de la théorie des systèmes d'équations linéaires se produisent et peuvent être expliqués dans ce contexte, jusqu'au théorème de Steinitz et au théorème des dimensions. Pour de futurs enseignants, il est très important d'intégrer leur éducation mathématique dans leur contexte professionnel, comme nous l'expliquerons dans la section 3.

2.5. Les nombres ANNA

Les nombres de quatre chiffres comme 6446, 1221 ou 7007 sont des palindromes. Nous les appelons les nombres ANNA. Tout nombre ANNA possède un partenaire naturel qui est formé des mêmes chiffres. Par exemple, 2332 est le partenaire de 3223, et 5885 est le partenaire de 8558. On peut pratiquer de jolies mathématiques à l'occasion de l'exercice suivant. On demande à des élèves de quatrième primaire de choisir deux chiffres, de former les deux nombres ANNA et de soustraire le plus petit du plus grand. Une fois les résultats obtenus, ceux-ci sont collectés, vérifiés, corrigés et ordonnés et il s'avère qu'il n'y a que quelques résultats possibles : 891, 1782, 2673, 3564, 4456, 5346, 6237, 7128, 8019 (et éventuellement 0, si l'on accepte que des nombres tels que 2222 fassent partie des nombre ANNA). La suite de ces résultats comporte des structures intéressantes : étonnamment, tous les nombres sont des multiples de 891.
La structure devient encore plus riche quand on associe un résultat aux opérations dont il provient. Par exemple, le résultat 2673 provient 5225-2552, 7447-4774, 4114-1441, etc. Dans toutes ces opérations la différence des chiffres est égale à 3. Il s'avère qu'en général, la différence de deux nombres ANNA partenaires est égale à 891 multiplié par la différence des deux chiffres.
On peut démontrer ce phénomène de différentes manières en utilisant des représentations avec lesquelles les étudiants sont familiers. Une démonstration utilise la table des valeurs de positions de la manière suivante :

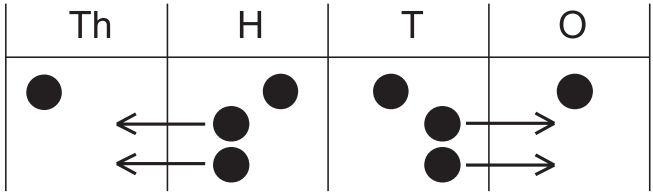


Figure 11 : Th=Milliers, H=Centaines, T=Dizaines, O=Unités,
Comment passer de 1331 à 3113.

Pour passer de 3443 à 4334 dans la table des valeurs de position, il faut faire passer un jeton de la colonne des centaines à la colonne des milliers et un jeton de la colonne des dizaines à la colonne des unités. La différence de ces nombres est donc égale à 1000-100- 10+1=891. Ces opérations peuvent être appliquées à tous les nombres ANNA pour lesquels la différence des chiffres est égale à 1. Si la différence des deux chiffres est égale à d, alors il faut pousser d jetons de la colonne des centaines à la colonne des milliers et d jetons de la colonne des dizaines vers la colonne des unités. Cela signifie que la différence de ces deux nombres ANNA est égale à d fois 891. La Figure 11 illustre le cas de d = 2. Nous avons mené un travail analogue pour les nombres NANA. Ici, toutes les différences sont des multiples de 1000-100+10-1=909.
Les nombres ANNA et NANA ne viennent pas de nulle part en quatrième année. Ils ont été préparés par des activités avec des nombres de deux chiffres en deuxième année et des palindromes de trois chiffres en troisième année (les nombres IMI). Dans ce cas, les résultats possibles sont des multiples de 9 et de 91.

En cinquième primaire, on utilisera la table des valeurs de position pour démontrer les critères de divisibilité par 9 et par 3 comme montré par Winter (1984).

2.6. L'ajustement de polygones

L'ajustement est une idée fondamentale de la géométrie élémentaire. Freudenthal (1971) la décrit de la manière suivante :

> « Paver le sol avec des carreaux congruents comporte une idée maîtresse, l'ajustement. C'est la même chose dans l'espace et cela se fait de manière tout aussi concrète. L'ajustement est une sensation motrice. Les psychologues peuvent vous dire à quel point la composante motrice de la personnalité est marquée dans le jeune âge et à quel point la perception motrice et la mémoire sont importantes. Les choses s'ajustent. Les enfants demandent-ils pourquoi ? à de rares exceptions, de jeunes enfants ne le demandent pas. Tous ces miracles de notre espace ne semblent faire aucune impression. Mais il y a du grain à moudre. La plus grande vertu pédagogique est la patience. Un jour l'enfant demandera pourquoi, et il n'y a pas de raison de commencer la géométrie de manière systématique avant que ce jour n'advienne. Pire, cela peut faire du tort. »

Les enfants décomposent un carré en papier en le coupant et en le pliant selon les axes de symétrie et ils réarrangent les morceaux de différentes manières. Un grand nombre des nouvelles figures s'avéreront importantes dans la suite du programme. Par exemple, les quatre triangles rectangles isocèles disposés de manière à former deux carrés, peuvent être disposés de manière à former un carré plus grand. C'est un cas particulier important du théorème de Pythagore. *Mathe 2000* développe le thème de l'ajustement à partir de la première année primaire avec des activités de papier et ciseaux (voir Figure 12).

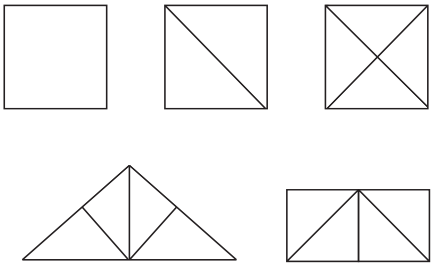


Figure 12 : L'ajustement en première année.

Un carré est décomposé en deux ou quatre triangles rectangles isocèles et les morceaux sont recombinés pour fabriquer de nouvelles figures. En seconde année, cette activité est développée. Il faut plier et couper le carré de façon à obtenir des triangles équilatéraux et des moitiés de triangles équilatéraux (voir Figure 13).

L'une des figures que l'on peut obtenir avec ces morceaux est importante pour le théorème de Pythagore.

En troisième année, on pratique l'ajustement grâce à un gabarit qui permet de dessiner des carrés, des triangles équilatéraux, des pentagones réguliers, des hexagones réguliers, des octogones réguliers qui ont tous des côtés de même longueur. Les enfants peuvent explorer expérimentalement de quelle manière les figures s'ajustent. ils se rendent compte qu'il n'y a que trois pavages réguliers et découvrent certains pavages semi-réguliers.

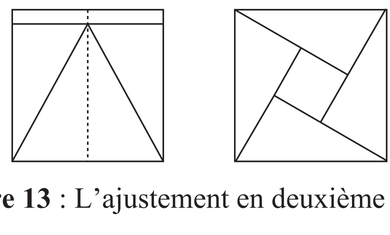


Figure 13 : L'ajustement en deuxième année.

En quatrième année, les enfants fabriquent des polygones réguliers à l'aide de la montre à dessin (Figure 14) et construisent les cinq solides platoniciens.

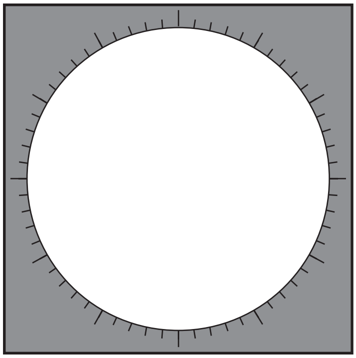


Figure 14 : La montre à dessin.

Le nom montre à dessin provient du fait que le cercle est partagé en 60 parties égales (Winter, 1984). Comme 60 est divisible par 3, 4, 5 et 6, la montre à dessin permet de construire facilement des carrés des triangles équilatéraux, des pentagones réguliers, des hexagones réguliers, et des octogones réguliers. Par exemple, pour dessiner des pentagones réguliers, il faut diviser la circonférence en 5 parties égales de 12 minutes chacune et relier les points. Si on utilise des montres à dessin de différentes dimensions, on obtient des polygones réguliers de différentes dimensions. On recopie les formes sur du carton. Les segments circulaires attachés aux côtés du polygone peuvent être utilisés pour coller les polygones entre eux. Ceci permet aux enfants de construire des modèles stables des solides platoniciens. La démonstration de l'existence d'au plus cinq solides platoniciens du chapitre 13 des Éléments d'Euclide est parfaitement en phase avec les arguments des enfants.

En cinquième année, on utilisera les expériences de découpage et d'ajustement avec les polygones pour établir le concept et la mesure d'un angle selon le développement historique (Beck, 1954, p. 27). Dans les classes suivantes, le découpage et l'ajustement permettent d'aborder la formule des aires et le théorème de Pythagore (Wittman, 1995, p. 134-136). Le programme de *Mathe 2000* est conçu de manière à bien préparer le terrain grâce à des activités spécifiques qui commencent en première année.

2.7. Les sections coniques

Dans un discours prononcé au début du 20^e^ siècle, J. J. Sylvester dit :

> « La découverte des sections coniques, attribuée à Platon, a fourni une nouvelle classe de formes à la contemplation des géomètres. Mais sans cette découverte qui était probablement considérée du temps de Platon et bien après lui comme un amusement spéculatif de l'esprit, sans utilité, tout le déroulement de la philosophie pratique jusqu'à nos jours, de la science de l'astronomie, de la théorie des projectiles, de l'art de la navigation, aurait pu suivre un autre cours. Et la plus grande découverte jamais faite dans l'histoire du monde, la loi de la

> gravitation universelle, avec ses innombrables conséquences directes et indirectes et ses applications à chaque département de la recherche humaine et de l'industrie aurait pu à cette heure ne pas s'être produit. »

L'élimination des coniques du programme de mathématiques est l'un des signes clairs du déclin de l'éducation mathématiques dans les dernières décennies. *Mathe 2000* tente de les réintroduire pour autant que les conditions limites le permettent.

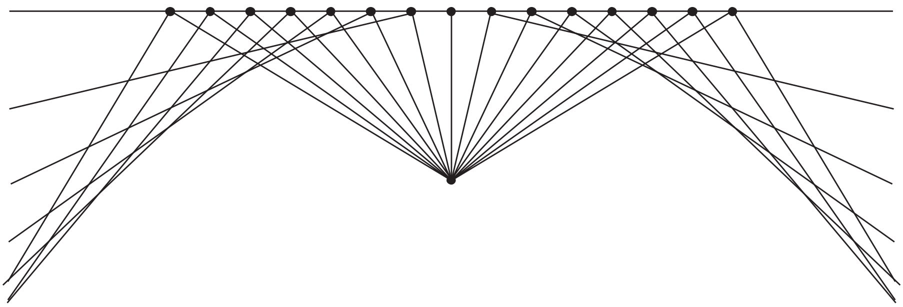


Figure 15 : Construction de la parabole en quatrième année.

Le traitement des coniques peut déjà commencer à l'école primaire. Dans le programme de quatrième année de *Mathe 2000*, nous introduisons la construction de la parabole comme un exercice d'utilisation de la règle (Figure 15). Nous encourageons les élèves à observer ce qui se passe lorsqu'on modifie la position du foyer. Certains sont vraiment stimulés par la construction.

En cinquième année, les constructions de l'enveloppe d'une parabole seront introduites comme exercice pour construire le milieu et la médiatrice d'un segment. Une parabole est définie comme le lieu des points situés à égale distance d'un point F et d'une droite d. la construction qui découle de cette définition est très simple (Figure 16).

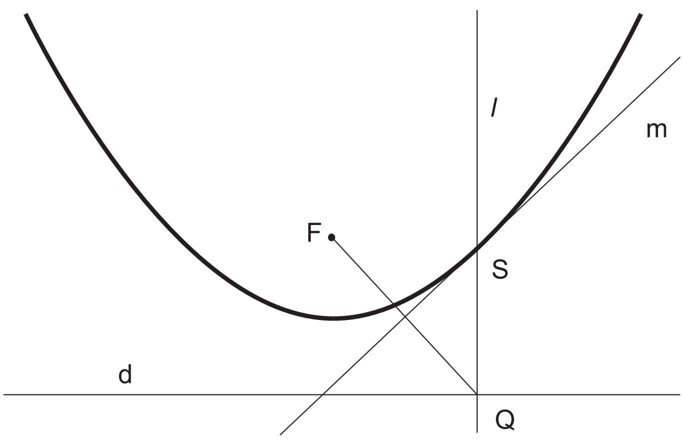


Figure 16 : Construction de la parabole en cinquième année.

On commence par tracer une droite d et un point F extérieur à la droite. Ensuite la construction suivante est répétée pour un certain nombre de points appartenant à la droite d. Soit Q un point de la droite d. On trace la médiatrice m du segment FQ et la droite l passant par Q et perpendiculaire à d. Le point S d'intersection de la droite l et de la médiatrice m de PQ est à égale distance de F et de d. Les logiciels de géométrie dynamique se prêtent tout à fait à ce genre d'exercice pour dessiner et animer le lieu du point S.

On peut expliquer la propriété du foyer d'une parabole grâce à l'observation du phénomène. Cette propriété sera démontrée des années plus tard. Le point S est le seul point qui appartienne à m et à la parabole, car la distance à d de tous les autres points de m est inférieure à la distance au point F. De manière analogue au cercle, la droite m est appelée tangente au cercle.
Imaginons maintenant qu'un rayon lumineux soit émis en F et frappe la parabole en S. Ce rayon est réfléchi comme s'il frappait le miroir plan m. Ceci explique que le rayon réfléchi semble provenir de Q l'image miroir de F, c'est-à-dire que le rayon réfléchi coïncide avec l. Ainsi, tous les rayons réfléchis d'un miroir parabolique sont parallèles.

On peut étudier les autres coniques de manière analogue. Cela joue un rôle crucial dans la conférence perdue et retrouvée dans laquelle Feynman déduit les ellipses de Kepler en revisitant la dérivation dans les *Principia mathematica* de Newton (Goodstein & Goodstein, 1996). La démarche de Feynman est élémentaire et peut être intégrée dans le programme de l'enseignement secondaire supérieur de même que dans la formation des maîtres. De cette manière, les élèves et les futurs enseignants peuvent se familiariser avec des résultats qui datent de l'époque de Newton.

3. Réflexions théoriques

En Grec Ancien, le mot *theoria* signifie vision globale et, en ce sens, le rôle de la théorie consiste à établir des liens au sein d'un domaine d'expérience. C'est dans ce sens que nos réflexions théoriques se réfèrent aux principes qui sous-tendent la conception d'environnements substantiels d'apprentissage de la section 2.

3.1. La nature quasi expérimentale des mathématiques et la sélection des représentations

Le trait commun le plus important de ces environnements d'apprentissage est le suivant : les activités d'exploration de structures et de découverte de preuves dépendent de représentations appropriées des objets mathématiques en question. C'est Imre Lakatos, qui dans son chef-d'œuvre Preuves et réfutations (1976) signala le premier le fait que les théories mathématiques sont toujours développées en relation étroite avec les objets auxquelles elles se réfèrent. La théorie des graphes grandit avec la construction des graphes, la théorie des groupes grandit avec la construction des groupes, la théorie des codes grandit avec la construction de nouveaux codes, et ainsi de suite. Ces objets mathématiques forment une sorte de quasi-réalité qui permet au chercheur de mener des expériences semblables aux expériences en science (voir aussi Dörfler, 1991). Les ordinateurs ont grandement facilité l'accès à ces quasis réalités.

Le grand mathématicien Arnold a écrit dans un article (1998) :

> « Les mathématiques font partie de la physique. J'ai l'impression que les mathématiciens qui connaissent peu de physique sont convaincus de la différence essentielle entre les mathématiques axiomatiques et la modélisation qu'on pratique dans les sciences naturelles et qui demande toujours une vérification des déductions par l'expérience. Tout mathématicien actif sait bien que sans une forme quelconque de contrôle (surtout par des exemples), après dix pages, la moitié des signes des formules seront faux et des deux vont passer des dénominateurs aux numérateurs. La technologie pour combattre ces erreurs est le même contrôle externe par les expériences ou les observations qu'on retrouve dans toute science expérimentale et qui devrait être enseignée à tous nos jeunes à l'école. »

Dans l'éducation générale, les représentations informelles d'objets mathématiques sont indispensables car elles fournissent une quasi-réalité qui est plus facile à appréhender et à manipuler que les représentations symboliques. Les représentations géométriques jouent un rôle important car la géométrie est un langage qui fait le pont entre le langage naturel et l'algèbre (Thom, 1973, p. 206-209). La sélection des représentations qui incorporent les structures mathématiques fondamentales doit être faite soigneusement (Wittmann, 1995). Les environnements substantiels d'apprentissage sont basés sur la droite des nombres, les jetons, les calculs avec des nombres, la table des valeurs de position, des modèles de polygones et des dessins.

3.2. Le double rôle des représentations

Les représentations d'objets mathématiques forment une sorte d'interface entre les mathématiques pures et appliquées. On peut les envisager à la fois comme des concrétisations de concepts mathématiques abstraits et comme des représentations d'objets réels. Comparées aux objets abstraits, ces représentations sont plus concrètes que les objets mathématiques qu'elles représentent, et comparées aux objets réels qu'elles modélisent, elles sont plus abstraites.

Les coniques sont un exemple frappant de ce double rôle des représentations. D'une part, le dessin d'une ellipse est la représentation concrète d'un objet mathématique appelé ellipse et d'autre part, c'est la représentation schématique de tout objet réel de forme elliptique comme un lithotriteur qui sert à briser les calculs rénaux, le miroir d'un télescope ou l'orbite d'une planète.

Les jetons en sont un autre exemple. On peut voir des collections de jetons comme des modèles concrets de nombres abstraits. Faire des opérations avec des jetons permet de démontrer des relations entre les nombres, par exemple, entre les nombres pairs et les nombres impairs. On peut aussi utiliser les jetons pour modéliser des situations réelles.

Voici un exercice typique de première primaire.

Dix enfants jouent à la plaine de jeu qui comporte une tente d'indiens et un portique d'escalade. Comment distribuer les enfants en respectant certaines conditions :

1. Trois enfants jouent dans la tente indienne ;
2. La moitié des enfants jouent sur le portique d'escalade ;
3. Il y a deux enfants de plus qui jouent dans la tente indienne que sur le portique d'escalade.

Pour résoudre ces problèmes, on dessine la tente indienne et le portique d'escalade sur une feuille de papier, on représente les 10 enfants par 10 jetons et l'on déplace les jetons pour que les conditions imposées soient vérifiées.

Étudier les objets mathématiques grâce à des représentations qui peuvent être elles-mêmes des modèles de la réalité est la meilleure préparation pour les applications mathématiques.

Contrairement aux objets réels ou aux modèles de situations réelles qui sont chargés de différentes contraintes, les objets mathématiques permettent des opérations illimitées ainsi que l'établissement de connaissance théoriques, bien plus que la connaissance directement dérivée de la mathématisation de situations réelles.

Il est généralement admis que les mathématiques enseignées dans l'enseignement général, en particulier aux niveaux les plus élémentaires, doivent être dérivées et être en relation proche avec la réalité. Dans la perspective des représentations que nous venons d'évoquer, nous considérons que c'est une erreur d'un point de vue éducatif.

3.3. Les preuves opératoires

Lorsqu'on travaille avec des représentations adéquates d'objets mathématiques, des démonstrations robustes de propriétés générales deviennent possibles. Dans la course à un nombre cible (2.1), la stratégie gagnante demande de regarder les paires de coups indépendamment de certaines positions. La démonstration du théorème sur les nombres pairs et impairs (2.3) utilise des opérations avec les rangées doubles dans lesquelles la taille des nombres n'intervient pas. La relation entre les nombres à l'intérieur et à l'extérieur d'un arithmogone (2.4) ne dépend pas de nombres particuliers, mais uniquement de la règle de calcul des nombres extérieurs à partir des nombres intérieurs. La démonstration de la structure liée aux différentes paires de nombres ANNA (2.5) se base sur des opérations sur la table des valeurs de position. Le pavage du plan et la construction de solides (2.6) viennent de la combinaison des polygones et de l'ajustement. Au niveau primaire, ces effets ne sont pas mis en doute. Plus tard dans le cursus éducatif, ils seront corroborés grâce au concept d'angle. La démonstration (2.7) sur les propriétés du foyer d'une parabole se base sur la construction de l'enveloppe.

C'est Jean Piaget qui a clarifié le point crucial de ce type de démonstrations dans son analyse épistémologique des mathématiques. La connaissance mathématique ne dérive pas des objets eux-mêmes, mais des opérations avec les objets dans le processus d'abstraction réfléchissante (Beth & Piaget, 1961, p.217-223). Lorsque qu'il est intuitivement clair que des opérations appliquées à un objet particulier peuvent être transférées à tous les objets d'une certaine classe à laquelle appartient cet objet, alors les relations basées sur ces opérations sont reconnues comme valides sur un plan général. Comme ces démonstrations sont dérivées des effets d'opérations sur les objets considérés, on les appelle des preuves opératoires (Semadeni, 1974 ; Wittmann, 1995, p.144-148, 154-160).

L'avantage des preuves opératoires dans le contexte de l'éducation est évident. Ces démonstrations sont intégrées dans l'investigation de problèmes, fortement liées à la recherche des structures, basées sur les effets des opérations et on peut les exprimer un langage simple orienté vers les problèmes. Les nombres ANNA peuvent servir d'exemple. La relation conceptuelle sur laquelle repose la structure des différences s'exprime en deux lignes de manière formelle : Si A > N alors

$$(A \times 1000 + N \times 100 + N \times 10 + A) - (N \times 1000 + A \times 100 + A \times 10 + A) =$$
$$(A - N) \times (1000 - 100 - 10 + 1) = (A - N) \times 891$$

Cette démonstration est cependant inutile pour les mathématiques de l'enseignement primaire et pour la formation des maîtres de ce niveau.

3.4. Le triangle épistémologique

Heinz Steinbring a introduit le triangle épistémologique dans ses recherches expérimentales (Steinbring, 2005, p. 22) (Figure 17).

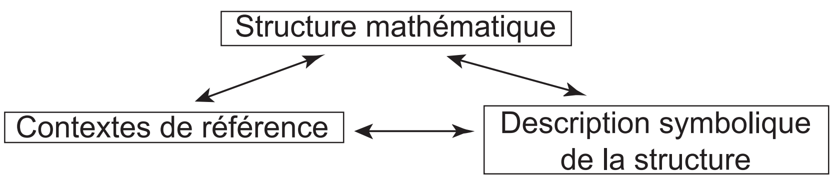


Figure 17 : Le triangle épistémologique.

Le triangle épistémologique indique que le niveau symbolique est insuffisant pour permettre aux apprenants de maîtriser une structure mathématique. Les concepts constitutifs de la structure ne prennent du sens qu'à travers les contextes de référence dans lesquels la structure s'est incarnée et qui ont permis de mener des expériences. Les apprenants s'appuient sur les expériences faites dans le cadre des contextes de référence pour communiquer avec l'enseignant ou entre eux.
Les nombres ANNA constituent une bonne illustration. Les enfants ne sont pas en mesure de comprendre les relations conceptuelles dans leur version symbolique. Il leur faut des calculs avec des nombres ANNA particuliers ainsi que la table des valeurs de position comme contexte de référence pour pouvoir explorer, expliquer et comprendre la structure.

3.5. Les pratiques productives

Ce qui compte réellement pour la maîtrise à long terme d'un contenu mathématique, ce n'est pas comment il est introduit, mais comment il est pratiqué. *Repetitio est mater studiorum.* L'histoire des mathématiques nous enseigne que beaucoup de tentatives pour réformer l'enseignement des mathématiques ont échoué parce qu'elles ont négligé la pratique des savoir-faire. Les enseignants rejettent les programmes dans lesquels cette composante essentielle de l'enseignement et de l'apprentissage n'est pas présente, et ils ont raison de le faire. Traditionnellement, la pratique des savoir-faire a toujours été bien ancrée dans le système scolaire et dans les manuels sous forme d'exercices d'entrainement. Développer les mathématiques comme la science des structures n'est pas compatible avec ce système. Pour résoudre ce dilemme apparent, il faut une nouvelle approche de la pratique des savoir-faire.

Dans un autre de ses articles mémorables, Heinrich Winter (1984) montre comment la pratique des savoir-faire peut être réconciliée avec le principe de l'apprentissage par la découverte. C'est en approfondissant les idées de Winter que s'est développé le concept de pratique productive et que la conception d'environnements substantiels d'apprentissage a été placée au cœur de *Mathe 2000*. Pour construire des exercices productifs, il faut chercher les structures pour lesquelles l'investigation expérimentale nécessite l'exécution répétée d'un certain savoir-faire. Les environnements d'apprentissage comme les nombres pairs et impairs (2.3), les arithmogones (2.4), les nombres ANNA (2.5), les coniques (2.7) sont des exemples typiques de pratiques productives. Les deux volumes du *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Wittmann & Müller contiennent des ensembles cohérents d'environnements substantiels d'apprentissage qui permettent d'introduire et pratiquer les thèmes centraux et les savoir-faire de l'enseignement primaire comme les tables d'addition, les tables de multiplication, l'arithmétique informelle et les algorithmes standards. Le succès du programme de l'enseignement primaire de *Mathe 2000* dans plusieurs pays est vraisemblablement dû à cette approche intégrée.

En plus des pratiques productives, le programme de *Mathe 2000* comporte aussi un cours systématique de calcul mental appelé *Blitzrechnen*[3] (calcul rapide). Si l'on conçoit les mathématiques comme la science des structures, il est indispensable de maîtriser les techniques pour explorer les structures.

3.6. La formation des maîtres

Il va sans dire que la réforme de l'enseignement des mathématiques fondée sur la vision des mathématiques comme science des structures est fortement encouragée par la réforme correspondante de la formation des maîtres. Les enseignants qui ont fait des expériences d'activité mathématique pendant leurs études mettront plus volontiers la réforme en oeuvre que les autres. Comment organiser la formation des maîtres afin de favoriser ces expériences. Partout dans le monde, la majorité des spécialistes de l'éducation mathématique sont d'avis que l'éducation mathématique (la didactique des mathématiques) est la clé de la réforme de la formation des maîtres et donc l'accent est mis sur les cours de didactique. Il y a cependant de bonnes raisons de voir le cours de mathématiques comme la clé de la réforme. C'est un fait bien connu que partout dans le monde des cours de mathématiques et parfois tout le programme de mathématiques n'a que peu ou pas de sens pour les futurs enseignants. Ou bien les matières qui les concernent ne sont pas couvertes du tout, ou bien elle est présentée de manière figée et formelle, ou pire, il n'y a pas de substance. Les mathématiques sont réduites à des squelettes conceptuels ou procéduraux. Cette critique se réfère à de récents essais en matière de formation des maîtres qui ont été explicitement annoncés comme la réponse des mathématiciens pour donner aux enseignants la connaissance mathématique indispensable. Citons, par exemple, un manuel autorisé par l'American Mathematical Society (Jensen, 2003). Les nombres ANNA, par exemple, y seraient analysés uniquement de manière formelle comme à la fin de la section 2.5.

L'expérience de *Mathe 2000* prouve que l'on peut effectivement améliorer la formation des maîtres en reliant les cours de mathématiques aux environnements substantiels d'apprentissage aussi loin que la matière et la méthode le permettent. Par définition, les environnements substantiels d'apprentissage sont basés sur des mathématiques substantielles qui vont au-delà de l'école. Ils offrent donc des activités aux futurs enseignants à un niveau avancé. Cependant des îlots mathématiques rattachés à quelques ESA ne suffisent pas. La formation des maîtres a besoin de cours de mathématiques élémentaires systématiques et cohérents qui

---

[3] Ce cours est disponible sur CD-ROM en version bilingue (Allemand-Anglais). Il a reçu le prix du logiciel allemand digita en 1997, Krauthausen & Müller & Wittmann (1997).

couvrent la matière d'une variété d'ESA. Le développement de tels cours est un défi pour l'avenir.

Mathe 2000 vient d'entreprendre la rédaction d'une nouvelle série de manuels, *Elementarmathematik als Prozess*[4], pour combler cette lacune. Le premier volume, *Arithmetik als Prozess* vient de paraître (Müller, Steinbring & Wittmann, 2004). Le titre de la série indique l'accent mis sur l'activité mathématique. Nous préférons les représentations informelles aux représentations formelles chaque fois que c'est possible. Les futurs enseignants ont l'occasion d'apprendre le langage mathématique dont ils ont besoin dans leur profession, pas le langage des spécialistes qui ne leur sert à rien et qui peut même faire du tort lorsqu'ils communiquent avec leurs élèves. Pour donner un exemple, dans *Arithmetik als Prozess,* tous les chapitres sur la théorie des nombres jusqu'au petit théorème de Fermat sont basés exclusivement sur des opérations avec la droite des nombres et avec des structures rectangulaires de points. Toutes les démonstrations sont opératoires. Dans le prochain volume *Algebra als Prozess*, la théorie des équations linéaires sera axée sur les arithmogones et les arithmoèdres comme indiqué dans la section 0.

---

[4] N.T. En français, des titres comme « Mathématiques élémentaires actives » ou « Vivre les mathématiques élémentaires » pourraient convenir.

Bibliographie

ARNOLD V.I. (1998) On teaching mathematics, *Russian Math. Survey*, **53, 1**, 229-236.

BALLIEU M. & GUISSARD M-F. (Éditeurs) (2004) *Pour une culture mathématique accessible à tous. Elaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*, CREM, Nivelles.

BECKER O. (1954) *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Darstellung*, Freiburg – München.

BECKER J. & SHIMADA SH. (éditeurs) (1997) *The open-ended approach, a new proposal for teaching mathematics*, Reston, Va, NCTM.

BETH E. W. & PIAGET J. (1961) Epistémologie mathématique et psychologie, *Etudes d'épistémologie génétique*, **XIV**.

DAMEROW P. & LEFÈVRE W. (éditeurs) (1981) *Rechenstein, Experiment, Sprache, Historische Fallstudien zur Entstellung der exakten Wissenschaften*, Stuttgart.

DEVLIN K. (1996) *Mathematics: The Science of Patterns*, Freeman, New York.

DÖRFLER W. (1991) Wieso kann man mit abstrakten Objekten rechnen ? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 195-198.

FLETCHER T.J. (1965) *Some Lessons in Mathematics*, CUP, London.

FREUDENTHAL H. (1971) Geometry Between the Devil and the Deep Sea, *Educational Studies in Mathematics*, **3**, 413-435.

GOODSTEIN D.L. & GOODSTEIN J.R. (1996) *Feynman's lost lecture. The Motion of the Planets around the Sun*, W. W. Norton & Company, New York & London.

IOWO (1976) Five Years IOWO, Special Issue on H. Freudenthal's Retirement from the Directorship of IOWO, *Educational Studies in Mathematics,* **7-3**.

JAHNKE H.N. (1989) *Abstrakte Anschauung, Geschichte und didaktische Bedeutung*, in Kautschitsch H. & Metzler W. (ed.), Anschauliches Beweisen, Stuttgart, Wien, 33-54.

JENSEN G.R. (2003) *Arithmetic for Teachers with Applications and Topics from Geometry*, AMS, Providence.

KIRSCH A. (1979) Beispiele für prämathematische Beweise, in Dörfler & Fischer (ed), *Beweisen im Mathematikunterricht*, Wien, Stuttgart, Hölder-Pichler-Tempsky, Teubner, 33-54.

KRAUTHAUSEN G., MÜLLER G.N. & WITTMANN E. CH. (1997-1998) Blitzrechnen (Calculightning), *2 CD-ROMS*, Klett, Leipzig.

LAKATOS I. (1976) *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, London.

MC INTOSH A. & QUADLING D. (1975) Arithmogons, *Mathematics Teaching*, **70**, 18-23.

MÜLLER G.N., STEINBRING H. & WITTMANN E. CH. (2002-2004) *Jenseits von PISA. Bildungsreform als Unterrichtreform. Ein Fünf-Punkte-Program aus systemischer Sicht*, Kallmeyer, Seelze.

MÜLLER G.N., STEINBRING H. & WITTMANN E. CH. (2004) *Arithmetik als Prozess*, Elementarmathematik als Prozess, Kallmeyer, Seelze.

MÜLLER G.N. & WITTMANN E. CH. (2002-2004) *Das kleine Zahlenbuch, **1** : Spielen un Zählen, **2** : Schauen und Zählen*, Kallmeyer, Seelze.

MÜLLER G.N. & WITTMANN E. CH. (2004-2005) *Das Zahlenbuch*, manuels de mathématique pour les classes de l'enseignement primaire, **1-4**, Klett, Leipzig.

SAWYER W.W. (1955) *A Prelude to Mathematics*, Penguin, London.

SEMADENI Z. (1974) *The Concept of Pre-Mathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics*, Warsaw, Polish Academy of Sciences.

STEINBRING H. (2005) *The construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*, Mathematics Education Library, **38**, Springer, New York.

SYLVESTER J.J. (1983) A Probationary Lecture on Geometry, *Collected Mathematical Papers*, **2**, 7, Co Chelsea pub Camp, New York.

THOM R. (1973) Modern Mathematics : Does it exist ?, in Howson A. G. (ed.), *Developments in Mathematical Education, Proceedings of ICME 2*, Cambridge University Press, London, 194-209.

WHEELER D.H. (1967) *Notes on Mathematics in Primary Schools*, CUP, London.

WINTER H. (1975) Allgemeine Lernziehle für den Mathematikunterricht ? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **7**, 106-116.

WINTER H. (1984) Begriff und Bedeutung des übens, *Mathematik Lehren,* **2**, 4-11.

WINTER H. (1984) Von der Zeichenuhr zu den Platonischen Körper, *Mathematik Lehren*, **17**, 12-14.

WINTER H. (1985) Neunregel und Abakus –Schieben, denken, rechnen, *Mathematik Lehren*, **11**, 22-26.

WINTER H. (1987) *Mathematik entdecken. Neue Ansätze zum Mathematikunterricht in der Grundschule*, Scriptor Frankfurt a. M.

WINTER H. (1989), *Entdeckendes Lernen in Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, Braunschweig, Wiesbaden, Vieweg.

WITTMANN E. CH. (1995) Mathematics Education as a ”Design Science”, *Educational Studies in Mathematics*, **29**, 355-374.

WITTMANN E. CH. (2002) Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in Mathematics,* **48**, 1-20.

WITTMANN E. CH. (1995) Standard Number Representations in Teaching Arithmetic, *Journal für Mathematik-Didakti,* **19**, 355-374.

WITTMANN E. CH. (1996) The Pythagorean Theorem, in Coney Th. J. *Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education*, 97-165, N. H., Portsmouth.

WITTMANN E. CH. & MÜLLER G.N. (1990-1992) *Handbuch produktiver Rechenübungen, **1** : Vom Einspluseins zum Einmaleins,* Stuttgart, ***2** : Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*, Stuttgart.

PROF. EM. DR. DR. H. C. ERICH CH. WITTMANN
University of Dortmund
Dept. of Mathematics, Project *Mathe 2000*
D-44221 DORTMUND
wittmann@math.uni-dortmind.de

CATHERINE HOUDEMENT ET ALAIN KUZNIAK

PARADIGMES GEOMETRIQUES ET ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Abstract. Geometrical Paradigms and Geometry Teaching.
One of the first aim of geometry teaching is certainly that a student can build his/her own proper and effective geometrical working space. Then s/he can understand and solve geometry problems by using this space. But, the problem's interpretation is depending on different geometrical paradigms which are related to the kind of institutions -schools but also countries- where geometry is taught. From the diversity of paradigms it results a great diversity of working spaces: that explains a big number of didactic misunderstandings. In the paper, we clarify the notions of geometrical paradigm and working space. Then we show the possible interest of using and developing these tools for studies in geometry didactics.

Résumé. L'enseignement de la géométrie a pour fonction première de permettre à l'élève de se construire un espace de travail géométrique efficace. Grâce à cet espace, il peut comprendre et résoudre des problèmes de géométrie. Mais l'interprétation des problèmes va dépendre de paradigmes géométriques qui diffèrent suivant les institutions (écoles mais aussi pays) où s'effectue l'enseignement. Cette diversité des paradigmes entraîne une diversité des espaces de travail et explique un certain nombre de malentendus didactiques. Dans cet article, nous précisons les notions de paradigmes et d'espace de travail géométriques. À partir d'exemples, nous montrons l'intérêt d'envisager des études didactiques utilisant et développant ces outils.

Mots-clés. Didactique, géométrie, paradigmes, espace de travail, enseignement.

Introduction

Pourquoi s'intéresser aujourd'hui à l'étude de la géométrie ? Elle semble délaissée dans l'enseignement français : peu pratiquée à l'école primaire, considérée par les maîtres comme un objet complexe et aride rejeté par les élèves quand ils arrivent au collège, elle semble s'évanouir au lycée où seuls les élèves des sections scientifiques continuent à résoudre quelques problèmes de géométrie. Simultanément, elle constitue traditionnellement le socle et l'enjeu de la construction de la démonstration. Elle continue de faire l'objet de rapports de commissions savantes : Commission Kahane en France (Kahane dir, 2002), Royal Society en Grande Bretagne. Ces dernières insistent sur son aspect nécessaire et

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 175 – 193.

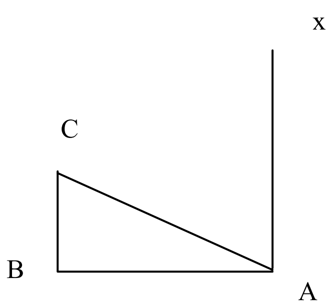
fondateur dans l'éducation du citoyen. Cette dichotomie n'est pas nouvelle et rappelle les débats qui ont traversé l'histoire de son enseignement.

Ainsi, la géométrie élémentaire et son enseignement paraissent en crise mais d'où vient cette impression et plus précisément quel regard peut-on porter sur l'enseignement actuel de la géométrie ? Et sur quoi fonder ce regard ? Ces questions ont guidé notre recherche et nous ont conduits à développer un certain nombre d'outils comme les paradigmes géométriques et les espaces de travail géométriques. Nous souhaitons montrer ici comment ces outils peuvent enrichir à la fois le regard porté sur l'enseignement de la géométrie et engager de nouvelles recherches en didactique.

1. Un exemple prototypique

L'étude des connaissances d'un public d'étudiants professeurs (généralistes ou spécialistes) est révélatrice d'un état de l'enseignement des mathématiques. Ces étudiants sont en effet à la charnière entre plusieurs institutions. En France, leurs connaissances à l'entrée de la formation résultent d'un long séjour à l'école obligatoire complété par au moins trois années en université, dans une filière quelconque pour les professeurs d'école, dans une filière scientifique pour ceux de collège et lycée[1]. Leurs connaissances à la sortie de la formation doivent leur permettre d'aborder avec sérénité et efficacité l'enseignement des mathématiques de 6 à 11 ans pour les professeurs des écoles, de 11 à 18 ans pour ceux de lycée.

Considérons l'exercice suivant extrait de l'épreuve de mathématiques d'un concours de recrutement de professeur des écoles.



On donne le triangle ABC rectangle en B tel que AB = 4 cm et BC = 2 cm. La demi-droite [Ax) est perpendiculaire à la droite (AB). M est un point de la demi-droite [Ax). Le but de ce problème est d'obtenir des configurations particulières du triangle AMC.

Question 5.b. Existe-t-il un point M tel que le triangle ACM soit équilatéral ? Justifiez.

[1] En France, les professeurs des écoles ont vocation à enseigner toutes les disciplines de la maternelle au CM2, à des enfants de 3 à 11 ans (3 ans de maternelle : de 3 à 6 ans, 5 ans d'élémentaire : de 6 à 11 ans). Les professeurs de collège sont en général spécialistes de leur discipline.

Et examinons la réponse d’un candidat.

> « Pour savoir si le triangle ACM est équilatéral, on peut essayer de construire ce triangle sur la figure à l'aide du compas. On place la pointe du compas en A et on prend une ouverture équivalente à la valeur AC, on trace l'arc de cercle sur la demi-droite [Ax). On procède de la même manière en mettant la pointe du compas en C. On se rend compte que le sommet n'est pas sur [Ax) donc le triangle n'est pas équilatéral. »

Une construction effective avec des outils résout par la négative la question posée et ceci grâce à l'utilisation du compas. L'étudiant n'en reste pas là et il éprouve le besoin de justifier cette première affirmation. Il développe alors un raisonnement déductif qui s’appuie sur la seule utilisation d’instruments de mesure, sans recours à la construction.

> « Ceci peut s'expliquer par le fait que dans un triangle équilatéral, les angles sont égaux et leur somme vaut 180°. Chacun vaut 60°. Dans ce cas lorsqu'on mesure grâce à un rapporteur, on remarque que CÂM est supérieur à 60°, CÂM=64°. »

Plaçons-nous maintenant du côté du correcteur : si ce dernier est un professeur de collège ou de lycée, il refusera la réponse sous prétexte qu’elle s’appuie, par deux fois, sur une expérience dans le monde sensible. En effet, les programmes français préconisent l’usage, dès la quatrième de collège (13 ans), de justifications détachées de la figure. Si le correcteur est un professeur des écoles, il pourra accepter cette réponse, reconnaissant l’effort de déduction et s’appuyant sur le fait qu’à l’école les constructions aux instruments jouent un rôle constitutif des connaissances.

L’effort de formation des futurs professeurs des écoles consistera donc à leur permettre d’une part de connaître et de comprendre les enjeux géométriques de chaque niveau scolaire, et d’autre part d’anticiper ceux attendus par le concours. Notre recherche, limitée à l’étude de la géométrie élémentaire de l’espace euclidien, vise à expliciter les diverses significations du terme unique de *géométrie*.

2. Une analyse en termes de paradigmes

Dans l’histoire des mathématiques, le rôle joué par la géométrie a évolué. A l’origine, elle s’est construite comme une technologie de l’espace pour résoudre des problèmes spécifiques comme les problèmes d’astronomie ou d’arpentage et ceci dans des communautés spécialisées (par exemple les harpénodaptes égyptiens). Des preuves visuelles ou des constructions matérielles suffisent alors à convaincre les géomètres de l’évidence de leurs résultats. Les *Éléments d’Euclide* (environ 300 avant J.C) marquent, d’après Szabó (1993), une inflexion décisive qui portent les géomètres grecs à refuser la simple vérification visuelle et l’évidence intuitive. Les *Éléments* partent ainsi « *de premiers principes s’imposant à nous par l’intuition mais impossibles à démontrer, pour aboutir à des vérités que l’on peut* *ainsi connaître par le seul moyen du raisonnement* » (Dhombres et al, 1987, p. 236). Par la suite, les géomètres grecs envisagent les objets géométriques « en soi » et non plus leurs traces matérielles visibles. La géométrie se reconstitue en un corps de savoirs, basé sur des axiomes et organisé par le raisonnement hypothético-déductif. Par cette véritable mutation, elle est même devenue la quintessence de l'activité mathématique. Au XIXe, la discussion sur la nature des axiomes et sur les fondements de la géométrie a favorisé l'avènement des géométries non euclidiennes et l'émergence d'une approche encore plus abstraite de la géométrie : le Programme d'Erlangen (1872) et son structuralisme naissant énonce clairement l'avènement de cette nouvelle conception.

La fécondité des crises et la genèse des nouveaux problèmes qu'elles ont engendrés ont rendu pour nous nécessaire l'introduction de la notion de paradigme avec le sens que lui donne Kuhn (1962) dans son ouvrage sur les révolutions scientifiques. Nous retiendrons en particulier deux facettes de ce concept.

1) Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens, Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet ;

2) Dans un deuxième sens plus local, Kuhn utilise aussi le terme de paradigme pour caractériser les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique par les individus de leur champ disciplinaire.

Cette vision présente l'avantage de concilier deux composantes de la formation d'enseignants. Le premier point rappelle l'intégration dans le paradigme des croyances à des savoirs partagés par une communauté scientifique. Le second intègre une perspective d'enseignement du paradigme en faisant référence aux pratiques qui en sont constitutives.

Nous avons posé en hypothèse le fait que :

> « Dans l'enseignement, des paradigmes différents sont englobés sous le terme unique de géométrie. Ces différents paradigmes rendent compte de la rupture souvent « dénoncée » dans l'enseignement français entre les différents cycles. »

Ces paradigmes sont globaux et consistants : chacun d'entre eux définit une forme élaborée de géométrie. D'où une seconde hypothèse :

> « Étudiant(e)s, professeur(e)s, enseignant(e)s et élèves se situent implicitement fréquemment dans des paradigmes différents : cette différence de posture épistémologique est source de malentendus didactique. »

3. Les paradigmes de la géométrie enseignée

Nous allons préciser les trois paradigmes géométriques que nous avons mis en évidence dans notre étude. Les travaux de Gonseth (1945-1952) nous ont fourni une base essentielle pour la recherche d'une épistémologie sous-tendue par les paradigmes. Ces travaux tentent également d'analyser la pensée inhérente à chaque paradigme suivant trois modes : l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif, que nous allons préciser.

3.1. Les modes de pensée

« *Être géomètre signifie ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement expérimental, le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement. C'est ensuite décider, en principe, du crédit à accorder à chacune de ces fonctions de la pensée.* » Gonseth (1945, p. 72).

3.1.1. L'intuition

Suivant Fischbein (1987), l'intuition fournit au sujet une sorte de théorie première basée sur un lot d'évidences, qui gomme les incertitudes et qui permet au sujet de structurer une situation en un tout complet, cohérent qu'il utilise comme socle pour son raisonnement. Cette structuration des faits par l'intuition implique en particulier qu'elle ne se confond pas avec la perception, même si les premières intuitions géométriques sont généralement perceptives. Simultanément l'intuition peut être aussi une formidable source d'erreurs car elle peut installer une cohérence artificielle entre des données pratiques ou théoriques.

L'intuition n'est pas stable, elle évolue avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances *a posteriori*. Il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus ; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades). D'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

3.1.2. L'expérience

L'expérience s'oppose à l'intuition dans la mesure où elle n'est pas immédiate : une action physique ou mentale est nécessaire pour découvrir ou valider telle proposition.

La nature de l'expérience géométrique dépend des objets sur lesquels elle s'exerce. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale, qui peut déjà être développée à l'école. Les instruments peuvent être plus complexes : les simulations informatiques qui opèrent sur des objets virtuels, obtenues grâce à certains logiciels (Cabri-géomètre

ou Logo), permettent de découvrir des alignements, des positions relatives de droites ou des lieux géométriques.
Une autre forme d'expérience peut être mentale, *experimental thought*, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.
Dans notre approche, l'expérience nourrit l'intuition ; quant à l'intuition, elle structure l'expérience. Ainsi, nous reprenons l'exemple de Fischbein : quand un enfant affirme qu'une droite peut être indéfiniment prolongée, il exprime une intuition ; mais cette intuition est relative à une expérience, éventuellement virtuelle, menée antérieurement devant lui.

3.1.3. Le raisonnement déductif

Il est le mode de pensée le plus valorisé dans les pratiques mathématiques bourbakistes. Mais, dans notre propos, il importe de ne pas le réduire à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. Nous l'utiliserons sous une forme plus universelle en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, le raisonnement déductif consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure.
De nombreux mathématiciens ont souligné la nécessaire relation entre intuition et déduction. Citons la métaphore très audacieuse de Thom[2] : « *La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'une avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas.* »

Ces trois modes sont constitutifs de la pensée géométrique, mais ils se développent différemment dans chaque paradigme.

3.2. La Géométrie I ou « géométrie naturelle »

La Géométrie I a pour source de validation la réalité, le sensible. Le qualificatif de « naturelle » que nous lui avons attribué à la suite de Gonseth veut refléter l'existence d'une relation au réel, mais en aucun cas il ne comporte de référence à l'idée de nature opposée à celle de culture. La Géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas (Caveing, 1997), comme par exemple les figures simples (cercles, carrés...). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas de la Géométrie I ; il s'agit plutôt de celle de la

[2] Cité par LARGEAULT J. (1993) *Intuition* et *Intuitionnisme,* Vrin.

première partie du traité de Clairaut (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où l'esprit doit se libérer de la démonstration de choses évidentes.

3.3. La Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle »

Dans cette Géométrie la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux.
L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D'où la conservation du qualificatif de « naturelle ».
La Géométrie II peut s'exercer moyennant une axiomatisation partielle, voire des îlots d'axiomatisation.

3.4. Géométrie III ou « géométrie axiomatique formaliste »

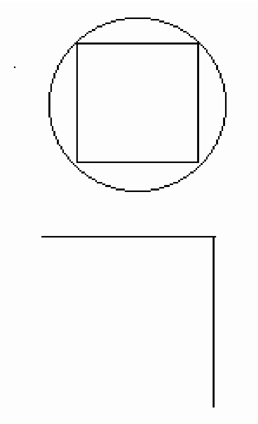
Dans cette Géométrie, qui naît à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l'emporte. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par l'affirmation de Wittgenstein (1975, p. 205) qui clôt le débat entre géométrie et réalité : « *Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité* ».
Une différence essentielle avec la Géométrie II porte sur la complétude du système d'axiomes : en Géométrie III, l'axiomatisation n'est plus partielle.

4. Mise en fonctionnement des paradigmes

4.1. Exemples à l'école primaire

La reproduction de figures est un type de tâches géométriques habituel à l'école primaire. Il fait même partie des items évalués lors des évaluations nationales de 6^{e} (élèves de 11 ans).

Considérons l'exemple suivant :



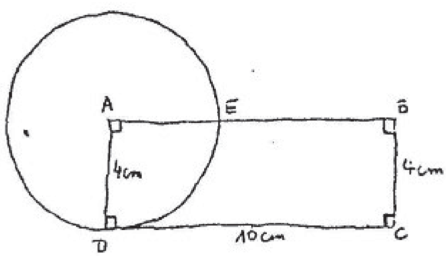
Voici une figure composée d'un carré et d'un cercle. Vous devez la reproduire, la figure est déjà commencée : deux côtés du carré sont déjà tracés.

Résultats corrects (1997).
Pour le carré : 94,3%
Pour le cercle : 63,6%

La construction du carré peut se faire avec différents instruments : en utilisant deux fois l'équerre ou le compas et la règle non graduée ou la seule règle graduée avec du tâtonnement… Une expérience permet donc de réussir.
La construction du cercle repose sur celle du centre, non marqué sur la figure initiale. Celui-ci peut difficilement être approché précisément par tâtonnement ; il est nécessaire de raisonner pour le déterminer : le centre est le point de rencontre des diagonales (ou des médianes) du carré déjà tracé.
Il est à signaler que Duval (2005) a grandement enrichi ces modes de pensée par le changement de dimensions dans l'approche opératoire des figures.

La validation se fait par superposition à la figure de départ ; les objets travaillés sont les dessins, traces graphiques d'objets textuels. Le travail est tout entier situé en Géométrie I, croisant expérience et raisonnement, sans doute supportés par l'intuition.

Considérons cet autre exemple extrait de l'évaluation sixième de 1998.



Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.
Trouve la longueur du segment [EB].
…………………………………………
Explique ta réponse :…………………….
……………………………………………

Réponses obtenues	Résultats des élèves
Réponse attendue : 6 ou 6 cm avec ou sans explication	25 %
Longueur mesurée sur le dessin (environ 3,6 cm)	40 %
Autres réponses	25 %
Non réponses	10 %

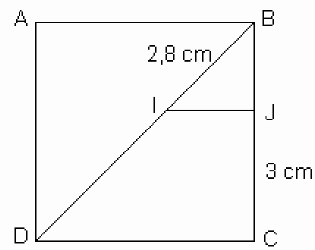
Le travail demandé est, par convention, en Géométrie II, mais beaucoup d'élèves restent en Géométrie I en prélevant les informations sur le dessin (mesures en contradiction avec les informations textuelles). Ils concluent par une expérience ou une perception en Géométrie I alors qu'une déduction en Géométrie II est attendue par les concepteurs de l'épreuve.

Nous interpréterons plus loin les réponses erronées comme l'utilisation d'une « mauvaise » composante (référence à la Géométrie I au lieu de la Géométrie II) dans l'espace de travail.

4.2. Exemple au collège : des droites « presque » parallèles

Considérons le texte suivant, extrait d'un article de *Petit x* (Jacquier, 1995). Il s'agit des deux premières questions d'un exercice de Brevet des collèges donné dans l'académie de Nice en 1991.

Construire un carré ABCD de côté 5 cm.
1) Calculer BD.
2) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm.
La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ?



La difficulté de cet exercice réside, pour la question 2), dans une confrontation directe entre l'évidence intuitive fournie par le dessin effectué par l'élève (les droites sont parallèles) et les conclusions attendues contraires (les droites ne sont pas parallèles) tirées de calculs sur les mesures données. L'élève, par la demande de la construction d'un carré, est incité à se confronter au réel du graphisme représentant le carré. Par l'incitation au calcul d'une mesure de la question 1), en général, il change d'horizon et bascule dans la théorie où le théorème de Pythagore lui permet de produire la réponse exacte attendue (réponse qu'il eut pu obtenir, en valeur approchée, en mesurant à la règle BD). Mais le début de la question 2), placer effectivement I sur le dessin, le replonge dans le monde des constructions : quelle attitude développera-t-il alors pour répondre à la question du parallélisme ? À l'œil les droites sont parallèles, ce parallélisme résiste à l'utilisation d'instruments et est en conformité avec la comparaison des valeurs approchées des rapports $\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BD}}$ et $\frac{\mathrm{BJ}}{\mathrm{BC}}$. Ce qui fait écrire à certains élèves de 13 ans : « *Je ne sais pas si elles sont parallèles car si on arrondit* $\frac{BI}{BD}$, *c'est égal, mais comme (seule) la valeur exacte justifie si deux droites sont parallèles, alors je ne peux pas dire si elles sont parallèles* », ou encore « *Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles si on prend l'arrondi, mais elles ne sont pas parallèles si on prend la valeur exacte* ».

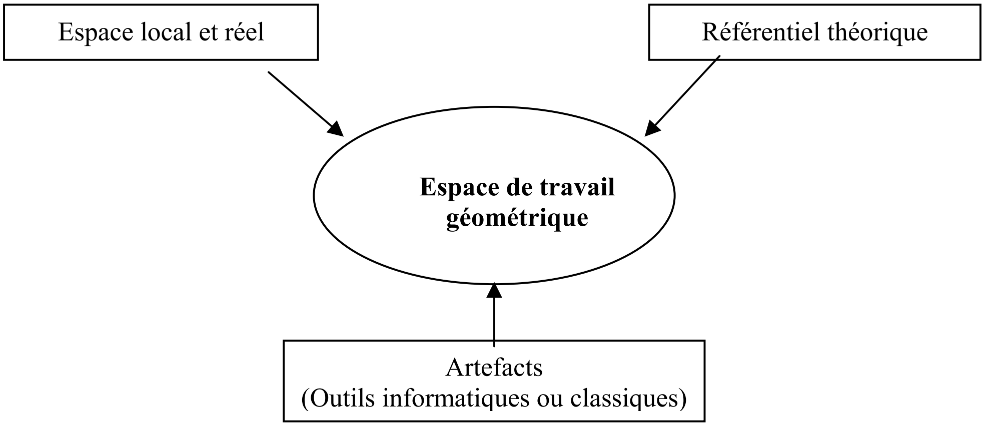
Nous interpréterons ces réactions comme une ambiguïté ressentie par les élèves quant au choix de l'espace de travail dans lequel se placer, défini notamment par le paradigme licite. Pour les questions de construction, le paradigme licite est celui de la Géométrie I où existent nécessairement des mesures approchées, notamment celles lues sur les instruments. Mais pour la réponse à la question 2), où se placer ? En Géométrie I et alors les droites sont parallèles. Ou en Géométrie II où les mesures ne se lisent pas sur les instruments, n'existent que par leur valeur exacte, ce qui conduit à déduire que les droites ne sont pas parallèles ?
La notion d'espace de travail que nous précisons dans le paragraphe suivant est un élément de réponse à cette question.

5. La notion d'espace de travail

Les exemples précédents mettent en relation l'activité propre de l'apprenti géomètre, pour lequel l'espace de travail à utiliser peut déjà poser question, et celle du géomètre, qui saura d'emblée choisir l'espace de travail adapté. Cette activité suppose donc l'existence d'un environnement particulièrement complexe constitué d'objets visibles et tangibles comme les dessins, d'outils matériels comme les instruments de dessin et d'outils conceptuels comme les définitions ou les théorèmes. En réalité s'y insèrent aussi des ensembles de nombres, mais nous n'entrerons pas plus avant dans les aspects numériques.
Nous désignerons sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG), l'environnement organisé par et pour le géomètre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composants suivants :

- un ensemble d'objets, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre, et enfin ;

– un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique.



Les paradigmes géométriques que nous avons introduits servent de référence, d'horizon qui permet d'interpréter les contenus des composants et de définir leurs fonctions (par exemple heuristique ou validation), fonctions elles-mêmes constitutives des paradigmes. Nous serons souvent confrontés à cet apparent paradoxe qui fait définir comme géométrique la fonction d'un objet lorsqu'il intervient dans une géométrie que nous essayons justement de mieux définir.
Le fait que la nature des composantes dépende du paradigme de référence conduit à envisager l'existence d'espaces de travail spécifiques associés à chaque paradigme, nous parlerons alors **d'espace de travail géométrique de référence**.

Le travail dont nous parlons en géométrie, renvoie à une conception généralisée de cette notion : le travail[3] est vu comme l'établissement d'un rapport entre un contenu et une forme. Dans notre cas, le contenu est lié à une matière visible et la forme est déterminée par le modèle de référence. Le travail ne doit pas nécessairement déboucher sur la production d'objets concrets, il s'agit d'une activité intellectuelle où l'individu organise, d'une certaine manière et avec son style propre, les relations entre objets empiriques et théoriques.

5.1. Espace et objets géométriques

Les objets géométriques sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent à la fois du modèle théorique qui les définit et de l'espace support dans lequel ils se trouvent. Dans la vision abstraite de la Géométrie III, l'espace est constitué de

[3] GRANGER G.G. (1968) Essai sur une philosophie du style, p. 5 et sq., Armand Colin, Paris.

points, de droites et de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Ce regard permet d'introduire les sous-parties de l'espace comme des ensembles de points. Dans la géométrie axiomatique naturelle (Géométrie II), certaines sous parties de l'espace sont en fait les objets de l'étude et l'on parlera de figures ou de configurations. En Géométrie I, il s'agit de dessins ou de maquettes.
Dans la géométrie enseignée, la nature du support utilisé ainsi que l'utilisateur privilégié de ce support sont des points particulièrement intéressants à observer pour déterminer les ETG et distinguer l'espace de travail de l'élève de celui du professeur. Ainsi, par exemple, qui utilise le tableau et comment ?
L'espace qui intervient en géométrie se construit en étroite relation avec l'espace réel qu'il reconstruit ou qu'il dévoile de manière différente suivant les divers paradigmes. L'espace dont nous parlons ici s'apparente à ce que Malafosse (2002, p. 44) décrit sous le nom d'espace de la réalité c'est à dire *un ensemble composé des objets réels et des événements existant hors de la pensée du sujet, et sur lequel portent à la fois l'activité psychique des individus et l'activité de réflexion des communautés culturelles.*

5.2. Les artefacts

Nous utilisons le mot artefact dans le sens que lui donne Rabardel (1995) de chose ayant subi une transformation d'origine humaine visant une finalité. En géométrie, ces choses sont notamment les outils et les instruments tels que règle, équerre, mais aussi pliage… Rabardel précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action. L'intérêt de cette approche est d'attirer l'attention sur le processus de genèse instrumentale qui transforme un artefact en instrument avec une double orientation : l'instrumentalisation orientée vers les usages de l'artefact et l'instrumentation tournée vers l'appropriation par le sujet des schèmes d'action.
Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail puisqu'ils en constituent la face la plus visible et la plus prégnante pour l'élève. En réalité les choix et les usages de l'artefact (donc l'instrumentalisation) sont réglés par le paradigme dans lequel il s'insère. Dans le cadre euclidien classique, on sait l'importance des constructions à la règle et au compas : l'essentiel est ici la justification théorique d'une technique de construction. La règle n'est pas graduée et la précision de la construction importe peu, la Géométrie II se différencie ainsi radicalement de la Géométrie I où la réalisation finale du dessin est essentielle. Inversement le choix des artefacts, notamment à l'occasion de construction, peut aussi implicitement définir le paradigme visé.
L'introduction de nouveaux outils de type informatique a bouleversé les artefacts utilisés : l'apprentissage de nouvelles instrumentations (notamment la fonction dragging des logiciels dynamiques) a créé, de fait, des nouveaux espaces de travail. Cette dernière remarque nous permet d'insister sur le fait que, même dans un

paradigme géométrique donné, les espaces de travail géométriques peuvent être multiples ; c'est une source de difficultés supplémentaires.

5.3. Le référentiel théorique

Les objets et les artefacts de la géométrie en constituent la partie empirique, celle-ci ne prendra tout son sens qu'articulée avec un ensemble de définitions, de propriétés, de relations réunies dans une sorte de référentiel théorique que l'on peut aussi regarder comme un modèle théorique. Le sens du mot modèle oscille entre concret et abstrait, réalisation matérielle et norme abstraite. Cette oscillation reflète la distinction entre les différents paradigmes que nous étudions. Dans ce qui suit, nous appellerons modèle théorique le modèle abstrait qui résulte soit d'une modélisation, soit d'une définition *a priori*.

Dans le premier cas, le modèle théorique résulte d'un processus de modélisation par schématisation et idéalisation du monde réel dont il cherche à rendre le plus fidèlement compte. La géométrie axiomatique classique entre dans cette description.

Dans le deuxième cas, le modèle théorique préexiste et ce qu'on appelle modèle est cette fois une interprétation (et souvent une création) qui doit rendre compte des objets et des propriétés définis par les axiomes. Cette interprétation pourra s'appuyer sur une représentation matérielle ou virtuelle destinée à donner du sens à un système d'axiomes et d'énoncés qui est donné *a priori*. La géométrie de type formaliste (Géométrie III) entretient ce rapport au modèle théorique. Ceci apparaît nettement dans les nombreux « modèles matériels » créés pour rendre compte des axiomes décrits par Hilbert, quand on ne retient pas l'axiome d'Archimède ou quand on nie l'axiome du parallélisme (rappelons, sans le développer, l'exemple du modèle de Klein pour la géométrie hyperbolique).

Dans un sens plus restreint, il faut noter que le « modèle » peut aussi désigner une réalisation matérielle d'une figure géométrique : il pourra alors exister une confusion entre le travail sur l'objet réel et l'objet idéal.

Le référentiel de la Géométrie I, au moins dans sa pratique élémentaire, paraît ne se référer à aucune structuration en un modèle théorique, sauf à y admettre des « définitions sensibles ». Il est ainsi possible de développer au sein de ce paradigme un modèle de référence, comme l'a fait par exemple Hjelmslev (1939).

> « La géométrie que nous proposons dans ce qui suit doit avoir comme but le contrôle sensible de tous les résultats. Les définitions doivent être des définitions sensibles : c'est-à-dire décrire les objets dont on s'occupe de telle façon qu'on puisse reconnaître par une vérification directe si les objets ont les propriétés démontrées.
> Le programme de travail est : voir et concevoir. »

Dans cette géométrie, par exemple, une droite n'est pas tangente en un point à un cercle mais sur une portion de cercle. Le but de Hjelmslev est de définir précisément cette géométrie étroitement liée au monde physique.

6. Construire l'espace de travail

L'espace de travail ne prend son intérêt et ne devient opérationnel que lorsqu'il est possible de mettre en réseau et de donner du sens aux trois composantes que nous venons de dégager. L'expression « espace de travail » prédéfinie par ses trois composantes ci-dessus, peut paraître bien ordinaire. Mais cette métaphore n'est pas innocente. Tout d'abord l'espace en question est un espace local, un « lieu » au sens usuel. Mais c'est un lieu à installer, à adapter pour y optimiser le traitement de la tâche géométrique. En cela nous nous approchons des architectes ergonomiques.

6.1. Le point de vue de l'architecture ergonomique

De manière prosaïque les architectes définissent les espaces de travail comme des lieux à construire pour que l'utilisateur puisse y exercer au mieux son travail (Lautier, 1996). Chacun investit cet espace à sa façon : l'ouvrier spécialisé se limite à une appropriation locale quand il ne veut connaître que sa machine outil, le chef d'équipe élargit son appropriation de l'espace quand il envisage le processus global de production de son atelier. De même, un objet aura des valeurs et des fonctions différentes selon la place hiérarchique occupée par l'utilisateur : ainsi dans une manufacture, la passerelle des cadres devient un balcon de surveillance pour les ouvrières qui s'en protègent par des cartons.
Les architectes doivent penser cet espace de travail dans ses multiples fonctions utilitaires mais aussi sociales. Afin de pouvoir le structurer et éventuellement le modifier, Lautier analyse l'espace du travail suivant trois grands axes : un dispositif matériel, une organisation laissée à la charge du concepteur de l'espace et enfin une représentation qui prend en compte la façon dont les utilisateurs intègrent cet espace.

6.2. Les différents types d'ETG

Ainsi, l'étude d'un espace de travail doit passer par l'analyse de l'organisation de ses composantes élaborée pour donner à cet espace une efficacité maximale dans une institution donnée. Mais cette étude doit aussi s'intéresser aux adaptations opérées par les individus qui effectuent un travail de géométrie. Cela conduit à considérer différents types d'ETG que nous décrivons ci-dessous.

ETG de référence. Nous avons déjà introduit (§ 5) cet espace de travail défini de manière idéale en fonction de seuls critères mathématiques. Son utilisateur est un individu expert « épistémique ». On peut donc également envisager cet espace comme l'ETG institutionnel de la communauté des mathématiciens.

ETG idoine. L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. Cela suppose une réflexion sur la réorganisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence. Son utilisateur premier reste un expert, mais il joue un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour ses utilisateurs potentiels futurs. De fait, le choix de l'adjectif idoine suppose que cet espace est bien conçu et opérationnel pour les questions qu'on pose dans cette institution. Nous devrions en toute rigueur introduire d'abord l'idée d'un ETG institutionnel et poser ensuite la question de son caractère idoine.

ETG personnel. L'ETG idoine doit être utilisé par des étudiants mais aussi par leurs enseignants. Chacun se l'approprie et l'occupe avec ses connaissances mathématiques et ses capacités cognitives. Ces ETG sont ce que nous appelons des ETG personnels. Quand l'élève construit son espace de travail, il a tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Il lui accorde ainsi une fonction de validation indépendamment de l'horizon visé. Le rôle de l'enseignant consistera à développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. Cela suppose qu'il ait lui-même une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique et cela nous renvoie à des problèmes de formation d'enseignants.

L'étude de ces différents espaces de travail nous semble utile pour comprendre les points de vue des élèves et les attentes de leurs professeurs comme peut l'illustrer un retour en termes d'ETG sur les exercices que nous avons présentés dans cet article.

7. Retour sur des exemples

Revenons brièvement sur certains des exemples mentionnés pour illustrer notre utilisation des ETG.

7.1. Exercice sur l'existence d'un triangle équilatéral (cf. 1.)

Dans cet exercice, l'étudiant conclut à la non-existence du triangle d'abord grâce à une expérience utilisant le compas dans un espace de travail dont le référentiel horizon est la Géométrie I. Il interprète sans doute la demande de justification non pas comme la fixation, par les auteurs du sujet, d'un horizon de type Géométrie II, mais comme l'attente d'un raisonnement : il met donc en œuvre un autre raisonnement (intégrant du numérique par la mesure de l'angle) sans changer de référentiel théorique.

7.2. Exercice de sixième sur une figure à main levée (cf. 4.1.)

Avant l'entrée en 6e, les élèves ont été peu initiés, pour les énoncés de géométrie, au caractère dominant des informations textuelles sur celles données par le dessin (ce qui est une conséquence du changement de référentiel, de la Géométrie I à la Géométrie II). Ils ne peuvent donc spontanément intégrer cette règle d'usage dans leur espace de travail. En début de 6e, l'ETG idoine pour cet exercice n'est pas encore construit, ce qui explique les résultats décevants.
Il est d'ailleurs intéressant de constater que les résultats obtenus par des élèves de 5e (un an de plus dans la scolarité), sur le même exercice, sont assez différents et confirment la plus grande disponibilité d'un ETG idoine.

	Résultats 5e 2002	Résultats 6e 1998 Pour mémoire
Réponse attendue 6 cm	52 %	25 %
Longueur EB du dessin	25 %	40 %
Autres réponses	18 %	25 %
Non réponses	5 %	10 %

7.3. Exercice du collège sur les droites « presque » parallèles (cf. 4.2.)

Pour réussir cet exercice, il s'agit de ne pas sortir de l'espace de travail attendu, dont le référentiel est la Géométrie II. Il faut aussi posséder la connaissance suivante : en géométrie les conclusions ne sont licites que dans un cadre théorique fixé. Ce cadre définit la nature et le type des objets étudiés : en Géométrie I, les tracés sont les objets d'étude ; en Géométrie II, ils ne sont que des schémas des objets d'étude. Ainsi les droites sont parallèles en Géométrie I alors qu'elles ne le sont pas en Géométrie II. Pour sortir du caractère paradoxal et relativiste de cette conclusion, il nous parait astucieux d'autoriser l'expression « presque parallèles » qui acquiert un sens bien précis dans le cadre Géométrie I.

Conclusion

La géométrie élémentaire fait rencontrer un monde idéal avec un monde matériel par l'intermédiaire des objets géométriques. L'activité géométrique peut alors être conçue comme un travail qui va mettre en relation une formulation théorique et un contenu matérialisable dans l'espace réel grâce à un ensemble d'outils spécifiques.

Cette réflexion nous a conduits à introduire la notion d'espace de travail géométrique basée sur la mise en réseau de trois composantes : un espace réel et local, un référentiel théorique et enfin un ensemble d'artefacts.
Pour résoudre un problème de géométrie, l'expert dispose d'un espace de travail idoine. Cet ETG remplit deux conditions, d'une part, il permet de travailler dans la Géométrie correspondant à la problématique visée, d'autre part, cet ETG est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont maîtrisées et utilisées de manière valide. En d'autres termes, l'expert face à un problème peut reconnaître le paradigme géométrique utile pour la résolution, cela lui permet de l'interpréter et de le résoudre grâce à l'espace de travail de référence associé à ce paradigme. Lorsque le problème est posé, non plus à un expert idéal, mais à un individu réel (l'élève, l'étudiant ou le professeur), le traitement du problème va s'effectuer dans son ETG personnel. Ce dernier n'aura *a priori* ni la richesse ni la performance de l'ETG d'un expert.
Cette façon de décrire la situation nous permet de dégager un enjeu didactique global tel que nous le percevons dans notre cadre théorique. D'un cadre géométrique unique, nous sommes passés à plusieurs cadres dépendant de la Géométrie utilisée. Dans ces cadres, il est possible de résoudre des problèmes grâce à des ETG idoines. À cela s'ajoute la dimension personnelle due à un individu particulier travaillant dans son ETG personnel.
S'assurer que l'apprenant réorganise les diverses composantes de son ETG en un tout cohérent et opérationnel va constituer l'enjeu didactique. Cette question assez générale peut se décliner en un certain nombre de problèmes qui participent de l'enjeu didactique :

1. Le problème de l'existence d'un ETG idoine pour résoudre un problème ou plus généralement une classe de problèmes ;
2. Les malentendus pédagogiques dus à la diversité à la fois des ETG de référence et des ETG idoines ;
3. Le problème du développement individuel de l'ETG personnel.

Pour mener à bien ces diverses études et rendre compte des types d'ETG en précisant l'aspect de chacun, il faut noter qu'il est nécessaire de s'appuyer sur des approches qui relèvent des différents champs de la didactique des mathématiques tels qu'ils ont pu être développés depuis bientôt trente ans et qui se révèlent ici étonnamment complémentaires.

Bibliographie

CAVEING M. (1997) *La figure et le nombre,* Septentrion, Lille.

DHOMBRES J. et alii (1987) *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **10**, 5-54.

FISCHBEIN E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*, Reidel.

FISCHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics,* **24.2**, 139-162.

FISCHBEIN E. & MARIOTTI M.A. (1997) Defining in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics,* **34.3**, 219-248.

GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*, Éditions du Griffon, Lausanne.

HJELMSLEV J. (1939) La géométrie sensible, *L'enseignement mathématique,* 7-27 et 294-322, Genève.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **20.1**, 89-116.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1999) Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics,* **40.3**, 283-312.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2003) Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal, *Petit x,* **61**, 61-74.

KAHANE J.P. dir (2002) *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris.

KUHN T.S. (1962) *The structure of scientific revolutions,* Trad *La structure des révolutions scientifiques,* 1983, Flammarion, Paris.

KUHN T.S. (1977) En repensant aux paradigmes, In *La tension essentielle,* Odile Jacob, Paris.

KUZNIAK A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques,* Notes d'habilitation, IREM Université de Paris VII, Paris.

KUZNIAK A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* **6.2**, 167-187.

LAUTIER F. (1996) Les espaces du travail, In *Cazamian P et al (eds), Traité d'Ergonomie*, Octarès Éditions, Toulouse, 487-525.

MALAFOSSE D. (2002) Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **22.1**, 31-76.

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies,* Armand Colin.

SZABÓ Á. (1993) *Entfaltung der grieschischer Mathematik*, Traduction 2000 *L'aube des mathématiques grecques*, Vrin, Paris.

WITTGENSTEIN L. (1964) 1975 *Remarques philosophiques*, Gallimard.

CATHERINE HOUDEMENT
IUFM de Haute Normandie et Equipe DIDIREM Université Paris VII
catherine.houdement@rouen.iufm.fr

ALAIN KUZNIAK
IUFM Orléans-Tours et Equipe DIDIREM Université Paris VII
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

DAVID TALL

A THEORY OF MATHEMATICAL GROWTH THROUGH EMBODIMENT, SYMBOLISM AND PROOF

Abstract. This presentation considers the biological and mathematical mechanisms involved in the development from the child to a mathematician and theorizes how individuals grow in different ways over a life-time's experience. The theory is then used to respond to questions on the long-term teaching and learning of mathematics over the whole curriculum from child to adult.

Résumé. Une théorie du développement mathématique par *l'embodiment,* le symbolisme et la preuve. Cette présentation envisage les mécanismes biologiques et mathématiques engagés dans le développement de l'enfant au mathématicien et propose une approche théorique pour interpréter les différences de croissance individuelles résultant de l'expérience de toute une vie. La théorie est ensuite utilisée pour répondre à des questions concernant l'enseignement sur le long terme et l'apprentissage des mathématiques sur toute la scolarité de l'enfance à l'âge adulte.

Mots-clés. Pensée mathématique, objet de pensée, action, opération symbolique, propriété, inné, déjà vu, connaissance procédurale, connaissance déclarative.

Introduction

This paper is written in the context of the conference on *Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood*, which focuses on the overall growth of mathematical thinking in individuals. It is in two parts, the first presents a framework of long-term cognitive growth and the second uses this theory to address questions posed for discussion at the conference related to long-term learning.

1. The Cognitive Growth of Mathematical Thought from Child to Adult

1.1. The overall framework

In studying mathematical learning from early childhood to adulthood we are involved with two very different frameworks. One is the coherence and structure of mathematics, the other is the biological development of the human mind. The brain has a number of essential aspects that enable us to build a highly sophisticated

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 195 – 215.

mathematical mind. First it has a complex parallel-processing structure that carries on many routine operations subconsciously but needs to focus on a small number of conscious items to be able to make coherent decisions. This in turn requires the complementary aspects of mental compression and connection:

- *compression* of important ideas into thinkable concepts that can be held in the focus of attention;
- *connections* between such thinkable concepts can be built into dynamic *action-schemas* that connect successive actions in time, and more general *knowledge schemas* that connect ideas together in webs of relationships.

Compression may occur in a variety of ways:

- action-schemas may be practised so that they can be performed automatically with little conscious effort, and imagined as a whole as thinkable processes;
- processes may be further compressed into thinkable concepts, often by using a symbol to refer both to the process (eg 2+3 as addition) and to the concept (2+3 as sum). A symbol that can be used to switch between a do-able process and a think-able concept is called a *procept*[1];
- concepts may be categorised and named so that the names can be held in the focus of attention to refer to the categories as thinkable concepts. This occurs in geometry where different figures are categorized to give hierarchies such as square, rectangle, parallelogram, quadrilateral, polygon, each with its own array of related properties. It also happens in arithmetic and algebra with concepts such as prime number, square number, irreducible polynomial, and so on;
- thought experiments can lead to connections between properties, in the form of 'if this property holds, then so does that property'. The results can be used as thinkable concepts to develop further structures;
- in formal mathematics, generative properties can be listed to define axiomatic systems that are named and considered as thinkable concepts in further hierarchies of mathematical theory;
- at higher levels, knowledge schemas such as 'whole number arithmetic', 'euclidean geometry', or 'category theory' may be named as thinkable concepts.

[1] See Gray and Tall (1994) for a technical discussion of the notion of procept.

The general biological faculty that enables this to happen is the strengthening of links between neurons that prove successful and the suppression of others that are less relevant, building mental modules that operate together in consort in a process termed long-term potentiation. Such links may be helpful in new situations, but may also be subtly misleading, so that the cognitive development of mathematical ideas is by no means a simple logical development.

The need to compress knowledge to fit into the focus of attention means not only making links that are important, but also suppressing conscious links to ideas that are less essential to decision-making. Thus real-world meaning, which is essential in the initial building of ideas, may become less important as links between symbolic ideas become more important and the individual's thinking focuses more on mathematical activities and less on the original perceptual sources.

1.2. The three mental worlds of mathematics

The long-term construction of mathematical knowledge uses the power of the biological brain, with input through perception, output through action and the internal power of reflection to re-assemble ideas into useable mental structures. I hypothesise that mathematical thinking evolves through three linked mental worlds of mathematics, each with its own particular way of developing greater sophistication (Tall, 2004):

- an object-based *conceptual-embodied world* reflecting on the senses to observe, describe, define and deduce properties developing from thought experiment to Euclidean proof;
- an action-based *proceptual-symbolic world* that compresses action-schemas into thinkable concepts operating dually as process and concept (procept);
- a property-based *formal-axiomatic world* focused to build axiomatic systems based on formal definitions and set-theoretic proof.

1.3. Childhood: the origins of mathematical thought

Our mathematical growth is built on the same biological abilities that are part of our genetic inheritance at birth and develop through a life-time of experiences. We are not born as tabula rasa on which ideas may be written as on a blank slate; at birth we already have many built-in abilities that are in the process of maturation. For instance, a new-born child has a visual structure that not only builds a picture of the light falling on the retina, but also has a hierarchy of neuronal structures to detect colours, changes in colours, changes in shade, edges, to put this information together to distinguish objects from background, and to track the movement of these objects.

This gives us (and other species) the ability to observe one or more objects and to have a primitive sense of 'numerosity' already set in our cognitive structure. Children can track the movement of one, two and perhaps three objects, so that if two separate objects are seen being put behind a screen and the screen is removed to reveal only one object, a child of even a month old may stare longer and seem to express surprise.

1.4. Set-befores and met-befores

A mathematical concept (such as numerosity of small sets) which is with us at birth or soon after, I call a *set-before*, because it is set before our birth in our genes. As individuals meet new contexts, they build new ideas based on mental structure that they have at the time. A previous construction that is recalled to address a current situation is called a *met-before*. In practice the distinction between set-before and met-before is less important than the way in which both predispose us to think in new situations. For instance, scientific concepts such as force and momentum are subtle combinations of genetic and experiential origins that are deeply intertwined. In what follows, the term 'met-before' will be be used to refer to either or both.

The value of using a catchy term such as 'met-before', as opposed to a more technical term relating to prior knowledge, is that it can be used in conversation with learners to explore ideas that may have previously made sense in a particular context but is now causing problems. For example, subtraction is initially met as a physical 'take-away' that carries with it a met-before that 'you can't take away more than you have, because you can't have less than zero.' This met-before remains valid for taking away physical objects but no longer applies in contexts such as temperatures below zero, credits and debts, or the number line.

In building a curriculum, designers focus on the positive effect of met-befores, such as the way arithmetic of counting numbers generalises to fractions, decimals, and real numbers on the number line. However, there is far less emphasis on strategies for dealing with the negative effects of met-befores that no longer work in a new context.

As an example, consider the transition from arithmetic to algebra. Students learning arithmetic have met before the idea that every arithmetic expression has an answer: $2+3$ *is* 5, but algebraic expressions such as $2+3x$ do not have an answer. Children mystified by this may find that they are being asked to manipulate symbols representing processes that are not thinkable objects. They may focus on the part they can calculate to add $2+3$ to get 5 and leave the x they do not understand to give the erroneous answer $5x$. Another possible met-before is the use of letters standing for numbers ($a = 1$, $b = 2$, …) so that $30 - x$ is seen as 6; another is the met-before of place value where 23 is two tens and a three, so $2x$ for $x = 3$ may be seen as 23 and for $x = 17$, $2x$ may be 217 or 37. There is also the use of letters to stand for units, as in 1m = 100 cm, which can lead to the reversal error in the 'Student-Professor' problem where the proportion of six students for each professor may be interpreted as 6S=1P, even when S and P are given to represent the *number* of students and professors. The proliferation of a variety of different met-befores makes the analysis of mathematical thinking very messy. However, the theory of met-befores itself gives such analysis a coherent overall framework.

Cognitive growth is revealed as a story of each individual born differently endowed with an underlying set-before structure and having a variety of experiences that construct met-befores used later to develop highly individual mental capacities. Some cling to the security of old ideas, finding it difficult to shift from the evident 'truths' suggested by their met-befores; others focus on the new ideas and see their relevance and power in new contexts to shift their focus of attention to a new way of working. There is thus a growing spectrum from those learning procedures to solve an increasingly complicated collection of problems and those that see the simple power of new ideas in new situations.

Taking note of the neural Darwinism of Edelman (1992), it is as if *each event in our lives modifies the fitness of our capacity to respond to new events, and long-term potentiation acts as an agent for natural selection of an increasingly sophisticated cognitive system.*

1.5. Compression of knowledge through focus on effect

The fundamental idea in powerful cognitive growth is the compression of ideas into thinkable concepts that can be connected together in increasingly flexible ways. This is facilitated by an important parallel between compression in the worlds of embodiment and symbolism identified by Poynter (2004). When teaching the notion of vector she noted an essential shift of attention from the action of a hand translating an object on a table to the effect of that action. The effect can be seen in terms of a free vector representing only magnitude and direction of the action, and the combination of two shifts is simply the free vector that has the same effect as following one action after the other.

This idea proves to be generally applicable to the compression of an action into thinkable concept, always provided that the learner is aware of the precise effect to focus upon. For instance, in sharing an object or collection into 4 equal parts and taking 2 of them gives a different number of parts from sharing into 6 equal parts and taking 3; but in terms of the quantity produced, each operation has the same effect. It gives a half of the original. Thus compressing action into effect is an embodied way of representing the formal idea of equivalent fractions. It shows a way in which the natural development of human thinking can lead at a later stage to a fundamental formal idea.

The shift from action to effect is of central importance in symbolism. For instance the symbols $2n+2$ and $2(n+1)$ involve quite different sequences of actions ('double a number and add two', or 'add one and double the result') but they have the same effect. The notion of function relies on this idea, for two different procedures that give the same effect are regarded as the same function. More generally different symbols representing different actions but having the same effect are considered to be different ways of representing the same procept (Gray & Tall, 1994). All these instances exemplify the way in which the relation between action and effect gives parallel constructions in the worlds of conceptual embodiment and proceptual symbolism.

Successive shift in focus gives a steady compression of knowledge from step-by-step procedure, to the possible choice of several different procedures, to seeing the overall effect as a general process that can be carried out in various ways, to encapsulating it as a thinkable object through the use of symbols. While it may happen that learners at different stages of compression may be able to solve a particular problem, the manner of solution and the consequences of long-term development of learning can be very different, moving from rigid use of a single procedure through increasing flexibility to symbolic operations on thinkable concepts (figure 1).

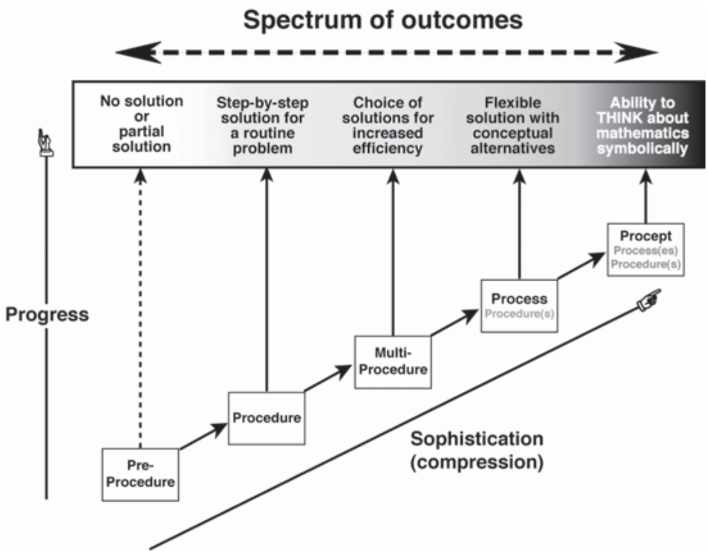


Figure 1: Spectrum of outcomes from increasing compression of symbolism (expanded from Gray, Pitta, Pinto & Tall, 1999, p. 121).

1.6. Increasing complexity and simplicity

As the two worlds of conceptual-embodiment and proceptual-symbolism become more sophisticated, there are significant differences in the ways they operate. In particular, as each situation is replaced by a more sophisticated context, some embodiments can become more subtly complex while, in a very genuine sense, the mathematical meanings often remain simple.

For instance, in measurement the product of two lengths is an area, which can be used to visualise algebraic formulae such as the difference of two squares; this can be 'seen' by picturing a square of side *a* and removing a smaller square of side *b* and rearranging what is left to 'see' $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (figure 2).

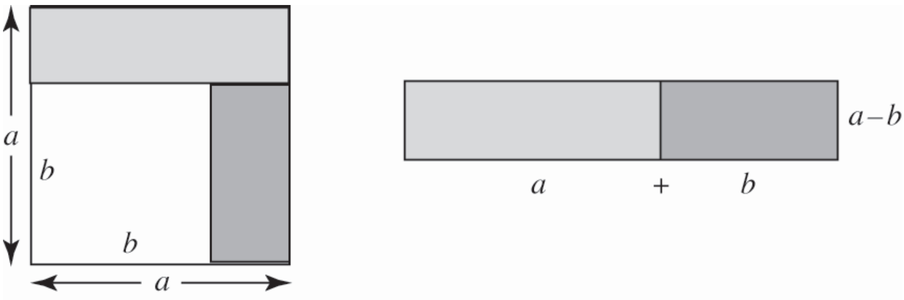


Figure 2: Take a square side *b* from a square side *a* and rearranging as $(a–b)\times(a+b)$.

However, this only works for *positive* values of *a* and *b* when *a* is bigger than *b*. If directed numbers are considered, there are a range of different looking pictures to be taken into account. Figure 3 shows one of several cases introduced by Percy Nunn (1914) teaching mathematics education as Director of the Institute of Education in London in the early part of the twentieth century.

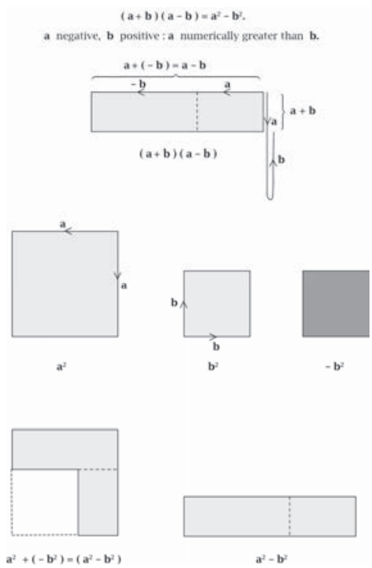


Figure 3: a directed number version.

If we move on from quadratic expressions to cubic expressions (such as the difference between two cubes) then this must be seen in three dimensions, and higher order expressions move into higher dimensions, accompanied by all the complications of the signs and sizes of the values. Meanwhile, algebraic expressions continue to work for all signs and sizes of values, based only on the coherent use of simple rules of algebra.

On the whole, as the mathematics becomes more sophisticated, more successful students tend to focus increasingly on the power of the symbolism than on the sensory meaning of the embodiments (Krutetskii, 1976; Gray *et al.,* 1998, Presmeg, 1986). These symbols too subtly change their cognitive meanings as the curriculum develops through arithmetic, algebra and symbolic calculus. Arithmetic invariably involves operational processes where symbols $3+4$, 5/9 … all have answers produced by carrying out an algorithm. In algebra, symbols such as $3+4x$ have *potential* processes that can only be carried out when the variable x is given a numerical value. The *potentially infinite* limit processes of sequences, series and the calculus usually tend to a limit without ever reaching it in a finite life-time. Each of these takes its toll of learners struggling to make sense of more sophisticated mathematics while those that embrace the new meanings find even greater power (Tall *et al.*, 2001).

Consider, for example, the symbol 2^3 which has a simple meaning as the repeated product of three twos (2 × 2 × 2); this extends naturally to x^3 as the product of three xs, or x^n as n xs:

$$(\underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ times}}).$$

It leads naturally to the formula $x^{m+n} = x^m x^n$, valid for any real x and any whole numbers m and n. But the notation x^n cannot be thought of as 'n lots of x' if n is fractional or negative. The meaning no longer applies to $x^{\frac{1}{2}}$ as 'half an x multiplied together'. This can be a huge obstacle to many students struggling to make sense of a fractional or negative power. But for those willing to see what happens when the power law is used for $m = n = \dfrac{1}{2}$ will find that $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, suggesting that $x^{\frac{1}{2}}$ can be given an entirely new meaning as the square root of x. Procepts such as $x^{\frac{1}{2}}$ have meaning, not because they have an operation that can be carried out, but because operating on them using the power law gives coherent results. Using them and building confidence in their coherence gives a sense of symbolic meaning quite separate from the original embodiment.

1.7. Reflection on properties leading to proof

As children develop cognitively, by reflecting on the properties of processes and objects encountered, they may build inferences such as 'if a triangle has two equal sides, then it will also have two equal angles', 'if two numbers are odd, then their sum is even', 'if I multiply $x+y$ and $x-y$, then the product is x^2-y^2'. In this way a variety of means of proof develop in both the embodied world of objects (in particular of geometric figures) and the symbolic world of procepts dually representing process and concept.

The manner in which proof develops in the embodied world is well-represented by the geometric theory of van Hiele, starting from observations of global aspects of objects, to noting and describing specific properties, then using those properties in the form of definitions that can be used for deduction leading eventually to agreed conventions about congruent triangles used as a basis for Euclidean proof.

In the symbolic world, proof also starts by observing regularities. If I count 3 black balls and 2 white ones, I get the same result as counting the white ones first. When I do this with other numbers, the same thing happens. A change in focus from conceiving $3+2$ as a specific example to seeing it as a typical 'generic' example in its class, leads to a general principle of commutativity of addition. From here, generic examples in arithmetic can lead to generalised arithmetic using algebraic notation to give a symbolic representation of generality.

Throughout the embodied and symbolic worlds, definitions and deduction are based on experience of the properties of objects and of actions that are symbolised as procepts. A further shift becomes possible that focuses not on objects or on actions, but on properties.

The formal-axiomatic world expresses properties in general set-theoretic terms to turn mathematics on its head. Instead of building from perceptions and actions and teasing out their properties, we verbalise the definitions of mathematical structures by prescribing generative properties as axioms and deducing other properties by deductive proof.

This leads to very different methods of making arguments in the three worlds of mathematics. In the embodied world 3+2 is the same as 2+3 because I can *see* it. In the symbolic world 3+2 is the same as 2+3 because I can *calculate* it. In the formal world, $x+y=y+x$ in a specific mathematical structure because *it is an axiom.*

Rodd (2000) explains these different ways of proof by looking at what convinces an individual of the truth of an observation, using the term 'warrant for truth' for 'that which secures knowledge'. In the embodied world, a warrant for truth occurs first through 'seeing' something is true, later developing more sophisticated warrants using agreed principles of deduction such as those arising in Euclidean geometry. In the proceptual world, a warrant for truth arises through calculating that a result is correct, or using the generalized arithmetic of algebraic manipulation to verify the required symbolic statement. In the formal world it is through specifying axioms and definitions set-theoretically and deducing theorems by formal proof.

The transition to the formal world requires a considerable change in approach in which the learner must build on the met-befores of embodiment and symbolism in elementary mathematics which need re-thinking to give the formal proof of axiomatic theories. According to Pinto (1998) some take a *natural* approach by performing thought experiments on imagery to *give meaning* to definitions and formal deduction, others take a more *formal* approach, to *extract meaning* from definitions by working through given theorems until they make sense.

Weber (2004) studied students taught by analysis by a professor who first approached theorems in a logico-structural way, writing the beginning and end of the proof at the top and bottom of a column on the left and using a right-hand column as a scratch-pad to encourage students to think about the overall proof construction. Later he moved more quickly through the proofs focusing on the syntax in the left column and using the right hand column for working out detail. Then he moved on to topological ideas which he focused on the semantics by building on visual imagery in a more natural way. Students were likely to use different approaches depending on the context of the problems. In a topological question most used a natural approach, in questions on functions and on limits they used either a formal approach that gave logico-structural meaning to the deductions or a procedural approach which reproduced arguments learned by rote.

Professional mathematics have a huge range of experience and techniques to construct and prove theorems, including embodied imagery, thought experiments, and a range of symbolic manipulation and logical deduction. However, every mathematician began life as a new-born child, who could not speak, and had only genetic set-befores to start their journeys of mathematical growth. Many experiences are encountered and met-befores constructed on the journey to become a fully-fledged mathematician.

2. Theoretical Implications

In this part of the paper, I give brief replies to the following questions suggested for the conference:

1. How do the notions learned at elementary school influence later learning?
2. What are the respective roles in the learning process of procedures and concepts? What is the meaning of the expressions “mental representation”,

"mental object", "mental image" and "mental model"? How do these mental entities unfold and relate to each other?

3. On which basis and following what criteria should one organise mathematical matters to induce a kind of natural learning? How to elaborate guidelines? How to determine necessary passage points;
4. What are the respective roles of intuition and rigor? How could the requirements concerning both aspects be modulated?
5. What are the respective roles of problem-solving and theoretical structuring?
6. What is the role of logic?
7. What about past attempts to grasp mathematical learning globally, in terms of matters and methods? How did they deal with the above questions? How did these attempts affect school practice.

2.1. How do the notions learned at elementary school influence later learning?

A contribution has been made to this question in terms of the notion of 'met-before', both in terms of the conceptions that have longer-term value and those which work in one context but not in another. In the apparent logical structure of a mathematics curriculum, the biological brain will bring previous experiences to interpret the situations that are presented which can lead to unforeseen difficulties that arise through apparently sensible approaches. For instance, in England, the Inspectorate has for many years encouraged all mathematics teaching to be based on practical activities. However, we now know of many instances in which ideas built in one context fail in another and may need significant re-thinking in new contexts. Practical experiences help build up a coherent overall picture, but may contain implicit elements that act as impediments in future learning.

My current belief is that there is a need to analyse the cognitive growth of ideas to help teachers and students to address inappropriate met-befores when they are likely to occur. This is a long-term strategy over years rather than over the duration of a particular lesson or a particular course. A current major concern in the UK is that students are learning necessary procedures to pass national examinations, yet seem to lack the flexibility to solve multi-step problems at university.

This would suggest the introduction of discussion concerning how compression is required to produce thinkable concepts, in part by giving meaningful embodiments to actions to focus on the effect and in part to the corresponding symbolic phenomenon where focus shifts from the steps of a procedure to its effect. This focuses on the simplicity of the desired effect as opposed to the complication of many possible actions. It also uses the language of met-befores to discuss why ideas that may have been perfectly sensible in one situation need rethinking in another.

While it may be considered (as did Skemp, 1971) that long-term learning needs to take account at any given time of the long-term use of a particular concept, in practice, the student at a given point of learning must learn in a way consistent with his or her current knowledge. Therefore the introduction of inevitable met-befores at a given point will result naturally in the need to address what is necessary when shifting to a new context. Thus re-organisation of knowledge is an important part of curriculum building. At present it is an idea that is almost totally absent from most curriculum frameworks.

2.2. What are the respective roles in the learning process of procedures and concepts? What is the meaning of the expressions "mental representation", "mental object", "mental image" and "mental model"? How do these mental entities unfold and relate to each other?

Here I address only the first part of the question. The second is a diversion into the meanings given to a range of terms from different theoretical positions and a discussion of their meanings and related theories would cause me to stray too far[2].

The terms *procedural and conceptual knowledge* have been widely used (eg Hiebert & Lefevre, 1986, Hiebert & Carpenter, 1992). In the theory of three worlds, these terms take on refined meanings. Conceptual knowledge relates to the forming of knowledge schemas that can be used in a flexible manner. Procedural knowledge relates to step-by-step actions before they are condensed into overall processes and crystallised into thinkable procepts. This relates to APOS theory (Action-Process-Object-Schema) to build am overall conceptual structure (Cottrill et al. 1996).

[2] The terms mental representations, objects, images, models have different meanings in different theories, and even in a single theory, variations in meaning can occur. For instance, I share the notion of concept image with Shlomo Vinner (Tall & Vinner, 1981), yet he and I have quite different meanings, with his original meaning being a distinction between mental pictures and concept definitions which are separate cells while mine has a cognitive biological meaning constructed in the brain where the concept definition (if it exists) is part of the concept image. This significant difference in meaning has had no effect in the shared used of the term in the mathematical education community who are largely unaware of it. The term 'object' is equally used in a range of different ways, for instance, Dieudonné (1992) used it to refer to an axiomatic mathematical structure, others use it to mean a cognitive entity that can be manipulated (eg. Sfard 1991, Dubinsky 1991), There is further discussion in *What is the Object of the Encapsulation of a Mathematical Process* (Tall et al. 2000). The term 'object' is polysemous—it has many meanings—so a debate to get a universally accepted meaning is essentially doomed to failure.

Procedural knowledge occurs in both the embodied and the symbolic worlds, with the possibility of an insightful linkage between embodied focus on the effect of an action and the corresponding notion of symbolic process-object encapsulation (figure 4).

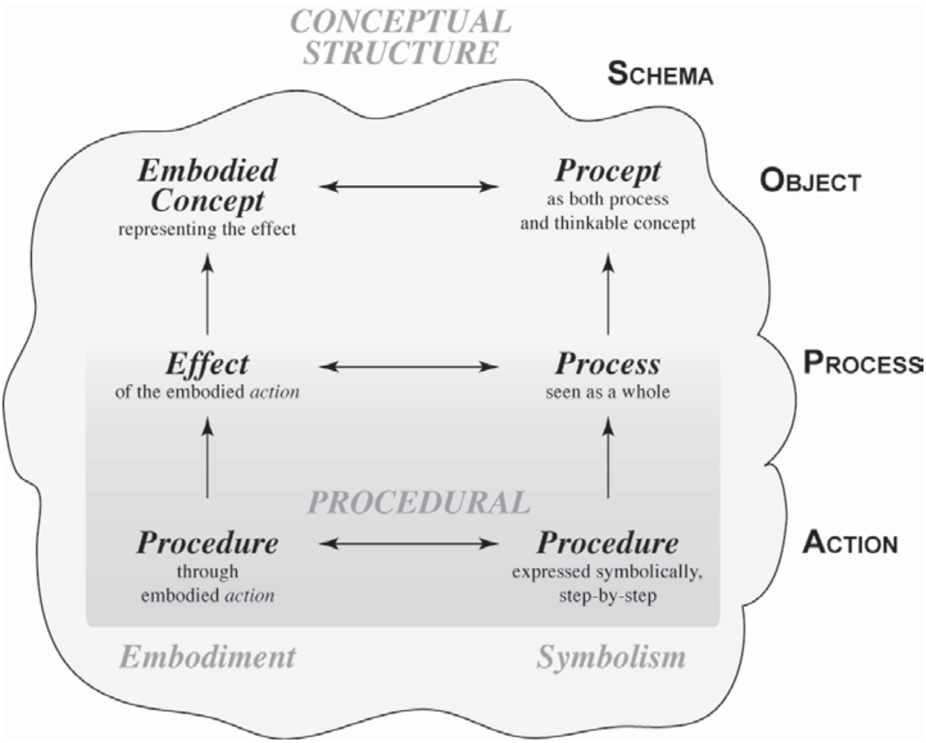


Figure 4: Procedural knowledge as part of conceptual knowledge.

Furthermore, as various concepts are built into knowledge schemas, these may themselves be encapsulated into thinkable concepts in a manner that Skemp (1979) imagined in his *varifocal theory*, in which concepts at one level can be seen in more detail as a knowledge schema and vice-versa. (Figure 5).

On the face of it, therefore, embodiment can support process-object encapsulation and shift the thinker from the routine doing of mathematical procedures to flexible thinking about mathematics.

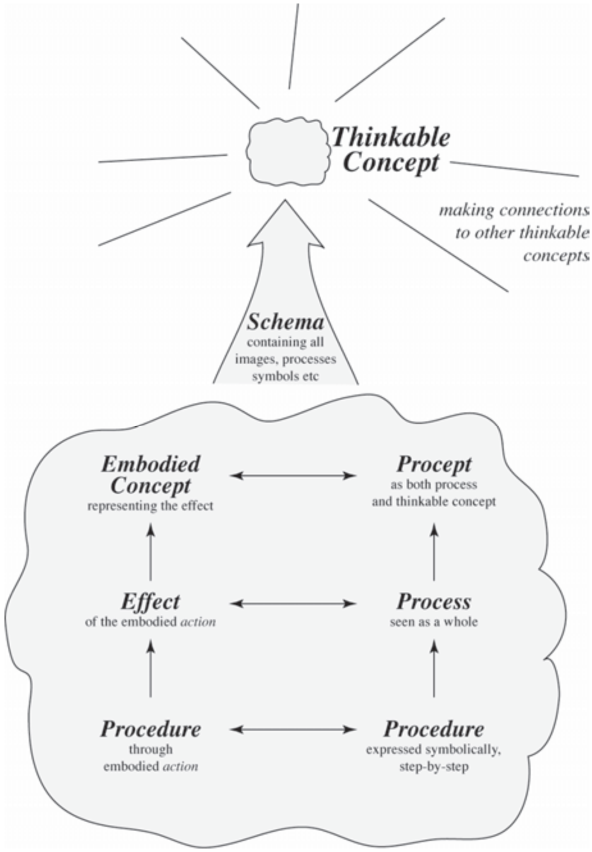


Figure 5: Compressing a proceptual knowledge schema into a thinkable concept.

This link, however, also has a weakness, as we have seen. Basing thinking on a *specific* embodiment may give rise to met-befores that may inhibit thinking in a different context. There is therefore an exquisite tension between embodiment as meaning and embodiment as cognitive obstacle in an inappropriate situation.

This tension between different embodiments and their meanings leads to a spectrum of performance in which some children cling to inessential aspects of a particular embodiment and fail to make flexible sense of the essential mathematical symbolism. Gray & Tall (1994) formulated the 'proceptual divide' between those individuals who move on to flexible manipulation of numbers as process and concept and those who remain with inflexible procedures. Gray et al. (1998) reveal how this bifurcation continues as the more successful make sense of flexible relationships between symbols (perhaps with continuing links to embodiment), while the less successful continue to be imprisoned in limited embodiment and inflexible procedures.

This gives a mechanism underlying the spectrum of approaches noted by Krutetskii (1976) and Presmeg (1986) between those who think symbolically, geometrically, or a harmonic blend of the two. The research evidence suggests that most able students tend to focus more on symbolism than on visualization, just as the mathematical community tends to value the symbolic in examinations and gives less emphasis to the visual.

However, significant mathematics is also created through a powerful combination of embodiment and symbolism leading to formal proof. A shining example is the recent Abel prize awarded to Atiyah and Singer (1962) for their Index Theorem yielding a formal proof relating topological and analytic aspects of a problem in n-dimensional space.

Building on embodiment and symbolism leads to different kinds of mathematical minds, some maintain fundamental links with embodiment and translate it into formalism, others continue to use the symbolism of arithmetic and algebra for more subtle purposes, others move firmly into a formal world of definition and axiomatic deduction for public dissemination of ideas, though they may continue to use a private world of thought experiment and embodiment to inspire formal theorems.

2.3. On which basis and following what criteria should one organise mathematical matters to induce a kind of natural learning? How to elaborate guidelines? How to determine necessary passage points

The theoretical perspective presented in this article reveals a natural evolution of ideas making sense of met-befores that can enhance or inhibit the formation of later concepts. It also reveals a phenomenon in which different individuals develop different ways of addressing their problems in learning. Some remain limited to rigid embodiments and rote-learning of procedures in increasingly complicated confusion while others benefit from successive compressions of knowledge that make it simpler and more comprehensive.

I theorise that the idea of focusing on the effect of actions can be used to explain to teachers and learners how to develop more sophisticated ideas but it cannot be expected that *all* the population will benefit from any one style of teaching. Broad guidelines outlining these ideas may be helpful for both teacher and student, though the institutionalization of testing structures can have both positive and negative effects.

My own personal view is that the growth of the individual child needs a mentor as teacher to guide the child to focus on essential connections, which requires the teacher to understand not only the mathematical structure but also the role of previously constructed met-befores that need to be addressed in learning new topic areas.

The King's College Project (Askew et al. 1996) studying teaching styles categorised teachers into those who taught by transmission in which the teacher gave information to the class, those who taught by discovery learning, giving children contexts where they could construct ideas for themselves, and those who were connectionist, actively helping children to construct important connections between ideas. It was no surprise to me that the most successful teachers by far were the connectionist teachers.

2.4. What are the respective roles of intuition and rigor? How could the requirements concerning both aspects be modulated?

The theory presented reveals intuition not just as a basic human faculty, but as a growing cognitive facility based on previously constructed met-befores. Our earlier discussion on warrants for truth reveals that thought experiments give a warrant for truth before the rigor of formal deduction is considered. There is a therefore a mismatch between the views of mathematicians who inhabit the formal world and the learner who is building upon embodiment and symbolism in contexts that grow increasingly more sophisticated.

Ideas of proof begin in the worlds of embodiment and symbolic operations where warrants for truth relate to what can be seen and what can be calculated. In such contexts it is possible to work with the world of the child to focus on explicit properties to see that certain other properties must follow.

As we saw earlier, at different stages of development, different warrants for truth are likely to convince. The idea that addition is independent of order is evident in the early stages of the embodied world where re-ordering a collection of 9 objects and 2 objects gives the same number as 9 objects and 2 objects. It is self-evident because it can be *seen* to be true. It is less evident in the initial stages of counting where counting on 2 after 9 is fairly simple but counting on 9 after 2 is a much longer procedure. It becomes more evident when experience reveals that addition gives the same answer irrespective of the order of addition. Now 9+2 is the same as 2+9 because this always happens whenever any two numbers are added. It is true *by calculation*. Later, in formal mathematics, $x+y$ equals $y+x$ because it is assumed *as an axiom*.

Ideas of proof are very different for children at different stages of development. The level of detail required in an argument must respect the child's developing conceptions while at the same time seeking increasing clarity and precision.

Even in the formal world of mathematicians, proofs are rarely strictly rigorous. Mathematical proof works in a context where some truths are well-accepted and taken for granted, while important logical turning points are given greater attention. In *Foundations of Mathematics*, Stewart & Tall (1976) introduced the notion of *contextual proof* to students, so that as the mathematics became more complex, the focus of attention changed to the more important ideas. For instance, in building up the notion of complete ordered field, starting with the axioms of a field we needed to quote all the relevant axioms to deduce the truth of a new statement, but when the order axioms were introduced, arithmetic properties became part of the context and the proof only explicitly focused on the order axioms, then in the theory of analysis, the arithmetic and order properties were accepted contextually and the focus of attention shifted to the completeness property.

We believe that such a distinction between what has become contextually acceptable in a given context and what needs to be carefully documented is an art that needs to be made explicit to students.

2.5. What are the respective roles of problem-solving and theoretical structuring?

First we need to say what we mean by 'problem-solving'. In my own case I see this as a development of a strategy for solving problems in general, not simply a harder kind of exercise that occurs at the end of a structured approach. I taught a course I called 'problem-solving' for over twenty years, based on the book *Thinking Mathematically* by Mason, Burton and Stacey (1982). At the end of the course students rarely felt that they had learnt any new mathematics but they considered they knew a great deal more about how to formulate problems and to attack them in new situations. In particular, their *attitude* to mathematics changed in highly positive ways (Yusof & Tall, 1999).

My personal view is that a teacher as mentor can do a great deal by adopting a connectionist viewpoint to help each learner to address a problem by building on current knowledge. Such connectionism has a problem-solving sense of adventure to make new connections and to use existing connections in innovative ways. What is the problem? Can I make sense of it? Can I look at it in a more flexible way? This is a world away from the transmission of procedures that work in a familiar context but fail in slightly different situations.

2.6. What is the role of logic?

Logic as an abstract concept belongs in the formal axiomatic world, not the worlds of embodiment and symbolism. However, as in the development of conceptions of proof, the search for clarity and precision is a worthy enterprise in all education. The role of logic in the long-term curriculum needs to be rethought in the light of the different warrants for truth in different contexts, as part of a spiralling curriculum of increasing sophistication. Different individuals may respond to it in different ways.

2.7.. What about past attempts to grasp mathematical learning globally, in terms of matters and methods? How did they deal with the above questions? How did these attempts affect school practice?

This is a big question that I can only deal with briefly. Essentially the curricula of earlier generations arose in part because of the need to educate a particular population for a certain purpose and then, with the beginnings of international activities from the mathematical community in the early twentieth century, to teach the mathematics that was conceived by the mathematical community to be essential. This reached its zenith in the 'New Mathematics' of the sixties and seventies, based on the premise that if children are taught the full truth of mathematics in fundamental terms then proper learning will occur.

The New Mathematics did not prove to have the desired universal effect, certainly not with the school population as a whole. The parallel development of constructivist mathematics brought about an alternative child-centred approach in which the child constructed his own knowledge. The 'Math Wars' in the USA are a sign of the great controversy still raging between math-centred and child-centred mathematics. A new synthesis is required that takes into account the rich structure of mathematics that is available to our culture, but at the same time, attends to the diverse ways in which the child's thinking grows in different individuals. My perception is that we need to see the coherence and simplicity of mathematics as a whole, but we need also to look at how different learners build these ideas over time so that hard-earned simplicity is constructed and re-constructed in ways appropriate for each individual.

Bibliography

ASKEW M., BROWN M., RHODES V., JOHNSON D., & WILIAM D. (1997) *Effective Teachers of Numeracy*, Final Report of a study carried out for the Teacher Training Agency 1995–96 by the School of Education, King's College, King's College, London.

ATIYAH M.F. & SINGER I.M. (1963) The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **69**, 322-433.

COTTRILL J., DUBINSKY E., NICHOLS D., SCHWINGENDORF K., THOMAS K. & VIDAKOVIC D. (1996) Understanding the limit concept: Beginning with a co-ordinated process schema, *Journal of Mathematical Behavior*, **15**, 167–192.

DIEUDONNE J. (1992) (translated J. Dales) *Mathematics-The Music of Reason*, Springer, New York.

DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123, Kluwer, Dordrecht.

EDELMAN G. M. (1992) *Bright Air, Brilliant Fire*, NY: Basic Books, reprinted Penguin, 1994.

GRAY E. M. & TALL D. O. (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, **26**, 115-141.

GRAY E.M., PITTA D., PINTO M.M.F., TALL D.O. (1999) Knowledge Construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **38 (1–3)**, 111-133.

HIEBERT J. & CARPENTER T.P. (1992) Learning and Teaching with Understanding, In D. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,,* 65-97, MacMillan, New York.

HIEBERT J., & LEFEVRE P. (1986) Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis, In Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural Knowledge: The Case for Mathematics*, 1-27, Erlbaum, Hillsdale, N.J.

KRUTETSKII V.A. (1976) *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* (Trans, J. Teller, ed. J. Kilpatrick & I. Wirzup), University of Chicago, Chicago IL.

MASON J. (1989) Mathematical Abstraction Seen as a Delicate Shift of Attention, *For the Learning of Mathematics*, **9 (2)**, 2-8.

MASON J., BURTON L. & STACEY K. (1982) *Thinking Mathematically*, London, Addison Wesley.

NUNN T.P. (1914) *The Teaching of Algebra (including Trigonometry)*, London, Longmans.

PINTO M.M.F. (1998) *Students' Understanding of Real Analysis*, PhD Thesis, Warwick University.

POYNTER A. (2004) *Effect as a pivot between actions and symbols: the case of vector*, Unpublished PhD thesis, University of Warwick, http://www.annapoynter.net.

PRESMEG N.C. (1986) Visualisation and mathematical giftedness, *Educational Studies in Mathematics*, **17**, 297-311.

RODD M.M. (2000) On mathematical warrants, *Mathematical Thinking and Learning*, **2 (3)**, 221-244.

SFARD A. (1991) On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36.

SKEMP R.R. (1971) *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin, London.

SKEMP R.R. (1979) *Intelligence, Learning, and Action: A foundation for theory and practice in education*, John Wiley, Chichester.

STEWART I.N. & TALL D.O., (1977) *Foundations of Mathematics*, University Press, Oxford.

TALL D.O. & VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

TALL D.O., THOMAS M.O.J., DAVI, G., GRAY E.M., SIMPSON A. (2000) What is the object of the encapsulation of a process?, *Journal of Mathematical Behavior*, **18 (2)**, 1-19.

TALL D.O., GRAY E.M., ALI M.B., CROWLEY L., DEMAROIS P., MCGOWEN M., PITTA D., PINTO M.M.F., THOMAS M.O.J., YUSOF Y.B. (2001) Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* **1**, 81-104.

TALL D.O. (2004) Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of PME*, Bergen, Norway, 158-161.

WEBER K. (2004) Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course, *Journal of Mathematical Behavior*, **23**, 115-133.

YUSOF Y.B.M. & TALL D.O. (1999) Changing Attitudes to University Mathematics through Problem-Solving, *Educational Studies in Mathematics*, **37**, 67-82.

DAVID TALL
Mathematics Education Research Centre
University of Warwick
Coventry CV8 2DR
UK
david.tall@warwick.ac.uk

KLAUS VOLKERT

FAUT-IL ETUDIER LA TERATOLOGIE ?

Abstract. Is study of monsters worth-while?
In this article I will study the role of „monsters“ in the history of modern mathematics, - especially in the context of real functions and of polyhedra. We will see that the interest in monsters is a rather recent attitude and that it is related to the idea that mathematics is freely constructed by the human mind. We will ask the question whether this point of view is well adapted to pupils.

Résumé. Dans le présent article je vais analyser le rôle des « monstres » dans l'histoire des mathématiques modernes - en particulier dans le contexte des fonctions réelles et des polyèdres. Ainsi on va comprendre que l'intérêt pour les monstres est assez récent et qu'il est lié à l'idée que les mathématiques sont une construction libre de l'esprit humain. On va se demander si cette idée convient aux élèves.

Mots-clés. Analyse historique, monstre mathématique, fonctions réelles, contre-exemple.

Introduction

Pendant le 19^{e} siècle les mathématiciens ont pris l'habitude de construire des exemples bizarres voire des vrais « monstres »– afin de caractériser la portée d'un théorème ou d'une notion. Dans mon article, je veux esquisser l'histoire des monstruosités mathématiques et non-mathématiques, discuter les motifs et le seuil épistémologique de leurs inventions pour terminer par quelques remarques sur leurs rôles dans l'enseignement.

En 1908, Henri Poincaré constatait : « *La logique parfois engendre des monstres. Depuis un demi-siècle on a vu surgir une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivée etc.* » (Poincaré, 1908, p. 111) Et il se posait le problème suivant : *« C'est le débutant qu'il faut d'abord familiariser avec ce musée tératologique.* » (Poincaré, 1889, p. 129) Peut-être Poincaré a-t-il pensé à des pages comme les suivantes prises d'un manuel scolaire allemand :

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 217 – 228.

21. Betrachtet werden die Funktionen:

$$f_0\colon x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{(Fig. 5.2)} \qquad f_1\colon x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{(Fig. 5.3)}$$

$$f_2\colon x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad f_3\colon x \mapsto \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(Skizziere G_{f_2}!) (Skizziere G_{f_3}!)

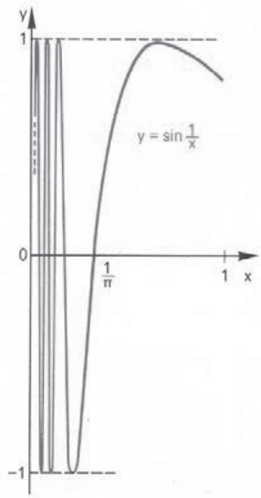


Fig. 5.2

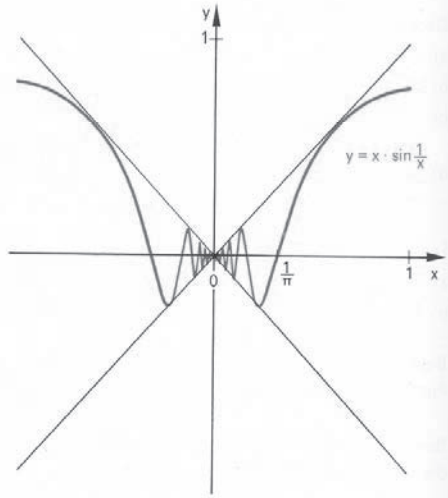


Fig. 5.3

Ces fonctions ne sont-elles pas monstrueuses ?

Dans l'article qui suit, je vais analyser :

- le développement mathématique aboutissant à la situation décrite par Poincaré ;
- le développement général de la pensée scientifique dans lequel celui des mathématiques peut se situer.

L'idée en est qu'on peut tirer d'une compréhension approfondie de la méthodologie mathématique des conséquences pour l'enseignement.

1. Les monstres dans l'histoire des sciences

L'idée qu'on peut acquérir des connaissances sur le « normal » en étudiant le « pathologique » s'est développée pendant le 18^{e} et le 19^{e} siècle. Auparavant on a

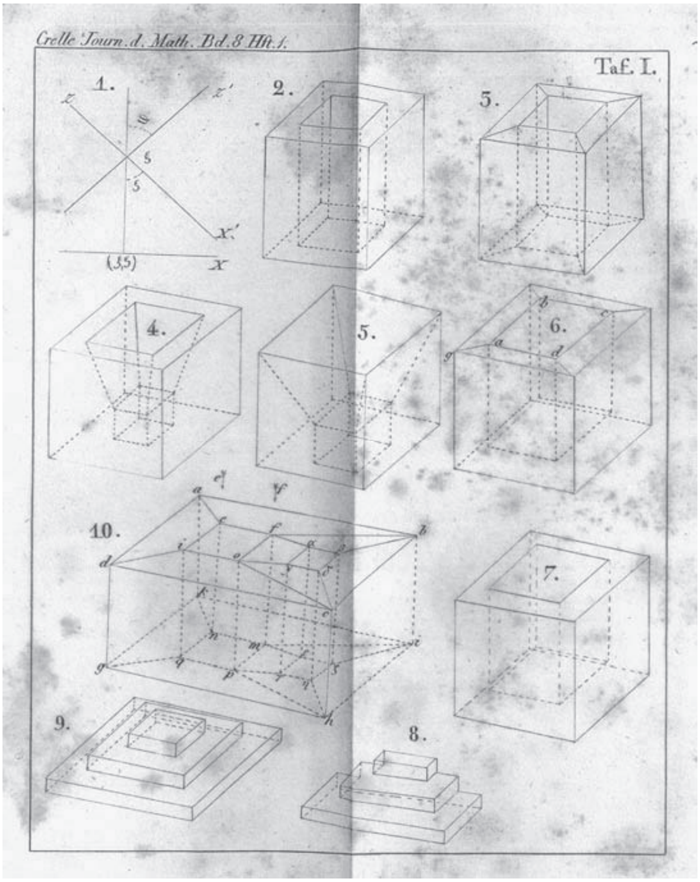
eu la forte tendance d'exclure de l'ordre naturel les « monstres » [le terme vient de « monere » c'est à dire « rappeler »] (comme par exemple. les difformités, en particulier les jumeaux siamois). Ils étaient considérés comme des interventions directes de Dieu tout à fait hors des règles normales. Par conséquent on ne pouvait rien en déduire concernant les lois naturelles. Cette idée commençait à changer pendant le 18e siècle au cours duquel on commençait à s'habituer à l'idée qu'un tel monstre peut se comprendre comme l'effet d'un développement perturbé – par exemple par un « trop » de quelque chose. Diderot dans son « Rêve de d'Alembert » a même spéculé sur les possibilités de produire des monstres d'une manière artificielle et expresse – une idée arrivée dans la littérature avec Mary Shelley et son « Frankenstein » (1817).
Le 19e siècle a connu l'introduction d'une discipline scientifique appelée « tératologie » (de « tera » qui signifie « miracle », chose monstrueuse qui sort vraiment de l'ordinaire) par les Geoffroy Saint-Hilaire (père [Etienne, 1772 – 1844] et fils [Isidore, 1805 – 1861]) et d'autres. La tératologie (cf. « Histoire générale et particulière de l'organisation chez l'homme et les animaux, des monstruosités ou Traité de la tératologie » par I. Geoffroy – Saint Hilaire [1832 – 1836]) fait partie de l'anatomie et de la physiologie. On commençait à étudier d'une manière systématique les exceptions, y compris les monstres, en espérant parvenir ainsi à la connaissance des lois qui règlent l'ontogenèse des êtres vivants. Pour nous qui sommes tout à fait habitués à cette manière de penser il est difficile de comprendre le renversement très profond décrit ci-dessus. Une étude classique en est Canguilhem 1972, on peut consulter aussi Daston/Park 2002 et Zürcher 2004.

2. Les monstres dans l'histoire des mathématiques

Avant 1800 environ on rencontre peu d'intérêt parmi les mathématiciens pour des exemples monstrueux. De temps en temps les mathématiciens de l'époque sont tombés sur des êtres mathématiques bizarres comme la fonction f(x) = $x^{x^{x^{\cdots}}}$ étudiée par Euler. Cette étude n'était pas l'effet d'une recherche systématique de cas extrêmes et Euler n'en tire aucune conséquence générale. Quelle en était la raison ? On peut caractériser la pensée mathématique de l'époque comme une pensée centrée sur l'essentiel donc sur les objets d'une nature paradigmatique. Si les fonctions continues sont « toutes » considérées comme différentiables, cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de fonctions non-différentiables, mais seulement que les fonctions continues « typiques » - comme par exemple les polynômes – le sont. Au fond, on retrouve ici une distinction nette entre le « naturel » - qui est l'objet de l'analyse – et « l'artificiel » qui ne mérite pas (ou moins) l'intérêt des mathématiciens. La pensée mathématique à l'époque d'Euler n'est pas une réflexion sur toutes les possibilités mais seulement sur ce qui est considéré comme important (c'est-à-dire ce qui est courant).

C'est tout à fait en parallèle avec le développement de la pensée mathématique de l'individu. Un jeune élève n'apprend pas la notion de « carré » par une définition abstraite mais en considérant des exemples de carrés et de non-carrés, ce qui aboutit à la formation d'un paradigme ou d'un « concept figural » (Fischbein, 1993) pour l'idée de « carré ». Il est bien connu que les jeunes élèves ont des difficultés à reconnaître un carré si la figure ne se trouve pas dans la position habituelle parce qu'ainsi elle ne correspond plus à l'exemple padotypique.
Par conséquent dans la période décrite il n'y avait pas de vrais « contre-exemples » seulement des « exceptions » qui n'infirmaient pas les énoncés « généraux » - la co-existence des deux étaient possible. C'est là un de ces aspects qui se trouvent à la racine de la critique du 19^{e} siècle disant que les mathématiques du 18^{e} siècle étaient non rigoureuses, non exactes, non générales *etc*. Une explication sociologique remarquable des changements décrits est proposée par David Bloor – (cf. Bloor, 1978).

Au début du 19^{e} siècle on peut constater un intérêt croissant des mathématiciens pour les exceptions. Je veux ici citer deux exemples : le premier en est le théorème d'Euler sur les polyèdres (s – a + f = 2). A un certain moment – après l'exposé important du sujet donné par Legendre dans ses « Eléments de géométrie » (1794) – on commençait à se demander : pour quels polyèdres le théorème d'Euler est-il vrai ? On a rencontré des « exceptions nombreuses » (en reprenant une expression de Lhuilier) et de types très divers – par conséquent l'énoncé paradigmatique était vraiment menacé. « Rencontrer » doit se prendre ici dans le sens littéral du mot parce que certaines des exceptions se présentaient d'elles- mêmes dans la nature (cf. les articles de Lhuilier et de Hessel). Le petit cube dans un grand cube se présentait par exemple si un cristal cubique noir se trouve à l'intérieur d'un cristal lucide ; l'escalier n°8 (dans la figure ci-dessous) est proposé à partir des idées de Haüy sur la composition des cristaux. L'histoire du théorème d'Euler a été utilisée par I. Lakatos dans son ouvrage « Proofs and refutations » (1976) bien connu pour illustrer ses idées sur le développement des mathématiques. Il semble paradoxal que Lakatos n'ait pas souligné l'historicité de sa propre méthode – la méthode des preuves et des réfutations.



Les numéros pairs désignent les « bons » polyèdres – c'est à dire les polyèdres qui sont Euleriens [s – a + f = 2]) – par contre les numéros impairs plus grand que 1 sont des « mauvais » polyèdres. Le numéro 2 est remarquable parce c'est un polyèdre Eulerien bien que ses faces ne soient pas simplement connexes.

L'autre exemple est fourni par les fonctions réelles. A mon avis ce n'est pas par hasard que la nouvelle méthodologie s'est développée dans les deux domaines cités. Ce sont typiquement des disciplines qui connaissent beaucoup d'entités d'une grande « individualité », un fait qui est selon Poinsot à l'origine des difficultés rencontrées dans la théorie des polyèdres (cf. Poinsot, 1809, p. 45) : « On comprend ici pourquoi les recherches de ce type sont tellement difficiles. Dans la théorie des polyèdres comme dans la théorie des nombres, on n'est pas autorisé à

faire des inductions d'un cas particulier à un autre. La plupart des qualités sont individuelles et n'obéissent pas à une loi. ».
A partir de 1800 environ, on aperçoit un intérêt croissant pour les fonctions non-usuelles. On peut citer dans ce contexte les travaux de Fourier sur les séries trigonométriques. Un autre exemple en est fourni par Cauchy, en particulier, par son introduction à son « Cours d'analyse algébrique » (1821) – une introduction qui est marquée par le nouveau discours de la rigueur. Des termes comme rigoureux, exact, général, précis… sont souvent utilisés par Cauchy. Une des sources d'erreur selon Cauchy est fournie par « les raisons tirées de la généralité de l'algèbre » (Cauchy 1821, ii), c'est à dire des énoncés qui ne font pas attention au domaine de validité éventuellement restreint des formules. Ainsi Cauchy voulait « apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues » (Cauchy, 1821, V).

Un exemple cher à Cauchy est la fonction

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0) \text{ et } f(0) = 0$$

qui montre qu'il existe des fonctions ayant une série de Taylor convergente et qui pourtant ne sont pas représentée par cette série en un certain point (ici l'origine). Donc, le développement en série n'est pas donné. L'attitude choisie par Cauchy dans le cas de cette exception ressemble à celle de Lhuilier et de Hessel : l'exception est là – la seule chose qu'il faut faire, c'est l'apercevoir. Pour être complet, je signale qu'il y a un autre mémoire de Cauchy intitulé « Sur les fonctions continues » dans lequel il manifeste une autre attitude. Ce mémoire date de 1844 et est consacré à la critique de la notion de continuité dans le sens d'Euler. Ici, Cauchy construit d'une manière expresse un exemple ; par conséquent on peut parler dans ce cas là d'un vrai contre-exemple !
On sait bien que Niels Henrik Abel a beaucoup appris des travaux de Cauchy qu'il a beaucoup estimé comme mathématicien (non pas comme personnage). Comme Dirichlet, Abel a passé un séjour à Paris (en 1826). Donc ce n'est pas un hasard, si l'on rencontre aussi chez lui l'attitude du jeune Cauchy : dans son fameux mémoire sur la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^2 + \ldots$$

il critiquait son maître : « Mais il semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots.$$

est discontinue pour toute valeur (2m+1)π de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce. » (Abel, 1826, 224sv note *). En passant, je note que la série citée était déjà connue d'Euler (Euler, 1783, 448sv) et de Fourier (Fourier, 1822, § 222). Il est remarquable qu'Abel parle ici

d' « exceptions » ; pour lui – comme pour Cauchy – ces exceptions marquent les bornes de la validité d'un théorème dont la vérité n'est pas mise en doute. L'attitude prise par Abel est celle d'un naturaliste qui ne modifie pas son énoncé général s'il rencontre quelques exceptions. Une seule hirondelle ne fait pas encore le printemps. Nous avons déjà rencontré cette attitude chez Lhuilier et Hessel.
En conclusion, l'idée qu'une proposition générale du type « Tous les S sont P » soit infirmée par un seul contre-exemple n'est pas effective dans les mathématiques jusqu'au 19^{e} siècle. On avait tendance à tolérer des exceptions, à accepter qu'il y ait un énoncé et en même temps des exceptions – le pire de ce qui pouvait arriver était la nécessité de déterminer le domaine de validité encore une fois.

La situation s'est modifiée trois ans après Abel. En 1829, Gustav Lejeune-Dirichlet publiait son mémoire sur la représentation des fonctions par des séries trigonométriques. C'est un mémoire rédigé avec le nouvel esprit de rigueur dont son auteur a fait connaissance pendant son séjour à Paris. Dans son mémoire, Dirichlet donne des conditions sous lesquelles une fonction peut se représenter par une série trigonométrique. Afin de démontrer que sa dernière condition est nécessaire, Dirichlet construit un exemple célèbre :
« *On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si on supposait f(x) égale à une constante déterminée c lorsque la variable x prend une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationnelle.* » (Dirichlet, 1829, p. 132) Plus tard Poincaré a commenté l'innovation de Dirichlet comme suit : « *Il y a cent ans [c'est-à-dire en 1800 environ] eut été regardée une telle fonction comme un outrage au sens commun*. » (Poincaré, 1898, page 5). Et : « *Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères*. » (Poincaré, 1908, p. 111). Les nouvelles fonctions sont artificielles et inutiles à des buts pratiques – en opposition aux vieilles fonctions qui se présentaient naturellement. Cette distinction entre mathématiques naturelles et mathématiques artificielles était très caractéristique de la pensée de Poincaré et d'autres mathématiciens de son époque – pour cette raison H. Mehrtens les appelle des mathématiciens « anti-modernes ».

3.2.2. Unstetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0

Eine Funktion f heißt an der Stelle x_0 *unstetig*, wenn x_0 im Inneren von D_f liegt und f dort nicht stetig ist.

Bemerkung:
Die Funktionen $f_1: x \mapsto \frac{x}{x}$; $D_{f_1} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $f_2: x \mapsto \frac{1}{x}$; $D_{f_2} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind an der Stelle 0 nicht definiert, dort also weder stetig noch unstetig.

1. Beispiel: f: $x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ und

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \\ 4 - x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die Funktion f ist an der Stelle 1 unstetig und hat dort eine *endliche Sprungstelle* (Fig. 3.15).

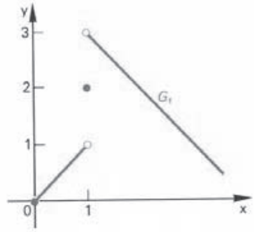


Fig. 3.15

2. Beispiel: f: $x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

f ist an der Stelle 0 unstetig und hat dort eine *unendliche Sprungstelle* (Fig. 3.16).

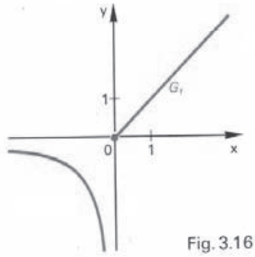


Fig. 3.16

3. Beispiel: Die in 1.7.4. eingeführte Gaußsche Klammerfunktion (INT) $x \mapsto [x]$ ist an jeder ganzzahligen Stelle unstetig, denn es gilt z. B. für $x_0 = 2$ und ein beliebiges h mit $0 < h < 1$: $[2+h] = 2$, es ist also $\lim\limits_{h \to 0+0} [2+h] = 2 = [2]$.
Für die Annäherung von links mit $-1 < h < 0$ gilt dagegen $[2+h] = 1$, also $\lim\limits_{h \to 0-0} [2+h] = 1 \neq [2]$ (vgl. Fig. 1.40).
Gelegentlich sagt man hier auch, die Funktion $x \mapsto [x]$ sei zwar an der Stelle 2 nicht stetig, aber immerhin *rechtsseitig* stetig.

Ces fonctions ne sont – elles pas artificielles ?

Dirichlet a créé le premier vrai monstre dans l'histoire des mathématiques : sa fonction n'a pas d'application, elle n'est plus susceptible d'une représentation sensible comme une courbe et elle est le produit d'une pensée libre et autonome qui ne s'occupe pas du tout des motifs en dehors des mathématiques elles-mêmes. A l'occasion de l'enterrement de Jacobi, Dirichlet a évoqué l'idée qu'on pratique les mathématiques exclusivement pour « l'honneur de l'esprit humain ». Cette citation formule pleinement l'idée des mathématiques acceptée au cours de la réforme dite néo-humaniste du système d'enseignement supérieur prussien dans le 19^{e} siècle L'auto-réflexion et l'autocritique sont les traits les plus caractéristiques des mathématiques modernes et les monstres en sont un outil favorisé. Donc, on peut dire que 1829 était l'année de la naissance des mathématiques modernes. On comprend bien ici pourquoi les mathématiques modernes sont si opposées aux attentes des élèves : l'ordre naturel est renversé par elles – l'autocritique et l'auto réflexion sont mises au début et non pas à la fin.

En 1837, Dirichlet a formulé sa fameuse définition d'une fonction « arbitraire » - cette définition peut se comprendre comme le cadre théorique de ce que Dirichlet a fait huit ans avant : « *Cette définition ne prescrit pas une loi commune aux différentes parties de la courbe [sic !] ; on peut imaginer qu'elle soit composée de parties très différentes ou qu'elle soit complètement arbitraire. Il s'ensuit que l'on peut considérer une telle fonction comme complètement déterminée dans un intervalle si elle est donnée par un graphe ou si ses différentes parties sont soumises à des lois mathématiques.* » (Dirichlet, 1837, 135sv)
Le 19^{e} siècle a connu une discussion importante sur la notion de fonction arbitraire qui s'est continuée même au 20^{e} siècle (par exemple entre Baire, Lebesgue, Borel et d'autres).
La méthode des monstres, c'est-à-dire de la construction expresse de fonctions avec des qualités inhabituelles, fut reprise par Riemann dans sa thèse d'habilitation (écrite en 1853/54). Riemann a passé la période décisive de ses études à Berlin où il a rencontré Dirichlet. Riemann justifie la nouvelle méthode par deux remarques : les fonctions bizarres peuvent servir à rendre les principes du calcul infinitésimal plus clair et ces fonctions sont appliquées dans d'autres domaines des mathématiques, en particulier dans la théorie des nombres (Riemann n'en cite aucun exemple !).
L'exemple le plus connu construit par Riemann est une fonction intégrable (dans le sens établi par lui-même) qui n'est pas continue sur un ensemble dense. La technique utilisée par Riemann a été souvent reprise après – par. ex. par H. A. Schwarz qui est ainsi arrivé à une fonction continue non-différentiable sur un ensemble dense.
Un élève de Riemann – Hermann Hankel – a publié en 1870 une méthode systématique qui sert à engendrer des fonctions bizarres : c'est son principe de la condensation des singularités. L'idée en est assez simple : prenez une fonction avec une singularité en 0. A l'aide d'une série, on va reproduire cette singularité sur tous les nombres rationnels. Il y a là des difficultés techniques dont l'étude fut un des points de départ des travaux de Cantor sur la théorie des ensembles. Sa compréhension moderne est formulée par Hankel d'une manière assez claire :
« *Pour y arriver [à la clarté sur la nature des fonctions] il faut avant tout analyser la multiplicité des relations possibles de deux variables qui sont contenues dans la notion de fonction de Dirichlet ; au cours de cette analyse il faut consacrer une attention particulière aux fonctions illégitimes qui jusqu'à aujourd'hui n'étaient point ou seulement peu étudiées*. » (Hankel, 1870, p. 68). C'est l'extrême qui nous donne l'idée d'une notion générale ! En passant je note qu'en allemand « illégitime » à cette époque qualifie la naissance dite « naturelle » en français (cf. l'expression française « enfant naturel ») – donc les fonctions citées sont une conséquence peu désirée de la notion générale de la fonction. Par conséquent

Hankel raisonne sur la possibilité d'exclure les êtres illégitimes par une définition restreinte de la notion de fonction.

Cinq ans après Hankel un autre mathématicien allemand, Paul du Bois-Reymond (le frère du fameux physiologue qui a lui même commencé sa carrière dans cette discipline), est arrivé à trouver un ordre dans toutes ces déviations : il décrit le système des fonctions réelles qu'on utilise jusqu'à nos jours. Il y a les fonctions générales (sans qualités explicites), les fonctions intégrables, les fonctions continues et les fonctions différentiables. Afin de démontrer que les deux dernières classes ne sont pas identiques, du Bois-Reymond se sert d'un exemple célèbre. C'est la fonction continue différentiable en aucun point, trouvée par Weierstrass en 1872.

Après 1870 l'activité dans le domaine des fonctions bizarres s'est accélérée. Même aujourd'hui, on trouve des articles contenant un exemple simple d'une fonction du type de Weierstrass. Donc surpasser les frontières apparentes imposées par l'intuition est resté une activité fascinante.

3. Faut-il familiariser le débutant avec le musée tératologique ?

J'espère que ma petite analyse historique a montré que la réponse à la question posée par Poincaré, est non, si on veut s'orienter selon le développement historique – c'est à dire si on se décide pour la méthode génétique. La pensée mathématique a longtemps fonctionné sans recours au musée tératologique en réfléchissant sur les cas paradigmatiques. On peut attendre le moment où les exceptions se présentent d'elles mêmes, au lieu de les introduire sans nécessité tout au début. (Cf. le bon mot de Poincaré : « *Il faut traiter les problèmes, qui se posent, et non pas les problèmes, qu'on se pose* ».) Une telle pensée peut se qualifier comme une pensée intensionnelle parce qu'elle fait attention à l'intension des concepts. L'orientation vers les énoncés généraux dans le sens qu'ils sont vrais dans un domaine sans exception – la pensée ensembliste ou extensionnelle parce qu'elle s'oriente vers l'extension des concepts – est un produit assez moderne. Si l'un opte pour un enseignement qui s'accorde aux standards des mathématiques contemporaines il n'y a pas de doute que le musée tératologique est à visiter tôt. Donc, la réponse à la question de Poincaré dépend d'un choix ou d'une décision qui n'est pas une question interne à la didactique. Mais, même si on veut suivre les idées modernes, une analyse historique aide à comprendre les difficultés éprouvées par les élèves de nos jours à s'habituer à la pensée mathématique moderne.

Bibliographie

ABEL N.H. (1826) Untersuchung über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^2 + \cdots$, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 1*, 311-339).

BLOOR D. (1978) Polyhedra and the Abonomination of Leviticus, *The British Journal for the History of Science,* **11**, 245-272.

CANGUILHEM G. (1972), *Le normal et le pathologique*, Presses Universitaires Françaises, Paris.

CAUCHY A.L. (1821) *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1ère partie. Analyse algébrique* – cité selon Œuvres complètes, IIe. Série, tome 3 (1897).

DASTON L. & PARK C. (2002) *Wunder und die Ordnung der Natur*.

DIRICHLET G. (1829) Sur la convergence des séries trigonométriques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 4*, 157-169.

DIRCHLET G. (1837) Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen, *Repertorium der Physik 1*, 152-174 - cité selon Werke, Tome 1 (Berlin, 1889), 133-160.

DU BOIS-REYMOND P. (1875) Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen…, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **79**, 21-37.

EULER L. (1783) *De eximio usu methodi interpolationum in serium doctrina* – cité selon Opera omnia, series primis, **15** (Berlin und Leipzig, 1927), 435-497.

FISCHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics,* **24**, 13-162.

HANKEL H. (1882) Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, Gratulationsprogamm der Universität Tübingen 1870? *Mathematische Annalen,* **20**, 63-112.

HESSEL J.F.C. (1832) Nachtrag zu dem Eulerschen Lehrsatze von Polyedern, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **8**, 13-20.

LAKATOS I. (1976) *Proofs and Refutations,*Cambridge university Press, Cambridge.

LHUILIER S. (1813) Démonstration immédiate d'un théorème fondamental d'Euler sur les polyèdres, et exceptions dont ce théorème est susceptible, *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg,* **4**, 271-301.

MEHRTENS H. (1990) *Moderne – Sprache – Mathematik,* Suhrkamp Verlag, Frankfurt a. M.

POINCARE H. (1889) La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement, *L'enseignement mathématique 1* – cité selon Œuvres tome 11 [Paris, 1953]), Gallimart, Paris.

POINCARE H. (1998/99) Les définitions mathématiques et l'enseignement, *Science et Méthode*.

POINSOT L. (1809) *Abhandlung über die Vielecke und Vielflache* – cité selon „Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper" (1906).

RIEMANN B. (186x) Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13*, 87 – 132 cité selon Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass" (1892 – réimpression New York 1953).

WEIERSTRASS K. (1895) Über continuirliche Functionen eines reellen Argumentes, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotient besitzen, *Matheamtische Werke.Tome 2* (réimpression Hildesheim/New York sans date), 71-74.

ZÜRCHER U. (2004) *Monster oder Laune der Natur*, Campus Verlay, Frankfurt/Main.

VOLKERT K. http://www.uni-koeln.de/ew-fak/Mathe/volkert/index.shtml, *Seminar für Mathematik und ihre Didaktik,* Universität zu Köln, Gronewaldstraße 2, 50931 Köln.

Remerciements

Les thèses proposées ici ont été développées pendant un séjour à Paris dans le cadre de l' « International program of advanced study » organisé par la Maison des Sciences de l'Homme (MSH) en collaboration avec Reid Hall (University of Columbia at Paris).
Je suis très reconnaissant à mes collègues Ph. Nabonnand (Nancy) et D. Flament (Paris) qui ont organisé ce stage et aux institutions mentionnées pour l'accueil si aimable. Pour des informations plus complètes on peut consulter l'article « Essai sur la tératologie mathématique » (à paraître dans un ouvrage collectif par le groupe cité ci-dessus). Le présent auteur veut aussi remercier Jean-Pierre Friedelmeyer (IREM de Strasbourg) pour son assistance dans des questions diverses en particulier de la langue française, Nicole Bopp (Directrice de l'IREM de Strasbourg), A. Kuzniak et F. Pluvinage rédacteurs en chef).

KLAUS VOLKERT
Université de Cologne
k.volkert@uni-koeln.de

LUCIA GRUGNETTI, ACHILLE MAFFINI, CARLO MARCHINI
Groupe « zeroallazero »

ACTIVITES DIDACTIQUES A CARACTERE VERTICAL POUR LA CONSTRUCTION DU CONCEPT DE LIMITE[1]

Abstract. "Vertical" didactical activities for the construction of the concept of limit. This paper concerns the activities of a research group in mathematics education about the concept of limit. The main characteristic of this group is that all stages in schooling (primary – 6 to 10 years; middle school – 11 to 13 years, and high school – 14 to 19 years) are represented, both within the group itself and as regards the pupils involved. This vertical cross-section is a resource which is as rare as it is precious. It allows us, indeed, to propose similar activities at different levels, check the evolution of the ideas, techniques and errors of the schoolchildren over time, and observe the effect of the teaching methods on them. With the support of research in mathematics education, we chose some issues, in particular measurement and approximation, which, in our opinion, can favour the gradual early development of the concept of limit. In this context, we would emphasise the importance of approximation as a resource for the long way to build the concept of the limit.

Résumé. Cette présentation concerne l'activité du groupe « zeroallazero[2] » qui, dans l'Unité locale de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma, s'occupe du concept de limite. La caractéristique de ce groupe est de réunir des enseignants de tous les niveaux scolaires (de l'école primaire à la fin du lycée), ainsi que quelques chercheurs en didactique des mathématiques. Cette « verticalité » se révèle très précieuse. Elle nous permet de proposer des activités similaires aux élèves de différents niveaux, de vérifier les évolutions des idées, techniques et erreurs des élèves dans le temps, et d'observer les effets des méthodes d'enseignement sur eux. Les thèmes qui nous sont apparus comme les plus riches en possibilités didactiques pour construire le concept de limite sont ceux de la mesure, des suites et de l'approximation, qui, du fait de leur caractère vertical, permettent d'être abordé à plusieurs reprises et de plusieurs points de vue à des niveaux scolaires différents. Dans ce contexte, on veut mettre en évidence l'importance de l'approximation comme une ressource dans la longue construction du concept de limite.

Mots-clés. Concept de limite, approximation, activités didactiques verticales.

---

[1] Travail effectué dans le cadre des activités de l'Unité Locale de Recherche en Didactique des Mathématiques de l'Université de Parme.

[2] Zéro puissance zéro.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 229 – 250.

1. Cadre théorique de la recherche

Comme on le sait bien, plusieurs recherches au niveau international ont relevé de nombreuses difficultés et obstacles liés au concept de limite. Les obstacles ainsi relevés peuvent être :

– d'ordre épistémologique (Brousseau, 1998 ; Sierpinska, 1985), dus à des raisons internes aux mathématiques mêmes ;

– d'ordre didactique (Artigue, 1998 ; Brousseau, 1998 ; CREM, 1995 ; Groupe AHA, 1999), dus aux pratiques d'enseignement peu efficaces ;

– d'ordre cognitif (Cornu, 1991 ; Dubinsky, 1991 ; Sfard, 1991 ; Tall & Vinner, 1981 ; Tall, 1996), dus aux processus d'abstraction et de conceptualisation impliqués ;

– d'ordre métacognitif (Zan, 2001, 2002), dus à l'ensemble des attitudes qu'adoptent les élèves dans leur rapport au savoir mathématique.

Notre recherche se focalise sur l'interaction entre les trois derniers aspects (didactique, cognitif et métacognitif) qui, évidemment, s'influencent réciproquement. On est parti de l'hypothèse, qui est raisonnable, mais qui ne semble pas avoir de partisans dans les manuels et les curriculums, selon laquelle les concepts complexes comme celui de limite ne peuvent être compris qu'à la fin d'un long travail didactique, qui doit se baser sur les intuitions spontanées et immédiates des élèves pour leur permettre de se construire un cadre cohérent et solide d'images mentales (Dallanoce et al., 2000 ; Alberti et al., 2000 ; Grugnetti, Rizza, 2003).

On a donc estimé nécessaire de proposer des activités diagnostiques pour permettre l'explicitation des idées intuitives et déterminer des pistes d'évolution graduelle. À la suite des résultats obtenus (Falcade, Rizza, 2003 ; Grugnetti, 2004), on a décidé de proposer des activités didactiques dans un esprit de continuité et de construction des savoirs selon un processus par approfondissements cycliques. Au niveau métacognitif il s'agit d'une sorte d'approche de la construction d'un concept.

La formation des concepts peut ainsi suivre le passage naturel du concret à l'abstrait. La formalisation ne sera plus vécue comme quelque chose qu'on impose mais elle apparaîtra comme une exigence fondamentale pour les élèves aussi :

> « Il est intéressant de construire l'analyse en termes d'objets mentaux jusqu'au moment où l'on perçoit que ceux-ci ne suffisent pas et où l'on peut comprendre les raisons qui imposent la formalisation en ε et δ » (CREM 1995).

Cette évolution n'est ni simple ni naturelle et souvent il y a des conflits importants entre les intuitions naïves et les concepts mathématiques en formation. Dans ce processus, on ne peut pas ignorer la dimension métacognitive : le manque de conscience en ce qui concerne ses propres préconceptions peut devenir un obstacle supplémentaire de l'apprentissage. Il faut donc prévoir des stratégies didactiques qui puissent favoriser d'un côté la conceptualisation et de l'autre la prise de conscience de la part de l'élève de son « monde intérieur » d'idées, convictions et peurs.

On considère les mathématiques élémentaires comme très riches d'opportunités pour se familiariser graduellement avec le concept de limite et on estime que l'école obligatoire peut jouer un rôle fondamental pour le développement d'images mentales qui favorisent son apprentissage.

Par nos recherches à caractère diagnostique on a relevé la présence précoce d'idées sur l'espace, la continuité et la limite qui ne sont pas soutenues dans le parcours scolaire d'une façon adéquate ; parcours scolaire qui est, en plus, souvent axé sur des automatismes et des formules pouvant amener à des convictions erronées et durables.

Les thèmes qui nous sont apparus comme les plus riches en possibilités didactiques sont ceux de la mesure[3], des suites et de l'approximation, qui, du fait de leur histoire complexe et captivante et de leur caractère vertical, permettent d'être abordés à plusieurs reprises, de plusieurs points de vue et à des niveaux scolaires différents.

2. Activités didactiques à caractère vertical

Dans l'esprit de construction à longue échéance, de l'analyse en termes d'objets mentaux, nous avons conçu des activités didactiques à caractère vertical autour de l'approximation dans ses deux aspects relevants : comme une importante catégorie mathématique en soi même et comme un moyen de « dominer » l'infini, passage nécessaire pour arriver à comprendre le concept de limite *« ... dans le champ de l'analyse, l'approximation devient un élément-clef de la conceptualisation*. (...) *Son statut est cependant souvent mal perçu par les étudiants, y compris les étudiants relativement avancés. »* (Kahane, 2002).

Pour chacune de ces activités nous avons défini un projet de recherche. Un de ces projets concerne seulement les élèves des dernières classes de l'école secondaire de deuxième degré pour arriver enfin au concept de limite.

2.1. Les projets

Le projet « Zénon » : vertical.
Le projet « Menon » : vertical.

---

[3] Voir aussi, comme référence concernant le concept de mesure, Brousseau, 2000.

Le projet « Ça casse ou ça passe » (Simulation éducative d'un jeu peu éducatif) : terminale

Pour le caractère spécifique de la rencontre du CREM, nous présentons ici les activités des deux premiers projets.

Le premier se base sur le problème que Socrate propose à son esclave, décrit dans le *Menon* de Platon, mais proposé d'une manière différente en fonction de l'âge des élèves.

Le deuxième se base sur le paradoxe de Zénon « Achille et la tortue » (AT) et sur un problème ayant comme titre « La Ferrari » (F), avec des énoncés qui changent en fonction de l'âge des élèves.

Par ces activités, nous voulons agir sur différents niveaux :

1) Introduire très tôt le thème de l'approximation ;
2) Développer les perceptions des limitations (même pratiques comme le sont les instruments de mesure dont on dispose en ce moment là) du milieu où l'on opère ;
3) Étudier comment l'évolution des instruments (théoriques et pratiques) utilisables dans un contexte « plus riche en connaissances » peut opérer dans la construction de nouvelles connaissances.

2.2. La méthodologie du travail en classe

Suivant les principes du socio-constructivisme nous sommes intéressés aux choix des élèves lorsqu'ils cherchent à résoudre les problèmes proposés et à leurs difficultés, plutôt qu'aux solutions elles-mêmes.

Chaque activité de chacun des projets est proposée en classe par deux enseignants, dont l'un a le rôle d'observateur.

Les catégories d'enseignants concernés font référence à deux macros distinctions : Chercheurs/non chercheurs licenciés en mathématiques/non licenciés en mathématiques.

Il y a donc quatre catégories de référence et nous prenons en compte ce paramètre dans l'analyse du déroulement des activités en classe, comme le dit Roditi (2005) « *Dans une situation d'enseignement, le professeur s'engage personnellement. Des logiques inconscientes s'y manifestent nécessairement. (...) Dans une classe de Sixième, les interactions entre le professeur et les élèves comportent nécessairement une dimension affective qui n'est pas négligeable* ».

Chaque enseignant a une épistémologie implicite de référence qui induit certaines « convictions » qui, évidemment, ont une influence sur l'activité en classe (voir par exemple aussi Thompson, 1992 ; Ernest, 1989 ; Zan, 2003).

Nous essayons donc d'organiser notre recherche et notre travail sur deux niveaux : l'un qui concerne les apprentissages des élèves à partir d'une activité ayant les caractéristiques d'une situation-problème et l'autre qui concerne le déroulement de cette activité dans une pratique de classe, et tout ceci également en vue d'une formation en service.

2.3. Le projet « Zénon »

Les énoncés du problème de la Ferrari

La Ferrari (F1 : 5e primaire)

Le 1er janvier 2005 Cirillo a fêté son anniversaire et il a reçu 50 €. Depuis longtemps il rêve d'acheter la maquette de la Ferrari qui coûte 100 € ; il décide alors de mettre cette somme de côté pour l'achat de la voiture de ses rêves et d'ajouter 25 € l'an prochain, 12,50 en 2007 et ainsi de suite. Il ajoutera ainsi chaque année la moitié de la somme économisée l'année précédente.

Cirillo arrivera-t-il à acheter la maquette de la Ferrari ? Et après combien d'années ?

La Ferrari[4] (F2 : collège[5] et deuxième année du Lycée)

Depuis longtemps, Cirillo et Antonio rêvent chacun de s'acheter une belle Ferrari rouge. Mais cette voiture coûte 100000 € et ils n'ont pas l'argent nécessaire. Nous sommes en l'an 2000. Cirillo vient d'hériter 50000 €. Il décide de mettre cette somme de côté pour l'achat de la Ferrari, d'y ajouter 25000 € l'an prochain, 12500 € en 2002 et, ainsi de suite. Il ajoutera ainsi chaque année la moitié de la somme économisée l'année précédente. Antonio n'a pas fait d'héritage, mais il décide d'épargner 30000 € en 2001, il ajoutera la moitié de cette somme en 2002, le tiers en 2003, le quart en 2004, le cinquième en 2005 et ainsi de suite. Chaque année, il ajoutera donc une somme équivalente à 30000 € divisé par le nombre formé des trois derniers chiffres de l'année.

Qui arrivera à acheter la Ferrari ? Et quand ? Donnez les détails de vos calculs.

---

[4] Un énoncé semblable du problème à été utilisé dans le RMT 2000.

[5] En Italie le Collège concerne les trois années qui suivent les cinq ans d'école primaire.

La Ferrari (F3 : quatrième année de lycée)

Antonio veut acheter une Ferrari qui coûte 100000 €. Il décide qu'en 2005 il mettra sur son compte en banque 40000 €, en 2006 il ajoutera la moitié de cette somme, en 2007 un tiers, en 2008 un quart, en 2009 le cinquième et ainsi de suite. Chaque année il ajoutera donc une somme équivalente à 40000 divisé par le nombre qui correspond au nombre de dépôts bancaires effectués. Mais, pendent ce temps, la Ferrari a subi chaque année une augmentation de prix de 3% par rapport a l'année précédente (taux composé).

Antonio arrivera-t-il à s'acheter la Ferrari ? Et après combien de temps ?

Et si l'augmentation avait été de 2%? Est qu'il y a un taux maximal qui permet à Antonio de s'acheter au moment donné la Ferrari avec son plan d'épargne ?

Les énoncés du paradoxe « Achille et la tortue »

Achille et la Tortue (AT1 : 5e primaire et première année du collège)

Achille (A) (bien connu pour sa rapidité) et une Tortue (T) (manifestement lente) décident de faire une course. Achille est généreux et accorde à T un avantage de 20 m. En outre A est si sûr de soi qu'il décide de courir seulement deux fois plus vite que T (c'est-à-dire que, pendant que T parcourt un mètre par seconde, A en parcourt 2). Pendant qu'A parcourt les 20 m qui le séparent de T, combien de mètres a parcouru T ?
Combien de temps utilisera maintenant A pour aboutir au nouveau point occupé par T ? Et pendant ce temps, combien de mètres a parcouru T ?
Est tu capable de prévoir le résultat de la course ? Sur qui paries-tu, pourquoi ?

Achille te la Tortue (AT2 : deuxième et troisième année du collège et première année du Lycée)

Achille (A) (bien connu pour sa rapidité) et une Tortue (T) (manifestement lente) décident de faire une course. Achille est généreux et accorde à T un avantage de 20 m. En outre A est si sûr de soi qu'il décide de courir seulement deux fois plus vite que T (c'est-à-dire que, pendant que T parcourt un mètre par seconde, A en parcourt 2).
Pendant qu'A parcourt les 20 m qui le séparent de T, combien de mètres a parcouru T ?
Combien de temps utilisera maintenant A pour aboutir au nouveau point occupé par T ? Et pendant ce temps, combien de mètres a parcouru T ?
En continuant de cette façon, qu'est que lui peut arriver ? A pourra-t-il rattraper T ?
Si oui, combien de mètres aura-t-il parcouru ? Si non, pourquoi ?
Donne une représentation (à l'échelle) de la situation, en utilisant des segments pour indiquer les parcours de A et de T.

Achille et la Tortue (AT3 : deuxième année du Lycée)

Une Tortue, qui en a assez d'être considérée comme un animal lent, décide de démystifier ce ragot en défiant Achille, bien connu pour sa vélocité. Dans ce but, elle propose à Achille un pari : « Tout le monde sait que tu es l'homme le plus rapide au monde. Mais je te promets que si tu me donnes un très petit avantage dans une course, moi, je gagnerai toujours car tu ne pourras jamais me rattraper. J'en suis tellement sûre que je suis disposée à parier n'importe quelle somme».
Achille éclate de rire et lui répond : « Tu bats breloque, mais si tu as de l'argent à perdre, faisons ce pari pour 100.000 deniers. Je te donnerai 100 m d'avance et je suis tellement sûr de gagner que je ne m'appliquerai pas trop : ma vitesse ne sera que le double de la tienne ».
« Ça va bien » répond la Tortue «je sais que j'ai déjà gagné, si tu veux, je t'explique pourquoi, comme ça, tu pourras me donner tout de suite l'argent et éviter de faire piètre figure (et aussi une fatigue inutile) »
Achille, plus intrigué qu'inquiet, accepte que la Tortue lui explique son idée. « Pendant que tu parcourras les 100 m que tu me donne comme avantage, moi je parcourrai 50 m ; mais quand tu en auras parcouru ces 50 m, moi j'en aurai parcouru 25, ...».
Achille commence être inquiet et il pense qu'il a choisi une vitesse trop faible. La Tortue ajoute : « Et même si tu allais 10 fois plus vite que moi, rien ne changerait. En effet, pendant que tu parcourras les 100 m que tu me donnes comme avantage, moi je parcourrai 10 m ; mais quand tu auras parcouru ces 10 m, moi j'en parcourrai 1, ... ».

Selon toi, convient-il à Achille de faire la course ?
Et s'il accepte, qui gagnera le pari ?
Y a-t-il quelque chose qui change si le rapport entre la vitesse d'Achille et celle de la Tortue varie ? Et si c'est l'avantage initial de la Tortue qui varie ?
Toi, sur qui parierais-tu ?
Comment ferais-tu pour savoir qui gagne la course ?

Analyse a priori des deux activités

Le paradoxe « Achille et la tortue » (AT) convient au développement de nos buts du point de vue de l'éveil de la curiosité des problématiques concernées. L'activité didactique basée sur le problème de la Ferrari (F), implique des aspects similaires mais avec des particularités différentes :

– en ce qui concerne F, il y a un point d'arrivée statique (le montant nécessaire à l'achat de la Ferrari, comme on verra plus loin) et une modalité dynamique pour l'atteindre. Le fait de travailler dans un domaine discret induit des questions sur la difficulté d'un partage (infini) en plus du sens de ce partage infini.

La question posée aux élèves est donc centrée sur l'atteinte d'un but (l'achat de la voiture), mais le problème demande, d'une façon implicite, l'analyse du processus nécessaire pour l'atteindre[6]. Il s'agit d'une occasion significative pour un examen des « conditions complémentaires » d'un problème. En particulier, on peut mettre en évidence deux questions concernant le montant peu à peu mis de côté : Cirillo et Antonio arriveront-t-ils à mettre de côté un montant déterminé ? Et dans ce cas, lequel ? Cet aspect du problème induit, d'un point de vue théorique, deux questions cruciales : Est-ce que la somme d'un nombre infini de termes peut exister ? Et, dans ce cas, comment peut-on la déterminer ? En ce qui concerne Cirillo, la réponse peut être déstabilisante. En effet, dans les activités à caractère diagnostique dont on a parlé auparavant, des difficultés à imaginer un résultat fini d'un processus infini sont apparues ;
- en ce qui concerne AT, il y a un point d'arrivée dynamique dans un contexte dynamique et cette composante augmente la complexité du problème, qui, en même temps, devient plus significatif, en entraînant des activités de mouvement qui sont plus proches de la réalité des élèves.

Il vaut la peine de souligner que dans ce cas, à cause de la typologie du problème, ce qui dans la Ferrari était un sous-problème possible (l'existence et la détermination de la possible limite finie de la série correspondante), représente ici la question essentielle.

En définitive, c'est comme si le dynamisme du problème pouvait aider à déplacer l'attention sur le processus et sur le comportement relatif, et aider ainsi, par l'interprétation sémantique de la suite des sommes partielles, la construction des images mentales essentielles au développement du concept de limite.

2.4. Le projet Menon

Les énoncés du problème de Menon

M1 (5e primaire)
(A) Vous avez un carré blanc et 4 paires de carrés en couleur. Les carrés sont tous égaux entre eux. Vous devez construire un carré dont l'aire est le double du carré blanc.

[6] Nous pensons qu'il est utile souligner la distinction entre ce qui arrive et la façon d'y arriver. Par exemple, le plan d'épargne choisi permettra à Antonio d'acheter la voiture (but), justement parce qu'il ne produit pas une série convergente.

Pour y arriver utilisez tout le carton d'une des paires de carrés en couleur, qu'il faut couper et coller sur une feuille de papier blanc.

Si vous n'y arrivez pas, essayez avec une autre paire de carrés en couleur

(B) Vous avez un carré blanc et 4 paires de carrés en couleur. Les carrés sont tous égaux entre eux. En utilisant 2 carrés de la même couleur, est-ce que vous arriverez à en construire un autre, dont l'aire est le double de celle du premier (en coupant et en collant les différentes pièces sur une feuille de papier blanc) ?

Si vous pensez que vous pouvez y arriver, mais que vous vous êtes trompés, essayez avec une autre paire de carrés de la même couleur.

On donnera aux élèves, qui doivent travailler en groupe, des carrés isométriques au premier carré (par exemple de 10 cm de côté), une règle non graduée, un crayon et des ciseaux. Les élèves peuvent couper les carrés de manière variée et recomposer les parties comme ils veulent pour résoudre le problème.

Quand ils auront collé les parties sur une feuille de papier, ils recevront une règle graduée et l'on demandera qu'ils mesurent le coté du carré qu'ils ont obtenu.

M2 (collège)

Un carré de côté 2 est donné. Trouve la mesure du côté d'un carré ayant l'aire double de celle du carré donné).

On propose de parcourir les phases du dialogue de Platon. L'enseignant assume le rôle de Socrate et la classe entière celui de l'esclave. Les élèves ne connaissent pas ce dialogue.

M3 (Lycée)

Lecture du dialogue de Platon.

La lecture du dialogue de Platon est faite sur deux niveaux : épistémologique et « technique ».

Analyse a priori de l'activité

Dans son développement vertical, l'activité permet :

- la construction de carrés par manipulation et la détermination d'informations qui viennent des carrés eux-mêmes ;
- la construction de suites d'approximations. La construction de telles suites, basée sur des méthodes adaptées à la réalité scolaire où on les a proposées, a été vue comme modalité de travail et comme moyen pour approximer. Le but est aussi de voir les approximations successives comme outil (mathématique) qui met en évidence l'inadéquation de la règle comme

instrument (physique) pour déterminer la mesure de la diagonale. La construction des suites d'approximation se présente ainsi comme un premier pas vers le passage du processus à l'objet en ce qui concerne le concept de limite. L'aspect physique de l'objet demandé, met en deuxième plan la question de l'existence de la limite. Mais cet aspect sera opportunément repris au cours de la phase suivante.

- la conjecture d'impossibilité et la preuve de l'impossibilité d'avoir une réponse à ce problème sous forme de nombres rationnels ;
- le passage des nombres rationnels aux nombres réels comme domaine où l'on peut trouver la solution du problème sur un plan théorique (de l'infini potentiel a l'infini en acte) ;
- le retour aux nombres rationnels comme domaine de réponse (en termes de réalité) au problème ; le rôle de l'approximation.

2.5. Les variables didactiques et « de contexte »

En ce qui concerne le problème de la Ferrari :

	5e Primaire	*Collège et deuxième année du Lycée (2)*	*Quatrième année de Lycée (3)*
Variables	– Un seul personnage pour un seul achat : « convergence » ; – le prix de la Ferrari : maquette pour 100 € (pour l'école primaire).	– Deux personnages pour deux situations d'achats différentes : « convergence » et « divergence » ; – le prix d'une Ferrari : 100000 €	– Un seul personnage pour un seul achat, mais avec des pourcentages d'augmentation : « convergence », « divergence », « indétermination » séries géométriques et séries harmoniques

Les raisons des variables choisies :

(1) On pense qu'au niveau primaire des nombres trop grands peuvent démotiver ou bloquer les élèves.

(2) En introduisant le « problème d'Antonio » on permet la comparaison entre deux modalités différentes (deux séries différentes).
En demandant de « montrer les calculs » on propose aussi une procédure opératoire.
L'éventuel usage de l'ordinateur devrait porter l'attention sur la construction des deux séries.

(3) Le prix visé n'est plus fixe, mais variable et le modèle devient plus complexe : comparaison avec une fonction exponentielle. Les changements du taux conduisent à des réponses différentes en relation avec l'existence d'une solution.

Finalement, par le taux de 2% on voudrait mettre en évidence qu'Antonio arrive au montant demandé (entre la 17e et 21e année), mais que s'il ne profite pas « de l'instant qui passe », il ne peut plus acheter (problème d'intersection).

En ce qui concerne le problème d'Achille et la Tortue :

	5e Primaire et première année du Collège (1)	*Deuxième et troisième année du Collège et première année du Lycée (2)*	*Deuxième année du Lycée (3)*	*Quatrième année de Lycée (4)*
Variables	– Vitesse de A double de celle de T	– Vitesse de A double de celle de T ; – représentation graphique demandée	– En forme de dialogue avec un défi	– Formulation d'Aristote

Les raisons des variables choisies :

(1) - (2) Avec ces donnés-là, les distances parcourues par Achille ne sont pas soumises à des approximations successives. En plus, par ces données, chaque valeur calculée se termine par le chiffre 5 et l'on facilite ainsi la conjecture selon laquelle les décimales ne finissent jamais, même si on peut « quantifier » le parcours en 40 m (en particulier au collège).

(3) La modalité du dialogue devrait permettre le passage de la problématique « rattrapage » à celle des raisons du rattrapage.

(4) Le problème passe à un niveau plus abstrait, sur les modalités de résolution (et non sur la solution)

En ce qui concerne Menon :

	5e Primaire	*Collège*	*Lycée*
Variables	– Construction par manipulation du carré d'aire double d'un carré donné ; – Deux énoncés différents : dans le premier l'on tient pour sûr que la solution existe, dans l'autre on demande si elle existe *(1)*.	– On parcourt les phases du dialogue de Platon *(2)*.	– Lecture du dialogue de Platon *(3)*.

Les raisons des variables choisies

(1) La manipulation, très utilisée (en Italie) dans ce niveau scolaire, devrait permettre une entrée plus simple.
Les choix des mesures des côtés ont été faits pour éviter que le modèle proportionnel ne conditionne trop les réponses (sans passer par les rapports).
Les deux versions différentes (existence de la solution donnée ou existence non donnée) sont proposées dans des classes différentes, mais « parallèles », pour vérifier si et comment cette variable a de l'effet sur les réponses et la mise en commun.

(2) On veut vérifier si, dans le milieu « classe », il est possible de reconstruire les problématiques et les conceptions erronées proposées par Socrate dans le dialogue : la variable « dialogue » devrait induire un parcours « déductif » dans lequel il faut faire des vérifications sur des hypothèses.

(3) Par la lecture directe du dialogue, on essaye de faire apparaître les deux registres : épistémologique et « technique », pour arriver à construire des suites d'approximations.

3. Quelques résultats

Jusqu'à maintenant, les activités didactiques ont été proposées dans des classes d'école primaire et du Collège. En ce qui concerne l'école secondaire supérieure, on n'a pu travailler que sur le projet Menon et dans une seule classe de troisième année de lycée (élèves de 16 ans). On compte poursuivre la recherche en présentant les projets dans d'autres classes durant l'année scolaire 2005/06.

Bien que les résultats soient provisoires et incomplets, nous signalons ici ceux qui nous semblent déjà importants comme indicateurs significatifs de la direction à suivre dans la suite du travail.

3.1. Modifications de la part des élèves

Les élèves proposent de modifier les conditions posées par les problèmes pour se les approprier dans leur réalité car, autrement, les réponses seraient difficiles à trouver. Dans cette façon de procéder on peut relever, comme on le mettra en évidence dans l'analyse spécifique des activités, des attitudes de type métacognitif.

Menon : Voir dans la figure obtenue un carré même s'il y a des approximations évidentes dans la construction : souvent il n'y avait pas l'égalité des côtés. Les élèves réalisent ainsi un processus d'abstraction : les propriétés qu'ils « voient » dans la figure « la ramènent à un carré », malgré des erreurs évidentes de construction. Il nous semble que cette attitude montre que l'approche manuelle (empirique) de la question peut être « surmontée » par l'approche mentale, en se rendant compte ainsi, implicitement, des limitations de la première.

Ferrari : Le rôle du temps (on veut encore acheter la voiture après de nombreuses années ?), du vendeur et du rabais. Tendance à mettre des conditions pour que l'on puisse procéder à l'achat.

> *« Il la réserve et il la paye quand il y aura les soldes. »* (École primaire)
>
> *« Quand il n'y a plus que 3 centimes à payer, il est plausible que quelqu'un les lui prête sans en faire d'histoires. »* (Collège - III)
>
> *« Le vendeur pourrait faire un rabais. »* (École primaire)

À propos du rabais, il faut souligner qu'il a été utilisé (en prévoyant ce rôle dans le projet de l'activité) comme un instrument pour la formalisation du concept de limite «selon le modèle de Weierstrass ». En effet, lorsqu'on fixe le rabais (qui correspond à l'analogue de ε sur la variable dépendante), il s'agit d'établir l'année (minimale) à partir de laquelle il sera possible pour Cirillo d'acheter la voiture.

Bien loin de vouloir introduire très tôt ce genre de formalisation, notre but est plutôt celui d'habituer les élèves à considérer d'abord la variable dépendante, dans la tentative de favoriser l'acquisition successive du concept de limite. L'espoir est celui d'induire une attitude[7] qui puisse être utile à comprendre la définition de la limite de Weierstrass.

Nous avons mis en évidence, dans ce même paragraphe, le rôle que le rabais a eu dans le déroulement de l'activité car dans la plupart des cas, les élèves mêmes l'ont posé comme condition.

> *« C'est évident que le vendeur fera un rabais. Si on pense qu'il ne manque que très peu de centimes... »* (Collège-III)

Selon nos intentions, le rabais, au niveau du collège, avait aussi la tâche d'activer, d'un point de vue métacognitive, des conditions de choix responsable ; le prix avec le rabais pouvait être considéré comme une approximation du prix de la voiture, et ainsi le choix du rabais aurait pu devenir un choix d'approximation.

Achille et la Tortue : certains groupes modifient la consigne, en rendant « indépendants[8] » les mouvements de A et de T, en trouvant ainsi 40 m comme

---

[7] Le domaine de référence est le domaine métacognitif.

[8] En effet, les mouvements d'Achille et de la Tortue sont indépendants, mais c'est bien quand on pense au mouvement d'Achille comme « relatif » a celui de la Tortue (c'est comme si Achille avait des buts successifs) que le paradoxe surgit. Le problème philosophique se déplace ainsi sur les différentes modalités par lesquelles on regarde la réalité.

distance parcourue par A pour rattraper T. Le problème n'est plus dynamique mais statique : Est-ce que A réussira à parcourir 40 m en continuant à partager en deux l'espace parcouru ? Le problème, de cette façon, se réduit à celui de la Ferrari.

> *« Le problème ressemble à celui de la Ferrari car on doit toujours diviser par 2. »* (École primaire)

3.2. Instruments inadéquats

Les élèves entrevoient que les instruments dont ils disposaient jusqu'à ce moment-là et qu'ils utilisent pour essayer de donner une réponse ne sont plus adéquats. Et cela rend possible l'introduction de nouveaux registres de représentation, « plus efficaces ».

Menon : La tendance générale, bien que les consignes l'interdisent, consiste à utiliser la règle graduée. Ceci met en évidence une tendance à identifier le segment (le côté du carré) avec sa mesure.

> *« Il s'agit d'une longueur, donc il [le côté] existe : Nous pouvons le mesurer à la règle. »* (Collège-II)

> *« Le nombre doit forcément exister, autrement il y aurait un trou dans la ligne des nombres. »* (Collège-II)

Il est aussi intéressant d'observer que les premières tentatives, en particulier en cinquième primaire, consistent à découper les carrés en rectangles (ou en carrés). Une première motivation de cette attitude doit être recherchée dans une « analogie » avec la figure du départ (on part d'un carré et l'on pense que le découpage doit être en carrés ou rectangles). Mais un enfant a aussi observé qu'il a utilisé une figure carrée comme essai pour trouver l'unité de mesure adéquate car il a pensé qu'il aurait été suffisant de couper des carrés « assez petits ». À la question : mais comment fais-tu pour savoir quel est le carré d'aire double, si tu ne connais pas la mesure du côté ? Il a répondu « mais comment je peux connaître le côté si je n'avais pas le carré et si je n'ai pas la mesure ? » Dans ce genre de réponse, il est intéressant de remarquer l'attitude « philosophique » de l'enfant : Quelle est la priorité, dans la construction de la connaissance, des problèmes d'existence des figures ? Les figures sont-elles construites (selon une conception euclidienne) ou existent-elles déjà et, dans ce cas, en déduit-on les éléments spécifiques ?

Un autre aspect à prendre en considération, dans le cas des élèves plus âgés (12 ans[9]) concerne l'usage de la calculatrice : le passage de la confiance dans l'instrument quand on cherche la solution (c'est-à-dire la mesure du côté du carré d'aire double de celle du carré de côté 2, exprimée par √8) à la mise en discussion de sa validité. Ce passage a permis de reconnaître l'inadéquation de l'instrument du point de vue pratique et aussi conceptuel ; c'est aussi une manière d'induire les élèves à observer d'une façon critique les résultats obtenus. Le problème de l'existence de « l'irrationnel » devient avant tout un problème de « non-existence » du rationnel ; la non-existence demande une quantification universelle sur les nombres rationnels[10]. Lorsqu'on peut aborder la preuve de la non-rationalité, celle-ci est perçue comme une condition d'économicité et de certitude.

À ce propos, on présente des réponses des élèves :

> *« Bien que le résultat s'approche beaucoup de 8, la mesure du côté n'est pas précise[11]. »* (Collège-II)
>
> *« Mais avec les instruments qu'on avait nous n'arrivions pas à calculer le côté et, en continuant à faire de nombreux essais nous nous demandions si le nombre existait vraiment. »* (Collège-II)
>
> *« Le professeur nous a prouvé que le nombre n'est pas rationnel ».* (Collège-II)
>
> *« ... on n'arrive jamais à la fin, alors nous nous sommes demandé : mais ce nombre existe-il vraiment ?* (Collège-II)
>
> *« Selon moi, la racine n'existe pas car on peut trouver une infinité de chiffres je m'approche, mais je ne la trouve pas. »* (Collège-II)
>
> *« En continuant comme ça[12] je trouve des valeurs toujours plus près de 8 par défaut ou par excès. »* (Collège-III)

Achille et la Tortue : Difficulté « physique » à voir des « petits » écarts et difficulté à raccorder un processus infini (l'addition des espaces parcourus par Achille) avec un résultat fini (la somme).

---

[9] Des réponses de ce genre ont été données aussi au niveau du lycée. L'analyse de l'expérience à ce niveau scolaire fera l'objet d'une autre publication.

[10] En effet, les termes des suites sont des nombres rationnels qui semblent « ne pas arriver » au résultat.

[11] L'élève fait référence à l'essai qu'elle a fait avec la calculatrice et à l'élévation au carré.

[12] C'est à dire, en partageant en deux l'intervalle des valeurs qui donnent des approximations par défaut et par excès.

« Comment peut-on mettre en évidence l'écart entre A et T quand il s'agit de millimètres ou d'encore moins ? » (École primaire)

« Mais comment puis-je faire pour être sûr que la somme de toutes les parties soit vraiment 4 m ? » (Collège-I)

« Il n'est rien arrivé de plus par rapport à ce qu'on avait trouvé en classe[13]*.»* (Collège-I)

« En considérant la réalité, certainement A rattrapera T car les nombres décimaux sont très petits et ils sont impossibles à mesurer. » (Collège-I)

« Cette distance devenait peu à peu toujours plus petite, mais elle y était toujours. » (Collège-I)

3.3. Hypothèse d'approximation

Les élèves font des hypothèses d'approximation et ça peut être surprenant car l'école, en général, ne traite pas ces aspects mathématiques. On passe de cette façon au domaine subjectif de chaque élève. Ces hypothèses d'approximation sont en effet le noyau de base des activités que nous proposons qui se rattachent préalablement plus à des intuitions et à des préconceptions plutôt qu'aux habilités mathématiques acquises à l'école.

Menon : comme on l'a dit dans le paragraphe précédent, on peut entrevoir de la part des élèves, la nécessité de l'approximation comme une façon de gérer pratiquement la situation.

« Selon moi la racine n'existe pas car on peut trouver un nombre infini de chiffres, je m'approche, mais je ne la trouve pas. » (Collège-II)
« Rapport égal à environ 1,41. On peut l'accepter car si j'y mets des morceaux plus petits, on ne les voit même pas. » (École primaire)

Ferrari : Le contexte « euro » et la gestion des décimaux : dans ce cas-là les hypothèses d'approximation sont gérées sur un plan sémantique. Les choix que les élèves font sont strictement liés aux objets et aux valeurs (discrets) qui sont concernés.

« On doit arrondir, c'est-à-dire joindre les décimaux... peut être, il y a un euro et 99 centimes et alors il en a deux. » (École primaire)

Achille et la Tortue : différence entre le domaine conceptuel et le domaine physique.

---

[13] La référence est à un essai fait dans la cour de l'école qui avait le but de simuler, par deux enfants, la course de A et T.

« Théoriquement, A devrait rattraper T, mais si on continue les décimaux, ça sera très difficile. » (Collège-I)

3.4. Idées de limite et d'infini

D'une manière plus au moins consciente, des références à l'idée d'infini (potentiel et en acte) et à l'idée de limite apparaissent.

Menon : Premières allusions aux « conditions de complétude » pour un ensemble de nombres et au « concept de limite ». Ce dernier, en particulier, n'est pas seulement vu et vécu du point de vue technique, mais il doit d'abord être « pensé » en relation avec les présupposés culturels sur lesquels le concept s'appuie; ceci vaut aussi et surtout sur le plan didactique pour comprendre la nécessité de faire des choix du genre « philosophique », qui font référence à des formes en acte plutôt que potentiels d'infini par rapport à sa représentation. Il nous semble que les résultats obtenus renforcent notre idée de la présence, déjà à partir de l'école primaire, des présupposés philosophiques qui sont à la base des concepts mathématiques complexes tels le concept de limite.

« Les valeurs du tableau s'approchent toujours plus, donc il y aura bien le nombre auquel ils arrivent. » (Collège-II)

« Enseignant : selon vous, les valeurs continueront-elles à « sautiller » ainsi ?

Élève : Elles tendent ...à faire comme ça. Elles tendent à s'approcher de celle qui devait être la mesure. » (Collège-III)

Ferrari : Dans le procédé, on entrevoit une conclusion « en acte » possible dans une optique « limite »

« A1 : selon moi, il n'arrive jamais à zéro.

A2 : Oui, il y arrive.

A1 : Non, il n'y arrive pas : si tu divises toujours par 2, le dernier chiffre est toujours 5, jamais zéro. » (Collège-III)

Achille et la Tortue : Le traitement de l'activité a été fait en construisant aussi des tableaux sur lesquels les espaces parcourus par Achille et la distance d'Achille de la Tortue étaient représentés. L'analyse des tableaux a mis en évidence l'usage de termes qui font référence au concept de limite : par exemple, par leur tableau, les élèves se rendent compte que, une fois fixée une différence « petit », il existe une « étape » à partir de laquelle la différence entre Achille et la Tortue est plus petite de ce qu'il avait été fixé. Ils font aussi référence au concept d'infini, considéré comme « le responsable » des difficultés relevées dans ces problèmes-là.

« À partir d'un certain point, la différence peut être négligée. » (Collège-III)

« Dans la réalité, les différences peuvent être considérées comme nulles, même quand elles ne le sont pas. Par contre, au niveau théorique, nous devrons nous heurter contre cette augmentation de chiffres décimaux qui amène...à l'infini ![14]» (Collège-III)

« Le paradoxe de A et T est difficile car il cache l'infini ! »(Collège-III)

« Cette distance devenait de plus en plus petite, mais elle y était toujours... c'est vrai car l'écart se réduit toujours de la moitié et il n'arrive jamais à zéro, mais les distances deviennent très petites, même non-mesurables. » (Collège-I)

4. Un premier bilan

Comme on l'a déjà souligné, notre recherche expérimentale, qui concerne l'introduction précoce et « en verticale » de la pensée en termes d'approximation, que l'on considère être un élément-clé dans la construction du concept de limite n'est qu'à son début. Tout de même, quelques résultats non négligeables commencent à apparaître, comme le montrent, par exemple, les hypothèses d'approximation que font les élèves, même très jeunes. Et, par rapport au premier but de la recherche : « introduire très tôt le thème de l'approximation » (voir § 2) on a là une première réponse.

De même, en ce qui concerne le deuxième but : « développer les perceptions des limitations (même pratiques comme le sont les instruments de mesure dont on dispose en ce moment là) du milieu où l'on opère ».

Par contre, dans cas du troisième but : « étudier comment l'évolution des instruments (théoriques et pratiques) utilisables dans un contexte « plus riche en connaissances » peut opérer dans la construction de nouvelles connaissances », il faudra attendre la suite de l'expérimentation dans les classes de lycée, qui sera mise en place, comme on l'a dit plus tôt, au cours l'année scolaire 2005/06. Finalement, dans les réponses et commentaires des élèves auxquels les activités des projets « Zénon » et « Menon » ont été proposées, on retrouve aussi des traces de comportements du type métacognitif lorsqu'ils proposent de modifier les conditions posées par les problèmes pour se les approprier dans leur réalité.

Ces premiers résultats partiels nous offrent quand même la possibilité de comprendre sur quelles variables il faut intervenir de façon à rendre les activités

[14] Les élèves sont arrivés à cette conclusion après avoir fait des comptes sur les distances qu'on peut considérer nulles, sur la base des temps qu'on peut relever dans les concours sportifs.

plus efficaces du point de vue de leur exploitation didactique aussi dans un but de « continuité ». En effet, parmi les aspects qu'on a observés en travaillant avec les trois projets dans différentes classes, il faut souligner le fait qu'il y a eu des réactions et des observations communes à des élèves de niveaux scolaires différents. Nous nous sommes donc demandés quels résultats on aurait obtenus si on avait proposé les activités à des mêmes classes au cours d'années successives de leur parcours scolaire. Cet aspect aussi sera une des conditions à vérifier à partir de la prochaine année scolaire.

Le parcours qu'on a initié est certainement long et, d'un certain point de vue, ambitieux, mais on est convaincu que pour construire un concept aussi complexe et, en même temps aussi important, que celui de la limite, il faut une structuration « dynamique » qui permet de s'approcher du concept, en faisant continuellement appel aux connaissances contingentes des élèves. Le prix à payer, si l'on veut mener une telle recherche, est celui d'avoir toujours des résultats partiels à montrer, qui deviennent peut-être définitifs … à la limite.

Bibliographie

ALBERTI N., ANDRIANI M. F., BEDULLI M., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MARCHINI C., MOLINARI F., PEZZI F., RIZZA A., VALENTI C. (2000) Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite, *Riv. Mat. Univ. Parma*, **(6) 3***, 1-21.

ANDRIANI M.F., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MAFFINI, A., MARCHINI C., RIZZA A., VANNUCCI V. (2005) *Oltre ogni limite: percorsi didattici per insegnanti spericolati*, Pitagora Editrice, Bologna.

ARTIGUE M. (1998) L'évolution des problématique en didactique de l'analyse, *RDM,* **18 (2)**, 231-262.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2000) Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie, *Quaderni di ricerca didattica del GRIM,* Palermo, **9**, 125-133.

CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) (1995) *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, Edizione italiana a cura di L.

CORNU B. (1991) Limit, *Advanced Mathematical Thinking,* D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publisher, 153-166.

DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A. et al. (2000) A cognitive co-operation across different sectors of education, en Ahmed, Kraemer,

WILLIAMS (eds.) *Proceedings of CIEAEM 51*, Chichester, Horwood Publishing, 297-303.

DAUMAS D. (1990) *Sur la démonstration de l'irrationalité chez les grecs, en La démonstration mathématique dans l'Histoire*, in Actes du 7e Colloque Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques, Besançon, mai 1989, 389-423.

DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical thinking, 95-126*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Sciences Cognitives et Didactique,* **5**.

ERNEST P. (1989) The impact of beliefs on teaching. In Ernest P., *Mathematics Teaching: The state of the Art*, Falmer press, London.

FALCADE, R., RIZZA A. (2003) Approche intuitive du concept de limite, *Comptes rendus du colloque « Regards et perspectives sur l'enseignement de l'Analyse »*, Mulhouse, mars 2002 et *L'educazione Matematica* anno XXIV-serie VII-Vol.**1**, 15-37.

GRUGNETTI L., VILLANI V. (trad. S. GREGORI) (1999) *La matematica dalla scuola materna alla maturità*, Pitagora, Bologna.

GRUGNETTI L. (2004) Acquis et applications de la didactique des mathématiques, du point de vue des élèves, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **9**, 45-59.

GRUGNETTI L., RIZZA A. (2004) A lengthy process for the establishment of the concept of limit, in *Proceedings of the Third Conference of the European Society for research in Mathematics Education* CERME 3, 28 February-3 March 2003, Bellaria, Italia.

KAHANE J-P. (Sous la direction de) (2002) *Enseignement des sciences mathématiques*, (Rapport au ministre de L'Education nationale), Editions Odile Jacob, Paris.

RODITI E. (2005) *les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*, L'Harmattan.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics,* **22**, Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1-36.

SIERPINSKA A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble, **6(1)**, 5-67.

TALL D., VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

TALL D. (1996) Functions and Calculus, in A. J. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Research in Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, 289-325.

THOMPSON A.G. (1992) Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research, in Graws D., *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*, Macmillan Publishing Company, New York.

ZAN R. (2001) Metacognizione e difficoltà in matematica, *La matematica e la sua didattica,* **2**, 174-212.

ZAN R. (2002) Verso una teoria per le difficoltà in matematica, *Seminario Nazionale Italiano di Didattica della Matematica 2002*, Pisa.

ZAN R. (2003) Formazione insegnanti e ricerca in didattica, *La matematica e la sua didattica*, 4-2003, Bologna, Pitagora.

LUCIA GRUGNETTI
lucia.grugnetti@unipr.it

ACHILLE MAFFINI
a.maffini@inwind.it

CARLO MARCHINI
carlo.marchini@unipr.it

FERNANDO HITT

STUDENTS' FUNCTIONAL REPRESENTATIONS AND CONCEPTIONS IN THE CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL CONCEPTS. AN EXAMPLE: THE CONCEPT OF LIMIT

Abstract. The role of mental representations and imagery has been studied for several years in order to explain the processes of constructing concepts and to elucidate the mathematical abilities of students. Searching for new ways for the construction of mathematical concepts and problem solving strategies, the Working group on Representations and Mathematics Visualization of PME-NA, 1998-2002 (see Hitt, 2002) highlighted the importance of semiotic representations while building mathematical concepts, giving a new dimension to research work in mathematics education. Taking into account previous research done by Duval (1993, 1995, 1999) on constructing mathematical concepts, we focused on students' conceptions and on the role of the functional representations (spontaneous representations) used by the students in order to build a mathematical concept. We found that the representations used by the students when constructing a mathematical concept play a significant role and that they are part of their conception. These functional representations are of a kind usually not found nor used by mathematics teachers.

Résumé. Représentations fonctionnelles et conceptions dans la construction de concepts mathématiques. Un exemple : Le concept de la limite.
Le rôle des représentations mentales et leur manipulation a été étudié pendant plusieurs années pour expliquer les processus de construction des concepts et pour comprendre les capacités mathématiques des étudiants. Recherchant de nouvelles voies sur la construction des concepts et des stratégies mathématiques sur la résolution des problèmes, le groupe de travail « Representations and mathematics visualization » du PME-NA, 1998-2002 (voir Hitt, 2002) a mis en valeur l'importance des représentations sémiotiques sur les constructions des concepts mathématiques, donnant une nouvelle dimension de travail de recherches dans la didactique des mathématiques. Tenant compte de la recherche précédente faite par Duval (1993, 1995, 1999) sur la construction des concepts mathématiques, nous nous sommes concentrés sur les conceptions des étudiants et sur le rôle des représentations fonctionnelles (représentations spontanées) employées par les étudiants afin de construire un concept mathématique. Nous avons constaté que ces représentations employées par les étudiants en construisant un concept jouent un rôle significatif et sont une partie de leur conception. Ces représentations fonctionnelles sont un genre de représentations qui diffèrent habituellement de ceux que nous trouvons dans les manuels, ou ceux qu'utilisent les professeurs dans la classe de mathématiques.

Mots-clés. Représentations fonctionnelles, conceptions et registres sémiotiques.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11 p. 251 – 267.

1. Introduction

What we present here has to do with spontaneous semiotic representations, registers of representations, and construction of mathematical concepts. Our research work stresses the functional character of the representations in order to understand their role in the process of learning. Hence, we direct our attention to the whole of the semiotic representations produced by students; for instance, we focus on the building of the concept of limit.

Going back to the 1960's, we find a kind of a psychological approach to this theme. For example, Guilford (1967) in his book "The nature of human intelligence", used a questionnaire to detect 120 abilities in humans and came up with his three-dimensional model. He was aware of isolating abilities and trying to find correlations among them. In the 1970's, different approaches in mathematics education to explain mathematics abilities in schoolchildren appeared. Krutetskii (1976), for instance, documented performances of the school children when facing mathematical problems, related to "inspiration" or "insight" (Idem, p. 156) and mental processes (Idem, p. 309). Little by little, the mental representation became a subject of study in mathematics education.

In the 1980's, a new approach, in mathematics education surfaced; Tall and Vinner (1981, p. 151), Vinner (1983, 1994) and Tall (1991) give certain precisions to clarify the mental representations. For example, Tall (Idem) gives the definition of concept image:

> "We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concepts, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures…" *(Tall, 1991, p. 7)*

This approach is based on the importance of what students think about one concept and on a general idea about the problems the students might experience in the construction of mathematical objects, but that approach seems to be too broad and does not provide enough information about the construction of concepts. A few years later, the need for taking into account the mental representations was emphasized, both in mathematics education and psychology (see for example, Richard, 1990/1998).

Duroux (cited by Brousseau, 1997, 99-100) related to conceptions and epistemological obstacle, writes:

a) An obstacle is a piece of knowledge or a conception, not a difficulty or a lack of knowledge;

b) This piece of knowledge produces responses which are appropriate within a particular, frequently experienced, context;

c) But it generates false responses outside this context. A correct, universal response requires a notably different point of view;

d) Finally, this piece of knowledge withstands both occasional contradictions and the establishment of a better piece of knowledge. Possession of a better piece of knowledge is not sufficient for the preceding one to disappear (this distinguishes between the overcoming of obstacles and Piaget's adaptation). It is therefore essential to identify it and to incorporate its rejection into the new piece of knowledge;

e) After its inaccuracy has been recognized, it continues to crop up in an untimely, persistent way.

From that point of view, with specific activities, we can detect some epistemological obstacles students' have, and to develop some activities to promote contradictions in students performances and a reflection about their productions to overcome the obstacle. The question is how students have built an obstacle? An approximation to answer this question is to analyse the evolution of a concept in history of mathematics.

Balacheff et Gaudin's (2002, p. 6) approach about conceptions is as follows:

"We call conception C a quadruplet (P, R, L, Σ) in which:

- P is a set of problems;
- R is a set of operators;
- L is a representation system;
- Σ is a control structure.

The question of the concrete characterisation of *the set P of problems* is complex. One option would be to consider all the problems for which the considered conception provides efficient tools to elaborate a solution [Vergnaud approach, 1991]… Another option could consist of considering a finite set of problems with the idea that other problems will derive from them [Brousseau approach, 1997]… we propose to adopt a pragmatic position, deriving the description of P, in an empirical way, from the characterization of situations allowing to diagnose students' conceptions.
…*The set R of operators* is more classical. Operators are means to obtain an evolution of the relation between the subject and the milieu; they are the tools for action…
…*The representation system L* consists of a repertory of structured set of signifiers, of a linguistic nature or not, used at the interface between the subject and the milieu, supporting action and feedback, operations and

> decisions. Just to mention a few examples: algebraic language, geometrical drawing, natural language, but also interfaces of mathematical software and calculators are all examples of representation systems.
> …*The control structure Σ*, is constituted by all the means needed in order to make choices, to take decisions, as well as to express judgement. (p. 6-7)

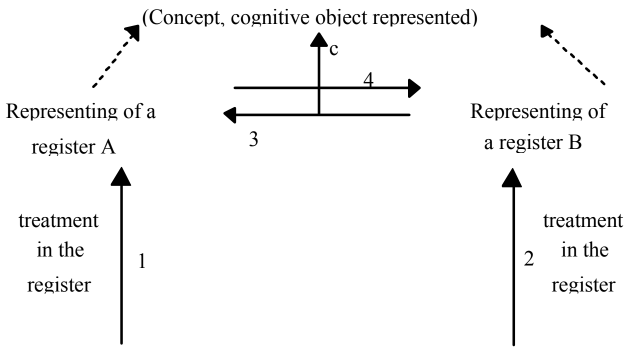
To illustrate their theoretical approach, Balacheff and Gaudin showed some activities with Cabri and used their framework to characterize students' conceptions. From this point of view, implicitly, they are taking into account the institutional representations (Cabri environment) in the constructions of conceptions; as a consequence, in that environment there is little place to understand students' representations and, the students are induced to use the representations that the software allows. We will return to this problem in what follows.

During the 1990's and after the publication of the book "Problems of representation in the teaching and learning of mathematics" (edited by Claude Janvier, 1987), a new approach related to the role of representations in the learning of mathematics appeared. Researchers paid attention to the role of the semiotic representations in building of mathematical concepts taking into account specific activities and reflecting on specific knowledge. For example, Duval (1988, 1993) was interested in the difficulties students have when passing from one representation to another. He found that it is important to clarify the difficulties students encounter when moving from one representation to another and he analysed thoroughly what a representation represents. This led him to introduce the notion of *visual variable*. For instance, in case of a linear function, the question asked is what visual variables we need to consider in order to construct an algebraic representation of a linear function from a geometric representation. He found that there are 18 variables, in general, to associate a graph of a linear function with an algebraic expression. In 1993, Duval gave specific details about the construction of concepts, stressing the fact that a mathematical representation only partially represents the mathematical object in question, and taking into account the main activity of conversion between representations he introduced a new notion, that of register:

A semiotic system may be a representational register if it allows for three cognitive activities associated to semiotics:

1) The presence of an identifiable representation…;
2) The treatment of a representation, which is the transformation of a representation within the same register where it was formed…;

3) The conversion of a representation which is the transformation of the representation into a different register which preserves the totality or part of the meaning of the initial representation…



(Duval, 1993, p. 41).

From this theoretical approach, the analysis of errors focuses on students' performances when converting from one representation to another. When a student is articulating several representations of an object, the student is indeed constructing the mathematical concept. Then, for Duval, the concept is the mathematical idea of an official form of knowledge, shared in an academic community.

Thus, from Duval's point of view, we can explain the existence of some students' errors in terms of a lack of coordination among representations. Implicitly, Duval deals with institutional representations and using them in some activities we can detect the kind of errors students produce when converting from one representation to another.

2. Functional representations and conceptions

The question that arises from this view could be formulated as follows: How do the institutional representations used in the classroom influence students in their knowledge acquisition? And, if the students have not constructed a mathematical concept accepted by the academic community, what kind of knowledge have they constructed?

On one hand, we defined functional representations, as the spontaneous representations that a student uses in a mathematical situation. On the other hand, we named institutional representations, the representations found in books or on computer screens, or those used by teachers when explaining to students on the blackboard.

In this work, a conception is a personal knowledge, constructed by an individual, personally or social in interaction that is not equivalent to the institutionalized knowledge. It is possible to detect a conception of a person trough the spontaneous representations a person uses when solving a mathematical task. Thus, a conception could be:

- an epistemological obstacle;
- a partial construction of a concept, coherent construction of some representations and their conversion from one representation to another;
- partial construction of a concept that works in certain contexts and not in others, but not necessarily represents an epistemological obstacle;
- coherent blend of functional representations.

In this document, we are interested in the last two characterisations; the first two are well described in literature. To characterize the fourth cognitive construction, we need a more elaborated approach and we will do so in the next section. To illustrate the third kind of construction, I would like to show the following example that results from our research in connection with an interview carried out with a high school teacher. We asked her to give us the definition of the derivative of a function. She relied on writing a classical definition as follow:

Teacher said: *"A function f is differentiable at one point 'x' if the limit* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *exists."*

She was asked to explain her definition and, at the blackboard, she draw a graph:

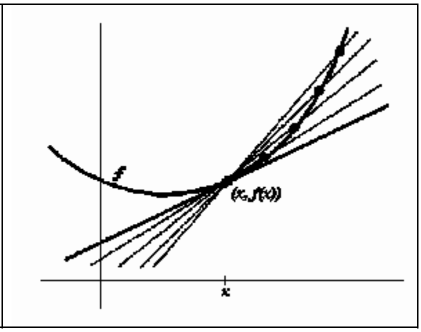


Figure 1: Student's (high school teacher) definition of differentiability.

We can see that she gave us an algebraic and a graphic representation usually found in textbooks. From this point of view, is not easy to know which kind of knowing she has constructed related to the concept of differentiability. Then, to elucidate about her cognitive construction, she was given the following task:

Given $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & if \quad x\le 0\\ (x-1)^2 & if \quad x>0\end{cases}$; is the function differentiable at x = 0?

She drew the followings graphs:

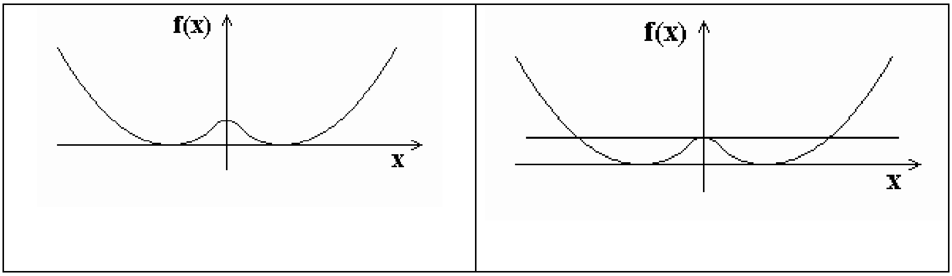


Figure 2: Student's geometrical answer to the above question.

Then, she said that *"...the function is differentiable at x = 0."* She was asked to take her response as a conjecture to give an algebraic answer. Her answer was:

$$\text{“}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h-1)^2-(0+1)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}(h-2)=-2\text{”}$$

As one can see, the teacher took h as positive. The interviewer asked her about the values of h in her definition and she said: "***h is positive***".

Here we can observe her spontaneous representations and can deduct what kind of conception she has constructed; that is, in her definition of differentiable function and in her graphic representation, **h is positive**; a conception that was probably generated by the interaction with the institutional representations of the concept of differentiability of a function used in her process of learning.

At this moment, the interviewer asked her to analyze her graphical answer and her algebraic process to give a definitive answer. She realised that she was in a contradictory situation. Finally she gave the right answer.

Following this approach, the question remains, how do students construct concepts?

We would like to reflect on this point, and look closely at the spontaneous representations students produce in the construction of mathematical concepts.

3. Methodology of our experimentation

In our research project, we designed several activities to be used in a collaborative (Davison, 1998; Dillenbourg, 1999) and scientific debate learning environment (Alibert and Thomas, 1991; Legrand, 2001) and self-reflection (Hadamard, 1975) (reconstruction of the activity as an individual task at home). In our teaching experiment, we used this methodology as a tool for improving the ideas of participants and for transforming false intuitions into consistent knowledge. The participants included twenty-one students (high school teachers) taking a course in a master's degree program in mathematics education. Twenty-two activities were designed (see Hitt & Páez, 2004). The preliminary activities, about finite and infinite processes, drew out participants' intuitive ideas about potential infinity and, in a second phase, activities promoted a conflict between their ideas about potential infinity and actual infinity. Conceptualizing actual infinity was necessary to solve certain mathematical problems related to limits of sequences and series (some convergent and some not).

In the first phase of our research, we used a diagnostic questionnaire about functions, limits and infinity and based on the results of the questionnaire, we constituted small working groups for the entire course. We would like to describe some characteristics of some students during the course.

With the results of the diagnostic questionnaire (13 questions) and the academic profile of each student, we made a classification. We give a sample of answers from some of the students to one question (see Table 1).

Diagnostic questionnaire: Example of classification with one question

Fictitious names	***Question: What is the meaning of*** $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ***?***	***Classification***
Juan	*As we approach arbitrarily on a horizontal axes, from left and right a value* $x = a$ *belonging (or not) to domain of a function f(x), the value of the image is approaching a fixed limit L, which belongs or not to the image set of the function.*	*Intuitive*
Lidia	*That means that* $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \ni$ $\lvert x - a \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a) \rvert < \varepsilon$ *or* $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	*Formalist (she gave a definition of continuity)*
Victor	*That means that the value of the function* f *is approaching "L" as we are taking numbers "x" very near to "a", that is: as "x" becomes closer to "a" (by the left and right), then* f *will be closer to "L".*	*Intuitive*
Adrian	*In a neighbourhood of the point "a" (as close as we wish) the function is approaching the value L, and as we approach the point 'a' we can approach as close as we wish the point L.*	*Intuitive*
Pedro	*That means that for every* $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \mid\ \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \delta$.	*Formalist and contradictory*

Table 1: Diagnostic questionnaire: Example of classification with one question.

We decided to put together an intuitive person with a formalist and a third one who made contradictory statements in some parts of the questionnaire. Before this course, students had constructed some conceptions (personal constructs) that are not the social knowledge recognized by university professors. In this regard, we paid special attention to the representations students used when solving a mathematical problem in their learning process.

In general, in our teaching method, we tried to generate a cognitive conflict in case the concept of limit was not constructed coherently. That is, when designing the activities, we tried to construct or to use activities already tested in other experiments, to generate a cognitive conflict in case the concept of limit was not constructed coherently. We took into account this point of view, and also the role of semiotic representations, within a co-operative learning and scientific debate and self-reflection activity. Activities in the class were designed to follow this trend (see Hitt 2003; Hitt & Paez 2004 and Hitt & Borbon, 2004).

In this work, our attention focused on how students constructed the concept of limit. Hence, our discussion will also put emphasis on this aspect.

4. Work in groups, scientific debate and individual work

After the third session, students were asked to write a definition of limit as part of their individual work. Victor wrote: "For me, the expression $\lim_{x\to a} f(x) = L$ means that the value of the function f is approaching as close as you wish a value '*L*' taking values closer to 'a'. This means L is a value that NEVER is reached, but we are very near to it, as near as our mind can imagine. In a practical way, the value '*L*' represents an ideal, something we would like to reach if there were 'a last' value…"

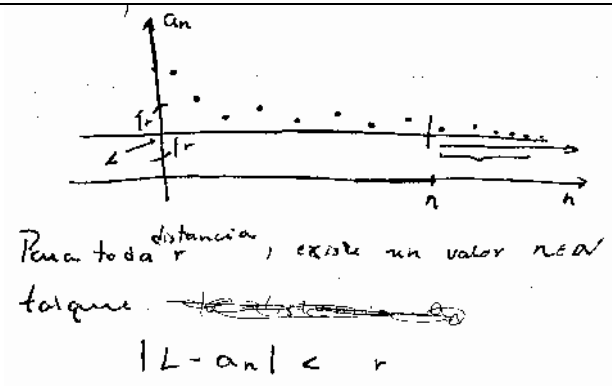
If we compare the two definitions, the initial answer in the diagnostic questionnaire see Table 1) and this one, we can observe that Victor's intuitive idea has changed, i.e., the idea of "approaching" has changed to "approaching as close as you wish".

Later on, during the study, students discussed how to construct a definition of a convergent sequence making use of the absolute value (neighbourhood). One of the students suggested that if we have convergence we must have this property $|L - a_{n-1}| > |L - a_n|$ for all n; somebody trying to construct a counter example proposed the following:

$$3, 2, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \ldots$$

At this moment, the professor asked the students to work again in groups, in order to construct a definition. At this occasion, we recorded on tape Victor and Pablo´s work (the third student in that group abandoned the course). Because Victor was playing the role of the leader of the group, he tried to explain to Pablo his proposition for a definition of $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Victor's explanation to Pablo is showed in Figure 3.

"We consider a sequence ***a_n****, and its limit* ***L****, we can put some points here but not necessarily those which we usually draw, but as the last example [given by Mario] that is going down, and some times could be a bit further, but approaching to that number [L], we must begin to say it as 'Adrian' did [about a neighbourhood]. For every* ***r*** *or every distance* ***r*** *there exists a number around here [pointing to his graph] and here in this case, from this number [n] all the numbers that we obtain comparing to the distance with* ***L****, that distance is smaller than* ***r****.*



For all r [distance], exists a value $n \in \mathrm{N}$ *such that* ~~*the distance = a_n*~~ $|L-a_n|<r$

Figure 3: Representations produced by Victor in a peer interaction.

Comparing this definition to the others previously given by Victor, we can appreciate an important cognitive change in his intuitive idea at the beginning of the course and what he expressed in Figure 7. A careful analysis of Victor's oral and written explanations to Pablo suggests that he had a coherent definition in mind, i.e. Victor expressed his conception of convergence using different representations (see Figure 4).

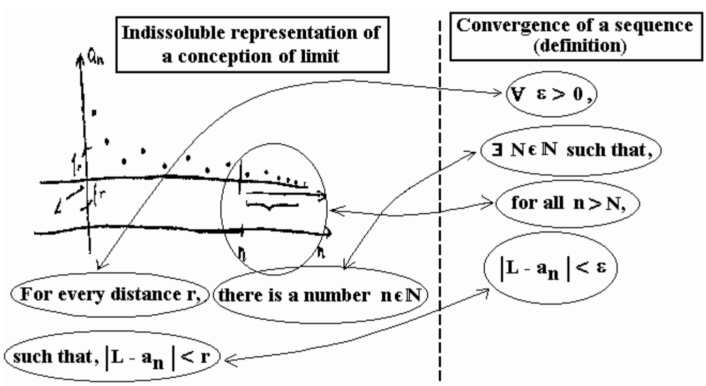


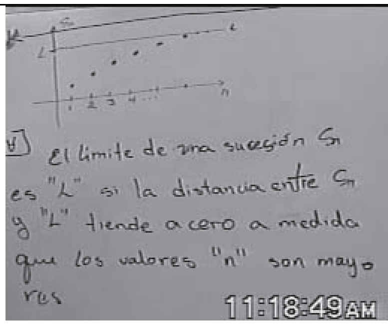
Figure 4: Interpretation of Victor's representations.

With this, we would like to highlight four aspects:

- Victor's ideas emerged in a scientific debate (socio constructivist environment) and in a discussion in his small group;
- Victor's conception evolved and this can be observed throughout his functional representations that played an important role when communicating his ideas to Pablo and in their construction of the concept of limit;
- Victor's functional representations are different from what we find in books or similar sources;
- Victor has constructed a coherent blend of functional representations.

5. How stable is Victor's construction of the concept of limit?

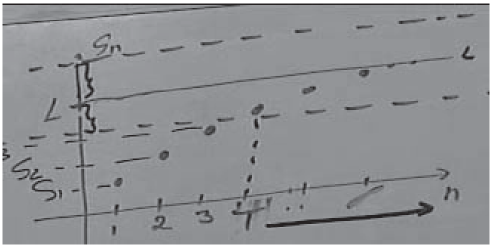
We continued with the teaching experiment and at the end of the course we interviewed all the students. Because we wanted to know whether the students' construction of the concept of limit was stable, we asked them, anew, for a definition. What is interesting here is that Victor begun again with an intuitive idea of limit expressing it in terms of natural language and a graph (see Figure 5).

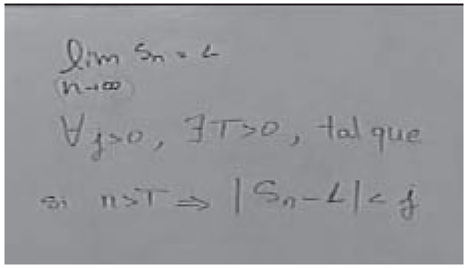


"The limit of a sequence s_n is "L" if the distance between s_n and "L" tend to zero when the values for 'n' are big."

Figure 5: Victor's verbal definition one month an a half later.

Immediately, he passed to the formal definition beginning with a graphic representation before giving the formal definition (see Figure 6).





$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$ $\quad\forall\, j>0, \exists\, T>0,$ ***such that if*** $n>T \;\Rightarrow\; |S_n - L| < j$

Figure 6: Victor's formal definition.

Victor used another notation "(j, T)" instead of the more standard notation "(ε, δ)".

We could have stopped here like many researchers when interviewing students, but we thought that to show stability of knowledge, when interviewing students, it was important to present the problem from different perspectives. Therefore, to verify the stability of Victor's cognitive construction, we asked Victor for the negation of the definition and also to give us an example, using the negation, of a divergent sequence.

The reason why we asked this was that we believe that in the construction of mathematical concepts negation and counterexamples play a major role in the construction of mathematical concepts.

Let us elaborate a little bit on this issue. Since the publication of Lakatos (1976) on *"Proofs and refutations",* a lot of work has been done in connection with this important issue (see for example la preuve: http://www.lettredelapreuve.it/). Some authors like Selden and Selden (1998) consider that "Since success in mathematics, especially at the advanced undergraduate and graduate levels appears to be associated with the ability to generate examples and counterexamples, what is the best way to develop this ability?" They think that it is important to ask students to generate examples; however, we also believe, that it is important to produce conjectures and if necessary, to generate counter examples. Indeed, if we analyze the beginnings of mathematics as a deductive science based on axioms and theorems, the principle of the third exclude and proofs by contradiction are in the genesis of mathematics. If we analyze the history of mathematical ideas, we can verify immediately that the productions of conjectures and counterexamples are key components of the mathematical activity. Based on the above, we asked Victor to write down the negation of his definition and to give us un example of a divergent sequence.

Victor wrote the following:

$$\exists\, j > 0 \text{ such that } \forall\, T > 0, \text{ if } n > T \text{ then } |S_n - L| > j$$

What is interesting here is that he was not sure about his statement and he begun to construct an example of a divergent sequence and to analyze his statement from that point of view. Then, he constructed the following divergent sequence: $s_1=1$, $s_2=0$, $s_3=1$, $s_4=0, \ldots$ (see Figure 7).

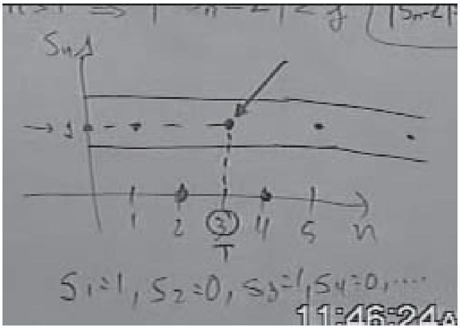


Figure 7: Victor's example of a divergent sequence.

After giving this example, he said that something was wrong with the negation of the definition: "I cannot find where the problem is". The interviewer asked him to pay attention to the quantifiers in the negation he provided and to verify his proposition following the example. It was at that moment that Victor realised that in his definition of divergence a quantifier was missing, he then wrote:

$$\exists\, j > 0 \text{ such that } \forall\, T > 0, \ \exists\, n > T \text{ then } |S_n - L| > j\,.$$

6. Discussion

We wanted to show that our approach focused on the functionality of representations to understand the conceptions of the students in the process of constructing concepts. We presented two examples, one to show how institutional representations influence the building of certain conceptions; the other one was chosen to show how a conception evolves throughout a teaching experiment. In Hitt (2003) we presented several examples about the conceptions that some high school teachers have, related to the same teaching experiment. We showed among others a discussion among the same group of teachers when one of them was proposing to change the notation of convergence $\underset{n\to\infty}{Lim}\, a_n \to L$ instead of the institutional one $\lim_{n \to \infty} a_n = L$. The fuctional representation the student (high school teacher) exhibit comes from the intuitive idea of infinity (potential infinity) and the discussion of that idea came up several times during the debate discussions because there were not a consensus to use that notation. From this study and in order to understand their conceptions, we think we need to look closely to those functional representations students come up with when solving a mathematical task.

Our method has worked out with almost all students like with Victor in a socio-construction of a concept. But it was not the case with others like Pedro. In the interview Pedro showed inconsistencies about analysing convergent and also divergent ones.

Our reflection is that Victor´s background in mathematics and informatics might have been a crucial factor that influenced his approach to construct concepts by taking into account several representations and constructing an articulation among them. Pedro's background was in mathematics, but he showed a tendency to memorize definitions and proofs. When asked to work in-group, usually Pedro always tried to solve the task without discussing with his peer students. We think that the methodology doesn't work in Pedro's case. It seems he likes to work alone and it was difficult for him to communicate with his peer students. His approach was always formal and it seems that he can often achieve good performance when dealing with routines problems.

We think we need to teach in a way that permits to extend students' functional representations and try not to impose the institutional ones before time. We propose a model (see Hitt & Paez, 2004; Hitt & Borbon, 2004) where it is important to take into account functional representations in the construction of a concept using a methodology we named ACODESA (collaborative learning and scientific debate environment and self reflection). With this methodology, throughout an evolution of students' conceptions, we are trying to promote conciliation among functional representations students have with the institutional representations we use when teaching.

Bibliographie

ALIBERT D. & THOMAS M. (1991) Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 215-230, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BALACHEFF N. & GAUDIN N. (2002) Students conceptions: an introduction to a formal characterization, *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, **65**, Décembre, 1-21.

BROUSSEAU G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrech.

DAVIDSON N. (1998) *L'apprentissage coopératif et en collaboration. Une tentative d'unification*, en J. Thousand, R. Villa, et Nevin A. (Eds.), La créativité et l'apprentissage coopératif, 63-101, Les Éditions Logiques, Québec.

DILLENBOURG P. (1999) *What do you mean by collaborative learning?* in P. Dillenbourg (Ed.), Collaborative Learning: Cognitive and Computational Approaches, 1-19, Elsevier Science/Pergamon, Amsterdam.

DUVAL R. (1988) Graphiques et équations : l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **1**, 235-253.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37-65.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

DUVAL R. (1999) Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning, *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hitt F. & Santos M. Editors), Mexico, **I**, 3-26.

GUILFORD J.P. (1967) *The nature of human intelligence*, McGraw-Hill, New York.

HADAMARD J. (1975) *Essai sur la psychologie de l'invention dans les domaines mathématiques*, Gauthier-Villards, Paris.

HITT F., Éditeur (2002) *Representations and Mathematics Visualization*, International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN, México.

HITT F. (2003) Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 255-271.

HITT F. & BORBON A. (2004) Teachers' conceptions related to differential calculus' concepts, Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Meeting of PMENA, 2004, Toronto, Canada, 143-150.

HITT F. & PÀEZ R. (2004) On the limit concept in a cooperative learning environment: A case study. Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Meeting of PMENA, 2004, Toronto, Canada, 103-110.

JANVIER C., Éditeur (1987) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, London.

KRUTETSKII V.A. (1976) The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren, The University of Chicago Press.

LAKATOS I. (1976) *Proofs and refutations*, Cambridge University Press, Cambridge.

LEGRAND M. (2001) Scientific debate in mathematics courses, In Derek Holton (Ed.) *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study,* 127-135, Kluwer Academic Publishers, Dordretch.

RICHARD J-F. (1990/1998) *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Deuxième édition, Armand Colin, Paris.

SELDEN A. & SELDEN J. (1998) The role of examples in learning mathematics, The Mathematical Association of America Online, http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html

TALL D. (1991) (Ed.) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 4-20, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

TALL D. ET VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, **10(2.3)**, 133-169.

VINNER S. (1983) Concept Definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* **14(3)**, 293-305.

VINNER S. (1994) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 65-81, Kluwer Academic Publisher.

FERNANDO HITT
Département de Mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case Postale 8888, Succursale Centre Ville,
Montéal, Québec, H3C 3P8
e-mail : hitt.fernando@uqam.ca

MICHELE ARTIGUE

APPRENDRE LES MATHEMATIQUES AU NIVEAU UNIVERSITAIRE : CE QUE LES RECHERCHES RECENTES NOUS APPRENNENT DANS CE DOMAINE

Abstract. Learning mathematics at University level: some new insights offered by educational research.
In this text, I first evoke discussions developed in the educational community about the specificity of mathematical learning at university level or about the nature of avanced mathematical thinking. Then, to reflect on what is offered by recent didactic research carried out at university level, I focus on three dimensions which, in my opinion, evidence the potential offered by some evolutions in research approaches and interests for setting up more adequately the questions at stake, and for progressing in the knowledge of learning processes and of their . These are the followings :

- the increasing attention paid to flexibility in the study of learning processes;
- the evolution of research paradigms from constructivist approaches towards anthropological and socio-cultural approaches;
- the development of new domains for research, taking the example of research on the mathematical training of engineers.

Résumé. Dans cet exposé, après avoir évoqué un certain nombre de réflexions et débats concernant les spécificités de l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire et la nature d'une éventuelle pensée mathématique avancée, je me centre, pour étudier ce qu'apportent les recherches didactiques récentes à la question des apprentissages mathématiques à ce niveau, sur trois dimensions qui me semblent bien mettre en évidence les potentialités offertes par certaines évolutions des approches et travaux pour mieux poser ces questions et avancer dans la connaissance des processus d'apprentissage et de leurs déterminants. Ce sont respectivement :

- l'accent croissant porté aux flexibilités dans l'apprentissage ;
- le déplacement d'approches constructivistes à des approches anthropologiques et socio-culturelles ;
- le développement des recherches sur de nouveaux domaines ou d'autres secteurs de formation, en prenant l'exemple de la formation des ingénieurs.

Mots-clés. Mathématiques, apprentissage, pensée mathématique avancée, université, transition lycée-université, anthropologie didactique, flexibilité cognitive, formation d'ingénieurs.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 269 – 288.

Introduction

Apprentissage des mathématiques à l'université et pensée mathématique avancée

L'objet de ce colloque est l'apprentissage des mathématiques de l'enfance à l'âge adulte. Il peut paraître a priori étonnant que la première de ses conférences, chronologiquement, concerne les mathématiques universitaires, qui sont, à n'en pas douter, des mathématiques de l'âge adulte. A travers ce choix, les organisateurs ont-ils souhaité attirer notre attention, dès le début de ce colloque, sur le fait qu'il y a, dans les processus d'apprentissage des mathématiques, des régularités qui traversent les âges, et que la distance n'est pas si grande finalement entre l'apprentissage d'un enfant et celui d'un adulte ?
De nombreux chercheurs se sont penchés sur cette question, comme sur celle de savoir s'il existe des caractéristiques qui distingueraient une pensée mathématique avancée d'une pensée mathématique élémentaire. Elle était par exemple au cœur des travaux du working group Advanced Mathematical Thinking (AMT dans la suite) de PME[1], à la fin des années 80. Dans l'ouvrage issu de ces travaux, et portant le même titre, coordonné par D. Tall (1991), la question n'est pas véritablement tranchée. D. Tall, par exemple, sans définir précisément l'AMT, écrit dans le chapitre 1 de ce livre intitulé : *The psychology of advanced mathematical thinking* (p. 20) :

> « The move from elementary to advanced mathematical thinking involved a significant transition : that from *describing* to defining, from *convincing* to *proving* in a logical manner based on those definitions. This transition requires a cognitive reconstruction which is seen during the university students' initial struggle with formal abstractionsas they tackle the first year of university. It is the transition from the *coherence* of elementary mathematics to the *consequence* of advanced mathematics, based on abstract entities which the individual must construct through deductions and formal definitions. »

Une vision qu'il précisera par exemple dans sa conférence plénière à PME en 1995 (Tall, 1995) et qui a été souvent reprise depuis dans la littérature. T. Dreyfus, pour sa part, dans le chapitre suivant, intitulé : Advanced mathematical thinking processes, souligne qu'il n'est pas facile de caractériser l'AMT car on retrouve à tous les niveaux les mêmes processus : représenter, visualiser, généraliser, catégoriser, conjecturer, déduire, analyser, synthétiser, abstraire et formaliser (p. 26) :

> « There is no sharp distinction between many of the processes of elementary and advanced mathematical thinking, even though advanced mathematics is more focussed on the abstractions of definition and deduction. Many of the processes to be considered in this chapter are present already in children thinking about elementary mathematics concepts, say

---

[1] PME : Psychology of Mathematics Education. PME est un des groupes affiliés à ICMI, la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique.

> number or place value. They are not exclusively used in advanced mathematics, nor, indeed, are they exclusively used in mathematics. Abstractions are made in physics, representations are used in psychology, analysis is used in economics and vizualisation in art. »

Selon lui, un trait qui peut permettre de distinguer la pensée mathématique avancée d'une pensée élémentaire est la complexité et la façon dont cette complexité est gérée (car, comme il le souligne, on peut penser de façon élémentaire à propos d'objets mathématiques avancés et de façon avancée à propos d'objets mathématiques simples). Ceci le conduit à accorder une attention toute particulière aux processus de représentation et d'abstraction :

> « The distinction is in how this complexity is managed. The powerful processes are those that allow one to do this, in particular abstracting and representing. By means of abstracting and representing, one can move from one level of detail to another and thus manage the complexity. »

Ce point de vue est à rapprocher, me semble-t-il, de celui développé dans l'article de A. Robert (1998) publié suite à un travail spécifique sur le thème de la didactique des mathématiques au niveau post-obligatoire à la 9ème École d'Été de Didactique en France. Elle souligne tout d'abord la complexité des mathématiques en jeu à ce niveau et les changements qui en résultent dans les pratiques attendues des élèves, sans cependant qu'aucune de ces pratiques ne soit entièrement nouvelle. Ces changements sont organisés autour de trois dimensions : démonstrations, connaissances et mises en fonctionnement, travail personnel, à chacune de celles-ci étant associés un certain nombre de descripteurs. De cette étude dérivent ensuite quatre dimensions d'analyse pour les contenus à enseigner qui serviront également de support à la construction de scénarios d'enseignement.

A partir de 1998, un groupe de travail du groupe PME-NA[2] intitulé : « The Role of Advanced Mathematical Thinking in Mathematics Education Reform » s'est lui aussi intéressé à ces questions, en relation avec l'établissement des nouveaux standards NCTM (2000), se demandant quelles sortes d'expériences pouvaient aider les élèves à la transition vers les formes d'AMT que l'enseignement post-secondaire exigeait souvent de ses étudiants. Les résultats de cette réflexion ont été récemment publiés dans un numéro spécial de la revue Mathematics Teaching and Learning coordonné par J. et A. Selden (2005), on retrouve la même dualité avec d'une part de nouveaux essais faits pour caractériser la pensée mathématique avancée en la situant par rapport à une pensée mathématique élémentaire, des essais qui ne me semblent pas conduire à des définitions très convaincantes, d'autre part l'accent mis sur la continuité qui est susceptible de traverser les pratiques mathématiques des premiers apprentissages à l'âge adulte et l'intérêt, du point de vue de l'action didactique, de penser en termes d'évolution et développement

---

[2] PME-NA est la branche nord-américaine de PME.

plutôt que d'opposition et de rupture. Ceci se reflète bien dans les titres de certaines des contributions : « Advanced Mathematical-Thinking at Any Age : Its Nature and Its Development » (Harel & Sowder, 2005) ou « Advancing Mathematical Activity : A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking » (Rasmussen, Zandieh, King, Teppo, 2005). Comme le précisent ces derniers auteurs, le choix des termes « advancing » et « activity » en lieu et place de « advanced » et « thinking » n'est en rien anodin :

> « We use the term *advancing* (versus *advanced*) because we emphazise the progression and evolution of students' reasoning in relation to their previous activity. We also use the term activity, rather than thinking. This shift in language reflects our characterization of progression in mathematical thinking as acts of participation in a variety of different socially and culturally situated mathematical practices. »

Je n'ai pas l'intention de m'engager ici dans un débat autour de la définition de l'AMT, même s'il me semble important de mentionner son existence, car je ne pense pas que ce soit aujourd'hui une question didactique essentielle. J'insisterai plutôt sur le fait que, dans cet exposé qui concerne l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire, il m'a semblé particulièrement important de ne pas limiter le regard à certaines formes d'apprentissage et de pensée, en fait celles qui nous sont, de par notre formation, de par nos tâches enseignantes ou de par nos pratiques mathématiques, les plus familières. Dit d'une autre façon, ce qui m'intéresse ici, c'est l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire, dans la multiplicité de ses facettes, qu'il s'adresse aux futurs mathématiciens ou à la grande majorité de ceux dont les rapports futurs aux mathématiques seront moins centraux, que les ambitions en soient l'accès à des mathématiques formelles ou plus largement la satisfaction des besoins mathématiques de tel ou tel secteur d'activité. Si l'on accepte de se situer dans cette perspective, alors les apprentissages universitaires, parce qu'ils ne visent plus seulement la formation d'une culture mathématique générale mais aussi la préparation de professionnels, parce qu'ils concernent des publics très différents mais qui, quel que soit leur bagage initial, doivent tous apprendre des mathématiques relativement sophistiquées, sont sans aucun doute des apprentissages particulièrement intéressants à étudier et questionner. Et l'on peut espérer que ce que nous apprendra cette étude, qui reste largement encore à mener, contribuera aussi à une meilleure connaissance des processus d'apprentissage possibles, à des niveaux plus élémentaires, ne serait-ce que pour ce qui concerne l'enseignement secondaire professionnel par exemple, objet de si peu d'attentions de la part des didacticiens jusqu'ici.

Les choix faits pour l'exposé : rendre compte d'évolutions relativement récentes et apparemment prometteuses

J'ai évoqué dans cette introduction le livre AMT paru en 1991. Mais ce qui a nourri cet exposé, outre mes travaux personnels plus récents et ceux des chercheurs qui me sont proches, c'est davantage le travail de synthèse que nous avons réalisé avec A. Schoenfeld en coordonnant la partie consacrée aux recherches de l'étude ICMI sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire (Holton, 2001), et plus encore celui que je viens d'achever en collaboration avec C. Batanero et P. Kent pour le nouveau Handbook coordonné par E. Silver pour le NCTM[3] qui devrait bientôt paraître.

Comme le montrent bien par exemple le livre AMT et les synthèses de recherches publiées dans l'ouvrage issu de l'étude ICMI citée ci-dessus (Artigue, 2001), (Dorier & Sierpinska, 2001), (Robert & Speer, 2001), les travaux sur l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire se sont longtemps centrés sur les enseignements de base des cursus universitaires que sont les enseignement d'Analyse ou Calculus et d'Algèbre linéaire, avec à l'esprit la formation des futurs mathématiciens et enseignants. Ils ont cherché à comprendre les difficultés rencontrées par les étudiants et, bien sûr aussi, à construire des stratégies d'enseignement susceptibles d'aider à les surmonter. Tout ceci s'est d'abord effectué en pointant le décalage entre la logique des constructions mathématiques achevées présentées aux étudiants et la logique de leur développement cognitif. Ceci a conduit à introduire un certain nombre de distinctions : distinction entre « concept définition » et « concept image » (Tall & Vinner, 1981), entre « processus » et « objet » (Dubinsky, 1991), entre « structurel » et « opérationnel » (Sfard, 1991), et à leur associer certaines hiérarchies cognitives comme la hiérarchie entre action, processus et objet à la base de l'APOS théorie (Dubinsly & Thomas, 2001) mais que l'on retrouve aussi, sous des formes voisines, dans les travaux initiaux de Tall et de Sfard (1991). Une autre des pistes suivies pour comprendre les difficultés a été celle des obstacles épistémologiques dont les travaux d'Anna Sierpinska (cf. (Sierpinska, 1994) pour une vision synthétique) constituent sans doute l'exemple le plus abouti. Ce qu'il me semble intéressant de souligner, c'est que, quels que soient les cadres théoriques qui leur ont servi de fondement, ces travaux, pour comprendre les difficultés résistantes rencontrées par les étudiants, ont d'abord mis l'accent sur les ruptures et les discontinuités de l'apprentissage. Ceci s'est aussi traduit dans les ingénieries didactiques élaborées pour faire progresser les étudiants, pensées d'abord en termes de conflits cognitifs qu'il s'agirait de mettre en scène pour

---

[3] Ce Handbook fait suite à une première version coordonnée par D.A. Grouws (Grouws, 1992).

pouvoir les dépasser, ou en termes de progression dans la hiérarchie action-processus-objet.

Ce ne sont pas les leçons que nous pouvons tirer de ces travaux maintenant bien connus que je voudrais discuter ici, ce qui ne veut pas dire que je reconnaisse pas tout ce qu'ils nous ont apporté, mais les apports de travaux plus récents. Même lorsqu'ils s'attaquent aux mêmes questions, ces derniers les approchent de façon renouvelée et, de plus, ils élargissent le champ d'action de la recherche à des domaines mathématiques ou des secteurs de formation jusqu'ici peu explorés. C'est en ce sens qu'ils me semblent particulièrement intéressants, nous obligeant à questionner des points de vue sur l'apprentissage qui se sont peut-être un peu trop rapidement constitués en évidences.

Dans le foisonnement des travaux qui pouvaient servir cet objectif, des choix s'imposaient et j'ai choisi d'évoquer successivement trois points :

- le dépassement des seules visions en termes de ruptures et de hiérarchies cognitives via l'accent croissant porté aux questions de flexibilité et de connections ;
- le nouveau regard sur les transitions institutionnelles permis par le déplacement des approches théoriques, des perspectives constructivistes à des perspectives socio-culturelles et anthropologiques ;
- et enfin les perspectives ouvertes par l'élargissement des recherches à de nouveaux domaines. J'ai choisi pour ce faire la formation des ingénieurs. J'aurais aussi pu prendre l'exemple des statistiques, particulièrement intéressant vu la place faite à ce domaine dans les formations où les mathématiques interviennent comme discipline de service et le foisonnement des travaux actuels pour lesquels je renvoie au chapitre (Artigue, Batanero, Kent, to appear) déjà cité ;
- j'aurais aussi aimé évoquer les travaux sur « l'embodied cognition » (Lakoff & Nuñez, 2000) qui, eux aussi, ont contribué ces dernières années à renouveler les perspectives sur l'apprentissage mais je me devais de faire des choix et j'ai pensé que David Tall ne manquerait pas d'évoquer cette perspective dans sa propre conférence.

1. L'accent croissant porté aux flexibilités dans l'apprentissage

Cet accent a permis, me semble-t-il, une vision plus équilibrée des rapports entre ce que l'on pourrait appeler une conceptualisation verticale, par abstraction, généralisation et insertion dans des structures et une conceptualisation horizontale par connections entre contextes, domaines, formes de représentation sémiotique. Il n'était pas absent des préoccupations didactiques et, pour ne citer qu'un exemple, il suffit de penser au rôle que jouent les jeux de cadres dans le cadre théorique développé par Régine Douady au début des années 80 et connu sous le nom de dialectique outil-objet et jeu de cadres (Douady, 1986)[4]. Les jeux de cadre y sont vus comme un moyen privilégié pour permettre la génération de connaissances nouvelles à partir de connaissances anciennes, le transport judicieux d'un problème posé dans un cadre dans un autre cadre mettant à la disposition des élèves, comme il le fait pour le mathématicien, des outils différents permettant d'avancer dans la résolution et d'atteindre des états a priori non directement accessibles dans le cadre initial.

Mais les questions de flexibilité ont pris, dans les quinze dernières années, une place croissante dans les recherches, soutenue d'une part par l'attention croissante portée à la dimension sémiotique des apprentissages mathématiques (cf. par exemple (Duval, 1995)), d'autre part, par une évolution technologique qui a introduit de nouvelles formes de représentation, permis de les mettre en relation de façon plus efficace, et qui de plus en plus nous incite à penser en termes de réseaux de connaissances (Hoyles & Noss, 2003).

On pourrait s'attendre à ce que j'illustre ce point en prenant des exemples dans le domaine des fonctions car la vision de l'apprentissage de ce concept a justement été influencée par cette double évolution. Mais, me situant au niveau universitaire, je préfère prendre un autre exemple, moins souvent considéré mais qui me semble tout particulièrement intéressant : celui de l'algèbre linéaire.

On a dans les débuts de la recherche en algèbre linéaire insisté sur l'abstraction des concepts, les problèmes posés par le formalisme, sur les problèmes aussi posés par des stratégies d'enseignement qui imposaient d'emblée aux étudiants, sans la motiver, la définition formelle d'une structure : celle d'espace vectoriel. Historiquement, on le sait, l'intérêt de celle-ci ne s'est pas imposée immédiatement aux mathématiciens, et les problèmes qui ont fini par assurer son acceptation, ceux liés aux développements de l'analyse fonctionnelle et des espaces de Banach, ne sont pas directement utilisables avec des étudiants débutants. Les difficultés qui en résultaient ont, à juste titre, mobilisé l'attention des chercheurs (cf. en particulier l'ouvrage coordonné par J.L. Dorier (2000)).

Mais l'algèbre linéaire est aussi un domaine où les difficultés d'apprentissage sont liées à la multiplicité des flexibilités en jeu. De ce point de vue, des recherches comme celles menées par A. Sierpinska et J. Hillel au Canada ou K. Pavlopoulou et M. Alves Dias en France rapportées dans (Dorier, 2000) sont tout particulièrement intéressantes.

[4] Une réflexion sur la notion de cadre, son usage par les didacticiens, ainsi que sur ses rapports avec des notions comme celle de registre sémiotique est développée dans les actes du colloque sur ce thème organisé à Paris en l'honneur de R. Douady en (Perrin-Glorian & Robert, 2001).

L'algèbre linéaire c'est en effet un mélange explosif de langages, cadres et systèmes de représentation : le langage géométrique des droites, plans et hyperplans, le langage algébrique des équations linéaires, des n-uplets et des matrices, le langage abstrait des espaces vectoriels et applications linéaires. Ce sont les représentations multiples de ses objets : représentations graphiques, tabulaires ou symboliques. C'est le jeu entre points de vue cartésien et paramétrique, algorithmisable en dimension finie et fonctionnant de façon plus métaphorique en dimension infinie. Et c'est la diversité des modes de raisonnement associés. A. Sierpinska, par exemple, identifie, en s'appuyant sur une analyse historique, trois modes de raisonnement : le « synthétique-géométrique » où les objets mathématiques sont en quelque sorte directement donnés à l'esprit qui essaie de les appréhender et les décrire, « l'analytique-arithmétique » où ils sont donnés indirectement par le biais de formules et équations qui rendent le calcul possible, « l'analytique-structurel » enfin où ils sont donnés indirectement aussi mais cette fois à travers un ensemble de propriétés qui les caractérisent. Et elle souligne que (p. 232) :

> « While these modes of thinking appeared in the history of mathematics in a sequential manner, it did not happen that one of them eliminated the other two. The development of algebra owes a lot to their constant interaction ; from the analytic geometry of Descartes to the geometric intuitions underlying the theory of Banach spaces. Indeed the story of linear algebra can be told so as to illustrate this continuous activity of change in perspective, done in the hope of gaining a better and deeper understanding of the domain. »

Mais ce que montre sa recherche, comme les autres citées, c'est la complexité des jeux associés à ces changements de perspectives et des jeux entre langage et représentations qui leur sont associés, et la difficulté pour les étudiants de développer la flexibilité nécessaire à leur maîtrise. C'est aussi la faible sensibilité des enseignants universitaires à cette complexité constitutive de la puissance de l'outil linéaire qu'ils maîtrisent parfaitement. Les observations faites montrent qu'ils sautent en permanence d'un langage ou d'un système de représentation à un autre, faisant jouer l'un pour contrôler ou interpréter le travail effectué dans un autre, et ceci sans précautions particulières comme si cela devait aller de soi. Or cela ne va pas de soi.

Tout autant que la progression dans des niveaux croissants d'abstraction, la progression dans la connexion entre contextes, cadres, registres sémiotiques … essentielle à l'apprentissage, est délicate et doit être organisée dans la durée par l'enseignement.

2. Le déplacement d'approches constructivistes à des approches anthropologiques et socio-culturelles

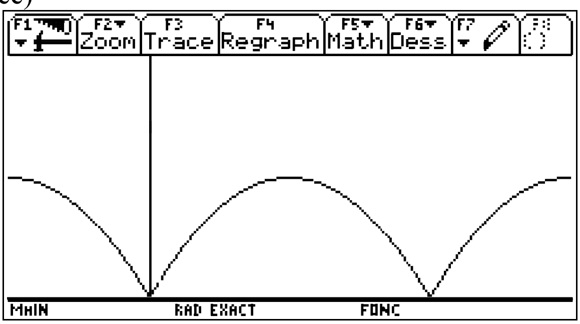
Ce déplacement s'est opéré à travers différentes constructions théoriques selon les cultures didactiques (Lermann & Sierpinska, 1996) mais ce que ces approches

partagent c'est le fait que les objets mathématiques y sont vus comme émergeant de pratiques humaines, ces pratiques étant des pratiques institutionnelles et socio-culturelles. Il s'ensuit logiquement que les rapports mathématiques que nous développons avec tel ou tel domaine sont façonnés par les pratiques des institutions où nous les rencontrons et les valeurs et normes que ces institutions leur associent. Dans une telle perspective, pour espérer comprendre les processus d'apprentissage individuels, il faut d'abord élucider les pratiques institutionnelles qui les façonnent. La complexité en quelque sorte est déplacée du sujet connaissant à l'institution. L'image souvent utilisée de la fourmi peut éclairer cette affirmation et le renversement de position qu'elle induit. Supposons que l'observation du déplacement d'une fourmi nous renvoie l'image d'un trajet complexe. Faut-il nécessairement rechercher la cause de cette complexité dans un fonctionnement cognitif supposé complexe de la fourmi ? Cette même complexité du trajet ne peut-elle résulter d'un fonctionnement cognitif relativement simple mais opérant dans un environnement qui serait, lui, complexe ?
Pour illustrer les potentialités ouvertes par ce changement de perspective, je prendrai un exemple, celui de la transition lycée-université. Cette transition est perçue de plus en plus comme problématique pour des raisons que je n'ai pas ici le temps d'analyser, renvoyant le lecteur à (Holton, 2001) par exemple puisque c'était une des questions qui ont motivé le lancement de cette étude ICMI. Les universitaires se lamentent de voir arriver des étudiants qui, selon eux, ne savent à peu près rien. Les approches socio-culturelles et anthropologiques nous amènent à voir cette transition comme une transition entre des cultures et à essayer d'évaluer la distance qui sépare ces cultures, à étudier ce qui est prévu par les institutions en présence pour aider les étudiants à apprécier cette distance et s'y adapter, et ce qui est laissé complètement à leur charge dans cette adaptation. Je prendrai, pour illustrer cette approche l'exemple de la thèse d'un de mes étudiants, F. Praslon (2000) consacrée à l'analyse et plus particulièrement à la notion de dérivée et à son environnement. L'analyse qu'il fait à l'aide de très nombreuses sources montre, contrairement à ce qui est souvent affirmé, que, d'une part, les connaissances attendues à la fin du lycée en France sur ce domaine, dans la filière scientifique S, constituent déjà un corpus important (cf. la visualisation proposée pages et de la thèse), d'autre part que la transition entre lycée et université n'est pas aujourd'hui la transition entre une analyse intuitive qui serait celle du lycée et une analyse formelle qui serait celle de l'université. La rupture n'est pas aussi radicale. En revanche, la grille d'analyse qu'il a élaborée lui permet de mettre en évidence une accumulation de micro-ruptures dont la conjonction induit un saut cognitif auquel les enseignants universitaires sont insuffisamment sensibles. Citons-en quelques unes :

- un renouvellement plus rapide des objets d'enseignement qui oblige à une assimilation plus rapide ;
- un éventail beaucoup plus large de tâches qui rend bien sûr la routinisation beaucoup plus difficile ;
- une autonomie plus grande dans la résolution : des exercices sur suites et fonctions par exemple qui avaient des analogues au lycée sont proposés mais avec une question intermédiaire ou sans question intermédiaire là où il y en avait au lycée 4 ou 5 ;
- un nouvel équilibre entre particulier et général qui donne une autre fonction au travail sur les énoncés : il ne suffit pas de mémoriser quelques énoncés pour pouvoir les invoquer dans des cas particuliers où tout marche bien, il faut aussi s'interroger sur la validité de tel ou tel énoncé et, pour cela, envisager au-delà des exemples familiers les situations moins banales qui peuvent les invalider ;
- des résultats démontrés plus systématiquement et des démonstrations qui fournissent des méthodes alors qu'au lycée leur rôle opératoire était très faible et qu'elles pouvaient être davantage vécues comme une cerise sur le gâteau, l'important étant le résultat lui-même, ce nouvel outil mis à la disposition des étudiants.

Et pour sensibiliser étudiants et enseignants à ces différences, il va construire un ensemble de tâches qui selon lui se situent, en ce qui concerne la notion de dérivée, dans un trou entre ces deux cultures : a priori accessibles mais extraordinaires au lycée, supposées maîtrisées à l'université. En voici un exemple :

On considère la fonction f d'une variable réelle périodique de période 1 définie par :
f(x)=x.(1-x) sur l'intervalle [0, 1[(une représentation graphique analogue à celle ci-après est donnée)



Q1 : On demande si cette fonction est continue, dérivable.

Q2 : On introduit la notion de dérivée symétrique et on demande de calculer les dérivées et dérivées symétriques si elles existent en ½, ¼ et 0 et de les comparer.
Q3 : On demande de statuer sur les trois conjectures suivantes :
- C1. Toute fonction paire définie sur IR admet une dérivée symétrique en 0.
- C2. Toute fonction paire définie sur IR admet une dérivée en 0.
- C3. Si une fonction définie sur IR admet une dérivée en a, elle admet aussi une dérivée symétrique en a et les deux sont égales.

Cette tâche ne nécessite a priori pas d'autres connaissances que celles du lycée pour être résolue et pourtant elle est clairement hors de la culture du lycée. On y définit par exemple une fonction par morceaux et il faut comprendre que l'expression algébrique donnée n'est valable que sur un intervalle. De telles fonctions ne sont que marginalement présentes au lycée. On pose des questions sur la continuité et la dérivabilité. Ces questions ne sont pas complètement nouvelles, surtout avec l'aide fournie par la représentation graphique, mais elles concernent au lycée presque toujours des fonctions définies par une formule unique, somme, produit, quotient ou composées simples de fonctions connues pour être continues ou dérivables. Les techniques à développer ici, si l'on veut gérer le problème de façon analytique et non graphique, ne sont pas de même nature. On introduit ensuite, avec la question Q2, une nouvelle notion, celle de dérivée symétrique par une définition formelle et il s'agit d'exploiter cette définition. Ceci aussi est non usuel, tout comme les trois conjectures générales qui sont soumises aux étudiants, même s'ils disposent, du fait des questions précédentes, des réponses à certaines d'entre elles.

Que font les étudiants interrogés à qui il propose ces tâches dans un test en début d'année universitaire ?
A la question Q1, un tiers environ des étudiants ne perçoit pas qu'il y a un problème : la fonction est définie par une expression polynomiale donc pour eux continue et dérivable, ou elle est continue et dérivable sur [0,1[pour cette même raison et par périodicité continue et dérivable sur IR tout entier ; un quart environ repère la non-dérivabilité en 0 et/ou en 1 et essaie de la justifier de façon algébrique ou graphique. La nécessité d'une étude locale est visiblement davantage perçue en 1 qu'en 0 et l'on peut sans doute relier ce phénomène au fait que, dans la définition de f donnée, l'intervalle est ouvert en 1 et non en 0. Cette marque symbolique est sans doute attachée pour eux aux cas où les choses ne vont pas de soi. Les arguments de ceux qui repèrent la non-dérivabilité sont du type : « f n'est pas dérivable en 0 car la courbe admet deux demi-tangentes distinctes (respectivement un point anguleux, un pic) », pour les justifications graphiques. Pour les justifications algébriques, les plus élaborées reposent en général sur l'argumentation suivante : f est dérivable si et seulement si f(0)=f(1) et f'(0)=f'(1), puis, en utilisant l'expression donnée f(x)=x(1-x), ils concluent que la seconde

condition n'est pas vérifiée puisque f'(x)=-2x+1. On constate de plus un cloisonnement des réponses suivant les registres utilisés : graphique ou algébrique.
La question Q2, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, montre que l'introduction formelle d'une nouvelle notion ne provoque que peu de blocages. Les calculs des dérivées et dérivées symétriques en 1/2 et 1/4 donnent respectivement 95% (dérivée) et 75% (dérivée symétrique) de réponses correctes, tandis qu'au point 0, l'existence et le calcul éventuel ne sont gérés correctement que dans 14% et 3% des cas respectivement. Les étudiants utilisent l'expression algébrique donnée pour f(x) pour mener les calculs et, même lorsque le résultat obtenu est en contradiction avec leur réponse à Q1, ils ne le repèrent pas.
Il y a peu de réponses à la question Q3 et ce n'est pas la fonction f qui est en général utilisée comme contre-exemple à C2 mais la fonction valeur absolue qui est l'une des fonctions de référence au lycée.
On le voit donc, les étudiants ne sont d'une part pas bloqués face à ces questions non usuelles mais ils sont très peu outillés pour les résoudre. Encore une fois, l'enseignement universitaire a du mal à prendre la mesure de cette distance et à aider les étudiants à la franchir. Des travaux comme ceux de V. Durand-Guerrier (cf. (Durand-Guerrier, 2005) pour une synthèse) montrent bien en particulier comment, au delà des seuls contenus conceptuels évoqués ici, les difficultés de nature logique qui se posent sont elles aussi insuffisamment prises en compte et, quand elles le sont, souvent de façon inappropriée.
Avant de passer au troisième point envisagé dans cet exposé, je voudrais souligner que la recherche de F. Praslon, évoquée ci-dessus, n'est pas la seule recherche à avoir utilisé l'approche anthropologique chevallardienne pour étudier les questions d'apprentissage des mathématiques à l'université ou à la transition lycée/université. C'est aussi le cas par exemple de la thèse récente d'A. Bergé (2004), soutenue à l'université de Buenos Aires. Dans cette thèse, A. Bergé se propose d'étudier comment se construit le rapport des étudiants à la notion de complétude au fil des études de mathématiques au sein de son université. Après un travail de nature historique et épistémologique lui permettant de préciser un cadre de référence pour cette étude et une revue de la littérature didactique existante sur les nombres réels et la droite numérique, elle étudie d'abord quels sont les rapports institutionnels à la complétude qui sont développés dans les quatre enseignements où cette notion est principalement engagée : Analyse pré-universitaire, Analyse I, Compléments d'Analyse II, Analyse avancée. Elle montre les continuités et ruptures existant en chacun des enseignements, vus comme des institutions distinctes, selon les axes définis dans son cadre d'analyse : compétences techniques et niveaux de connaissances en jeu dans les tâches proposées, rapports entre perspectives outil et objet sur la complétude, formes de validation, flexibilité entre les différentes expressions de la complétude. Elle met ensuite en regard ces rapports institutionnels et leur évolution avec l'étude des rapports personnels développés par

les étudiants suivant ces enseignements, par le biais de questionnaires et d'entretiens, montrant comment les faiblesses repérées au niveau institutionnel se reflètent chez les étudiants. Beaucoup de ceux interviewés à la fin de leurs études ont, en dépit de leurs multiples rencontres avec cette notion, encore des difficultés à distinguer complétude et densité de l'ordre sur le réels, et à comprendre le rôle que cette propriété de l'ensemble des réels joue dans des théorèmes fondamentaux de l'analyse comme le théorème des valeurs intermédiaires.

Et c'est aussi le cas des travaux conduits actuellement en Espagne sur le thème de la transition lycée-université par M. Bosch, C. Fonseca et J. Gascon (2004). Ces derniers, soulignons-le, se situent dans une perspective beaucoup plus résolument anthropologique que ceux précédemment cités qui, tout en se situant dans une perspective globale anthropologique, conjuguaient des outils d'analyse divers pour exploiter les résultats des recherches menées depuis de nombreuses années en didactique de l'analyse. La dé-personnalisation de l'analyse didactique induite par l'approche anthropologique y est tout particulièrement revendiquée, dans l'opposition entre ce que les auteurs qualifient le *Programme cognitif* qui considèrerait que les phénomènes relatifs à l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, et en particulier ceux indésirables et problématiques, peuvent être expliqués à partir de caractéristiques individuelles des sujets, et que c'est à ce niveau qu'il faut engager l'action didactique, et ce qu'ils qualifient le *Programme épistémologique*, dans lequel ils se situent qui considère que la clef de la compréhension des phénomènes didactiques n'est pas dans le sujet mais dans les pratiques mathématiques des institutions scolaires. Ceci les conduit à étudier, en employant les outils conceptuels de l'approche anthropologique, les caractéristiques des organisations mathématiques vivant au lycée et à l'université et à chercher à identifier les ruptures existantes entre les organisations existant dans ces deux institutions. Ce qui est pointé c'est la prédominance au niveau secondaire d'organisations mathématiques ponctuelles ou locales incomplètes et rigides, l'accent étant mis sur le bloc practico-technique des praxéologies, tandis qu'au niveau universitaire, on tend à se situer d'emblée au niveau d'organisations mathématiques régionales, en mettant l'accent sur le bloc technologico-théorique des praxéologies[5]. Ici aussi, des questionnaires sont élaborés et proposés aux

[5] Dans l'approche anthropologique chevallardienne (Chevallard, 1992, 1999), les pratiques mathématiques sont décrites en termes de praxéologies. Une praxéologie est un quadruplet (T,τ,θ,Θ), T désignant un type de tâche, τ une technique c'est à dire un moyen de réaliser la tâche, θ une technologie c'est à dire un discours permettant d'expliquer et justifier la technique et Θ une théorie au sein de laquelle s'inscrit la technologie. Une organisation mathématique est dite ponctuelle si elle est générée par un seul type de tâche (soit peut s'analyser via une praxéologie unique), locale si elle résulte de l'intégration de divers organisations ponctuelles autour d'un discours technologique commun, régionale si elle résulte de l'intégration de diverses organisations locales autour d'une théorie commune. Les auteurs, à partir des ces notions définissent ce qu'ils entendent par organisation

étudiants mais, comme le soulignent les auteurs, ce n'est pas dans le but d'analyser les connaissances mathématiques des étudiants (p. 227) :

> « Nuestro objetivo principal consiste en utilizar las respuestas de los estudiantes como indicadores de algunas de las características de las OM (Organizaciones Matemáticas) que se estudian en S (Secundaria) y poner de manifiesto la existencia y la naturaleza de determinados obstáculos epistemológicos y didácticos que dificultan el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas en el paso de Secundaria al primer ciclo de la Universidad. »

La mise en regard, avec les mêmes outils d'analyse, des réponses des étudiants au questionnaire et des caractéristiques des tâches proposées dans un échantillon de manuels de fin de secondaire sert alors à mettre en évidence la correspondance étroite existant entre ce que donnent à voir les réponses au questionnaire d'une part et l'analyse des manuels d'autre part, une correspondance confortant la position avancée par les auteurs.

Je suis restée jusqu'ici dans le cadre des mathématiques « classiques », en montrant comment certaines évolutions didactiques pouvaient nous amener à questionner nos points de vue sur l'apprentissage. Dans le troisième et dernier point abordé, le questionnement va lui sortir d'un élargissement du domaine d'enquête, en nous faisant sortir du cadre de ces mathématiques classiques.

3. Les perspectives ouvertes par les recherches sur de nouveaux domaines ou d'autres secteurs de formation : la formation des ingénieurs

La formation des ingénieurs est de ce point de vue intéressante car l'évolution des pratiques d'ingénierie liée à l'évolution technologique y questionne sérieusement les visions usuelles d'apprentissage en mathématiques et la façon dont ces visions se réfléchissent dans l'enseignement. Comme le souligne P. Kent, dans le chapitre mentionné au début, en prenant l'exemple de l'analyse de structures dans la formation des ingénieurs civils, longtemps cette formation a consisté en une solide dose de présentation théorique et d'apprentissage de diverses techniques pour le calcul et le contrôle de structures, en papier-crayon, utilisant en particulier l'algèbre matricielle. Si l'utilisation de logiciels était intégrée à l'enseignement, c'était dans une seconde phase, lorsque la théorie et les techniques associées étaient censées être suffisamment comprises et maîtrisées, les logiciels étant réduits au statut d'auxiliaires de calcul. De plus en plus, souligne-t-il, ce genre de formation fourni par les mathématiciens, considéré comme inadéquat et inefficace, est remis en question. S'il y a apprentissage mathématique et il y en a sûrement un, les futurs ingénieurs n'en perçoivent visiblement plus l'intérêt et c'est un apprentissage dont,

---

mathématique locale relativement complète en imposant à sa construction institutionnelle la satisfaction de 6 critères qui précisent ce qui doit être permis dans cette construction par les différents moments de l'étude : première rencontre, exploration, travail de la technique, questionnement technologique, institutionnalisation et validation.

très vite, on ne trouve plus trace dans leurs pratiques effectives comme si les logiciels disponibles rendaient tout cela inutile.

Selon lui, ce qui est donc demandé aujourd'hui aux mathématiciens assurant ces cours de service, c'est de mettre en place des stratégies d'apprentissage où la maîtrise théorique et technique ne soit plus considérée comme un préalable mais où, au contraire, les pratiques professionnelles expertes instrumentées par les logiciels soient le cadre servant à motiver les besoins mathématiques et à les satisfaire de façon appropriée, ce qui n'est pas le cas aujourd'hui. Plus précisément :

> « What users of mathematics such as engineers are wanting however, and it seems that mathematicians will increasingly need to provide is a form of pull-based mathematics where the use of mathematical software makes mathematical ideas usable. It seems that carefully-designed use of IT can make it possible for students to use mathematical ideas before understanding techniques, and to make this part of a genuinely rounded mathematical experience (a few examples are given in Kent & Noss, 2003). »

Il y a là un renversement par rapport au rôle généralement attribué aux outils technologiques dans les apprentissages mathématiques tout à fait intéressant. Les outils technologiques sont en effet généralement vus comme de simples adjuvants pédagogiques, non comme des éléments constitutifs de l'apprentissage, contribuant à en déterminer les besoins et les formes. C'est oublier que ce que nous apprenons, au-delà de la façon dont nous l'apprenons, dépend des outils dont nous disposons pour l'apprendre. Les formations professionnelles universitaires, en rejetant de plus en plus les modèles d'enseignement traditionnels, nous le rappellent.

Une autre évolution intéressante dans ce domaine des formations d'ingénieurs est l'importance croissante prise par la modélisation, mais non pas une modélisation où, comme c'est souvent le cas dans les enseignements de mathématiques, le passage d'une situation physique au modèle mathématique est court-circuité au profit du travail dans le modèle, mais au contraire une modélisation où ce passage est considéré comme réellement problématique et d'une importance cruciale. Car, du fait de l'évolution technologique, ce qui prend de plus en plus d'importance dans les compétences qu'on demande à l'ingénieur de développer, c'est justement la capacité à construire, via des langages appropriés, l'interface entre la situation physique ou autre qu'il étudie et les outils de traitement informatisés dont il dispose, puis la capacité à analyser, discuter, interpréter les données issues du traitement informatisé. Ceci passe de plus en plus par des dispositifs d'apprentissage différents des dispositifs traditionnels, avec une grande importance accordée à la réalisation de projets professionnels, en groupes, des projets où les connaissances mathématiques ne peuvent fonctionner de façon isolée mais doivent s'articuler avec les autres connaissances qui interviennent dans l'ingénierie. Ceci est, semble-t-il, d'autant plus nécessaire que la multiplication des domaines de connaissances qui rentrent dans la formation d'un ingénieur aujourd'hui rend impossible un apprentissage qui fonctionnerait sur la base d'enseignements séparés. Comme le souligne P. Kent, « l'engineering design » devient un principe organisateur and motivationnel de la formation en ingénierie, ceci incluant la formation mathématique.

Quels sont les apprentissages mathématiques susceptibles d'être engendrés par ces dispositifs qui se veulent proches des pratiques professionnelles et très contextualisés ? Quelles en sont les potentialités et les limites ? Et par quels processus s'effectuent ces apprentissages ? Ces questions sont aujourd'hui largement ouvertes malgré l'existence de quelques travaux pionniers, comme ceux de Kent & Noss déjà cités, mais elles ne sont pas sans intérêt pour une réflexion plus générale sur l'apprentissage mathématique plus généralement, à l'heure où, à tous niveaux, dans de nombreux pays, on met l'accent dans les curricula sur le renforcement des liens entre mathématiques et autres disciplines, mathématiques et société, à travers des dispositifs de projets pluridisciplinaires et des activités de modélisation[6]. Ces questions sont aussi, il ne faut pas le cacher, difficiles. Les mathématiques qui vivent dans les pratiques professionnelles ou dans celles qui se veulent proches de ces pratiques professionnelles, en formation, sont des mathématiques difficiles à mettre à jour (Bessot & Ridgway, 2000). Souvent imbriquées dans d'autres disciplines, portées par un langage spécifique, encapsulées dans des logiciels sophistiqués qui fonctionnent comme des boîtes noires pour leurs utilisateurs, elles nécessitent pour être appréhendées et analysées par les chercheurs des connaissances qui vont bien au-delà des seules connaissances mathématiques et didactiques, et elles varient de plus considérablement d'un secteur professionnel à un autre. Elles nécessitent aussi un contact étroit et prolongé avec des terrains nouveaux, comme cela a été le cas par exemple de C. Hoyles et R. Noss pour le secteur bancaire (Noss & Hoyles, 1996), A. Bessot & C. Laborde (2005) pour le secteur du bâtiment. Elles nécessitent enfin un questionnement sérieux de systèmes de valeurs concernant les mathématiques et la formation mathematique, que, parce qu'ils sont naturalisés dans la culture, nous avons tendance à ne pas suffisamment questionner. On comprend bien, dans ces conditions, la tentation qu'a pu avoir la recherche didactique pendant trop longtemps de se tenir à l'écart de domaines de recherche aussi exigeants et perturbants.

Conclusion

Cet exposé ne reflète que très partiellement et très superficiellement ce que les travaux de recherche menés au niveau de l'enseignement supérieur peuvent apporter à la réflexion sur les apprentissages mathématiques. J'ai essayé d'y mettre

---

[6] Ceci est bien mis en évidence dans l'Etude ICMI 14 en cours intitulée : « Applications and Modelling in Mathematics Education » (Henn & Blum, 2004).

l'accent sur quelques grandes tendances des travaux qui se développent actuellement et me semblent prometteuses car d'une part, elles peuvent renouveler au moins partiellement notre façon de penser la question des apprentissages mathématiques au niveau universitaire, la question des difficultés rencontrées par les étudiants et de l'action didactique que nous pourrions mettre en œuvre pour aider ceux-ci à les surmonter, d'autre part elles montrent que des secteurs essentiels comme ceux des formations mathématiques pour les non-mathématiciens sont encore pour la recherche des continents quasiment inexplorés et nous incitent à nous lancer dans cette exploration.

J'espère aussi vous avoir convaincus que les questions d'apprentissage qui se posent au niveau universitaire ne sont en rien étrangères à celles qui se posent à d'autres niveaux d'enseignement et que la recherche que ces questions motive est une recherche qui devrait intéresser tous ceux qui s'intéressent aux questions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques, de la prime enfance à l'âge adulte.

Bibliographie

ARTIGUE M. (2001) What can we learn from educational research at the university level?, in D. HOLTON & al. (ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

ARTIGUE M., BATANERO C., KENT P. (to appear) Mathematics thinking and learning at post-secondary level, in, E. SIVER (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*

BERGE A. (2004) *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático : el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los numeros reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria*, Doctoral thesis, University of Buenos Aires,
http://etd.bl.fcen.uba.ar/tede2/tde_busca/tde.php?id=7&id2=14&id3=1

BESSOT A. & RIDGWAY F. (2000) *Education for Mathematics in the Workplace*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BESSOT A. & LABORDE C. (2005) *Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment*, IMAG, Grenoble.

BOSCH M., FONSECA C., GASCON J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **24/2.3**, 205-250.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12/1**, 77-111.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/2**, 221-265.

DORIER J.L. (ed.) (2000) *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DORIER J.L. & SIERPINSKA A. (2001) Research on the teaching and learning of linear algebra, in D. Holton (ed.) (2001), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7/2**, 5-32.

DREYFUS T. (1991) Advanced Mathematics Thinking Processes, in D. TALL (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 25-41, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. TALL (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DUBINSKY E., MC DONALD M. (2001) APOS: A constructive theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D. Holton (ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DURAND-GUERRIER V. (2005) *Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Habilitation à diriger les recherches, Université de Lyon 1.

DUVAL R. (1995) *Semiosis et Noesis*, Peter Lang, Berne.

HAREL G. & SOWDER L. (2005) Advanced Mathematical-Thinking at Any Age : Its Nature and Its Development, *Mathematical Thinking and Learning,* **7(1)**, 27-50.

HENN H.W. & BLUM W. (eds). (2004) *ICMI Study 14 : Applications and Modelling in Mathematics Education,* Pre-proceedings of the Study Conference, February 2004, Dortmund University, Dortmund.

HOLTON D. (ed.) (2001) *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

HOYLES C. & NOSS R. (2003) What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education, in A. Bishop & al. (eds), *Second International Handbook of Mathematics Education*, 323-350, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

KENT P. & NOSS, R. (2003) *Mathematics in the University Education of Engineers (A report to The Ove Arup Foundation*, The Ove Arup Foundation*)*, London. [download: http://www.theovearupfoundation.org/arupfoundation/pages/ViewContent.cfm?RowID=25]

LAKOFF G., NUNES R. (2000) *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings the mathematics into being*, Basic Books, New York, University Press, Cambridge.

LERMAN S., SIERPINSKA A. (1996) Epistemologies of mathematics and of mathematics education, in A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

N.C.T.M. (2000) *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA, Author, Retrieved 30 April 2005 from http://standards.nctm.org/.

NOSS R. & HOYLES C. (1996) The visibility of Meanings: Modeling the Mathematics of Banking, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **1(1)**, 3-31.

PERRIN-GLORIAN M.J. & ROBERT A. (eds) (2001) *Jeux de Cadres*, Actes du Colloque en l'honneur de Régine Douady, IREM Paris 7, Paris.

PRASLON F. (2000) *Continuités et ruptures dan la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse, Le cas de la notion de dérivée et son environnement,* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

RASMUSSEN C., ZANDIEH M. KING K. & TEPPO A. (2005) Advancing Mathematical Activity: A practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking, *Mathematical Thinking and Learning,* **7(1)**, 51-73.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18/2**, 139-190.

ROBERT A. & SPEER N. (2001) Research on the teaching and learning of calculus / elementary analysis, in D. Holton (ed.) (2001) *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics,* **22**, 1-36.

SIERPINSKA A. (1994) *Understanding in Mathematics*, Falmer Press, London.

TALL D. & VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

TALL D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

TALL D. (1995) Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking, in, L. Meira & D. Carraher (eds), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, **1**, 61-75, Universidade Federale de Pernambuco, Recife.

SELDEN A. & SELDEN J. (2005) Perspectives on Advanced Mathematical Thinking, *Mathematical Thinking and Learning,* **7(1)**, 1-13.

Michèle Artigue
Université Paris VII
artigue@gauss.math.jussieu.fr

APMEP

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

26 rue Duméril – 75013 PARIS

Tél. 01 43 31 34 05 – fax : 01 42 17 08 77 – mel : apmep@apmep.asso

Site : http://www.apmep.asso.fr

Fondée en 1910, toujours dynamique, l'APMEP, c'est :

- **Une réflexion collective** sur le métier d'enseignant de mathéma-tiques et les conditions de son exercice, de la maternelle à l'université, notamment en collège et lycée ;
- **des interventions suivies** sur l'actualité et des projets à moyen terme ;
- **des textes de base** (chartes, problématiques, prospective bac, …) pour les objectifs à long terme ;
- **un observatoire** (EVAPM) de l'impact des programmes du second degré ;
- **des publications de référence** pour apprendre, enseigner, apprendre à enseigner les mathématiques (Bulletin Vert, Plot, Brochures,…) ;
- **une revue pour les « débutants » : PLOT** ;
- **une information rapide des adhérents** : le BGV, un site Internet, Publimath ; …
- **des instances élues** définissant ses positions ;
- **une organisation décentralisée** en « Régionales » qui ont leurs activités propres et sont des relais entre l'organisation nationale et les adhérents de tous horizons.

L'APMEP agit

- en réunissant en commissions et groupes de travail, sur des thèmes variés, permettant de mettre en commun leur expérience et d'élaborer critiques et propositions
- en adoptant sa ligne d'action en accord avec ses adhérents ;
- en la défendant auprès de toutes les instances concernées.

L'APMEP propose ainsi :

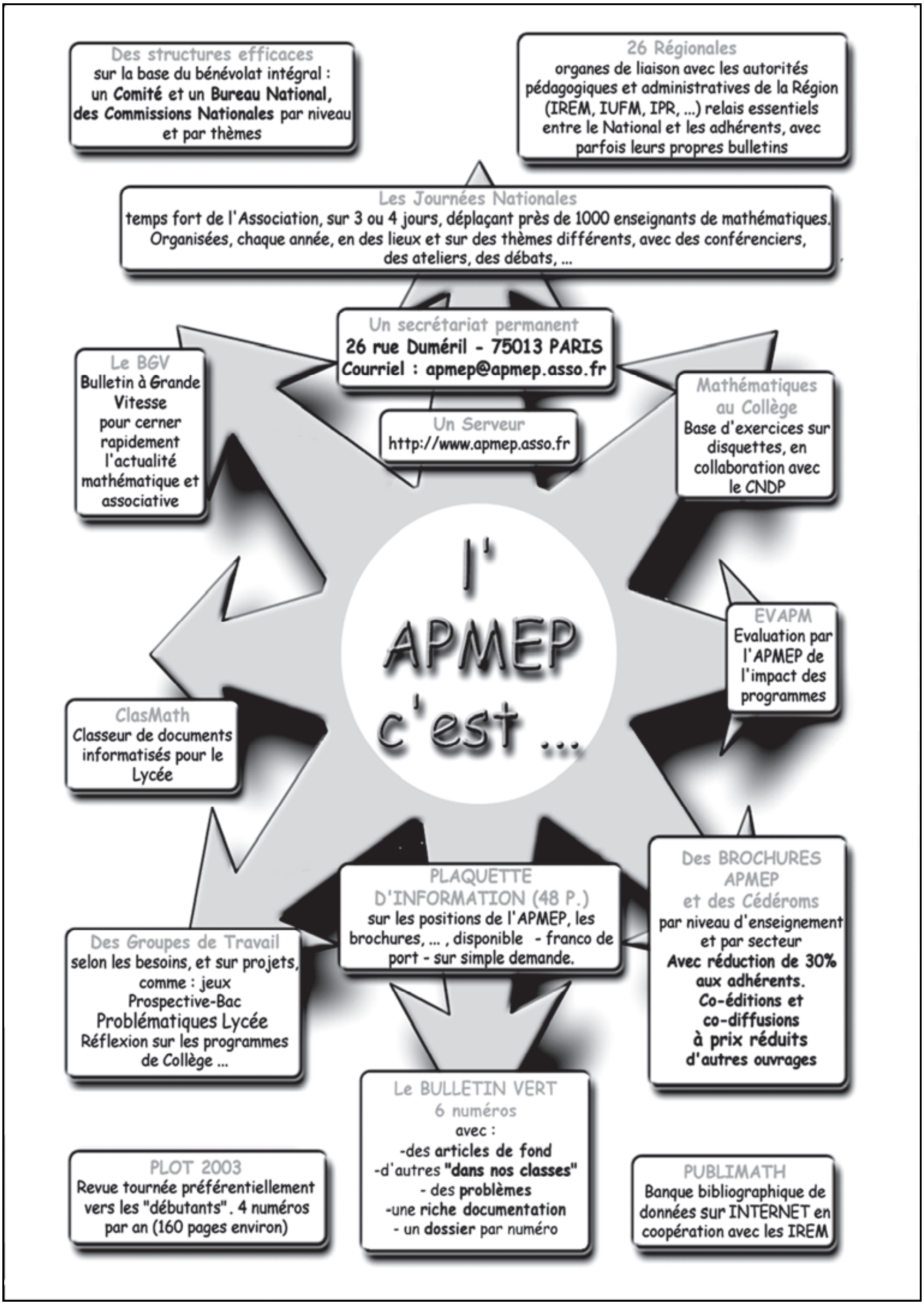
- des choix et des pistes d'action ;
- des outils pour renforcer l'efficacité de l'enseignement de cette discipline.

L'APMEP organise des :

- journées nationales, chaque année sur un site et un thème différents :
  - 2001 : Lille, *Maths au carrefour de l'Europe*
  - 2002 : Rennes, *Images des maths, maths des images*
  - 2003 : Pau : *Mathématiques de la Terre aux étoiles*
  - 2004 : Orléans, *Mathématiques et environnement*
  - 2005 : Caen, *Math ématiques à la mode de …*
  - 2006 : Clermont-Ferrand, *les mathématiques, un volcan actif ?*
- rencontres régionales ;
- séminaires et des « universités d'été ».

En adhérant à l'APMEP, vous pourrez :

- participer à la vie de l'association et à la définition des positions qu'elle défend ;
- contribuer à ses productions, les soutenir par la cotisation et toute implication plus poussée ;
- recevoir chez vous les informations d'actualité sur les mathématiques et leur enseignement ;
- **bénéficier de réductions importantes sur toutes les brochures qu'elle propose.**


Des structures efficaces
sur la base du bénévolat intégral :
un Comité et un Bureau National,
des Commissions Nationales par niveau
et par thèmes
26 Régionales
organes de liaison avec les autorités
pédagogiques et administratives de la Région
(IREM, IUFM, IPR, ...) relais essentiels
entre le National et les adhérents, avec
parfois leurs propres bulletins
Les Journées Nationales
temps fort de l'Association, sur 3 ou 4 jours, déplaçant près de 1000 enseignants de mathématiques.
Organisées, chaque année, en des lieux et sur des thèmes différents, avec des conférenciers,
des ateliers, des débats, ...
Un secrétariat permanent
26 rue Duméril - 75013 PARIS
Courriel : apmep@apmep.asso.fr
Le BGV
Bulletin à Grande Vitesse
pour cerner rapidement l'actualité mathématique et associative
Un Serveur
http://www.apmep.asso.fr
Mathématiques au Collège
Base d'exercices sur disquettes, en collaboration avec le CNDP
l' APMEP c'est ...
EVAPM
Evaluation par l'APMEP de l'impact des programmes
ClasMath
Classeur de documents informatisés pour le Lycée
PLAQUETTE D'INFORMATION (48 P.)
sur les positions de l'APMEP, les brochures, ... , disponible - franco de port - sur simple demande.
Des BROCHURES APMEP et des Cédéroms
par niveau d'enseignement et par secteur
Avec réduction de 30% aux adhérents.
Co-éditions et co-diffusions à prix réduits d'autres ouvrages
Des Groupes de Travail
selon les besoins, et sur projets,
comme : jeux
Prospective-Bac
Problématiques Lycée
Réflexion sur les programmes de Collège ...
Le BULLETIN VERT
6 numéros
avec :
-des articles de fond
-d'autres "dans nos classes"
- des problèmes
-une riche documentation
- un dossier par numéro
PLOT 2003
Revue tournée préférentiellement vers les "débutants". 4 numéros par an (160 pages environ)
PUBLIMATH
Banque bibliographique de données sur INTERNET en coopération avec les IREM

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de didactique et de sciences cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à l'adresse électronique indiquée ci-après.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* à l'adresse URL :

http://irem/data/publi/annales/templates/modele_annales_didactiques.doc

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

– le nom de l' (des) auteur(s) ;
– le titre complet ;
– le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
– le bloc “abstract – résumé - mots clés” ;
– le texte proprement dit de l'article proposé ;
– la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

– Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
– Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
– Abstract – Résumé - Mots clés : Times New Roman 10 points ;
– En-tête : Arial 9 points ;
– Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

– pour des commandes de volumes mailto :

bibirem@math.u-strasbg.fr

– pour des propositions d'articles mailto :

alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr
pluvin@math.u-strasbg.fr

louisjeanimprimeur

59, Avenue Émile DIDIER - 05003 GAP Cedex - Tél. 04 92 53 17 00 – Dépôt légal : 447 – Juillet 2006
Imprimé en France

Sommaire
ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
Volume 11 - 2006