

Exercice I

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout nombre entier naturel n :

$$x_0^3 + x_1^3 + \dots + x_n^3 = (x_0 + x_1 + \dots + x_n)^2.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que :

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

2. Si n et p sont deux nombres entiers naturels non nuls, on pose :

$$S_{n,p} = 1^p + 2^p + \dots + n^p.$$

Déterminer les entiers naturels non nuls p tels que, quel que soit l'entier naturel non nul n , $S_{n,p}$ soit le carré d'un nombre entier naturel.

Exercice II

À tout nombre entier naturel non nul n , on associe l'application f_n de la variable réelle x , définie pour $x \geq n$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{x-n} + \sqrt{x-n+1} + \dots + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \dots + \sqrt{x+n} - (2n+1)\sqrt{x}$$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
Montrer que f_n est croissante et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $f_n(n)$.

Exercice III

Soit S un point fixe d'une sphère fixe (Σ) de centre Ω .
On considère les tétraèdres $SABC$ inscrits dans la sphère (Σ) et dont les arêtes issues de S sont deux à deux orthogonales.

1. Montrer que les plans (ABC) passent par un point fixe.
2. Pour un tel tétraèdre $SABC$, le point S et le centre Ω de la sphère (Σ) se projettent orthogonalement sur le plan (ABC) respectivement en H et O .
On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .
Démontrer que : $R^2 = OH^2 + 2SH^2$.

Exercice IV

Soit p un nombre entier naturel et $n = 2^p$.
On considère les parties A de l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n\}$ possédant la propriété suivante :

$$\text{si } x \text{ appartient à } A, \text{ alors } 2x \text{ n'appartient pas à } A.$$

Déterminer le nombre maximal d'éléments d'une telle partie A .

Exercice V

1. On considère l'application P de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$P(z) = z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z$$

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont quatre nombres complexes donnés.

On pose $w_l = e^{2il\pi/5}$ où l désigne un nombre entier compris entre 0 et 4.

Montrer que $P(w_0) + P(w_1) + P(w_2) + P(w_3) + P(w_4) = 5$.

2. Soient A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinq points du plan.

On construit un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre A_1 et de rayon donné R .

Démontrer qu'il existe un sommet S du pentagone tel que :

$$SA_1 \cdot SA_2 \cdot SA_3 \cdot SA_4 \cdot SA_5 \geq R^5.$$