Exercice I

On dit qu'une partie non vide Δ du plan $\mathcal{P}$ est convexe si elle possède la propriété suivante :

Pour tout couple (M, N) de points de Δ, le segment [MN] est contenu dans Δ

Soit Δ une partie convexe du plan $\mathcal{P}$. Si A est un point de $\mathcal{P}$, à tout couple (M, N) de points de Δ on associe le point m défini par

$$\overline{\mathrm{A}m} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{MN}}$$

et on note $\delta_{\mathrm{A}}(\Delta)$ l'ensemble des points m ainsi obtenus.

1. **a.** Montrer que $\delta_{\mathrm{A}}(\Delta)$ admet un centre de symétrie.
   b. À quelle condition a-t-on $\delta_{\mathrm{A}}(\Delta) = \Delta$?
   c. Soient B et C deux points du plan $\mathcal{P}$. Par quelle transformation passe-t-on de $\delta_{\mathrm{B}}(\Delta)$ à $\delta_{\mathrm{C}}(\Delta)$?
2. Soit A un point du plan $\mathcal{P}$. Déterminer et représenter $\delta_{\mathrm{A}}(\Delta)$ lorsque :
   a. Δ est une bande du plan $\mathcal{P}$ délimitée par deux droites parallèles.
   b. Δ est délimitée par un triangle.
   c. Δ est un demi-disque.
3. Montrer que dans les deux cas 2. b. et 2. c., les contours de Δ et $\delta_{\mathrm{A}}(\Delta)$ ont la même longueur.

Exercice II

Soit (C) un cercle du plan de rayon 1.

1. Déterminer les triangles ABC inscrits dans le cercle (C) pour lesquels la somme
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2$$
est maximale.
2. Déterminer les quadrilatères ABCD inscrits dans le cercle (C) pour lesquels la somme
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2$$
est maximale. Représenter un tel quadrilatère.

Exercice III

Soit ABCD un tétraèdre inscrit dans une sphère de centre O.
On note G l'isobarycentre des quatre sommets du tétraèdre et I le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Les deux points O et G sont confondus.
2. Les quatre faces du tétraèdre sont isométriques.
3. Les deux points O et I sont confondus.

Exercice IV

Soit (u_n) la suite numérique définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1, $0 < u_0 < 1$ et $0 < u_1 < 1$, et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0, la suite (u_n) est monotone (on ne demande pas de déterminer n_0 qui dépend des valeurs initiales u_0 et u_1).

Exercice V

Quel est le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égal à $\dfrac{10^{1\,992}}{10^{83}+7}$?