Exercice I

On appelle « boîte de poids », tout ensemble de poids comprenant :

x_1 poids de d_1 grammes chacun
x_2 poids de d_2 grammes chacun
....
x_k poids de d_k grammes chacun

Les nombres x_i et d_i (pour $1 \leqslant i \leqslant k$) étant des entiers naturels non nuls, tels que :

$$1 \leqslant d_1 < d_2 < \cdots < d_k.$$

On pose $n = x_1d_1 + x_2d_2 + \ldots + x_kd_k$ et on dit que la masse totale de la boîte de poids est n grammes.
Cette boîte de poids est dite « parfaite »si elle permet d'obtenir, de manière unique, toute masse de $0, 1, \ldots, n$ grammes, c'est-à-dire si, pour tout entier m de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, \ n\}$, il existe des entiers $y_1, y_2, \ldots, y_k$ uniques tels que pour tout indice i, $1 \leqslant i \leqslant k$, on ait :
$0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ et $m = y_1d_1 + y_2d_2 + \ldots + y_kd_k$.

1. Déterminer toutes les boîtes de poids de masse totale 5 grammes. Quelles sont celles qui sont parfaites ?
2. Montrer que pour une boîte de poids parfaite de masse totale n grammes, on a, avec les notations du préambule :
$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_k) = n + 1.$$
3. Inversement, on se donne k entiers $x_1, x_2, \ldots, x_k$ strictement positifs (k non nul), et on définit n par :
$$n + 1 = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_k).$$
Montrer qu'il existe des entiers $d_1, d_2, \ldots, d_k$ uniques avec $1 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ tels que la boîte de poids composée de x_1 poids de d_1 grammes, x_2 poids de d_2 grammes,..., x_k poids de d_k grammes soit parfaite.
4. Déterminer toutes les boîtes de poids parfaites de masse totale 1 993 grammes.

Exercice 2

Soit n un entier strictement positif donné.

1. Existe-t-il $2n+1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$, rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :
$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_{n+1} + \ldots + a_{2n}?$$
2. Existe-t-il $2n+1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$, rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :
$$a_0^2 + a_1^3 + \ldots + a_n^2 = a_{n+1}^2 + \ldots + a_{2n}^2?$$

3. Existe-t-il $2n+1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$, rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :

$$a_0^3 + a_1^3 + \ldots + a_n^3 = a_{n+1}^3 + \ldots + a_{2n}^3 ?$$

Pour cette question, on pourra étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + \ldots + x^3 - (x+1)^3 - \ldots - (x+n)^3.$$

On montrera que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_n vérifiant :

$$3n(n+1) < x_n < 3n(n+1) + 1.$$

On pourra utiliser l'égalité : $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Exercice 3

Soit f une application de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. On suppose que f est minorée et vérifie : pour tout entier relatif n,

$$f(n) > \frac{1}{2}[f(n+1) + f(n-1)].$$

Montrer que l'application f est constante.

Exercice 4

Soit dans le plan un disque D de rayon 1.

1. Montrer qu'il est impossible de recouvrir le disque D avec deux disques de même rayon r, lorsque r est strictement inférieur à 1.

2. Montrer que, pour certaines valeurs de r, $r < 1$, il est possible de recouvrir le disque D avec trois disques de même rayon r.
Quelle est la plus petite valeur de r permettant un tel recouvrement ?

Exercice 5

1. Soit A et B deux points distincts de l'espace.

a. Parmi les triangles MAB d'aire donnée, quels sont ceux de périmètre minimal ?

b. Parmi les triangles MAB de périmètre donné, quels sont ceux d'aire maximale ?

2. Soit, dans un tétraèdre de volume V, a, b, c, d les longueurs de quatre arêtes, telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas coplanaires, et $L = a + b + c + d$.
Déterminer la valeur maximale du quotient $\dfrac{V}{L^3}$.