Exercice I

Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers p pour lesquels

$$50^n < 7^p < 50^{n+1}$$

1. Démontrer que pour tout entier n, I_n vaut 2 ou 3.
2. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels I_n vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.

Exercice II

Soit $\sum$ une demi-sphère et P le plan contenant son cercle de base. Un plan variable Q, parallèle à un plan fixe non perpendiculaire à P, coupe $\sum$ suivant un cercle C. On désigne par C' le projeté orthogonal de C sur P.
Comment doit-on placer le plan Q pour que le cylindre de bases C et C' ait un volume maximal ?

Exercice III

On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(1) = 0$ et pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$:

$$f(2n) = 2f(n) + 1 \qquad f(2n+1) = 2f(n)$$

Etant donné un entier strictement positif p quelconque, on pose $u_0 = p$ et, tant que u_k appartient à $\mathbb{N}^*$

$$u_{k+1} = f(u_k)$$

1. Montrer que, pour tout choix de p, il existe un unique entier $v(p)$ tel que $u_{v(p)} = 0$.
2. **a.** Calculer $v(1\,994)$.
   Quel est le plus petit entier p tel que $v(p) = v(1\,994)$?
   b. Étant donné un entier N, déterminer le plus petit entier p tel que $v(p) = N$.

Exercice IV

Soit ABC un triangle. Si P est un point de son plan, on note L, M, N les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB).
Déterminer le point P pour lequel la quantité

$$\mathrm{BL}^2 + \mathrm{CM}^2 + \mathrm{AN}^2$$

est minimale.

Exercice V

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(1) > 0$ et, quels que soient les entiers naturels m et n, on a :

$$f\left(m^2 + n^2\right) = [f(m)]^2 + [f(n)]^2$$

1. Calculer $f(k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 12$.
2. Calculer $f(n)$, n étant un entier quelconque.