Exercice I

Dans un plan P, on se donne un triangle ABC.
À toute droite D, non parallèle à l'un de ses côtés, on associe le point $\mathrm{G_D}$, isobarycentre des trois points communs à D et aux droites (AB), (BC) et (CA).
L'objet de cette exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points $\mathrm{G_D}$ lorsque D varie.

1. Démontrer, que lorsque D se déplace en restant parallèle à une droite δ, le point $\mathrm{G_D}$ décrit une droite Δ_δ.
2. On suppose, dans cette question seulement, ABC équilatéral.
   Montrer que, lorsque δ varie, les droites Δ_δ sont toutes tangentes à un même cercle et déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ dans ce cas.
3. On revient au cas général.
   Montrer que l'on peut trouver un triangle équilatéral $\mathrm{A'B'C'}$ de l'espace dont le projeté orthogonal sur le plan P est le triangle ABC et en déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

Exercice II

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & \geqslant & 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} : \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

Exercice III

Dans le plan, on considère Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles de rayon R passant par le point O,et on note D l'ensemble des points du plan intérieurs à au moins deux de ces cercles.
Comment doit-on placer Γ_1, Γ_2 et Γ_3 pour que l'aire de D soit minimale ?
Justifier votre réponse.

Exercice IV

Soient $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{B_3}$ six points du plan tels que l'on ait pour tous les entiers i et j de $\{1, 2, 3\}$:

$$\mathrm{A}_i\mathrm{B}_j = i + j.$$

Que peut-on dire de ces six points ?