

**Exercice 1**

La calculatrice de poche est autorisée.  
La clarté et la précision seront prises en compte  
dans l'appréciation des copies.

**Les premières questions de chacune des quatre parties de ce problème sont indépendantes des autres parties. Il n'est donc pas nécessaire de commencer son étude dans l'ordre indiqué.**

**Les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.**

On appelle **trio** tout triplet de nombres réels  $(a, b, c)$  non tous nuls et vérifiant la relation :

$$ab + bc + ca = 0.$$

Lorsque  $a + b + c = 1$ , on dit que le trio  $(a, b, c)$  est un trio **réduit**.

Les coordonnées sont rapportées à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace.

## Première partie

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points de coordonnées  $(a, b, c)$  où  $(a, b, c)$  est un trio.

On note  $\Gamma$  l'ensemble des points de coordonnées  $(a, b, c)$  où  $(a, b, c)$  est un trio réduit.

On note  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x + y + z = 1$ .

1. Existe-t-il des trios  $(a, b, c)$  tels que  $a + b + c = 0$ ?
2. Montrer que  $\mathcal{C}$  est une réunion de droites passant par  $O$  et privées de ce point.
3. Montrer que  $\Gamma$  est l'intersection d'un plan et d'une sphère de centre  $O$ . Quelle est la nature géométrique de  $\Gamma$ ?
4. Donner la nature géométrique de  $\mathcal{C}$  et l'illustrer d'un croquis.
5. Soit  $L$  un point fixé de  $\Gamma$ . Montrer que le volume  $V$  du tétraèdre  $OLL'L''$ , où  $L'$  et  $L''$  sont deux points distincts de  $\Gamma$  et différents de  $L$ , est maximal lorsque les arêtes issues de  $O$  sont deux à deux orthogonales et déterminer alors les coordonnées de  $L'$  et  $L''$  en fonction de celles de  $L$ .
6. Montrer que le produit  $abc$  admet un maximum et un minimum lorsque le point de coordonnées  $(a, b, c)$  décrit  $\Gamma$ .  
Préciser les trios réduits réalisant ces extremums.

## Deuxième partie

Dans cette partie et les suivantes, un trio  $(a, b, c)$  est dit **rationnel** lorsque  $a, b$  et  $c$  sont des nombres rationnels (éléments de l'ensemble  $\mathbb{Q}$ ) ; il est dit **entier**, lorsque  $a, b$  et  $c$  sont des nombres entiers relatifs (éléments de l'ensemble  $\mathbb{Z}$ ) ; enfin un trio entier est dit **primitif** si  $a, b$  et  $c$  n'admettent que 1 et  $-1$  comme diviseurs communs.

- Déterminer la nature de l'ensemble  $H_1$  des points de coordonnées  $(x, y, 1)$  tels que  $(x, y, 1)$  soit un trio. Montrer que le point  $\Omega_1$  de coordonnées  $(-1, -1, 1)$  est un centre de symétrie de  $H_1$ . Quels sont les points de  $H_1$  à coordonnées entières ?
- Pour tout entier naturel non nul  $h$ , on note  $Z_h$  l'ensemble des trios entiers  $(a, b, c)$  tels que  $c = h$ .  
Déterminer  $Z_h$  pour  $h = 1$  et  $h = 2$ .
- Montrer que  $Z_h$  est un ensemble fini et exprimer le nombre  $N(h)$  de ses éléments en fonction de celui des diviseurs de  $h^2$  dans  $\mathbb{Z}$ .  
Montrer que 4 divise  $N(h) - 2$ .
- Pour tout entier naturel non nul  $h$ , on note  $N'(h)$  le nombre des trios entiers  $(a, b, c)$  tels que l'un au moins des entiers  $a, b$  ou  $c$  soit égal à  $h$  ?  
Exprimer  $N'(h)$  en fonction de  $N(h)$  selon la parité de  $h$ .
- Montrer qu'à tout trio entier  $(a, b, c)$  on peut associer un triplet  $(r, s, t)$  d'entiers tels que  $r$  et  $s$  soient premiers entre eux,  $s$  positif ou nul et tels que l'on ait :  $a = r(r + s)t$ ,  $b = s(r + s)t$ ,  $c = -rst$ .  
Énoncer et démontrer une réciproque.  
Pour quels trios  $(a, b, c)$  le triplet  $(r, s, t)$  n'est-il pas unique ?
- Déterminer les triplets  $(r, s, t)$  ainsi associés aux trios primitifs.  
En déduire que si  $(a, b, c)$  est un trio primitif, alors  $|abc|$ ,  $|a + b|$ ,  $|b + c|$ , et  $|c + a|$  sont des carrés d'entiers.
- pour tout entier naturel non nul  $h$ , on note  $P(h)$  le nombre de trios primitifs  $(a, b, c)$  tels que  $c = h$ .  
Montrer que  $P(h)$  est une puissance de 2. Pour quels entiers  $h$  a-t-on  $P(h) = N(h)$  ?  
Expliciter une suite d'entiers  $(h_n)$  tels que la suite  $\left(\frac{P(h_n)}{N(h_n)}\right)$  converge vers zéro.
- Soit  $(a, b, 1)$  un trio.  
Montrer qu'il existe deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  convergeant respectivement vers  $a$  et  $b$  et telles que pour tout  $n$ ,  $(x_n, y_n, 1)$  soit un trio rationnel.
- Soit  $(a, b, c)$  un trio réduit. Montrer qu'il existe trois suites  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(z_n)$  convergeant respectivement vers  $a, b$  et  $c$  et telles que pour tout  $n$ ,  $(x_n, y_n, z_n)$  soit un trio rationnel réduit.

## Troisième partie

On note  $j$  le nombre complexe  $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ , c'est à dire  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Pour tout trio  $T = (a, b, c)$  on note  $\widehat{T} = (a, c, b)$ ,  $S(T) = a + b + c$  et  $z(T) = a + bj + cj^2$ .

1. Calculer le module de  $z(T)$  en fonction de  $S(T)$ .  
Peut-on avoir  $z(T) = 0$ ?  
Calculer le cosinus et le sinus d'un argument  $\theta$  de  $z(T)$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .
2. Soit  $z_0$  un nombre complexe non nul. Déterminer les trios  $T = (a, b, c)$  tels que  $z(T) = z_0$ .
3. Étant donnés deux trios  $T_1$  et  $T_2$ , montrer qu'il existe un unique trio, noté  $T_1 * T_2$ , vérifiant  $S(T_1 * T_2) = S(T_1)S(T_2)$  et  $z(T_1 * T_2) = z(T_1)z(T_2)$ .  
Calculer  $T_1 * T_2$  en fonction de  $T_1$  et  $T_2$ .  
Que peut-on dire d'un argument de  $z(T_1 * T_2)$ ?  
Que peut-on dire d'un argument de  $z(T_1 * \widehat{T}_1)$ ?
4. si  $T_1$  et  $T_2$  sont réduits, en est-il de même de  $T_1 * T_2$ ?  
Si  $T_1$  et  $T_2$  sont entiers, en est-il de même de  $T_1 * T_2$ ? Si  $T_1$  et  $T_2$  sont primitifs, en est-il de même de  $T_1 * T_2$ ?
5. Comparer les trios  $T_1 * T_2$  et  $T_2 * T_1$ ,  $(T_1 * T_2) * T_3$  et  $(T_1 * T_2) * T_3$ ,  $T_1$  et  $T_1 * (1, 0, 0)$ .
6. Étant donnés les trios  $T_1$  et  $T_2$ , résoudre l'équation  $T_1 * T = T_2$  où le trio  $T$  est l'inconnue.
7. Étant donné un trio  $T$ , on définit une suite de trios  $(T_n)$  par  $T_0 = (1, 0, 0)$  et  $T_{n+1} = T * T_n$ .  
Calculer  $S(T_n)$ .  
Étant donné un entier  $p$ , résoudre l'équation  $T_p = T_0$  où le trio  $T$  est l'inconnue.

## Quatrième partie

On note  $A$  l'ensemble des entiers  $m$  non nuls tels qu'il existe deux entiers  $u, v$  tels que  $m = u^2 + 3v^2$ .

On note  $A'$  l'ensemble des nombres complexes  $z$  non nuls tels qu'il existe deux entiers  $u, v$  tels que  $z = u + iv\sqrt{3}$  (on remarquera que  $|z|^2 = u^2 + 3v^2$ ).

On note  $B$  l'ensemble des entiers  $n$  non nuls tels qu'il existe deux entiers  $r, s$  tels que  $n = r^2 + rs + s^2$ .

1. Montrer que le produit de deux éléments de  $A'$  appartient à  $A'$ , puis que le produit de deux éléments de  $A$  appartient à  $A$ .
2. Montrer que si  $p$  est un nombre premier élément de  $A$ , alors  $p = 3$  ou  $3$  divise  $p - 1$ .
3. Montrer que  $A = B$  (on pourra notamment remarquer que  $r^2 + rs + s^2 = (r + s)^2 - (r + s)s + s^2$ ).
4. Montrer que 4 divise les éléments pairs de  $A$  et que les quotients appartiennent à  $A$ , puis que tout élément de  $A$  est produit d'un élément impair de  $A$  par une puissance de 4.
  - (a) Soit s'il en existe, un entier impair  $m = u^2 + 3v^2$  tel que les entiers  $u$  et  $v$  soient premiers entre eux et qui admet un diviseur premier  $p$  n'appartenant pas à  $A$ .  
Montrer qu'il existe alors un plus petit entier strictement positif  $n_0$  tel que  $n_0 p$  appartienne à  $A$ .  
Montrer que  $n_0$  est impair.
  - (b) Établir l'existence de deux entiers  $u'$  et  $v'$  inférieurs en valeur absolue à  $\frac{p}{2}$  tels que  $p$  divise  $u' - u$  et  $v' - v$ .  
Montrer que  $p$  divise l'entier non nul  $u'^2 + 3v'^2$  et que  $n_0 < p$ .
  - (c) Établir l'existence de deux entiers non nuls premiers entre eux  $u_0$  et  $v_0$  tels que  $n_0 p = u_0^2 + 3v_0^2$ .
  - (d) Établir l'existence de deux entiers  $u_1$  et  $v_1$  inférieurs en valeur absolue à  $\frac{n_0}{2}$  tels que  $n_0$  divise  $u_1 - u_0$  et  $v_1 - v_0$ .  
Montrer que  $n_0$  divise l'entier non nul  $u_1^2 + 3v_1^2$  que l'on notera  $n_0 n_1$ .
  - (e) En déduire qu'un tel entier  $m$  ne peut pas exister (on pourra considérer l'entier  $n_0^2 n_1 p$ ).
5. Montrer que tout élément de  $A$  s'écrit  $m = C^2 p_1 \dots p_k$ , où  $C$  est un entier naturel non nul et les  $p_i$  des nombres premiers distincts éléments de  $A$ .
  - (a) Soit  $p$  un nombre premier tel que 3 divise  $p - 1$  et  $K$  l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  où les entiers  $x, y$  et  $z$  sont strictement compris entre 0 et  $p$ , et tels que  $p$  divise  $(xyz - 1)$ . Montrer que  $K$  possède  $(p - 1)^2$  éléments, et que 3 divise le nombre d'éléments de  $K$  ne vérifiant pas  $x = y = z$ .
  - (b) En déduire qu'il existe un entier  $x$  strictement compris entre 1 et  $p$  tel que  $p$  divise  $x^2 + x + 1$ , puis que  $p$  appartient à  $A$ .  
Décrire les éléments de  $A$ .

6. Soit  $D$  l'ensemble des entiers  $d$  tels qu'il existe un trio entier  $(a, b, c)$  vérifiant  $a + b + c = d$  et  $abc \neq 0$ .  
Montrer, grâce à la question 5/ de la deuxième partie, que tout élément de  $D$  possède un diviseur premier élément de  $A$ .  
Réciproquement, que peut-on dire d'un entier non nul admettant un diviseur premier élément de  $A$  ?
7. En déduire les éléments de  $D$  compris aux sens large entre 2001 et 2010.