Table des matières

1 Problème 1 : En pleine effervescence

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x. On a donc $\mathrm{E}(x) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.
Par exemple, $\mathrm{E}(2,4) = 2$, $\mathrm{E}(3) = 3$ et $\mathrm{E}(1,9) = 1$.
On dit qu'un réel x est *pétillant* si $x \geqslant 0$ et si, pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre $\mathrm{E}\left(x^{(2^n)}\right)+2$ est le carré d'un entier.

1.1 Mise en jambes

1. Démontrer que le réel $\frac{3}{2}$ n'est pas pétillant.
2. Démontrer que l'intervalle $[0;1[$ ne contient aucun réel pétillant.
3. **a.** Démontrer que, si un réel x est pétillant, alors le réel x^2 est aussi pétillant.
   b. Démontrer que, s'il existe un réel pétillant, alors il existe une infinité de réels pétillants.
4. Démontrer qu'aucun entier naturel n'est pétillant.

Dans la suite de ce problème, on considère un entier $k \geqslant 1$ fixé. On souhaite établir que l'intervalle $[k;k+1[$ contient un unique réel pétillant. On note $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$u_1 = (k+1)^2$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2$$

1.2 Existence

5. Démontrer que $u_n \geqslant 3$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
6. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique réel $a_n \geqslant 1$ tel que $a_n^{(2^n)} + 2 = u_n$, et un unique réel $b_n \geqslant 1$ tel que $b_n^{(2^n)} + 1 = u_n$.
7. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.
8. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note α sa limite.
9. Démontrer que $k < \alpha < k+1$ et que α est pétillant.

1.3 Unicité

Soit γ un réel pétillant contenu dans l'intervalle $[k;k+1[$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \mathrm{E}\left(\gamma^{(2^n)}\right)+2$.

10. Démontrer que $u_n = v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
11. Avec les notations de la partie 1.2, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_n \leqslant \gamma \leqslant b_n$$

12. **a.** Soient x et y deux réels tels que $x \geqslant y \geqslant 1$.
    Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$x^{(2^n)} - y^{(2^n)} \geqslant 2^n(x-y)$$

    b. Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ convergent toutes les deux vers γ.
13. Démontrer que γ est l'unique réel pétillant contenu dans l'intervalle $[k;k+1[$.

2 Problème 2 : Garder le cap

Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan. Dans ce problème, on considère un entier $n \geqslant 2$ fixé et on étudie une suite de points $(M_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $M_0 = O$ et que, pour tout entier $k \geqslant 0$, le vecteur $\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$ soit égal à $\vec{\imath}$ ou à $\vec{\jmath}$. Le but du problème est de démontrer qu'une telle suite de points contient toujours au moins n points alignés.

Notation : Dans toute la suite de l'exercice, une fraction $\frac{p}{q}$ peut aussi être désignée par p/q.

2.1 Étude des petites valeurs de n

1. Démontrer que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient toujours deux points alignés.
2. Démontrer que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient toujours trois points alignés.

2.2 Préliminaires

3. Démontrer qu'il existe une suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ telle que, pour tout entier $k \geqslant 0$,
   - ▷ le vecteur $\overrightarrow{M_0M_k}$ soit égal à $u_k\vec{\imath} + (k-u_k)\vec{\jmath}$;
   - ▷ le terme u_{k+1} soit égal à u_k ou bien à $1+u_k$.
4. Démontrer que, si l'on dispose de deux nombres réels s et t pour lesquels il existe n entiers k tels que $u_k = sk+t$, la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient bien n points alignés.

Dans la suite, pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $v_k = u_k/k$.

5. Démontrer, pour tout entier $k \geqslant 1$, que v_k est un nombre compris entre 0 et 1.

Enfin, au cours de ce problème, il sera fréquemment utile d'invoquer le résultat connu sous le nom de *principe des tiroirs* et qui est l'objet de la question suivante.

6. Soit k et ℓ deux entiers naturels non nuls. On veut répartir $k\ell$ chemises parmi k tiroirs. Démontrer qu'au moins un de ces k tiroirs contiendra au moins ℓ chemises.

2.3 Barrières rationnelles

Dans cette partie, on considère une fraction irréductible a/b comprise entre 0 et 1. Par conséquent, a et b sont deux entiers naturels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $1 \leqslant b$.

7. Soit $k \geqslant 1$ un éventuel entier tel que $v_k \leqslant a/b \leqslant v_{k+1}$ ou $v_{k+1} \leqslant a/b \leqslant v_k$. Démontrer que :

$$a - b \leqslant bu_k - ak \leqslant a$$

8. En déduire que, s'il existe au moins $(b+1)n$ entiers k tels que $v_k \leqslant a/b \leqslant v_{k+1}$ ou $v_{k+1} \leqslant a/b \leqslant v_k$, la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient bien n points alignés.

2.4 Couples serrés, moyennes naïves et recouvrements par des intervalles principaux

Soient a/b et c/d deux fractions irréductibles, dont les dénominateurs b et d sont strictement positifs. On dit que le couple $(a/b; c/d)$ est *serré* si l'égalité $bc - ad = 1$ est vérifiée. En outre, on appelle *moyenne naïve* des deux fractions a/b et c/d la fraction $(a+c)/(b+d)$. Enfin, on appelle *intervalles principaux* de la fraction a/b les deux intervalles $\left[\frac{a}{b} - \frac{1}{2bn}; \frac{a}{b}\right]$ et $\left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} + \frac{1}{2bn}\right]$. Plus précisément, on dit que $\left[\frac{a}{b} - \frac{1}{2bn}; \frac{a}{b}\right]$ est l'intervalle principal *inférieur* de a/b et que $\left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} + \frac{1}{2bn}\right]$ est l'intervalle principal *supérieur* de a/b. De manière générale, on dira qu'un intervalle est un *intervalle principal* s'il existe une fraction irréductible dont il est un intervalle principal.

9. Démontrer que le couple de fractions $(0/1; 1/1)$ est serré.

10. Soit $(a/b; c/d)$ un couple de fractions serré.

a. Démontrer que $a/b < c/d$.

b. Soit x/y la moyenne naïve des deux fractions a/b et c/d. Démontrer que x/y est une fraction irréductible, et que les couples $(a/b; x/y)$ et $(x/y; c/d)$ sont tous deux serrés.

11. Soient a/b, c/d et e/f trois fractions irréductibles telles que les couples $(a/b; c/d)$ et $(c/d; e/f)$ soient serrés. Démontrer que, si $d \geqslant 2n$, la fraction c/d appartient à l'intervalle principal supérieur de la fraction a/b et à l'intervalle principal inférieur de la fraction e/f.

On considère maintenant le processus suivant.
On part d'une liste dont les deux éléments sont les fractions irréductibles $0/1$ et $1/1$. Puis, tant que cette liste contient deux fractions consécutives a/b et c/d telles que $b + d < 2n$, on insère dans la liste, entre ces deux fractions, leur moyenne naïve $(a+c)/(b+d)$.

12. Démontrer que le processus ci-dessus finit nécessairement par s'arrêter, et qu'alors la liste obtenue contient au plus $4n^2$ fractions, dont tout couple de fractions consécutives est un couple serré.

Soit $0/1 = q_1 < q_2 < \ldots < q_\ell = 1/1$ les ℓ fractions obtenues à l'issue du processus ci-dessus. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant \ell - 1$, on note r_k la moyenne naïve des fractions q_k et q_{k+1}.

13. Démontrer que les dénominateurs des fractions r_k appartiennent tous à l'intervalle $[2n; 4n-1]$.

14. Démontrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant \ell - 1$, chacun des intervalles $[q_k; r_k]$ et $[r_k; q_{k+1}]$ est inclus dans un intervalle principal.

2.5 Coincé dans un intervalle principal

Soit a/b une fraction irréductible. On suppose qu'il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que chacun des termes $v_{\ell n}, v_{\ell n+1}, \ldots, v_{2\ell n-1}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} + \frac{1}{2bn}\right]$.

15. Démontrer que $0 \leqslant bu_k - ak < \ell$ pour tout entier k tel que $\ell n \leqslant k \leqslant 2\ell n - 1$.

16. En déduire que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient bien n points alignés.

On suppose maintenant qu'il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que chacun des termes $v_{\ell n}, v_{\ell n+1}, \ldots, v_{2\ell n-1}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{a}{b} - \frac{1}{2bn}; \frac{a}{b}\right]$.

17. Démontrer, sous ces nouvelles hypothèses, que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient bien n points alignés.

2.6 Conclusion

18. a. Démontrer que la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient nécessairement n points alignés.

b. Démontrer que n des $n \times 2^{32n^4}$ premiers points de la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ sont alignés.
Toute réponse aboutissant à une valeur finie différente de $n \times 2^{32n^4}$ sera prise en considération et valorisée selon la valeur proposée.

2.7 Vers l'infini, et au-delà !

19. La suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ contient-elle nécessairement une infinité de points alignés ?

3 Problème 3 : Un tournoi par équipes

Si E est un événement, on désigne par $\mathbb{P}(E)$ la probabilité de E. On pourra librement utiliser le résultat suivant : si $D_1, \dots, D_k$ sont des événements deux à deux disjoints, alors :

$$\mathbb{P}(D_1 \cup \cdots \cup D_k) = \mathbb{P}(D_1) + \cdots + \mathbb{P}(D_k)$$

3.1 Un jeu, deux joueurs

Ambre dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne PILE avec une probabilité $a \in]0;1[$ et donne FACE avec une probabilité $1-a$. Quant à lui, Benjamin dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne PILE avec une probabilité $b \in]0;1[$ et donne FACE avec une probabilité $1-b$.
Ils décident de jouer au jeu suivant : chacun lance sa pièce. S'ils obtiennent tous les deux PILE ou tous les deux FACE, ils relancent chacun leur pièce et continuent ainsi tant qu'ils obtiennent simultanément PILE ou simultanément FACE. *A contrario*, ils s'arrêtent dès que l'un obtient PILE et l'autre FACE. Celui qui obtient PILE est alors déclaré gagnant. Tous les lancers sont indépendants.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Ambre gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer », B_n l'événement « Benjamin gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » et C_n l'événement « chacun des deux joueurs lance au moins n fois sa pièce lors de ce jeu ».

1. **a.** On pose $\lambda = 1 - a - b + 2ab$. Démontrer que $\mathbb{P}(C_2) = \lambda$.
   b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer $\mathbb{P}(C_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(C_n)$. En déduire une expression de $\mathbb{P}(C_n)$ en fonction de n.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier.
   a. Exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de a, b et $\mathbb{P}(C_n)$.
   b. En déduire une expression de $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de a, b et n.
   c. Donner une expression de $\mathbb{P}(B_n)$ en fonction de a, b et n.
3. On note G_A l'événement « Ambre est gagnante » et G_B l'événement « Benjamin est gagnant ».
   a. Démontrer que $0 < \lambda < 1$.
   b. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\mathbb{P}(G_A) \geqslant a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$ et $\mathbb{P}(G_B) \geqslant b(1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$.
   c. On note $G_\varnothing$ l'événement « Ce jeu n'a aucun gagnant ». Déduire de ce qui précède que :

$$\mathbb{P}(G_A) = \frac{a(1-b)}{1-\lambda} \quad , \quad \mathbb{P}(G_B) = \frac{b(1-a)}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(G_\varnothing) = 0$$

3.2 Qu'est-ce qu'un jeu régulier ?

Un jeu à N personnes $A_1, A_2, \dots, A_N$ est dit *régulier* lorsqu'il possède les caractéristiques suivantes :

- ▷ Le jeu se déroule en un ou plusieurs tours successifs. Chaque tour ne concerne que deux joueurs. Chaque personne peut jouer plusieurs tours, mais n'est pas obligée de jouer contre chacune des autres personnes.
- ▷ À chaque tour, il ne peut y avoir qu'un seul gagnant.
- ▷ Il existe des réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_N$ tels que, pour toutes personnes A_i et A_j, le quotient des probabilités $\frac{\mathbb{P}(A_i \text{ gagne contre } A_j)}{\mathbb{P}(A_j \text{ gagne contre } A_i)}$ soit égal à $\frac{a_i}{a_j}$.

4. Démontrer que le jeu suivant est régulier :
   Les personnes $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ disposent chacune d'une pièce. Pour tout i, à chaque lancer, la pièce de la personne A_i donne PILE avec une probabilité $p_i \in]0;1[$ et donne FACE avec une probabilité $1-p_i$. Le jeu se déroule en un ou plusieurs tours successifs, et à chaque tour deux personnes se rencontrent et jouent selon les modalités du jeu décrit dans la partie 3.1.

3.3 Un tournoi régulier par équipes

Soient A et B deux équipes. On note $m \in \mathbb{N}^*$ l'effectif de A et $n \in \mathbb{N}^*$ l'effectif de B. On numérote alors les membres des équipes par ordre de passage : $A_1, A_2, \dots, A_m$ pour A et $B_1, B_2, \dots, B_n$ pour B. Les deux équipes A et B s'affrontent lors d'un tournoi constitué de plusieurs parties successives dont les issues sont indépendantes. Lors de chaque partie, la première personne de l'équipe A joue contre la première personne de l'équipe B et, à l'issue de cette partie, une seule de ces deux personnes est déclarée gagnante et le perdant est éliminé. Le gagnant joue alors contre une nouvelle personne de l'équipe adverse et on continue ainsi jusqu'à ce qu'une équipe n'ait plus d'adversaire, gagnant ainsi le tournoi.
Par exemple, pour $m = n = 3$, la personne A_1 joue contre la personne B_1. Si A_1 gagne, alors B_1 est éliminée, et A_1 joue contre B_2 lors de la seconde partie. Si, cette fois, c'est B_2 qui gagne, alors A_1 est éliminée et B_2 rencontre A_2 pour la partie suivante. Si B_2 gagne cette nouvelle partie, alors A_2 est éliminée et B_2 rencontre maintenant A_3. Si B_2 gagne à nouveau, alors A_3 est éliminée et l'équipe B a remporté le tournoi. On suppose de plus que l'ensemble du tournoi constitue un jeu régulier. Il existe donc des réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_m$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ tels que, pour chaque partie qui voit s'affronter les personnes A_i et B_j, on ait :

$$\frac{\mathbb{P}\left(A_i \text{ gagne contre } B_j\right)}{\mathbb{P}\left(B_j \text{ gagne contre } A_i\right)} = \frac{a_i}{b_j}$$

5. Dans cette question uniquement, on suppose que $a_i = b_j = 1$ pour tous i et j.
   On note $u_{m,n}$ la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi.
   a. Démontrer que $u_{m,n} + u_{n,m} = 1$.
   b. Que vaut $u_{n,n}$?
   c. Déterminer la valeur de $u_{1,n}$ en fonction de n.
   d. Déterminer la valeur de $u_{2,n}$ en fonction de n.
6. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas $m = n = 2$. Les nombres a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont plus supposés être égaux à 1.
   a. Exprimer la probabilité que A_i gagne contre B_j en fonction de a_i et b_j.
   b. Démontrer que la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi est égale à :

$$\frac{a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2 (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + \left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2\right) b_1 b_2}{(a_1 + b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_1)(a_2 + b_2)}$$

   Cette probabilité dépend-elle de l'ordre choisi des joueurs pour leur entrée dans le tournoi ?

3.4 Une généralisation

On conserve le tournoi régulier décrit dans la partie 3.3.
Cependant, en plus des parties du tournoi, on décide de faire jouer chaque membre de l'équipe A contre chacun des membres de l'équipe B qu'il n'a pas rencontrés durant le tournoi, les parties supplémentaires satisfaisant toujours la propriété $(\star)$. Cela donne un total de mn parties. On code les résultats de ces parties grâce à un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes. Dans la case située sur la ligne i et la colonne j, on place un symbole A si A_i a gagné contre B_j, et un symbole B sinon.
Dans l'exemple de tournoi présenté en début de partie 3.3 avec $m = n = 3$, on obtiendra un tableau de la forme :

A	B	?
?	B	?
?	B	?

où chacun des symboles ? cache un A ou un B selon le résultat de la partie ajoutée au tournoi.
De façon générale, on dira que le tableau est *gagnant* s'il correspond à un tournoi gagné par l'équipe A.

7. Dans cette question, on suppose que $m = 2$. Indiquer les formes possibles de tous les tableaux gagnants et montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il y a exactement $2^n + n2^{n-1}$ tableaux gagnants.

8. Dans cette question, on suppose toujours que $m = 2$.

a. On note D le produit de tous les nombres $\left(a_1 + b_j\right)\left(a_2 + b_j\right)$ lorsque j décrit $\{1; 2; \ldots; n\}$.
Ainsi, on a $D = (a_1 + b_1)\cdots(a_1 + b_n) \times (a_2 + b_1)\cdots(a_2 + b_n)$.
On pourra noter $D = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(a_1 + b_j\right)\left(a_2 + b_j\right)$.
On considère un tableau T, gagnant ou non. Pour ce tableau, on note respectivement x_1 et x_2 le nombre de parties gagnées par A_1 et par A_2. Pour tout j, on note y_j le nombre de parties gagnées par B_j.
Enfin, on organise un tournoi entre les équipes A et B, et on note $\mathbb{P}_T$ la probabilité que les résultats des mn parties effectuées donnent le tableau T.
Exprimer $\mathbb{P}_T$ en fonction des nombres $D, a_1, a_2, x_1, x_2, b_1, b_2, \ldots, b_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

b. On suppose maintenant que T est un tableau gagnant. On note k le nombre de colonnes $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline\end{array}$ de T et ℓ son nombre de colonnes $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$.

i. Justifier que T ne contient aucune colonne $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline B\\\hline\end{array}$ et qu'aucune colonne $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline\end{array}$ n'est à droite d'une colonne $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$.

ii. On note T' le tableau obtenu à partir de T de la façon suivante :

- ▷ On conserve les colonnes $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline A\\\hline\end{array}$ et on les laisse à leur place.
- ▷ On remplace les k colonnes $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline\end{array}$ et ℓ colonnes $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$ de T par ℓ colonnes $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline\end{array}$ suivies de k colonnes $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$.

Démontrer que T' est un tableau gagnant.
Qu'obtient-on si l'on effectue la même transformation à partir de T' ?

c. Démontrer que la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi ne dépend pas de l'ordre choisi des joueurs de l'équipe A pour leur entrée dans le tournoi.

9. On revient au cas général (m quelconque). Démontrer que la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi ne dépend pas de l'ordre choisi des joueurs pour leur entrée dans le tournoi.

1 Problème 1 : Le début justifie la fin

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté $\mathscr{S}$, des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.
Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathscr{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1. Démontrer que toute suite appartenant à $\mathscr{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 2$ pour lequel $u_N \leqslant 1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Ci-dessous, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

4. Démontrer que $0 \in E_0$.

5. a. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que, si x est un élément de E_0, alors l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans E_0.

6. a. Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

b. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

c. Démontrer que $1 \in E_\infty$.

7. Démontrer que, si x est un élément de E_∞, alors l'intervalle $[x, +\infty[$ est inclus dans E_∞.

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.

8. On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante.
Tout d'abord, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$ si $(a_n + b_n)/2 \in E_0$, et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ sinon.

a. Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes et ont même limite.

b. Soit δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que l'intervalle $]-\infty, \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta, +\infty[$ est inclus dans E_∞.

9. On pose $c_2 = \ln(\ln(2)), c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$ et $c_4 = \ln(\ln(2\ln(3\ln(4))))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geqslant 2, c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\cdots\ln((\ell-1)\ln(\ell))\ldots))))$.
Démontrer que, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, le nombre réel c_ℓ appartient à E_0.

10. Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell\geqslant 2}$ converge.

11. Démontrer que $\delta \in E_\infty$.

2 Problème 2 : La loi du milieu

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \ldots, 2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément ;
- si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c, avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b ;
- on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $\mathbb{P}[D_n = k]$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

2.1 Étude des petits cas

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2.

2.2 Valeurs extrêmes et symétrie

3. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}[D_n = 0]$.

4. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}[D_n = 1]$ en fonction de n.

5. Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Pourquoi a-t-on $\mathbb{P}[D_n = i] = \mathbb{P}[D_n = 2n - i]$?

6. Calculer l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.

2.3 Comportement limite

Dans cette partie, on souhaite étudier la loi de D_n lorsque n tend vers $+\infty$. Afin de faciliter cette étude, on démontre tout d'abord un résultat préliminaire.

7. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Démontrer que $u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Il est maintenant temps d'étudier la loi de D_n elle-même.

8. Déterminer, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$, la probabilité p_j que la boule de numéro j soit éliminée lors de la première sélection.

9. Démontrer que, si $n \geqslant 3$, alors $p_j \geqslant \frac{1}{2n}$ pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$.

10. On note M_n la plus grande des probabilités $\mathbb{P}\left[D_n = j\right]$ lorsque $0 \leqslant j \leqslant 2n$.
Démontrer que M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2.4 Résultat le plus probable

On rappelle que, pour deux événements A et B, on note $A \setminus B$ l'événement selon lequel A est réalisé, mais pas B. En outre, si $\mathbb{P}[B] \neq 0$, on note $\mathbb{P}_B[A]$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On souhaite ici démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\mathbb{P}[D_n = n] = M_n$. Dans ce but, on va démontrer la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1, \text{ on a } \mathbb{P}[D_n = k] \leqslant \mathbb{P}[D_n = k+1].$$

11. Démontrer que, si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathbb{P}[D_n = n] = M_n$.

12. Démontrer $\mathscr{P}_1$.

On suppose maintenant que l'on dispose d'un entier $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie et d'un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

13. Pour tout entier ℓ compris entre 0 et $2n$, distinct de k et de $k+1$, on note X_ℓ l'événement selon lequel les trois boules de numéros $k, k+1$ et ℓ sont choisies dès la première sélection.

- **a.** Pourquoi, si $\ell > k+1$, a-t-on $\mathbb{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0$ et $\mathbb{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = \mathbb{P}[D_{n-1} = k]$?
- **b.** Donner des résultats analogues sur $\mathbb{P}_{X_\ell}[D_n = k]$ et $\mathbb{P}_{X_\ell}[D_n = k+1]$ lorsque $\ell < k$.
- **c.** On note maintenant X l'événement selon lequel les deux boules de numéros k et $k+1$ sont choisies dès la première sélection. Démontrer que $\mathbb{P}_X[D_n = k] \leqslant \mathbb{P}_X[D_n = k+1]$.

14. Soit Y l'événement selon lequel l'une des boules de numéros k et $k+1$ est éliminée lors de la première sélection.

- **a.** Démontrer que $\mathbb{P}_{Y \setminus X}[D_n = k] = \mathbb{P}_{Y \setminus X}[D_n = k+1]$.
- **b.** En déduire que $\mathbb{P}_Y[D_n = k] \leqslant \mathbb{P}_Y[D_n = k+1]$.

15. Soient a, b et c les numéros des trois boules choisies lors de la première sélection, avec $a < b < c$.

- **a.** Soit G l'événement selon lequel $c < k$.
  Démontrer que $\mathbb{P}_G[D_n = k] \leqslant \mathbb{P}_G[D_n = k+1]$.
- **b.** Soit H l'événement selon lequel $a < k$ et $k+1 < c$.
  Démontrer que $\mathbb{P}_H[D_n = k] \leqslant \mathbb{P}_H[D_n = k+1]$.
- **c.** Soit I l'événement selon lequel $k+1 < a$. Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors :

$$\mathbb{P}_I[D_n = k] \leqslant \mathbb{P}_I[D_n = k+1]$$

16. Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbb{P}[D_n = k] \leqslant \mathbb{P}[D_n = k+1]$.

17. Démontrer $\mathscr{P}_n$.

3 Problème 3 : Que la force soit avec f !

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul, I un intervalle ouvert de $]0,+\infty[$, et f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives.
On dit que la fonction f est « k-forte » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \geqslant 0$$

On dit que f est « k-faible » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \leqslant 0$$

3.1 Quelques exemples et propriétés

1. Démontrer que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_1(x) = x^2$ est 1-forte et 3-faible.

2. Démontrer que la fonction f_2 définie sur l'intervalle $]0,1[$ par $f_2(x) = \exp(x)$ est 1-faible mais pas 1-forte.

3. Démontrer que la fonction f_3 définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $f_3(x) = \exp(x)$ est 1-forte mais pas 1-faible.

4. Démontrer que la fonction f_4 définie sur l'intervalle $0,+\infty[$ par $f_4(x) = \frac{1}{x}$ est k-faible pour tout entier $k \geqslant 1$.

5. Existe-t-il une fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui soit k-forte pour tout entier $k \geqslant 1$?

3.2 Quelques critères de force et de faiblesse

6. Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \leqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

7. Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{\max\left(x^k, y^k\right)}{\min\left(x^k, y^k\right)} \leqslant \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{\max\left(x^k, y^k\right)}{\min\left(x^k, y^k\right)} \geqslant \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

8. On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par :

$$g_k(x) = x^k f(x) \quad \text{et} \quad h_k(x) = \frac{f(x)}{x^k}$$

a. Démontrer que, si g_k et h_k sont monotones, alors f est k-forte ou k-faible.

b. Démontrer que, si f est k-faible, alors g_k et h_k sont monotones.

c. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 4x & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$

Démontrer que f est 1-forte mais que les fonctions g_1 et h_1 ne sont pas monotones.

9. On suppose dans cette question que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

a. Démontrer que, si $|f'(x)| \geqslant k\frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-forte.

b. Démontrer que, si $|f'(x)| \leqslant k\frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-faible.

c. Démontrer que les réciproques aux questions **9.a.** et **9.b.** sont vraies.

3.3 Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est « forte » s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-forte, et que f est « faible » s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-faible.

10. Démontrer que, si f est faible, la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ est faible.

11. Démontrer que, si deux fonctions f et g définies sur I sont faibles, les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont faibles.

12. Démontrer à l'aide de contre-exemples que, si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes, les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ne sont pas nécessairement fortes.

13. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives, et g une fonction définie sur $]0, +\infty[$.

a. Démontrer que, si f et g sont faibles, la fonction $g \circ f$ est faible.

b. Démontrer que, si f et g sont fortes, la fonction $g \circ f$ est forte.

3.4 Application à la démonstration d'inégalités

14. Soit a, b et c trois réels strictement positifs, et n un entier naturel non nul. Démontrer que :

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b+c}{a+c}\right)^n \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

15. Dans cette question, on pourra utiliser le fait que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ de dérivées respectivement $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.
La fonction tan est définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, démontrer que :

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}$$

1 Problème 1 : Nombres pointus

Soit n un entier naturel non nul. On dit que n est pointu si n admet au plus un facteur premier ou bien si, en notant p et q les deux plus grands facteurs premiers de n, avec $p > q$, l'inégalité $p \geqslant 2q$ est vérifiée.
Par exemple, 1 est pointu, car il n'a aucun facteur premier. De même, 25 est pointu, car il n'a qu'un seul facteur premier, et 147 est pointu, car $147 = 3 \times 7^2$ et $7 \geqslant 2 \times 3$. Au contraire, 105 n'est pas pointu, puisque $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $7 < 2 \times 5$.
Dans ce problème, on cherche à démontrer qu'il existe des suites arbitrairement longues d'entiers consécutifs pointus. Plus précisément, on souhaite démontrer la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

Pour tout entier $m \geqslant 1$, il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que les nombres $n+1, n+2, \ldots, n+m$ soient tous pointus.

1.1 Quelques exemples

1. Le nombre 2020 est-il pointu ?
2. Quel est le plus petit entier naturel non nul qui ne soit pas pointu ?
3. Quel est le plus petit nombre pointu possédant au moins quatre facteurs premiers distincts ?
4. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres pointus.
5. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels non nuls qui ne sont pas pointus.
6. Établir la liste des nombres pointus entre 1 et 20 inclus. Quelle est la longueur maximale d'une suite de nombres pointus consécutifs entre 1 et 20 ?

1.2 Peu de grands nombres premiers

On pose $0! = 1$, et $\ell! = 1 \times 2 \times \cdots \times \ell = \ell(\ell-1)!$ pour tout entier $\ell \geqslant 1$. Soient alors k et n deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$. On s'intéresse à la fraction

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

que l'on note $F_{n,k}$.

7. **a.** Calculer les valeurs des nombres $F_{3,1}$ et $F_{9,4}$.
   b. Démontrer que, si $k=0$ ou $k=n$, alors $F_{n,k} = 1$.
   c. Démontrer que, si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, alors $F_{n,k} = F_{n-1,k} + F_{n-1,k-1}$
   d. En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel $k \leqslant n, F_{n,k}$ est un entier naturel non nul inférieur ou égal à 2^n.

Dans cette question et dans les parties qui suivent, pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers p tels que $n+1 \leqslant p \leqslant 2n$, et on note π_n le nombre d'éléments de $\mathbb{P}_n$.

8. **a.** Démontrer que, pour tout nombre premier p appartenant à l'ensemble $\mathbb{P}_n$, l'entier $F_{2n,n}$ est divisible par p.
   b. Démontrer que, si a, b et c sont des entiers naturels non nuls tels que b et c sont premiers entre eux et divisent a, alors l'entier bc divise a lui aussi.
   c. Soit d le produit de tous les éléments de $\mathbb{P}_n$. Démontrer que l'entier $F_{2n,n}$ est divisible par d.
   d. En déduire que $n^{\pi_n} \leqslant 2^{2n}$.

1.3 Des ensembles à peu d'éléments

Soient b un entier naturel non nul, et $f_b :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_b(x) = \frac{(\ln(x))^b}{x} \quad \text{pour tout } x > 0$$

9. **a.** Soient x un nombre réel tel que $x > 1$, et soit $y = \ln(x)/b$. Démontrer que :

$$f_b(x) = \frac{b^b}{(\exp(y)/y)^b}$$

   b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_b(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on considérera deux entiers naturels non nuls ℓ et n fixés, tels que $n \geqslant 2$.

10. On note A_ℓ l'ensemble des entiers naturels non nuls dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à 2^ℓ.
    a. Parmi les entiers compris entre 1 et 30 inclus, lesquels appartiennent à l'ensemble A_2 ?
    b. On note $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à 2^ℓ, numérotés dans l'ordre croissant. Soit alors a un élément de A_ℓ qui soit inférieur ou égal à n.
    Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les entiers naturels tels que :

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

    Démontrer que les entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont tous inférieurs ou égaux à $\ln(n)/\ln(2)$.
    c. En déduire que A_ℓ compte au plus

$$\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1\right)^{2^\ell}$$

    éléments inférieurs ou égaux à n.
    d. On pose $b = 2^\ell$. Démontrer que A_ℓ compte au plus

$$\frac{2}{(\ln(2))^b} \times f_b(2n) \times n$$

    éléments inférieurs ou égaux à n.

11. Soit k un entier naturel non nul. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{P}_{2^k}$ désigne l'ensemble des nombres premiers p tels que $2^k+1 \leqslant p \leqslant 2\times 2^k$, et que π_{2^k} est le nombre d'éléments de $\mathbb{P}_{2^k}$.

a. Expliciter les ensembles $\mathbb{P}_{2^1}$ et $\mathbb{P}_{2^2}$.

On note $B_{k,1}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ayant au moins un facteur premier dans l'ensemble $\mathbb{P}_{2^k}$, et on note $B_{k,2}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ayant au moins deux facteurs premiers distincts dans l'ensemble $\mathbb{P}_{2^k}$.

b. Quel est le plus petit élément de l'ensemble $B_{2,2}$?

c. Soit p un nombre premier. Démontrer que le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n et multiples de p est au plus de n/p.

d. Démontrer que l'ensemble $B_{k,1}$ compte au plus $n\times\pi_{2^k}/2^k$ éléments inférieurs ou égaux à n.

e. En déduire que l'ensemble $B_{k,1}$ compte au plus $2n/k$ éléments inférieurs ou égaux à n.

f. Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts. Démontrer que le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n et multiples de p_1 et p_2 est au plus de $n/\left(p_1\times p_2\right)$.

g. En déduire que l'ensemble $B_{k,2}$ compte au plus $4n/k^2$ éléments inférieurs ou égaux à n.

12. Pour tout entier $k\geqslant 2$, on note également C_k l'ensemble $\left(B_{k-1,1}\cap B_{k,1}\right)\cup B_{k,2}$.

a. Quel est le plus petit élément de l'ensemble C_2 ?

b. Démontrer que l'ensemble C_k compte au plus :

$$\frac{4n}{k^2}+\frac{4n}{k(k-1)}$$

éléments inférieurs ou égaux à n.

13. On fixe maintenant un entier $\ell\geqslant 2$, et on note D_ℓ l'ensemble des entiers qui appartiennent à au moins l'un des ensembles C_k tels que $k\geqslant\ell$.

a. Démontrer que tout élément de $\{1,\dots,n\}$ appartenant à l'ensemble D_ℓ appartient à l'un des ensembles $C_\ell, C_{\ell+1},\dots,C_n$

b. Démontrer, pour tout entier $k\geqslant 2$, que :

$$\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k(k-1)}\leqslant\frac{2}{k-1}-\frac{2}{k}$$

c. En déduire que D_ℓ compte au plus $8n/(\ell-1)$ éléments inférieurs ou égaux à n.

1.4 Beaucoup de nombres pointus

Dans cette partie, on considère un entier naturel non nul m fixé.

14. Démontrer qu'il existe un entier $\ell\geqslant 2$ tel que, pour tout entier $n\geqslant 1$, l'ensemble D_ℓ compte au plus n éléments inférieurs ou égaux à $3mn$.

Dans la suite, on considère également un tel entier ℓ.

15. Soit a un entier naturel non nul. Démontrer que, si a n'est pas pointu, alors a appartient à A_ℓ ou à D_ℓ.

16. Démontrer qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ tel que l'ensemble A_ℓ compte au plus n éléments inférieurs ou égaux à $3mn$.

17. En déduire qu'il existe un entier naturel k inférieur ou égal à $2n$ et tel que chacun des entiers $mk+1$, $mk+2,\dots,m(k+1)$ soit pointu.

18. Démontrer la propriété $\mathscr{P}$ introduite en préambule de l'énoncé.

2 Problème 2 : Un nombre explosif

Si α est un réel strictement positif, on définit la suite (x_n) par $x_1=\alpha$ et

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^n\quad\text{pour tout entier } n\geqslant 1,$$

que l'on appelle *suite associée à* α.
On dit que le nombre α est *explosif* si la suite (x_n) associée à α diverge vers $+\infty$.
Le but du problème est de prouver qu'il existe un unique nombre explosif.

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\quad\text{pour tout réel } x>0$$

Ainsi, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :

$$x_{n+1}=f_n\left(x_n\right)$$

Dans tout le problème, pour tout réel t, l'exponentielle de t sera notée $\exp(t)$.

2.1 Un encadrement de $f_n(x)$

Soit x un réel strictement positif.

1. Démontrer que $\frac{1}{x+1}\leqslant\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}$.
2. En déduire que $\frac{1}{x+1}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leqslant\frac{1}{x}$.
3. En déduire que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :

$$\exp(n/(x+1))\leqslant f_n(x)\leqslant\exp(n/x)$$

2.2 Un critère d'explosivité

4. Soit α un réel strictement positif et (x_n) la suite associée à α. La suite (x_n) peut-elle être majorée ? Peut-elle être convergente ?

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $y_n=\frac{n+1}{\ln(n+2)}-1$.

5. **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $[2;+\infty[$ par

$$g(x)=\frac{x}{\ln(x+1)} \quad \text{pour tout réel } x \geqslant 2$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 8$, on a $y_n > \mathrm{e}$.

c. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $y_n > 1$ et $y_{n-1} \leqslant \frac{n}{\ln(y_n)}$.

6. Soit α un réel strictement positif et (x_n) la suite qui lui est associée.

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 8$, si $x_n < y_{n-1}$ alors $x_{n+1} > n+1$ et $x_{n+2} < \mathrm{e}$.

b. En déduire que, si α est explosif, alors $x_n \geqslant y_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 8$.

c. Démontrer que, si α est explosif, alors $x_n \leqslant \frac{n}{\ln(y_n)}$ pour tout entier $n \geqslant 8$.

d. Démontrer que α est explosif si et seulement si $y_{n-1} \leqslant x_n \leqslant \frac{n}{\ln(y_n)}$ pour tout entier $n \geqslant 8$.

7. Soient α, β et γ des réels strictement positifs tels que $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Démontrer que, si α et γ sont explosifs, alors β est explosif.

2.3 Un unique nombre explosif

Soient r et s deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et telles que $s(x)>0$ pour tout réel $x>0$. On désigne par $r \circ s$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$r \circ s(x) = r(s(x)) \quad \text{pour tout réel } x>0$$

On pose alors $h_1 = f_1$ et

$$h_n = f_n \circ h_{n-1} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 2$$

De plus, on note $h_n\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ l'ensemble des réels $h_n(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$.

On admettra enfin que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. **a.** Expliciter l'expression de $h_2(x)$ pour tout réel $x>0$.

b. Soit α un réel strictement positif et (x_n) sa suite associée.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer x_{n+1} en fonction de h_n et α.

9. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction h_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. À l'aide de la calculatrice et sans plus de justification, déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près des réels u et v tels que $]u;v[= h_8\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.
Vérifier que l'on a $u < \mathrm{e}$ et $9 < v$.

c. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 9$, on a $[\mathrm{e};n] \subset h_{n-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

d. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 9$, on a $\left[y_{n-1}; n/\ln\left(y_n\right)\right] \subset h_{n-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Pour tout entier $n \geqslant 9$, on pose $I_n = \left[y_{n-1}; n/\ln\left(y_n\right)\right]$ et on note J_n l'ensemble des réels strictement positifs x tels que $h_{n-1}(x) \in I_n$.

10. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 9$, il existe des réels a_n et b_n tels que $J_n = [a_n; b_n]$.

b. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 9$, on a $J_{n+1} \subset J_n$.

c. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent.

Dans toute la suite, on note α et β les limites respectives des suites (a_n)) et (b_n).
De plus, on désigne par (α_n) et $\left(\beta_n\right)$ les suites respectivement associées à α et β. On rappelle que cela signifie que $\alpha_1 = \alpha$ et $\beta_1 = \beta$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\alpha_{n+1} = f_n(\alpha_n) \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = f_n\left(\beta_n\right)$$

11. **a.** Démontrer que α et β sont explosifs.

b. Démontrer qu'un réel $x>0$ est explosif si et seulement si $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

12. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 9$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$\left|f_n'(x)\right| \geqslant \left|f_n'\left(\frac{n}{\ln\left(y_n\right)}\right)\right|$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 9$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$\left|f_n'(x)\right| \geqslant \frac{y_n\left(\ln\left(y_n\right)\right)^2}{n}\exp\left(-\frac{1+\ln\left(y_n\right)}{n+\ln\left(y_n\right)}\ln\left(y_n\right)\right)$$

c. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n\ln(n)}{n} = 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(y_n)}{\ln(n)} = 1$.

d. En déduire qu'il existe un entier $N \geqslant 9$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$ et tout réel $x \in I_n$, on a :

$$\left|f_n'(x)\right| \geqslant 2$$

13. Dans cette question, on désigne donc par N un tel entier.

a. Déduire du **12.d.** que, pour tout entier $n \geqslant N$ et pour tous réels x et y dans I_n, on a :

$$\left|f_n(x) - f_n(y)\right| \geqslant 2|x-y|$$

b. Démontrer que, si $\alpha < \beta$, alors il existe un réel strictement positif C tel que :

$$\left|\alpha_n - \beta_n\right| \geqslant C \times 2^n \quad \text{pour tout entier } n \geqslant N$$

14. **a.** Démontrer qu'il n'existe qu'un seul nombre explosif.

b. À l'aide de la calculatrice et en indiquant l'algorithme utilisé, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

1 Problème 1 : Ensembles remarquables de fonctions

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$.
Pour f et g dans $\mathscr{P}$, on définit la fonction $h = f\circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$h(x) = f(g(x))$$

Si, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant g(x)$, on note $f \geqslant g$.
On note u et v les fonctions de $\mathscr{P}$ définies, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par :

$$u(x) = \mathrm{e}^x - 1 \quad \text{et} \quad v(x) = \ln(x+1)$$

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geqslant 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Les nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f.
Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$, on définit les propriétés :

(P1) $\mathscr{S}$ contient u et v.

(P2) $\mathscr{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.

(P3) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f+g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P4) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f\circ g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P5) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$ avec $f \geqslant g$, alors $f-g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P6) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f\times g$ est dans $\mathscr{S}$.

1. Soit $\mathscr{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**.

   a. Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $\ell(x) = x$.
   Démontrer que la fonction ℓ est dans $\mathscr{T}$.

   b. Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathscr{T}$.

   c. Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$.
   Démontrer que la fonction p est dans $\mathscr{T}$.

   d. Une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ est-elle toujours dans $\mathscr{T}$?

2. Dans cette question, on suppose que $\mathscr{U}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)** et **(P5)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P6)**.
La réponse donnée à la question **d.** est-elle encore valable ?

3. Dans cette question, on suppose que $\mathscr{V}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P3)**.

   a. Soit d un entier naturel non nul. On note Q_d la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par :
   $$Q_d(x) = (x+1)^d - 1$$
   Montrer que $Q_d \in \mathscr{V}$.

   b. Soit d un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe des nombres entiers $a_1, \dots, a_d$ supérieurs ou égaux à 1 tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,
   $$(x+1)^d = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + 1$$
   Étant donné un nombre réel $x \geqslant 0$, on introduira une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres d et $\frac{\lambda}{1+x}$.

   c. Soit f une fonction polynomiale telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \geqslant 0$ et un entier naturel non nul d tels que la fonction qui, à tout nombre réel $x \geqslant 0$, associe :
   $$c\left(x + x^2 + \cdots + x^d\right) - f(x)$$
   est une fonction polynomiale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

   d. En déduire que, si f est une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ telle que $f(0) = 0$, alors f est dans $\mathscr{V}$.

   e. Soit f une fonction dans $\mathscr{P}$.

   - On dit que f est *segmentée* si elle vérifie la propriété :
     Pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, il existe un nombre réel $b \geqslant 0$ tel que, pour tout x vérifiant $0 \leqslant x \leqslant a$,
     $$0 \leqslant f(x) \leqslant b$$
   - On dit que f est *bornée* si elle vérifie la propriété :
     Il existe un nombre réel $b \geqslant 0$ tel que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,
     $$0 \leqslant f(x) \leqslant b$$

   On note alors $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions segmentées et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions segmentées qui sont nulles en 0 ou bornées.

   i. Soit f une fonction dans $\mathscr{P}$. On suppose f bornée. Démontrer que f est segmentée. La réciproque est-elle vraie ?

   ii. Montrer que $\mathscr{A}$ satisfait les propriétés **(P1)** à **(P6)**.

   iii. Montrer que $\mathscr{B}$ satisfait les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**, mais ne satisfait pas la propriété **(P3)**.

   f. Une fonction polynomiale dans $\mathscr{P}$ est-elle nécessairement dans $\mathscr{V}$?

2 Problème 2 : Les nombres joviaux

Soient n et p deux entiers tels que $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$. On dit que p est *jovial d'ordre* n s'il existe des entiers $a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$2 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad , \quad a_n = p \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$$

Ainsi, 12 est jovial d'ordre 4 car $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$.
Un entier $p \geqslant 2$ est dit *jovial* s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que p soit jovial d'ordre n.

2.1 Quelques exemples

1. Montrer que, si l'entier p est jovial d'ordre n, alors $n \leqslant p-1$.
2. Existe-t-il des entiers joviaux d'ordre 2 ? Montrer que 2 et 4 ne sont pas joviaux.
3. Montrer qu'un entier premier n'est pas jovial.
4. Quel est le plus petit entier jovial ?
5. Déterminer tous les entiers joviaux d'ordre 3.
6. Soit p un entier jovial. Montrer que $2p$ et $p(p+1)$ sont joviaux.
7. Montrer que le produit de deux entiers joviaux est jovial.

2.2 Deux suites d'entiers

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = 1 + u_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\,(1+u_n)$$

1. Montrer, pour tout $n \geqslant 3$, que u_n est un entier jovial d'ordre n.
2. Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, que $v_{n+1} = v_1 v_2 \cdots v_n + 1$.

2.3 Un majorant optimal pour les nombres joviaux d'ordre fixé

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{H}_n$ la propriété suivante :
Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des entiers strictement positifs et a un nombre rationnel strictement positif tels que

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant a \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1$$

alors $a+1 \leqslant v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n(a+1) \leqslant v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.
On se propose de démontrer par récurrence sur n que la propriété $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Démontrer que la propriété $\mathscr{H}_1$ est vraie.

Dans les questions suivantes, on considère un entier $n \geqslant 2$, et on suppose que la propriété $\mathscr{H}_{n-1}$ est vraie. On considère des entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ et un nombre rationnel strictement positif a tels que :

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant a \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1$$

2. Montrer que $x_1 \geqslant 2$ et que $a \leqslant x_1 x_2 \cdots x_n$.
3. On suppose dans cette question que $\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} \geqslant 1$ et que $x_n > x_{n-1}$.
   - **a.** Montrer qu'il existe un unique nombre rationnel q, strictement positif, tel que :
   $$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{q} = 1$$
   - **b.** Montrer que $x_n - 1 \leqslant q$.
   - **c.** En déduire que $q+1 \leqslant v_n$ puis que $x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant v_1 v_2 \cdots v_n$.
   - **d.** En déduire que $a+1 \leqslant v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n(a+1) \leqslant v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.
4. On suppose dans cette question que $\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} \geqslant 1$ et que $x_n = x_{n-1}$.
   - **a.** Montrer que $x_n \geqslant 4$.
   - **b.** Montrer qu'il existe deux uniques nombres rationnels, strictement positifs, r et t tels que :
   $$\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{x_n - 2} + \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1}{x_n - 2} + \frac{1}{t} = 1$$
   - **c.** Montrer que $r = x_n + 1 + \frac{4x_n - 2}{x_n^2 - 4x_n + 2}$ puis que $(x_n - 2)\,(r+1) \geqslant x_n^2$.
   - **d.** Montrer que $t \geqslant r \geqslant x_n$.
   - **e.** En déduire que $a+1 \leqslant v_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n(a+1) \leqslant v_1 \cdots v_n v_{n+1}$.
5. On suppose dans cette question que $\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} < 1$.
   - **a.** Montrer qu'il existe un unique nombre rationnel, strictement positif, b tel que :
   $$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} + \frac{1}{b} = 1$$
   - **b.** Montrer que $(x_n - 1)\,(b+1) \geqslant x_n(a+1)$.
6. En déduire que la proposition $\mathscr{H}_n$ est vraie.
   Indication : Dans le cas où
   $$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} < 1$$
   on pourra chercher à remplacer x_n par $x_n - 1$ et a par b.
7. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$, que u_n est le plus grand entier jovial d'ordre n.

3 Problème 3 : Plus d'une chance sur deux pour tout le monde

3.1 Des urnes et des dés

1. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes A, B et C qui contiennent chacune quatre jetons indiscernables au toucher. Les jetons de A portent les numéros 12, 10, 3 et 1, ceux de B portent les numéros 9, 8, 7 et 2, et ceux de C portent les numéros 11, 6, 5 et 4.
On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C.
Montrer que $\mathbb{P}(X_A > X_B) = \frac{9}{16}$ et que $\mathbb{P}(X_B > X_C) = \frac{9}{16}$. Que vaut $\mathbb{P}(X_C > X_A)$?

2. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois dés cubiques et équilibrés D_1, D_2 et D_3. Les faces de D_1 portent les numéros $6,3,3,3,3,3$, celles de D_2 portent les numéros $5,5,5,2,2,2$, et celles de D_3 portent les numéros $4,4,4,4,4,1$.

a. On lance indépendamment chacun de ces trois dés et on note respectivement X_1, X_2 et X_3 les numéros indiqués par la face supérieure des dés D_1, D_2 et D_3.
Calculer les trois probabilités $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$, $\mathbb{P}(X_2 > X_3)$ et $\mathbb{P}(X_3 > X_1)$.

b. Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé et celui qui obtient le plus grand numéro gagne.
Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

c. Finalement, il est décidé que c'est Paul qui choisit en premier. Quel(s) dé(s) a-t-il intérêt à choisir ?

d. Claire et Paul décident alors de modifier les règles. L'un d'eux choisit un des trois dés. Puis l'autre joueur choisit un des deux dés restants. Ils lancent chacun leur dé deux fois de suite et celui dont la somme des numéros est la plus grande gagne.
Paul choisit en premier et il prend le dé D_2. Quel dé Claire a-t-elle intérêt à choisir ? De façon générale, avec ces nouvelles règles, Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

3.2 La suite de Fibonacci et des urnes

La *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$, que $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} < 2F_n$.

2. Soit $k \geqslant 4$ un entier. Dans cette question, on suppose que l'on dispose de trois urnes A, B et C ainsi que de $3F_k$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3F_k$. On répartit ces jetons de la façon suivante :

- les F_{k-2} jetons de plus grands numéros sont placés dans A ;
- les F_{k-1} jetons de plus grands numéros restants sont placés dans B ;
- les F_k jetons de plus grands numéros restants sont placés dans C ;
- les F_{k-1} jetons de plus grands numéros restants sont placés dans A ;
- les F_{k-2} derniers jetons sont placés dans B.

On tire indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C.

a. Démontrer les trois inégalités :

$$\mathbb{P}(X_A > X_B) > \frac{1}{2} \quad , \quad \mathbb{P}(X_B > X_C) > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_C > X_A) > \frac{1}{2}$$

b. Claire et Paul jouent au jeu suivant : l'un commence par choisir une des trois urnes ci-dessus et pioche un des jetons qu'elle contient. Puis l'autre joueur choisit une des deux autres urnes et pioche un des jetons qu'elle contient. Celui des deux qui obtient le jeton de plus grand numéro gagne.
Claire a-t-elle intérêt à choisir son dé avant Paul ou à le laisser choisir en premier ?

3.3 Urnes non transitives

Soit $n \geqslant 3$ un entier. On dispose de trois urnes A, B et C et de $3n$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n$. On répartit alors les jetons dans les trois urnes de sorte que chaque urne contienne n jetons. On tire alors indépendamment un jeton dans chacune des trois urnes, et on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C.

1. On suppose, dans cette question uniquement, que chacune des trois probabilités $\mathbb{P}(X_A > X_B)$, $\mathbb{P}(X_B > X_C)$ et $\mathbb{P}(X_C > X_A)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. On dispose de trois autres urnes, D, E et F et de $3n+6$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n+6$. Les $3n$ jetons numérotés de 1 à $3n$ ont été répartis comme précédemment dans les urnes A, B et C. Les urnes D, E et F sont alors remplies de la façon suivante :

- l'urne D reçoit le contenu de l'urne A, ainsi que les jetons numérotés $3n+1$ et $3n+6$;
- l'urne E reçoit le contenu de l'urne B, ainsi que les jetons numérotés $3n+4$ et $3n+5$;
- l'urne F reçoit le contenu de l'urne C, ainsi que les jetons numérotés $3n+2$ et $3n+3$.

Chacune des urnes D, E et F contient ainsi $n+2$ jetons. On tire alors indépendamment un jeton dans chacune des urnes D, E et F, et on note respectivement X_D, X_E et X_F les numéros des jetons tirés dans D, E et F.

a. Exprimer $\mathbb{P}(X_D > X_E)$ en fonction de n et $\mathbb{P}(X_A > X_B)$.

b. Montrer que chacune des probabilités $\mathbb{P}(X_D > X_E)$, $\mathbb{P}(X_E > X_F)$ et $\mathbb{P}(X_F > X_D)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

2. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On note $\mathscr{H}_n$ la propriété suivante :
Il est possible de répartir $3n$ jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $3n$, dans trois urnes A, B et C de sorte que les deux conditions ci-dessous soient satisfaites.

- Chacune des trois urnes contient n jetons.
- Si l'on tire indépendamment un jeton dans chacune de ces urnes et si l'on note respectivement X_A, X_B et X_C les numéros des jetons tirés dans A, B et C, alors chacune des probabilités $\mathbb{P}(X_A > X_B)$, $\mathbb{P}(X_B > X_C)$ et $\mathbb{P}(X_C > X_A)$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

a. Montrer que les propriétés $\mathscr{H}_3$ et $\mathscr{H}_4$ sont vraies.

b. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$, que l'affirmation $\mathscr{H}_n$ est vraie.

1 Problème 1 : Approximations de courbes

1.1 Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0;1]$ par :

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n. Ainsi $B_{0,0}(p) = 1$, $B_{1,0}(p) = 1-p$ et $B_{1,1}(p) = p$.
Ces polynômes sont appelés ***polynômes de Bernstein***.

1. **a.** Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.
   b. Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p)$, $B_{3,1}(p)$, $B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.
2. **a.** Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$?
   b. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n-1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p)$$

3. **a.** En quelle(s) valeur(s) $p \in [0;1]$ s'annule un polynôme de Bernstein ?
   On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de n et de i.
   b. Qu'en est-il de son signe sur $[0;1]$?
4. Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité : c'est-à dire, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \ldots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1$$

5. Déterminer la valeur des sommes :

$$\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p)$$

   Que représentent ces sommes en termes probabilistes ?

1.2 Des courbes de Bézier

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ points non alignés du plan $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$.
On appelle courbe de Bézier de degré n et de points de contrôle $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec p variant dans l'intervalle $[0;1]$ tels que :

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP}_i$$

Dans la suite on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.
On se fixe donc A, B, C trois points du plan non alignés.

1. Reconnaitre la nature géométrique
   a. de la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle A
   b. de la courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle B et C.
2. On s'intéresse à la courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle A, B et C.
   a. Justifier que les points A et C appartiennent à cette courbe. Le point B y appartient-il ?
   b. Dans cette question on prend les points de coordonnées $A(-2;5)$, $B(2;1)$ et $C(4;3)$. Proposer une construction des points de cette courbe pour $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{4}$. Tracer la courbe à main levée.
3. Démontrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle ABC.
4. Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2 ? Justifier votre réponse.

2 Problème 2 : Un si discret Monsieur Dirichlet

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble fini non vide de points du plan. Certaines paires de points de $\mathscr{S}$ sont reliées par des traits, de sorte qu'en suivant ces traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible de passer d'un point de $\mathscr{S}$ à n'importe quel autre (les intersections éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même).

Deux points de $\mathscr{S}$ reliés par un trait sont dits ***voisins***.

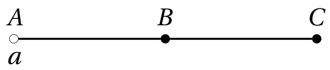
Si M est un point de $\mathscr{S}$, on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de M, et on note $d(M)$ le nombre de voisins de M, appelé le ***degré*** de M.

Chaque point de $\mathscr{S}$ a été colorié soit en bleu soit en jaune, et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble $\mathscr{S}$. À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix. La mathématicienne Maryam voudrait alors attribuer un réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à l'autre) de façon à satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$ suivante :

$(\mathscr{P})$ Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.

2.1 Quelques exemples pour commencer

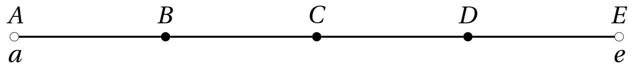
1. Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathscr{S} = \{A, B, C\}$, avec A voisin de B, lui-même voisin de C comme sur dessin ci-dessous.



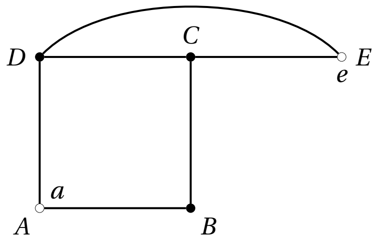
De plus, A est le seul point jaune et Gustav lui a attribué le réel a.
Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à B et à C afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$?

2. Pour les trois questions suivantes on suppose que $\mathscr{S} = \{A, B, C, D, E\}$. Les points A et E sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et e.

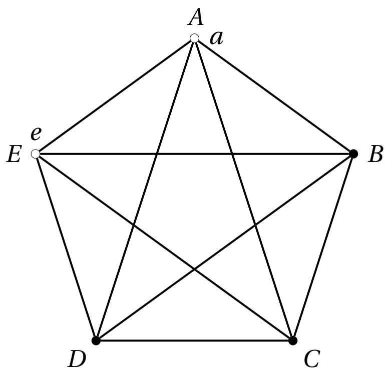
a. Les liaisons étant indiquées selon le schéma suivant, quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points B, C et D afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$?



b. Même question pour le schéma suivant :



c. Même question pour le schéma suivant :



3. Dans cette question uniquement on généralise le schéma de la question **2.c.** avec un nombre quelconque de points.

On suppose que $n \geqslant 1$ est un entier, que $\mathscr{S} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}\}$ et que tout point de $\mathscr{S}$ est voisin de chaque autre point de $\mathscr{S}$. De plus, P_0 et P_{n+1} sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et b. Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points P_i pour $i = 1, \ldots, n$ afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$?

2.2 Étude du cas général

On note respectivement $\mathscr{J}$ l'ensemble des points jaunes, et $\mathscr{B}$ l'ensemble des points bleus. Ainsi :

$$\mathscr{S} = \mathscr{J} \cup \mathscr{B}$$

Quand Gustav attribue un réel à chaque point jaune, cela consiste à définir une fonction k de $\mathscr{J}$ dans $\mathbb{R}$. L'objectif de Maryam est donc de construire une fonction $f : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune (1)} \\ f(M) = \frac{f(P_1)+\ldots+f(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu (2)} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et } P_1, \ldots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

On dira alors que f est une solution ***pour l'attribution*** k.
Dans cette partie, on suppose donc donnée une telle attribution k.
On note K le plus grand des nombres $k(M)$ lorsque M décrit l'ensemble $\mathscr{J}$.

2.3 Existence d'une solution

1. On suppose dans cette question que $k(M) \geqslant 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$. On construit alors, par récurrence, la suite $\left(f_n\right)$ de fonctions suivante :
On pose $f_0(M) = k(M)$ si M est jaune, et $f_0(M) = 0$ si M est bleu.
Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$\begin{cases} f_{n+1}(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune,} \\ f_{n+1}(M) = \frac{f_n(P_1)+\ldots+f_n(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu,} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et } P_1, \ldots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

a. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $0 \leqslant f_n(M) \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant K$.

b. En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution k.

2. Prouver que si f est une solution pour l'attribution k et si α est une constante, alors la fonction $f + \alpha$ est aussi une solution pour l'attribution $k + \alpha$.

3. En déduire qu'il existe une solution à notre problème en général, c'est-à-dire sans l'hypothèse de la question **1.** : $k(M) \geqslant 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$.

2.4 Unicité de la solution

On suppose dans cette sous-partie que l'on dispose d'une solution f pour cette attribution k.

4. Prouver que, pour tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $f(M) \leqslant K$.

5. Supposons que g soit également une solution pour l'attribution k.

a. Justifier que la fonction $f - g$ vérifie la condition (2).

b. Que vaut $f - g$ sur $\mathscr{J}$?

c. En déduire que $f = g$.

6. Que peut-on dire de f s'il n'y a qu'un seul point jaune?

3 Problème 3 : Les nombres en or

On note φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x+1$. Le nombre φ, connu depuis l'Antiquité, est appelé *nombre d'or*. Un réel x est dit un ***nombre en or*** s'il existe :

- deux entiers naturels p et q
- des entiers $a_p, a_{p-1}, \cdots, a_0, \ldots, a_{-q}$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1 tels que :

$$x = a_p\varphi^p + a_{p-1}\varphi^{p-1} + \ldots + a_1\varphi + a_0 + a_{-1}\varphi^{-1} + \cdots + a_{-q}\varphi^{-q}$$

Dans ce cas, on notera $x \rhd a_p a_{p-1} \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-q}$.
Par exemple si $x = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^4}$, on notera $x \rhd 1101,1001$. On dira que alors $1101,1001$ est une ***représentation en or*** de x.
Il est clair que l'on peut ajouter, au début, ou la fin de la représentation autant de 0 que l'on souhaite.
Une séquence de la représentation est une suite de 0 et de 1 qui apparaît dans la représentation. Dans l'exemple précédent, 10110 est une séquence de la représentation 1**101,10**01.

3.1 Tous les entiers naturels sont en or

1. Montrer que, dans la représentation en or de x, on peut remplacer toute séquence 011 par 100 et réciproquement afin d'obtenir une autre représentation en or de x.
   Par exemple le réel dont la représentation en or est $1101,1001$ admet également $1110,0001$ et $1101,0111$ comme représentation en or.
   On dira que les deux séquences 011 et 100 sont équivalentes.
2. Plus généralement, donner une séquence dans laquelle il n'y a jamais deux 1 consécutifs et qui soit équivalente à $011\cdots1$ où il y a n occurrences du chiffre 1.
3. Montrer que les entiers 2 et 3 sont des nombres en or et en donner une représentation en or.
4. Montrer que tous les entiers naturels admettent une représentation en or.

3.2 Représentation en or pur

On dira qu'une représentation $x \rhd a_p a_{p-1} \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-q}$ d'un nombre en or est en ***or pur*** si pour tout i,

$$a_i a_{i+1} = 0$$

En d'autres termes, une représentation de x est en or pur si elle ne contient jamais deux 1 consécutifs.

Soit x un réel non nul, si $x \rhd a_p a_{p-1} \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-q}$, on définit la ***teneur en or*** de la représentation comme étant égale à l'exposant de la plus grande puissance de φ dont le coefficient vaut 1, dans l'égalité $x = a_p\varphi^p + \ldots \cdots + a_{-q}\varphi^{-q}$.
Par exemple la teneur de la représentation $1101,1001$ est égale à 3 et celle de $0,0010$ est égale à -3.

1. Donner une représentation en or pur des entiers 2, 3, 4 et 5.
2. Soit x un réel ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à n.
   - **a.** Montrer que
   $$\varphi^n \leqslant x < \varphi^{n+1}$$
   - **b.** Montrer que la représentation en or pur d'un réel, si elle existe, est unique.
3. Soit x un réel non nul ayant une représentation en or pur.
   - **a.** Exprimer la teneur en or de la représentation en or pur de x à l'aide des fonctions logarithme népérien et partie entière.
   - **b.** Écrire un algorithme permettant de déterminer cette représentation.
   - **c.** Appliquer votre algorithme pour $x = 2018$.
4. Montrer qu'un réel en or possède forcément une représentation en or pur.
5. Montrer qu'il existe des réels strictement positifs qui ne sont pas en or.

1 Problème 1 : Parties de $\mathbb{C}$ de type S

Une partie $\mathscr{A}$ non vide de $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) est dite de type S, si pour tout $z_1 \in \mathscr{A}$ et $z_2 \in \mathscr{A}$ le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans $\mathscr{A}$.

Dans tout le problème $\mathscr{A}$ désigne une partie de $\mathbb{C}$ de type S.

On note $b(\mathscr{A})$ le nombre de nombres complexes z de $\mathscr{A}$ dont le module $|z|$ est inférieur ou égal à 1 . On note $b(\mathscr{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

1.1 Quelques exemples simples

1. Les ensembles suivants sont des parties de $\mathbb{C}$ de type S (on ne demande pas de le vérifier), préciser pour chacun d'eux la valeur de $b(\mathscr{A})$:

   a. $\mathscr{A} = \{0\}$.
   b. $\mathscr{A} = \mathbb{C}$.
   c. $\mathscr{A} = \mathbb{N}$.
   d. $\mathscr{A} = \mathbb{N}^*$.

2. **a.** Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 0$.
   b. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 3$.

3. On note $\overline{\mathscr{A}} = \{\bar{z}, z \in \mathscr{A}\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée des nombres complexes conjugués des éléments de $\mathscr{A}$. Montrer que $\overline{\mathscr{A}}$ est de type S et préciser $b\left(\overline{\mathscr{A}}\right)$.

1.2 Deux exemples de parties de $\mathbb{C}$ de type S

1. On définit le complexe j par $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \left\{a + bj, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + bj$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

   a. Calculer $1 + j + j^2$.
   b. Justifier que $\mathbb{Z}[j]$ est de type S.
   c. Montrer que $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$.
   d. On note $\mathbb{Z}[j]^* = \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$ (les éléments non nuls de $\mathbb{Z}[j]$).
   Justifier que $\mathbb{Z}[j]^*$ est de type S et déterminer $b\left(\mathbb{Z}[j]^*\right)$.

2. On définit la partie $\mathscr{R}$ de $\mathbb{C}$ par

$$\mathscr{R} = \left\{z \in \mathbb{C}, z^2 \in \mathbb{Z}[j]\right\}$$

   Ainsi un nombre complexe z est dans $\mathscr{R}$ si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[j]$.

   a. Montrer que $\mathscr{R}$ est de type S.
   b. Déterminer $b(\mathscr{R})$.

1.3 À la recherche des valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b(\mathscr{A}) = \infty$.

2. On considère, dans cette question, un nombre complexe a de module 1. On note $\arg(a)$ l'unique argument de a inclus dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On suppose de plus que $\arg(a)$ n'est ni un multiple de $\frac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\frac{\pi}{4}$.

   a. Montrer que si $\arg(a) \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right[$, alors l'un des deux nombres complexes $a^2 + a^4$ ou $a^4 + a^8$ possède un module non nul et strictement inférieur à 1.
   b. De même montrer que si $\arg(a) \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.
   c. Montrer que si $\arg(a) \in \left]-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.
   d. Conclure qu'il existe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

3. On suppose, dans cette question, que $b(\mathscr{A})$ est fini et supérieur ou égal à 2.

   a. Montrer qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $|a| = 1$.
   b. Quelles sont alors les valeurs possibles pour $\arg(a)$?
   c. En déduire que $b(\mathscr{A}) \leqslant 17$.

4. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 5$.

5. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 9$.

6. Quelles sont les valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$?

2 Problème 2 : C'est probablement bon

2.1 Franck passe un premier examen

Franck doit réussir un examen qui consiste en un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples) de dix questions numérotées de 1 à 10. Il doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes.*

Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Franck réussira son premier examen si sa note finale est d'au moins *sept* points.

Franck connaît les bonnes réponses des *six* premières questions. Par contre, pour chacune des quatre questions suivantes, il a une probabilité p de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

1. Prouver que si Franck ne répond pas à la question numérotée 9 , il a intérêt à ne pas répondre à la question numérotée 8 pour réussir son examen.

2. Franck a-t-il intérêt à répondre à la question numérotée 10 ?

3. Déterminer, selon la valeur de p, quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

2.2 Franck passe un second examen

Franck passe maintenant un second examen, consistant encore en un Q.C.M, formé cette fois de 50 questions. Les modalités de cet examen sont les mêmes que celles du précédent. Ainsi Franck doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes.* Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Cependant, pour réussir cette fois, Franck doit obtenir une note finale d'au moins 25 points. Franck connaît les réponses aux 24 premières questions. Par contre, pour chacune des 26 questions suivantes, il a une probabilité p de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

Pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant 26$, on note P_k la probabilité que Franck réussisse son examen en ne répondant qu'aux seules $24+k$ premières questions.

1. Prouver que, pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant 13$, on a $P_{2k-1} > P_{2k}$.
2. Prouver que, pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 12$, on a :

$$P_{2k+1} = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{2k+1-i}$$

3. Démontrer que, pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 11$, on a :

$$P_{2k+3} - P_{2k+1} = \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{k+1} (2p-1)$$

On pourra utiliser librement la formule de Pascal pour $0 < m < n$: $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.

4. Déterminer, selon la valeur de p, quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

3 Problème 3 : Dans l'espace tout entier

On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers, avec $b \neq 0$. En particulier, la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

L'espace usuel $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Un point $M(x; y; z)$ de $\mathscr{E}$ est dit *entier* lorsque ses trois coordonnées x, y et z sont des entiers.
De même, un point $M(x; y)$ du plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ sera dit *entier* lorsque ses deux coordonnées x et y sont des entiers.

Dans tout le problème, les triangles seront supposés *non aplatis*.

3.1 Quelques résultats préliminaires

1. Soit ABC un triangle du plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, et H le pied de sa hauteur issue de A (c'est-à-dire H est le point d'intersection entre la droite (BC) avec la perpendiculaire passant par A).

   a. Prouver que :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BC^2} \times \overrightarrow{BC}$$

   b. En déduire que si A, B et C sont des points entiers du plan $\mathscr{P}$ alors les coordonnées de H sont des nombres rationnels.

   c. Si ABC est un triangle de l'espace $\mathscr{E}$, les résultats établis aux questions **a.** et **b.** ci-dessus sont-ils encore valables ?

2. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers du plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$?
3. Soit n un entier naturel. Prouver que si $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel alors il existe un entier m tel que $n = m^2$.
4. **a.** Prouver que si x est un entier alors il existe un entier t tel que x^2 soit égal à $8t$ ou à $8t+1$ ou à $8t+4$.

   b. Prouver que si a, b, c et d sont des entiers tels que $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$, alors $a = b = c = d = 0$.

3.2 Étude des triangles de l'espace $\mathscr{E}$ à sommets entiers

On rappelle que si θ est la mesure en radian d'un angle non droit d'un triangle (non aplati), on a $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Un entier $k \geqslant 1$ est dit *sans facteur carré*, si $k = 1$ ou s'il peut se décomposer en un produit de nombres premiers deux à deux distincts.

1. Donner un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers de l'espace $\mathscr{E}$.
2. Soit T un triangle dont les trois sommets sont des points entiers de l'espace $\mathscr{E}$.

   a. Prouver que, pour tout angle θ non droit de T, le nombre $\tan^2(\theta)$ est rationnel.

   b. Prouver qu'il existe un unique entier $k \geqslant 1$, sans facteur carré, tel que pour tout angle θ non droit de T, le nombre $\tan(\theta)$ puisse s'écrire sous la forme $r\sqrt{k}$, où r est un nombre rationnel non nul.

   c. En utilisant la question **1.** de la partie 1, prouver qu'il existe des entiers a_1, a_2, a_3, u_1, u_2 et u_3 non tous nuls vérifiant le système :

$$E(3,k) \begin{cases} k\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0 \end{cases}$$

   (*Remarque* : L'entier k est celui trouvé à la question **2.b.**)

3. Soit k un entier strictement positif et sans facteur carré. On suppose qu'il existe des entiers a_1, a_2, a_3, u_1, u_2 et u_3 non tous nuls vérifiant le système $E(3, k)$.
Soit T un triangle de l'espace $\mathscr{E}$. On suppose que, pour tout angle θ non droit de T, le nombre $\tan(\theta)$ peut s'écrire sous la forme $r\sqrt{k}$, où r est un nombre rationnel non nul.
Montrer qu'il existe un triangle dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T.

4. a. Soit T un triangle isocèle de l'espace $\mathscr{E}$ dont les côtés sont de longueurs 3, 3 et 2.
Existe-t-il un triangle de l'espace $\mathscr{E}$ dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T ?

b. Soit T un triangle isocèle de l'espace $\mathscr{E}$ dont les côtés sont de longueurs 2, 2 et 3.
Existe-t-il un triangle de l'espace $\mathscr{E}$ dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T ?

Remarque : On pourra librement utiliser l'identité suivante, valable pour tous réels a, b, c, d, e et f :

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(d^2+e^2+f^2\right)-(ad+be+cf)^2=(ae-bd)^2+(af-cd)^2+(bf-ce)^2$$

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES - SESSION 2016

1 Problème 1 : Sommes de cubes

Si n est un entier, on appelle cube de n l'entier n^3.
Dans tout le problème, on note :

* S l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts;
* S_0 l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts;
* S_1 l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts.

Par exemple, 8 et 190 sont dans S car $8 = 2^3$ et $190 = 1^3 + 4^3 + 5^3$; 216 et 1072 sont dans S_0 car $216 = 6^3$ et $1072 = 2^3 + 4^3 + 10^3$; 125 et 2568 sont dans S_1 car $125 = 5^3$ et $2568 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 13^3$.
L'objectif du problème est de démontrer que tout entier suffisamment grand appartient à S.

1. Montrer que 2016 appartient à S_0.

2. a. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 5$, on a $(2x+1)^3 \leqslant 2(2x-1)^3$.

b. Soit k un entier supérieur ou égal à 5. Montrer, pour tout entier $p \geqslant k$,

$$(2p+1)^3 \leqslant (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p} (2j-1)^3$$

où on rappelle que $\sum_{j=k}^{p} (2j-1)^3$ désigne la somme $(2k-1)^3 + (2k+1)^3 + \cdots + (2p-1)^3$.

On rappelle que si t, u et v sont des entiers, la notation $t \equiv u (v)$ signifie que v divise $u - t$.

3. Montrer qu'il existe 288 entiers $s_1, \ldots, s_{288}$ appartenant à S_1 tels que, pour tout i dans $\{1, \ldots, 288\}$, $s_i \equiv i\ [288]$.

Dans la suite du problème, on fixe des entiers $s_1, \ldots, s_{288}$ appartenant à S_1 tels que $s_i \equiv i\ [288]$ pour tout i, et on note m le plus grand des nombres s_i :

$$m = \max(s_1, s_2, \ldots, s_{288})$$

On rappelle que n réels $u_1, \ldots, u_n$ sont dits en progression arithmétique de raison r si $u_{i+1} - u_i = r$ pour tout entier i tel que $1 \leqslant i < n$.

4. Soit n un entier tel que $288n \geqslant m$, et soit $u_1, \ldots, u_n$ des entiers naturels en progression arithmétique de raison 288 . Montrer que tout entier de l'intervalle $[m + u_1, 288n + u_1]$ peut s'écrire sous la forme $s_i + u_j$, avec $1 \leqslant i \leqslant 288$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

5. On admet la relation, pour tout réel x,

$$(2x+12)^3 + (2x+4)^3 + (2x+2)^3 - (2x+10)^3 - (2x+8)^3 - (2x)^3 = 288$$

a. Montrer qu'il existe un entier u tel que u, $u+288$ et $u+576$ appartiennent à S_0.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe n éléments dans S_0 en progression arithmétique de raison 288.

6. Soit k un entier supérieur ou égal à 5 tel que $(2k+1)^3 > m$.

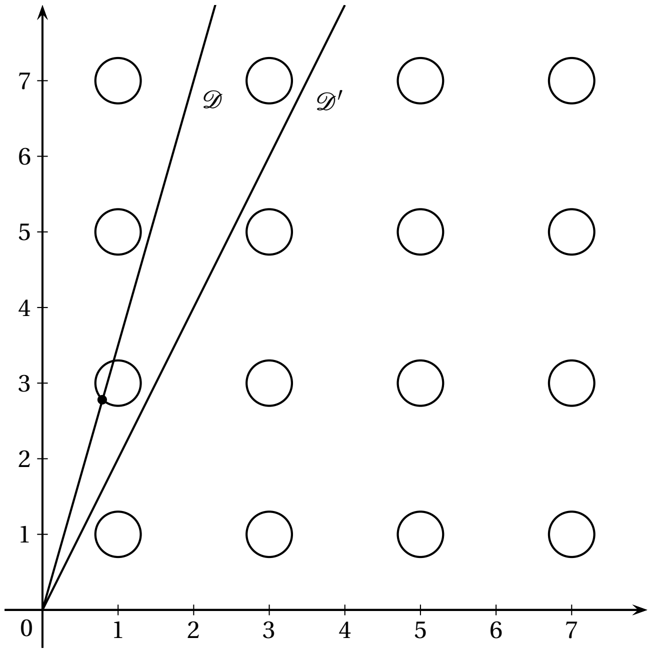
a. Montrer qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que tout entier de l'intervalle $[N, N + 2(2k-1)^3]$ puisse s'écrire sous la forme $s_i + u$, avec $1 \leqslant i \leqslant 288$ et $u \in S_0$.

b. Montrer que tout entier supérieur ou égal à N appartient à S.
Pour tout entier $p \geqslant k$, on pourra examiner le cas des entiers de l'intervalle $[N, N_p]$, où

$$N_p = N + (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p} (2j-1)^3$$

2 Problème 2 : La rangée d'arbres qui cache la forêt

Un observateur se trouve dans une forêt parfaitement régulière, dans laquelle les troncs d'arbres ont tous même diamètre. On ne tient pas compte de la hauteur, ce qui permet de se ramener à un problème dans le plan, qu'on rapporte à un repère orthonormé. L'observateur se trouve à l'origine du repère et les troncs d'arbres sont représentés par des cercles de même rayon $R > 0$, centrés aux points de coordonnées (a, b), où a et b sont des entiers impairs. Il s'agit d'étudier ce que voit l'observateur.
Pour des raisons de symétrie, on peut se restreindre au quart de plan $x > 0$, $y > 0$. On dira que l'observateur « voit à travers la forêt » s'il existe une demi-droite issue de l'origine, contenue dans le quart de plan considéré et ne rencontrant aucun des cercles.



Par exemple, dans la figure ci-dessus, la demi-droite $\mathscr{D}$ rencontre un arbre, mais pas la demi-droite $\mathscr{D}'$. Pour $m \in]0, +\infty[$, on note $\mathscr{D}_m$ la demi-droite définie par les conditions $y = mx$ et $x > 0$.

Dans ce problème, on admettra que si m est un nombre irrationnel positif, alors, pour tout réel strictement positif ε, il existe deux entiers naturels impairs a et b tels que $|b - ma| \leqslant \varepsilon$.

1. Soient a, b, m des réels strictement positifs. Montrer que $\mathscr{D}_m$ rencontre le cercle de rayon $R > 0$ centré en (a, b) si et seulement si $|b - ma| \leqslant R\sqrt{1 + m^2}$.

2. En déduire que si m est irrationnel, alors $\mathscr{D}_m$ rencontre un arbre.

3. On suppose que $m = \frac{b}{a}$, où a et b sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux.

a. On suppose que a et b sont impairs. La demi-droite $\mathscr{D}_m$ rencontre-t-elle un arbre ?

b. On suppose que a et b sont de parités différentes et que $\mathscr{D}_m$ rencontre un arbre. Montrer que $1 \leqslant R\sqrt{a^2 + b^2}$.

4. En déduire que si toutes les demi-droites $\mathscr{D}_m$, avec $m > 0$, rencontrent un arbre, alors $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5. On suppose réciproquement que $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$. Montrer que toute demi-droite $\mathscr{D}_m$, avec $m > 0$, rencontre un arbre planté en $(\alpha, 1)$ ou en $(1, \alpha)$, où α est un entier naturel impair.

On appelle première rangée d'arbres l'ensemble des arbres plantés aux points $(\alpha, 1)$ ou $(1, \alpha)$, où α est un entier naturel impair.

6. Conclure que si l'observateur voit à travers la première rangée, alors il voit à travers la forêt.

3 Problème 3 : Allons dans $\mathbb{C}$

Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{2\pi i/3}$.
La probabilité d'un évènement A est notée $\mathbb{P}(A)$.

1. **a.** Vérifier que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
   b. Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes 1, j, j^2 ?
   c. Montrer que si a, b, c sont des nombres réels, alors $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si $a = b = c$.

On lance un dé équilibré (six faces numérotées de 1 à 6). On note F la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et on note Z la variable aléatoire j^F.

2. Montrer que Z est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$ et que $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(Z=j) = \mathbb{P}\left(Z=j^2\right) = \frac{1}{3}$.

On considère un entier $n \geqslant 1$ et on lance le dé n fois (lancers indépendants). On note F_k le résultat du k-ième lancer et $Z_k = j^{F_k}$. On note $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ et $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On note U_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = 1$; on note V_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = j$ et W_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $Z_k = j^2$.

3. **a.** Déterminer $U_n + V_n + W_n$.
   b. Montrer que $S_n = U_n + jV_n + j^2 W_n$.
   c. Montrer que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.
   d. En déduire que si n n'est pas multiple de 3, alors $p_n = 0$.
4. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $n = 3m$.
   a. Montrer que la variable aléatoire U_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. En déduire que $\mathbb{P}(U_n = m) = \binom{3m}{m} \frac{2^{2m}}{3^{3m}}$.

   On note $\mathbb{P}_{U_n=m}(V_n = m)$ la probabilité conditionnelle de $V_n = m$ sachant $U_n = m$.

   c. Montrer $\mathbb{P}_{U_n=m}(V_n = m) = 2^{-2m}\binom{2m}{m}$.
   d. En déduire $p_{3m} = 3^{-3m}\binom{3m}{m}\binom{2m}{m}$.

La question précédente, combinée à une expression classique des coefficients binomiaux, entraine pour m entier naturel non nul la relation suivante, qu'on ne demande pas de démontrer :

$$\frac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \frac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}$$

5. Pour tout entier $m \geqslant 1$, montrer que $\frac{m}{m+1} \leqslant \frac{p_{3m+3}}{p_{3m}}$ et en déduire que $p_{3m} \geqslant \frac{2}{9m}$.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [1, n]$ tels que $S_k = 0$.

6. **a.** Déterminer des variables de Bernoulli Y_k, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, telles que $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
   b. On note $\mathbb{E}(X_n), \mathbb{E}(Y_1), \ldots, \mathbb{E}(Y_n)$ les espérances de $X_n, Y_1, \ldots, Y_n$.
   En admettant que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(Y_1) + \cdots + \mathbb{E}(Y_n)$, montrer que $\mathbb{E}(X_n) = p_1 + \cdots + p_n$.
   c. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$.

Soit q_n la probabilité que l'un des S_k soit nul pour $1 \leqslant k \leqslant n$, c'est-à-dire $q_n = \mathbb{P}(X_n > 0)$.
L'objectif de la question suivante est de montrer que la suite (q_n) converge vers 1.

7. **a.** Montrer que la suite (q_n) converge vers un réel q et que $q_n \leqslant q \leqslant 1$ pour tout n.
   b. Pour r, n entiers naturels non nuls, montrer que $\mathbb{P}(X_n \geqslant r) \leqslant q^r$.
   c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\mathbb{E}(X_n) \leqslant q + q^2 + \cdots + q^n$.
   d. Conclure.

Concours général des lycées - Session 2015

1 Problème 1 : Petits poids

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et toute suite finie de n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on appelle *poids* de la suite la plus grande des valeurs $|x_1|, |x_1+x_2|, \dots, |x_1+x_2+\cdots+x_n|$.
Par exemple, pour $n=4$ et $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 4, 0, -9)$, le poids de la suite est égal à 8, car :

$$|x_1| = 4, |x_1+x_2| = 8, |x_1+x_2+x_3| = 8 \text{ et } \quad |x_1+x_2+x_3+x_4| = 1$$

Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9, 4, 0, 4)$, le poids est égal à 9, car :

$$|x_1| = 9, |x_1+x_2| = 5, |x_1+x_2+x_3| = 5 \text{ et } \quad |x_1+x_2+x_3+x_4| = 1$$

On remarque que les deux suites finies ci-dessus sont formées des mêmes nombres dans un ordre différent et qu'elles ont des poids différents.

1. Déterminer le poids des suites finies suivantes :
   - **a.** $(3, 5, -6, -8, 2)$ (et donc $n=5$).
   - **b.** $(1, 2, 3, \dots, 2014, 2015, -2015, -2014, \dots, -2, -1)$ (et donc $n=4030$).
   - **c.** Dans chacun des deux exemples précédents, réordonner les termes de façon à obtenir un poids plus petit.

On donne à Isabelle et Clara la même suite finie de n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Isabelle veut la réordonner de façon à obtenir une suite finie de poids minimal. Pour cela, elle considère tous les ordres possibles de ces n réels, détermine pour chacun le poids de la suite correspondante, et choisit un ordre pour lequel le poids est minimal. On note I ce poids minimal.

De son côté, Clara, plus pressée qu'Isabelle, adopte l'algorithme suivant.
Elle commence par choisir parmi les n réels un nombre, noté c_1, de sorte que la valeur de $|c_1|$ soit la plus petite possible. Elle choisit ensuite le nombre c_2 parmi les $n-1$ réels qui restent, afin que la valeur de $|c_1+c_2|$ soit la plus petite possible. Plus généralement, après avoir choisi les nombres $c_1, \dots, c_i$ parmi les n réels donnés au départ, elle choisit c_{i+1} parmi les $n-i$ restants de sorte que la valeur de $|c_1+\cdots+c_i+c_{i+1}|$ soit la plus petite possible.
Elle obtient finalement une suite finie $(c_1, \dots, c_n)$ de n réels. On note C son poids.

2. Déterminer I et C dans les deux cas suivants.
   - **a.** $n=3$ et $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-4$.
   - **b.** $n=4$ et $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$.
3. Si $n=2$, montrer que $I=C$.
4. Si $n=3$, montrer que $C \leqslant \frac{3}{2} I$.
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 4 et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la suite finie donnée à Isabelle et Clara. On pose :

   $$M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \qquad S = |x_1+x_2+\cdots+x_n| \qquad N = \max(M, S)$$

   Autrement dit, M est le plus grand des nombres $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$. De même, N est le plus grand des nombres M et S.
   - **a.** Montrer que $S \leqslant I$.
   - **b.** Montrer que $M \leqslant 2I$.
   - **c.** Montrer que $C \leqslant N$.
   - **d.** En déduire que $C \leqslant 2I$.
   - **e.** Déterminer n réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que $C = 2I$.

2 Problème 2 : Tétraèdres

On appelle *tétraèdre* la donnée, dans l'espace, de quatre points non coplanaires A, B, C, D. Les *arêtes* du tétraèdre sont les segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$, $[CD]$.
Dans les questions 3. à **3.**, $ABCD$ désigne un tétraèdre.

1. **a.** Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.
   - **b.** Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$, où G_A est le centre de gravité du triangle BCD.
   - **c.** On appelle *médiane* issue de A la droite reliant A au centre de gravité du triangle BCD, et on définit de façon analogue les trois autres médianes, issues de B, de C et de D. Montrer que les médianes sont concourantes au point G.
2. Montrer qu'il existe une unique sphère qui passe par A, B, C, D. On l'appelle sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ et on note O son centre.
3. On appelle *hauteur* issue de A la droite passant par A et orthogonale au plan BCD. On définit de façon analogue les trois autres hauteurs, issues de B, de C et de D. On dit qu'un tétraèdre de l'espace est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.
   - **a.** Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si le tétraèdre est régulier ?
   - **b.** Les hauteurs sont-elles nécessairement concourantes ?
   - **c.** Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en G si et seulement si le tétraèdre est régulier ?
4. Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
   Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ quatre droites distinctes non coplanaires concourantes en un point H. Pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ on choisit un vecteur directeur unitaire $\vec{u}_i$ de Δ_i et, pour $1 \leqslant i, j \leqslant 4$, on note $c_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$.
   - **a.** On suppose qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23}$.
   - **b.** Réciproquement, si $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23} \neq 0$, montrer qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3 Problème 3 : Moyennes prévisionnelles

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_1, u_2, \ldots)$ à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type $\mathscr{M}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n}}{n}$$

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathscr{M}$ et C un nombre réel. Que dire de la suite $(u_n - C)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2. Montrer que toute suite croissante de type $\mathscr{M}$ est constante.

3. Soit $(u_n)^*_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de type $\mathscr{M}$. On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que $u_n = an^2 + bn + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a = b = 0$.

4. L'objectif de cette question **4.** est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type $\mathscr{M}$ est constante.
Dans les questions **a.** et **b.**, on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de type $\mathscr{M}$ à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r \in \mathbb{N}^*$.

- **a.** Soit p un entier tel que $p > r$. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q < p \leqslant q' \leqslant 2q$ et $u_{q'} \leqslant u_q \leqslant u_r$. En déduire que $u_p \leqslant 3u_r$.
- **b.** Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_v \leqslant 3u_r$.
  Dans les questions **c.** et **d.**, on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite minorée de type $\mathscr{M}$.
- **c.** Soit D un réel strictement positif et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $u_p - D$ n'est pas un minorant de la suite (u_n), alors $u_p - \frac{3}{2}D$ n'est pas non plus un minorant.
- **d.** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est constante.
- **e.** Conclure.

5. Existe-t-il une suite non constante de type $\mathscr{M}$?

1 Problème 1 : Stabilité géométrique

Dans tout le problème, ε et q sont deux réels strictement positifs.
On considère une suite (x_n) de réels telle que $x_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant x_{n+1} - qx_n \leqslant \varepsilon$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = x_{n+1} - qx_n$.
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \cdots + q b_{n-2} + b_{n-1}$$

2. Dans cette question, on suppose que $0 < q < 1$.

a. Montrer qu'il existe une suite géométrique $\left(y_n\right)$ telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\left|y_n - x_n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-q}$$

b. Montrer qu'il existe en fait une infinité de telles suites géométriques $\left(y_n\right)$.

3. Dans cette question, on suppose que $q > 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{b_0}{q} + \frac{b_1}{q^2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{q^n}$.

a. Montrer que la suite (u_n) converge.
On note s sa limite.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, montrer $0 \leqslant s - u_n \leqslant \frac{\varepsilon}{q^n(q-1)}$.

c. Montrer qu'il existe une unique suite géométrique $\left(y_n\right)$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$\left|y_n - x_n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{q-1}$$

2 Problème 2 : Vite « pile »

Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.
Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » dans un lancer est notée p, avec $0 < p < 1$.
Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient « pile » : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de « face ». Ainsi, si un joueur obtient « pile » au premier lancer, son score est 0 et il s'arrête de lancer ; s'il obtient « pile » au deuxième lancer (après un « face »), son score est 1 ; s'il obtient « pile » au n-ième lancer (après $n-1$ « face »), son score est $n-1$; s'il n'obtient pas « pile » durant les n lancers, son score est n.
Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1. Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.

2. Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant, puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

3. Déterminer l'espérance du nombre de gagnants, puis la limite de cette espérance quand n tend vers l'infini.

3 Problème 3 : Des chiffres pour des lettres

Un *mot de longueur* n est une suite de n lettres choisies parmi les 10 lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Par exemple, BEC, $JJCD$, $AFFICHAGE$, $ABCDEFGHIJ$ sont des mots de longueurs respectives 3, 4, 9, 10.
Une *attribution* du mot ω est un nombre dont l'écriture décimale est obtenue en remplaçant chaque lettre de ω par un des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de sorte que des lettres identiques sont remplacées par le même chiffre et que deux lettres distinctes sont remplacées par des chiffres différents. Il est permis que le premier chiffre de l'attribution soit égal a 0. Par exemple, 121 et $040 = 40$ sont deux attributions pour le mot GAG, mais 333 et 452 n'en sont pas; 555 et $000 = 0$ sont des attributions de AAA, mais pas 112 ou 789.
Soit d un entier strictement positif. On dit que le mot ω est *un bloqueur* de d si toute attribution de ω est un nombre non divisible par d. Ainsi le mot $\omega = AABCA$ n'est pas un bloqueur de $d = 4$, car 66716 est une attribution de ω qui est divisible par 4.

1. **a.** Montrer que le mot AB est un bloqueur de $d = 100$.
   b. Montrer que tout nombre d'au moins trois chiffres admet un bloqueur.

Le nombre $d > 0$ est dit *mauvais* s'il admet au moins un bloqueur. Sinon, on dit que d est *bon*. La question précédente montre que tout nombre d'au moins trois chiffres est mauvais.

2. **a.** Montrer que 10 est bon.
   b. Montrer que 8 est bon.
   c. Montrer que le mot AAB est un bloqueur de 27.
   d. Montrer que le mot $ABBAB$ est un bloqueur de 32.
   e. Un diviseur positif d'un nombre bon est-il forcément bon? Un diviseur positif d'un nombre mauvais est-il forcément mauvais?

Si k est un entier strictement positif et si X est une lettre, on note X^k le mot $XX\dots X$ formé de k lettres X.

3. **a.** Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7 et soit ω le mot défini par :

$$\omega = AAA^{p-2}BA^{p-2}CA^{p-2}DA^{p-2}BA^{p-2}FA^{p-2}GA^{p-2}HA^{p-2}IA^{p-2}JA^{p-2}$$

   Montrer que ω est un bloqueur de p.
   On pourra utiliser librement le petit théorème de Fermat : si x est un entier non divisible par p. alors p divise $x^{p-1} - 1$.
   b. Montrer qu'il existe au plus 27 nombres bons.

4. Soient ω un mot de longueur n, et a une attribution de ω.
   On note a' l'attribution de ω obtenue à partir de a en permutant circulairement, dans cet ordre, les chiffres $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ sans toucher aux 9 : autrement dit, dans l'écriture décimale de a, les chiffres $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ sont respectivement remplacés par $1,2,3,4,5,6,7,8,0,9$. Par exemple, si $n = 5$ et $a = 01789$, alors $a' = 12809$.
   Soit k le nombre d'apparitions du chiffre 9 dans l'écriture décimale de a.

   a. Si a est congru à r modulo 9, à quoi est congru a modulo 9?
   b. En déduire que si k n'est pas congru à n modulo 3, alors il existe une attribution de ω divisible par 9.
   c. Montrer qu'il en est de même si k est congru à n modulo 3, mais pas modulo 9.
   d. Montrer que 9 est bon.

5. Montrer que 18 est bon.
6. Montrer que si un nombre est mauvais, il admet une infinité de bloqueurs.

Pour information, on peut montrer qu'il existe exactement 22 nombres bons. Ce sont les diviseurs positifs des nombres 18, 24, 45, 50, 60, 80.

Concours général des lycées - Session 2013

1 Problème 1 : De superbes suites

Dans ce problème, on considère des suites finies $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs, où n est un entier supérieur ou égal à 2, appelé *longueur* de la suite finie.
On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs est *superbe* si chacun de ses termes divise la somme de tous les termes.
Par exemple, la suite $(1,2,1,2,1,2,1,2)$ est superbe de longueur 8 car $1+2+1+2+1+2+1+2 = 12$, qui est divisible par 1 et par 2 ; la suite $(3,3,6,12)$ est superbe de longueur 4 car la somme des termes vaut 24, qui est multiple de 3, 6, 12.

1. Déterminer les entiers strictement positifs b tels que la suite $(21,7,b)$ soit superbe.

2. a. Déterminer les suites superbes de longueur 2, puis celles de longueur 3.

b. Déterminer les suites superbes de longueur 4 et dont la somme des termes vaut 2013.

3. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.

b. Montrer que, si $n \geqslant 2$, il n'existe pas de suite superbe de longueur n dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.

4. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite arithmétique finie de raison strictement positive.
Montrer que si cette suite est superbe alors $n = 3$.

5. On dit qu'une suite (infinie) $(a_k)_{k\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs est *magnifique* si, pour tout entier $n \geqslant 2$, la suite finie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est superbe.
Déterminer les suites magnifiques $(a_k)_{k\geqslant 1}$ vérifiant $a_k < a_{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

6. Soit n un entier supérieur ou égal à 4, et soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.

a. Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe.

b. Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe dont les termes sont tous distincts.

2 Problème 2 : Tiré à quatre épingles

1. Dans l'espace, soient D_1, D_2 deux droites non coplanaires et soit M un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2. Montrer qu'il existe au plus une droite passant par M et coupant à la fois D_1 et D_2. Dans quel cas n'en existe-t-il aucune ?

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, soit $ABCDEFGH$ le cube dont les sommets ont pour coordonnées $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.
Soient respectivement D_1, D_2 et D_3 les droites (EF), (BC) et (DH).
Enfin, soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des points de coordonnées $M(x,y,z)$ tels que :

$$xy + yz + zx - (x+y+z) + 1 = 0$$

2. Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1, D_2 et D_3.

3. Montrer que les droites D_1, D_2 et D_3 sont incluses dans $\mathscr{S}$.

4. Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans $\mathscr{S}$ rencontre $\mathscr{S}$ en 0, 1 ou 2 points.

5. En déduire que toute droite coupant les droites D_1, D_2 et D_3 est incluse dans $\mathscr{S}$.

6. Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2, D_3 et qui n'est pas incluse dans $\mathscr{S}$. Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.

3 Problème 3 : Il faut passer les premiers

Pour ce problème, on donne la liste des vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 :

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97$$

Pour faire une réussite, Sisyphe a dessiné au sol 106 cases numérotées de 0 à 105, et il dispose d'un jeton et d'un dé à six faces (équilibré).
Sisyphe commence la réussite en posant le jeton sur la case 0. Il fait ensuite une série de lancers du dé ; lorsque le dé affiche la valeur k, il avance le jeton de k cases et :

- s'il atteint ou dépasse la case numéro 100, Sisyphe a gagné ;
- s'il arrive à une case dont le numéro est un nombre premier inférieur à 100, Sisyphe a perdu ;
- dans les autres cas, Sisyphe relance le dé et continue la réussite.

1. Dans cette question, on suppose que Sisyphe recommence une réussite lorsqu'il a perdu. On note p_n la probabilité de gagner au moins une réussite en au plus n lancers du dé.

a. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $p_n > 0$.

b. Étudier la convergence de la suite (p_n).

Dans la suite du problème, Sisyphe ne recommence plus la réussite s'il perd.
Soit X la variable aléatoire représentant la position du jeton à la fin de la réussite.
On note $\mathbb{P}(X = k)$ la probabilité de l'événement $X = k$.

2. a. Déterminer $\mathbb{P}(X=2)$, $\mathbb{P}(X=3)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 4)$, $\mathbb{P}(X=5)$.

b. Proposer un algorithme pour calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, 105\}$.

3. Muni d'une calculatrice qui n'est pas assez performante pour exécuter l'algorithme précédent, Sisyphe cherche à estimer sa probabilité de gain. Pour cela, étant donné deux nombres premiers consécutifs $p < p'$, il considère α_p la probabilité conditionnelle de l'événement $X = p'$ sachant l'événement $X > p$.

a. Que valent α_2 et α_3 ?

b. Donner l'expression de la probabilité de gain, $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(X \geqslant 100)$, en fonction des nombres réels α_p pour $p = 2,3,5,\ldots$

c. Donner un encadrement des nombres α_p et en déduire un encadrement de $\mathbb{P}(G)$. (Dans cette question, la qualité de l'encadrement sera un élément d'appréciation.)

1 Problème 1 : Les premiers sont en haut, les exposants sont en bas

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on dispose de la décomposition en facteurs premiers :

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

où les nombres premiers distincts $p_1, p_2, \dots p_k$ sont les diviseurs premiers de n, et les exposants $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont des entiers strictement positifs. On pose alors :

$$f(n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_k^{p_k}$$

Par exemple, si $n = 720 = 2^4 3^2 5^1$, on a $f(n) = 4^2 2^3 1^5 = 128$.
En posant de plus $f(1) = 1$, on obtient une fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f^i(n)$ par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, de façon que $f^0(n) = n$ et

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N}, \quad f^{i+1}(n) = f\left(f^i(n)\right)$$

Par exemple : $f^0(720) = 720, \quad f^1(720) = f(720) = 128, \quad f^2(720) = f(128) = 49$.

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction f et des suites $\left(f^i(n)\right)_{i \in \mathbb{N}}$ pour n fixé.

1. **a.** Calculer $f(2012)$.
   b. Déterminer les nombres $f^i\left(36^{36}\right)$ pour $0 \leqslant i \leqslant 3$. Que peut-on dire des suivants ?
2. **a.** Donner un exemple d'entier $n \geqslant 1$ tel que, pour tout entier naturel i, on ait :

$$f^{i+2}(n) = f^i(n) \quad \text{et} \quad f^{i+1}(n) \neq f^i(n)$$

   b. Montrer que la fonction f n'est ni croissante ni décroissante.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$:

   a. l'équation $f(n) = 1$; **b.** l'équation $f(n) = 2$; **c.** l'équation $f(n) = 4$.

4. **a.** Pour tous entiers $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 0$, montrer que $ab \leqslant a^b$.
   b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ des entiers tels que $a_i \geqslant 2$ et $b_i \geqslant 0$ pour tout i. Montrer que :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \leqslant a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_k^{b_k}$$

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f(f(n)) \leqslant n$.
   d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que, pour tout entier $i \geqslant r$, on ait $f^{i+2}(n) = f^i(n)$.
5. Soit E l'ensemble des entiers $n \geqslant 2$ n'ayant que des exposants strictement supérieurs à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.
   a. Pour tout entier $a \geqslant 2$, montrer qu'il existe des entiers naturels α et β tels que :

$$a = 2\alpha + 3\beta$$

   b. En déduire que si n appartient à E, alors il existe un élément m de E tel que $f(m) = n$.
   c. Donner un élément m de E tel que $f(m) = 2012^{2012}$.
   d. Que peut-on dire de la réciproque du **b.** ?

2 Problème 2 : Une suite majoritairement décroissante

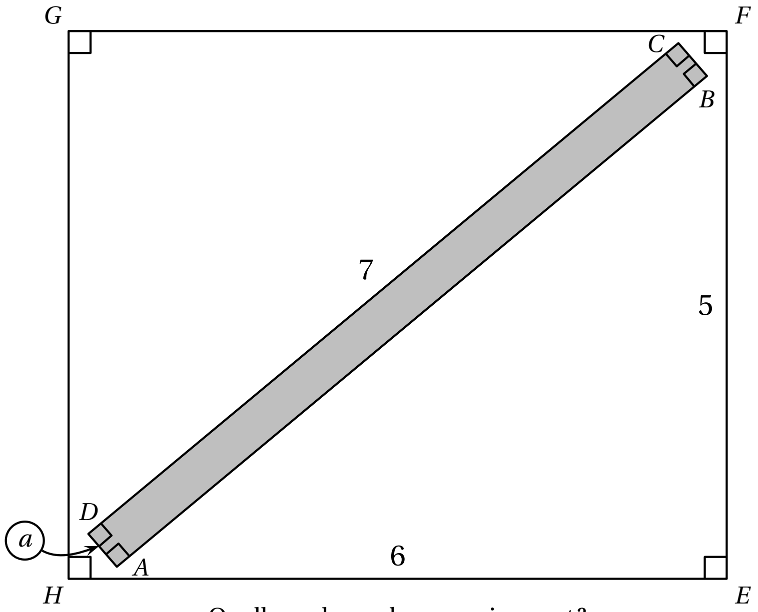
Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, au moins la moitié des termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2u_n$. Montrer que u_n tend vers 0.

3 Problème 3 : Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées $1, 2, \dots, n$, où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Le facteur doit distribuer une lettre par maison.
Pour cela, il commence par laisser son vélo à la maison 1 et y dépose la lettre correspondante ; puis il distribue les autres lettres dans les autres maisons, et revient enfin à la maison 1 récupérer son vélo.
Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.
Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est $1, 5, 2, 4, 3, 1$. La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet, vaut 12 dans ce cas car $|5-1| + |2-5| + |4-2| + |3-4| + |1-3| = 12$.
Un autre trajet possible est $1, 3, 5, 4, 2, 1$, de longueur 8.

1. Combien y a-t-il de trajets possibles ?
2. **a.** Montrer que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à $2(n-1)$
   b. Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?
3. **a.** Dans les cas $n = 5$ et $n = 6$, déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet de longueur maximale.
   b. Pour n quelconque, déterminer la longueur maximale d'un trajet.
4. On tire un trajet au hasard (tous les trajets sont équiprobables).
   Quelle est l'espérance de la longueur du trajet ?

1 Problème 1 : C'est dans la boite



Quelles valeurs de a conviennent ?

2 Problème 2 : Rendez la monnaie !

Un acheteur a dans son porte-monnaie n pièces. Notons $a_1, \dots, a_n$ la valeur faciale de ces pièces - ce sont des nombres entiers strictement positifs. Convenons d'appeler *capacité* de ce porte monnaie le plus grand nombre entier M tel que l'on puisse payer sans rendu de monnaie toute somme (entière) de 1 à M. Notons $C(a_1, \dots, a_n)$ la capacité du porte monnaie contenant les pièces $a_1, \dots, a_n$.

1. **Sans rendu.** On suppose dans cette question que l'on a $a_1 = 1$ et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$.
   - **a.** Calculer les capacités $C(1,2,4)$, $C(1,2,5)$ et $C(1,2,3,4,5)$.
   - **b.** Soit j un nombre entier compris entre 1 et $n-1$ et fixons les nombres $a_1, \dots, a_j$. À quelle condition sur a_{j+1} a-t-on $C\left(a_1, \dots, a_j\right) \neq C\left(a_1, \dots, a_j, a_{j+1}\right)$?
   - **c.** Donner une méthode pour calculer $C(a_1, \dots, a_n)$.
   - **d.** On fixe n. Comment choisir les nombres entiers $a_1, \dots, a_n$ pour que la capacité $C(a_1, \dots, a_n)$ soit la plus grande possible ?

2. **Avec rendu de monnaie.** Le marchand chez qui notre acheteur va faire ses courses possède aussi un porte-monnaie, lui permettant de rendre la monnaie.
   Fixons des nombres entiers n et p. Nommons *capacité commune* le plus grand nombre entier M tel que l'on puisse payer (c'est-à-dire accomplir la transaction) toute somme qui soit un nombre entier de 1 à M. Comment choisir les porte-monnaies $(a_1, \dots, a_n)$ de l'acheteur et $\left(v_1, \dots, v_p\right)$ du vendeur afin qu'ils offrent la plus grande capacité commune possible ?

3 Problème 3 : La racine du carré

On considère l'ensemble $\mathbb{U}_m = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{m}\right) \mid 0 \leqslant k \leqslant m-1\right\}$; on rappelle que c'est aussi l'ensemble des racines m-ièmes complexes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.

On se donne un entier strictement positif n et on cherche s'il existe une fonction $f : \mathbb{U}_{2n} \longrightarrow \mathbb{U}_{2n}$ vérifiant $f(f(z)) = z^2$ pour tout z dans $\mathbb{U}_{2n}$.

1. Montrer que l'ensemble $\left\{z^2 \mid z \in \mathbb{U}_{2n}\right\}$ est égal à $\mathbb{U}_n$ et qu'il est inclus dans $\mathbb{U}_{2n}$
2. On suppose qu'il existe une solution f au problème considéré.
   - **a.** Vérifier que $f\left(z^2\right) = (f(z))^2$ pour tout z dans $\mathbb{U}_{2n}$.
   - **b.** Montrer que $f(z) = f\left(z'\right) \Longrightarrow z = \pm z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$.
3. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément de z de $\mathbb{U}_{2n}$ qui vérifie $z^2 = -1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.
4. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément de z de $\mathbb{U}_{2n}$ qui vérifie $z^3 = 1$ avec $z \neq 1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.
5. On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.
   - **a.** Vérifier que la fonction g de $\mathbb{U}_n$ dans lui-même qui à z appartenant à $\mathbb{U}_n$ associe z^2 est bijective.
   - **b.** On suppose qu'il existe une solution f au problème. Vérifier qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{U}_n \longrightarrow \mathbb{U}_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$.
   - **c.** Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{U}_n \longrightarrow \mathbb{U}_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$. Construire alors une solution f au problème.
   - **d.** Exemple : on prend $n = 5$, dire s'il existe une solution au problème, si oui en construire une.
   - **e.** Même question avec $n = 7$ puis $n = 9$.

1 Problème 1 : Une configuration géométrique

Dans le plan, soient A, B, C trois points distincts tels que B soit sur le segment $[AC]$. Soit Γ le cercle de diamètre $[AC]$, γ le cercle de diamètre $[BC]$, et Δ la tangente en B à γ.
On suppose donné un cercle γ' qui est tangent extérieurement à γ en D, tangent à Δ en E, et tangent intérieurement à Γ en F.

1. Justifier que les droites Δ et (CF) ne sont pas parallèles.
   On note G leur point d'intersection.
2. Montrer qu'il existe une homothétie de centre C qui transforme γ en Γ et une homothétie de centre F qui transforme Γ en γ'.
3. Déterminer les centres des homothéties qui transforment γ en γ'.
4. Soit I le milieu de $[BE]$.
   Montrer que les points A, I, D sont alignés sur une droite orthogonale à (GD).
5. Montrer que $AB = GD$.
6. Exprimer le rayon r' de γ' en fonction des rayons R et r de Γ et γ.

2 Problème 2 : Des configurations géométriques

Dans le plan, on considère n points ($n \geqslant 3$) tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On construit des triangles de sommets choisis parmi ces points qui vérifient la condition suivante :

Deux triangles distincts quelconques ont zéro ou deux sommets en commun, jamais un seul.

On appelle $t(n)$ le nombre maximal de triangles que l'on peut ainsi former.

1. Vérifier que $t(4) = 4$ puis déterminer $t(5)$ et $t(6)$.
2. Montrer que $t(n) \leqslant n$, puis déterminer la valeur exacte de $t(n)$ en fonction de n.

On ajoute à présent la condition suivante sur les triangles que l'on cherche à former :

Deux triangles distincts quelconques n'ont pas de points intérieurs en commun,

autrement dit ne peuvent pas se « chevaucher ». On note alors $u(n)$ le nombre maximal de triangles possibles (en tenant compte du positionnement des points initiaux).

3. Vérifier que $u(4) = 3$ et déterminer $u(5)$ et $u(6)$.
4. Déterminer $u(n)$ en fonction de n.

3 Problème 3 : De la vie sur Mars !

La dernière sonde, envoyée sur Mars par l'Union Européenne, a enfin réussi à observer ce que l'on attendait depuis longtemps : des traces de vie sur la Planète Rouge ! Il s'agit évidemment d'une forme primitive de vie, et les êtres observés ne mesurent pas plus d'un millième de millimètre, ce qui explique la difficulté que la sonde a eue à remarquer ce que nous appellerons des *cellules*.
Avec des informations aussi partielles, les scientifiques ont toutefois pu observer les faits suivants :

- Il y a trois espèces de cellules, que l'on désignera par A, B et C.
- La reproduction des cellules implique la participation de trois cellules « parents ».
- Il ne peut y avoir reproduction que lorsque les trois parents sont « compatibles », c'est-à-dire que au moins deux sont de la même espèce.

1. On a observé des proportions respectives a, b, c de cellules des différentes espèces, avec $a + b + c = 1$.

   a. Quelle est la probabilité p que trois cellules prises au hasard soient compatibles ?
   b. Montrer que $p \geqslant \frac{7}{9}$. On pourra d'abord établir une inégalité à c fixé.

   Les scientifiques ont établi que lorsque les trois espèces des parents sont les mêmes, la descendance est de la même espèce que ses parents. En revanche, lorsque deux parents sont d'une espèce α et que le troisième est d'une espèce β, les scientifiques hésitent entre deux modèles :

   - Modèle 1 : le descendant est du type de l'espèce majoritaire α,
   - Modèle 2 : le descendant est du type de l'espèce minoritaire β.

   Pour comparer ces modèles, on va estimer l'évolution des proportions de cellules des différentes espèces au cours du temps. On note $a_0 > b_0 > c_0$ les proportions des différentes espèces à la génération 0, et a_n, b_n, c_n les proportions des différentes espèces à la génération $n \in N$. Pour déterminer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, on prend trois cellules au hasard suivant les proportions a_n, b_n, c_n, et a_{n+1} sera la probabilité que la descendance soit de type A, sachant que les trois parents sont compatibles. Il en est de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
2. **Étude du premier scénario.** On suppose dans cette question que la génétique des cellules martiennes suit le premier scénario.

   a. Vérifier que :
   $$a_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n}, \quad c_{n+1} = \frac{c_n^2(3-2c_n)}{1-6a_nb_nc_n}$$
   b. On rappelle dans cette question et les suivantes que $a_0 > b_0 > c_0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n > b_n > c_n$. En déduire que $a_n > \frac{1}{3}$, $b_n < \frac{1}{2}$ et $c_n < \frac{1}{3}$.
   c. Vérifier que les suites $(a_n - b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(a_n - c_n)_{n\geqslant 0}$ sont croissantes.
   d. Prouver que $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ convergent et déterminer leurs limites.

3. **Étude du second scénario.** On suppose maintenant que c'est le deuxième scénario qui est privilégié.

   a. Déterminer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

   b. On suppose à partir de maintenant que $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$. Montrer que pour tout n on a $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.

   c. On pose $f(c) = \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2$ et $g(c) = 1 - 6c^2 + 12c^3$. Vérifier que $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geqslant \frac{f(c_{1n})}{g(c_n)}$.

   d. Déterminer les limites de (a_n), (b_n), (c_n).

   e. Quel scénario vous semble le plus pertinent ?

Concours général des lycées - Session 2009

1 Problème 1 : Analyse

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\frac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0 , que l'on notera a.
On rappelle que tout x de $[-1,1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0,\pi]$.

1. **a.** Vérifier $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).

   b. Montrer, pour θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les relations : $\frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leqslant 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$.

2. Soit f une fonction solution du problème. On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, avec θ_n dans $[0,\pi]$.

   a. Montrer que f est continue en 0 et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$.

   b. Vérifier l'existence d'un entier N tel que pour $n \geqslant N$ on ait $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

   c. Établir que a est positif et que $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2a}\right)$.

2 Problème 2 : Probabilités

Je joue avec 4 dés à 20 faces. Chacun de ces dés, dont la forme est un icosaèdre, a ses faces numérotées de 1 à 20. Lorsqu'on le lance, chaque face apparaît sur le dessus avec la même probabilité de $\frac{1}{20}$.
Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois, je marque le nombre de points correspondant à cette face. Ainsi :

- avec la combinaison $3-4-12-16$, je ne marque rien ;
- avec la combinaison $2-8-11-11$, je marque 11 points ;
- avec la combinaison $4-9-9-9$, je marque 9 points ;
- avec la combinaison $7-7-14-14$, je marque 21 points ;
- avec la combinaison $2-2-2-2$, je marque 2 points.

1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. Soit a compris entre 1 et 20. Déterminer pour tout $k \leqslant 4$ la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.
3. Pour tout a on note X_a la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à a parmi les quatre du lancer, et à 0 sinon.
   Préciser la loi de X_a et exprimer le gain G à laide de ces variables.
   Combien de points puis-je espérer en moyenne ?
4. Quelle est la probabilité que je marque exactement 8 points ?

On suppose à partir de maintenant qu'après avoir lancé les 4 dés, je sois autorisé à relancer entre 0 et 4 dés pour améliorer mon score.

5. J'ai obtenu $11-7-2-2$. J'hésite entre tout relancer, garder le 11, et garder les deux 2. Que dois-je faire ?
6. On suppose que j'ai obtenu 4 dés différents $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Quels dés dois-je relancer ?

3 Problème 3 : Arithmétique

Étant donné deux entiers a et b, on désigne par $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des nombres entiers compris au sens large entre a et b.
On considère une suite finie à n termes $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.
On dit qu'un entier strictement positif p est *une période de* U si l'on a $u_i = u_{i+p}$ pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-p$. Une suite peut avoir plusieurs périodes.

1. On considère deux entiers strictement positifs a et b premiers entre eux.

   a. On définit r_k comme le reste de la division de ka par $a+b$. Montrer que lorsque k varie dans $[\![1, a+b-1]\!]$, r_k prend toutes les valeurs de $[\![1, a+b-1]\!]$.

   b. En déduire que si a et b sont périodes de U et si $n \geqslant a+b-1$ alors U est constante.

2. On suppose à présent que a et b sont des entiers strictement positifs de PGCD d. Montrer que si U est périodique de périodes a et b et si $n \geqslant a+b-d$, alors U est de période d.

3. On considère deux entiers a et b strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.

   a. Montrer que l'on peut partager l'intervalle $[\![1, a+b-2]\!]$ en deux sous-ensembles non vides A et B de manière que la suite V égale à 1 sur A et à 0 sur B soit de périodes a et b.

   b. Le partage obtenu à la question précédente est-il unique ? Montrer que, pour tout x de A, $a+b-1-x$ est dans A. Quelle propriété de la suite V traduit-on ainsi ?

Concours général des lycées - Session 2008

1 Problème 1

On munit le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit S la courbe d'équation :

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}$$

1. Quelle est la nature géométrique de S?

2. Pour tout couple (u, v) de nombre réels on note U le point de coordonnées (u, v), et pour x dans $\mathbb{R}$ on note $M(x)$ le point de S d'abscisse x. On pose :

$$f_U(x) = UM(x), \quad g_U(x) = \left[f_U(x)\right]^2$$

a. Calculer g_U, g'_U, et g''_U. Résoudre l'équation $g''_U(x) = 0$.

b. Donner le tableau des variations de f_U (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où f_U admet un extremum relatif).

3. On dira qu'un cercle C de centre U et de rayon UM est tangent en M à S si M est un point de S et si les tangentes en M à C et S coïncident.
Soit U un point du plan n'appartenant pas à S, et soit a dans $\mathbb{R}$. Montrer que le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent en $M(a)$ à S si et seulement si $g'_U(a) = 0$.

4. a. Montrer que tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S.

b. Pour U n'appartenant pas à S, on note $n(U)$ le nombre de réels x pour lesquels le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent en $M(x)$ à S. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points U n'appartenant pas à S tels que $n(U) = i$. On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2 - 16v^3$.
Faire un croquis représentant S et les ensembles trouvés.

5. a. Soit a dans $\mathbb{R}$. On note $D(a)$ la tangente en $M(a)$ à S. Donner une équation de $D(a)$.

b. On note de nouveau U le point de $\mathscr{P}$ de coordonnées (u, v). Discuter en fonction de u et v l'ensemble des solutions a de l'équation $U \in D(a)$.

c. On suppose que l'équation $U \in D(a)$ admet deux solutions distinctes a_1 et a_2. Montrer que, si $UM(a_1) = UM(a_2)$, alors on a $u = 0$.

d. Soit $U \in \mathscr{P}$. On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts M et N de S. Montrer que les tangentes à S en M et N sont concourantes, et que si l'on note V leur point d'intersection on a $VM = VN$.

e. Déterminer l'ensemble des points U n'appartenant pas à S pour lesquels il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts de S.

2 Problème 2

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées Oy. À toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à Oy on associe les points A', B' et C' intersections de $\mathscr{D}$ avec les parallèles à Oy menées par A, B et C respectivement.
Montrer qu'il existe une unique droite $\mathscr{D}$ pour laquelle la somme s des longueurs $AA' + BB' + CC'$ est minimale, et la caractériser.

2. Montrer qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ pour laquelle la somme s_1 des distances de A, B et C à $\mathscr{D}$ est minimale. Montrer que cette droite est unique si ABC n'est pas isocèle, et la caractériser.

3 Problème 3 : Les comptes « ronds »

Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :

- 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros;
- 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions)?

2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus?

Concours général des lycées - Session 2007

1 Problème 1

On appelle fonctions de type T_0 les fonctions « trinômes » sur $[-1,1]$, définies par :

$$t : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto t(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b, c étant des réels quelconques. Pour tout entier naturel non nul n, on appelle fonctions de type T_n les fonctions de la forme $f + \lambda|g|, \lambda$ étant un réel quelconque et f, g des fonctions quelconques de type T_{n-1}.

1. Établir que la fonction φ, définie par $\varphi(x) = 0$ pour tout x de $[-1,0]$ et $\varphi(x) = x$ pour tout x de $[0,1]$, est de type T_1.
2. On considère deux fonctions trinômes t_1 et t_2 telles que $t_1(0) = t_2(0)$ et on définit la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que :

   Pour tout réel x de $[-1,0]$, $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel x de $[0,1]$, $f(x) = t_2(x)$.

   Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que la fonction f soit de type T_N.

2 Problème 2

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

1. **a.** Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.

   b. Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

3 Problème 3

Dans tout l'exercice, étant donné un triangle non aplati ABC, on note a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB. On dira que ce triangle est de type $\mathscr{W}$ si ses médianes issues de A et B sont perpendiculaires.

3.1 Géométrie

1. Montrer qu'il existe des triangles ABC tels que l'on ait les relations :

   $$c^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{3}$$

   Établir qu'un tel triangle est rectangle en A et qu'il est de type $\mathscr{W}$.
2. Dans cette question on se fixe des points A et B et on considère l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC soit de type $\mathscr{W}$.

   a. Déterminer l'ensemble des points G, isobarycentres de A, B et C, lorsque C décrit Γ.

   b. En déduire l'ensemble Γ.

   c. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{b}{c}$.

   d. Représenter l'ensemble des points H, orthocentres des triangles ABC, lorsque C décrit Γ (on se placera dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que A et B aient pour coordonnées respectives $(-1,0)$ et $(1,0)$ et l'on déterminera une fonction f telle que l'ensemble des points H soit la réunion des deux courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$).
3. Dans cette question on se fixe des points A et C et on considère l'ensemble Γ' des points B tels que le triangle ABC soit de type $\mathscr{W}$.

   a. Déterminer l'ensemble Γ'.

   b. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{a}{b}$.

   c. Déterminer les triangles ABC de type $\mathscr{W}$ ayant un rayon du cercle circonscrit minimal.

   d. Représenter l'ensemble des points H, orthocentres des triangles ABC, lorsque B décrit Γ' (on se placera dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que A et C aient pour coordonnées respectives $(-1,0)$ et $(-5,0)$).
4. **a.** Montrer qu'un triangle ABC est de type $\mathscr{W}$ si, et seulement si, l'on a la relation :

   $$(\star) \qquad a^2 + b^2 = 5c^2$$

   b. Étant donné des réels strictement positifs a, b et c vérifiant la relation $(\star)$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rapport $\frac{a}{b}$ pour que a, b et c soient les longueurs des côtés d'un triangle de type $\mathscr{W}$.

3.2 Arithmétique

3.2.1 Deux familles de triangles

Dans la suite de l'exercice, on se propose de rechercher les triangles de type $\mathscr{W}$ dont les côtés ont des longueurs entières, en commençant par rechercher l'ensemble $\mathscr{T}$ des triplets (a,b,c) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant la relation $(\star)$.

On remarque que pour qu'un triplet (a,b,c) d'entiers strictement positifs soit élément de $\mathscr{T}$, il suffit qu'il existe un entier strictement positif m tel que le triplet (ma, mb, mc) soit élément de $\mathscr{T}$, de sorte qu'on peut se limiter à rechercher l'ensemble $\mathscr{T}_1$ des éléments de $\mathscr{T}$ sans facteur premier commun.

1. **a.** Montrer que si (a,b,c) est élément de $\mathscr{T}_1$ alors les entiers a, b et c sont premiers entre eux deux à deux.
   b. Établir que si (a,b,c) est élément de $\mathscr{T}_1$ alors a et b sont de parités différentes.
   c. Montrer que si (a,b,c) est élément de $\mathscr{T}_1$ alors a et b ne sont divisibles ni par 3, ni par 4, ni par 5.
   d. Soit (a,b,c) un élément de $\mathscr{T}_1$. Montrer que b^2-4a^2 et a^2-4b^2 sont des multiples de 5.
   En déduire qu'il existe un couple d'entiers (α,β) tels que l'on ait $\begin{cases} 2a+b=5\alpha \\ -a+2b=5\beta \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2a-b=5\alpha \\ a+2b=5\beta \end{cases}$. Vérifier alors que l'on a $\alpha^2+\beta^2=c^2$, et que α et β sont premiers entre eux.
   e. Si α et β sont des entiers premiers entre eux, les entiers a et b qui leur sont associés par les relations ci-dessus sont-ils premiers entre eux?

On admet désormais le résultat suivant : les triplets (x,y,z) d'entiers strictement positifs sans facteur premier commun, vérifiant la relation $x^2+y^2=z^2$ et tels que y soit pair, sont donnés par $x=u^2-v^2$, $y=2uv$ et $z=u^2+v^2$, où u et v sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, de parités différentes et tels que $u>v$, déterminés de manière unique.

2. On dira qu'un triangle est de type $\mathscr{W}_e$ s'il est de type $\mathscr{W}$ et si les longueurs a, b et c de ses côtés sont des entiers sans facteur premier commun. Montrer que pour tout triangle de type $\mathscr{W}_e$, il existe des entiers strictement positifs u et v, premiers entre eux, de parités différentes et vérifiant $u>v$, tels que l'une des deux relations suivantes soit vérifiée :
3.

(1) $$(a,b,c)=\left(2\left(u^2-uv-v^2\right), u^2+4uv-v^2, u^2+v^2\right)$$

(2) $$(a,b,c)=\left(2\left(u^2+uv-v^2\right), -u^2+4uv+v^2, u^2+v^2\right)$$

4. Déterminer les ensembles de couples (u,v) d'entiers positifs tels que la relation (1) (respectivement (2)) conduise à un triangle de type $\mathscr{W}_e$.
5. Établir qu'un triangle de type $\mathscr{W}_e$ est donné par une seule des deux relations (1) ou (2).
   On classe ainsi les triangles de type $\mathscr{W}_e$ en deux catégories disjointes, que l'on notera $\mathscr{W}_1$ et $\mathscr{W}_2$.
6. Donner les longueurs des côtés des triangles de type $\mathscr{W}_e$ dont le « petit » côté c a une longueur inférieure ou égale à 50.

3.2.2 Entiers de la forme u^2-uv-v^2 et leurs diviseurs

On se propose d'étudier les facteurs premiers supérieurs ou égaux à 7 des entiers a et b, longueurs des côtés BC et CA d'un triangle de type $\mathscr{W}_e$.

1. On note ω et ω' les solutions de l'équation $x^2-x-1=0$.
   Établir la relation $u^2-uv-v^2=(u-\omega v)\left(u-\omega' v\right)$. En déduire que l'ensemble des entiers de la forme u^2-uv-v^2, où u et v sont des entiers relatifs arbitraires, est stable par multiplication.
   Que peut-on dire de l'ensemble des entiers de la forme $u^2+4uv-v^2$, où u et v sont des entiers relatifs arbitraires?
2. Soit $p=2q+1$ un nombre premier strictement supérieur à 5 qui divise un entier de la forme u^2-uv-v^2, où u et v sont des entiers relatifs premiers entre eux.
   a. Établir les congruences $(2u-v)^2 \equiv 5v^2$ modulo p et $(u+2v)^2 \equiv 5u^2$ modulo p.
   b. En déduire que $5^q \equiv 1$ modulo p.
   c. Soit j un entier compris entre 1 et q, on note r_j le reste de la division de $5j$ par p. Si $r_j \leqslant q$ on pose $f(j)=r_j$ et $\varepsilon(j)=1$; dans le cas contraire on pose $f(j)=p-r_j$ et $\varepsilon(j)=-1$, de sorte que l'on a dans tous les cas $1 \leqslant f(j) \leqslant q$ et $5j \equiv \varepsilon(j)f(j)$ modulo p.
   Montrer que les entiers $f(1), f(2), \ldots, f(q)$ sont deux à deux distincts et en déduire que le nombre d'entiers j, compris entre 1 et q et tels que $\varepsilon(j)=-1$, est pair.
   d. Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, à savoir le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
   Montrer que $\left\lfloor \frac{4p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3p}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{10} \right\rfloor$ est pair, puis que $p \equiv \pm 1$ modulo 10.
3. Soient (a,b,c) les longueurs des côtés d'un triangle de type $\mathscr{W}_e$.
   a. Montrer que tous les facteurs premiers impairs de a sont congrus à 1 ou à 9 modulo 10.
   b. Que peut-on dire des facteurs premiers de b?

Concours général des lycées - Session 2006

1 Problème 1

Si n est un entier naturel strictement positif, on note $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1 a_0}$ son écriture décimale. On a donc $n = 10^i a_i + 10^{i-1} a_{i-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0$, les entiers a_j, $0 \leqslant j \leqslant i$, sont compris entre 0 et 9, et $a_i \neq 0$.
On désigne par q un entier compris, au sens large, entre 1 et 9, on pose $p = 10q - 1$ et l'on considère la fonction f_q qui à l'entier $n = \overline{a_i} a_{i-1} \dots a_1 a_0$ associe l'entier :

$$f_q(n) = \overline{a_i a_{i-1} \dots a_1} + q a_0 \text{ si } i = 0, \text{ alors } f_q(n) = q a_0)$$

Enfin, l'entier q étant fixé, on associe à tout entier n la suite (n_k) définie par les relations $n_0 = n$ et, pour tout entier naturel k, $n_{k+1} = f_q(n_k)$. Par exemple, si l'on fixe $q = 5$, la suite associée à 4907 est 4907, 525, 77, 42, 14, 21, 7, 35, 28, 42, 14,...

1. Vérifier que $f_q(n) = \frac{n + p a_0}{10}$. En déduire que $f_q(p) = p$.
2. **a.** Montrer que, si $m > p$, alors $f_q(m) < m$.
   b. En déduire que pour tout entier n, il existe un entier j tel que $n_j \leqslant p$.
3. **a.** Montrer que, si $m < p$, alors $f_q(m) < p$.
   b. En déduire que pour tout entier n, la suite (n_k) est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe des entiers k et T ($T > 0$) tels que $n_{j+T} = n_j$ pour tout $j \geqslant k$.
4. Établir que, pour tout entier n, $f_q(n)$ est congru à $q \times n$ modulo p.
5. Pour quelles valeurs de q la fonction f_q a-t-elle des points fixes (c'est-à-dire des entiers m tels que $f_q(m) = m$) autres que p ? Quels sont alors ces points fixes ?
6. Montrer que, pour des choix convenables de q, l'étude de la suite (n_k) associée à un entier n fournit des critères de divisibilité de n par 9, 19, 29, 13, 49 et 7. Énoncer ces critères.

2 Problème 2

2.1 Partie 1

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, soit $\mathscr{H}$ l'ensemble d'équation $(1 - x)(1 - y) = a$ et soit $\mathscr{H}_1$ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) de $\mathscr{H}$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.

1. Préciser la nature de $\mathscr{H}$. Représenter $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}_1$.
2. Montrer que, quand le point de coordonnées (x, y) décrit $\mathscr{H}_1$, la somme $x + y$ décrit un intervalle que l'on précisera.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de $x^2 + y^2$ quand le point de coordonnées (x, y) décrit $\mathscr{H}_1$.
   Indication : On pourra montrer que si (x, y) sont les coordonnées d'un point de $\mathscr{H}$ et si $s = x + y$, alors :
   $$x^2 + y^2 = s^2 - 2s + 2 - 2a$$

Les résultats des deux questions suivantes n'interviennent pas dans le reste de l'exercice.

4. Déterminer, en discutant selon la valeur de a, le nombre de points d'intersection de $\mathscr{H}_1$ et du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{a}\right)$.
5. Déterminer l'aire du domaine limité par $\mathscr{H}_1$ et les axes de coordonnées.
   En déduire, pour $a \in \left[\frac{1}{4}, 1\right[$, l'inégalité :
   $$\frac{\pi}{2}(1 - \sqrt{a})^2 \leqslant 1 - a + a \ln a$$
   L'équation
   $$\frac{\pi}{2}(1 - \sqrt{a})^2 = 1 - a + a \ln a$$
   admet-elle une solution appartenant à $]0, 1[$?

2.2 Partie 2

Étant donné deux points distincts P et Q du plan, on note $]PQ[$ l'ensemble des points du segment $[PQ]$ distincts de P et Q.
Dans le plan, on considère un triangle ABC et on désigne par h la longueur de la hauteur issue de A.
On note Γ le cercle inscrit dans le triangle, I son centre et r son rayon.
On rappelle que I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC, c'est-à-dire le point intérieur au triangle vérifiant $\widehat{IAB} = \widehat{IAC}$, $\widehat{IBC} = \widehat{IBA}$ et $\widehat{ICA} = \widehat{ICB}$.
On note Δ_B (respectivement Δ_C) la droite passant par B et orthogonale à (BI) (respectivement passant par C et orthogonale à (CI)).

1. Soit J le point d'intersection de Δ_B et Δ_C.
   Montrer que les distances de J aux trois droites (AB), (BC), (CA) sont égales. En déduire que J appartient à la droite (AI) et est le centre d'un cercle Γ' tangent aux droites (AB), (BC), (CA).
   Le cercle Γ' est le *cercle exinscrit* dans l'angle A du triangle ABC.
2. En examinant les angles des triangles en question, montrer que AIC est semblable à ABJ et que AIB est semblable à ACJ.
   En déduire $AI \cdot AJ = AB \cdot AC$.
3. Soit f l'homothétie de centre A qui envoie J sur I.
   Préciser l'image par f du cercle Γ' et de la droite (BC). En déduire :
   $$\frac{AI}{AJ} = \frac{h - 2r}{h}$$

Soit D un point de $]BC[$.
On note I_1 et I_2 les centres des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD et on note r_1 et r_2 leurs rayons ; on note enfin J_1 et J_2 les centres des cercles exinscrits dans l'angle A des triangles ABD et ACD.

4. Montrer que les triangles AI_1J_2 et AIC sont semblables. De même, les triangles AI_2J_1 et AIB sont semblables
5. En exprimant $\frac{AI_1}{AJ_2}\frac{AI_2}{AJ_1}$ de deux façons différentes, établir la relation :
   $$h(h - 2r) = (h - 2r_1)(h - 2r_2)$$

2.3 Partie 3

On conserve les notations ABC, h, r données dans la deuxième partie.
Dans les questions **1.** et **2.**, pour tout point D de $]BC[$, les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD sont notés $r_1(D)$ et $r_2(D)$, ou simplement r_1 et r_2 s'il n'y a pas ambiguïté.

1. Montrer qu'il existe un unique point E de $]BC[$ tel que $r_1(E) = r_2(E)$.

2. **a.** Montrer que E est le point de $]BC[$ pour lequel $r_1 + r_2$ est maximal.

b. Montrer que E est le point de $]BC[$ pour lequel $r_1^2 + r_2^2$ est minimal si et seulement si $8r \leqslant 3h$.

3. Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul et on note $N = 2^n$.
On considère $N+1$ points distincts $D_0, D_1, \dots, D_{N-1}, D_N$ placés dans cet ordre sur le segment $[BC]$: autrement dit, pour tout entier i de $[1, N-1]$, le point D_i appartient à $]D_{i-1}D_{i+1}[$.
On suppose de plus que $D_0 = B$ et $D_N = C$.
Pour tout entier i de $[1, N]$, on note r_i le rayon du cercle inscrit dans le triangle $AD_{i-1}D_i$.

a. L'entier n étant donné, déterminer la valeur maximale de $r_1 + r_2 + \cdots + r_N$ quand $D_1, \dots, D_{N-1}$ varient dans $]BC[$ en respectant les conditions décrites ci-dessus.
On montrera, par exemple par récurrence sur n, que cette valeur maximale est atteinte lorsque $r_1 = r_2 = \ldots = r_N$.

b. On note u_n la valeur maximale trouvée au **a.**.
Exprimer u_n en fonction de r, h, n.
Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on exprimera en fonction de r et h.

c. On suppose $8r \leqslant 3h$.
L'entier n étant donné, déterminer la valeur minimale v_n de $r_1^2 + \cdots + r_N^2$.
Montrer que la suite $(2^n v_n)$ converge.

3 Problème 3

Le but de cet exercice est d'étudier les intersections d'un cube avec des plans passant par son centre, et d'encadrer l'aire des sections planes ainsi obtenues.

3.1 Une formule pour calculer des aires planes

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\mathscr{P}$ un plan, de vecteur normal unitaire $\vec{n}$. On pose $\vec{n} \cdot \vec{k} = \cos\gamma$, et l'on désigne par $\mathscr{P}_0$ le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On suppose dans cette question que $\mathscr{P}$ et le plan $\mathscr{P}_0$ ne sont pas parallèles.
Soit $\mathscr{D}$ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_0$, A et B des points de $\mathscr{D}$, C un point de $\mathscr{P}$,C' le projeté orthogonal de C sur le plan $\mathscr{P}_0$ et enfin H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

a. Justifier le fait que H est également le projeté orthogonal de C' sur la droite (AB).

b. En déduire une relation entre les longueurs CH, $C'H$ et l'angle γ, puis entre les aires S et S' des triangles ABC et ABC'.

c. Soit Q un polygone contenu dans le plan $\mathscr{P}$, Q' son projeté orthogonal sur le plan $\mathscr{P}_0$, S et S' leurs aires respectives. Montrer que :

$$S' = S|\cos\gamma|$$

2. Que dire dans le cas particulier où $\mathscr{P}$ et le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont parallèles ?

3. On pose $\vec{n} \cdot \vec{i} = \cos\alpha$ et $\vec{n} \cdot \vec{j} = \cos\beta$.

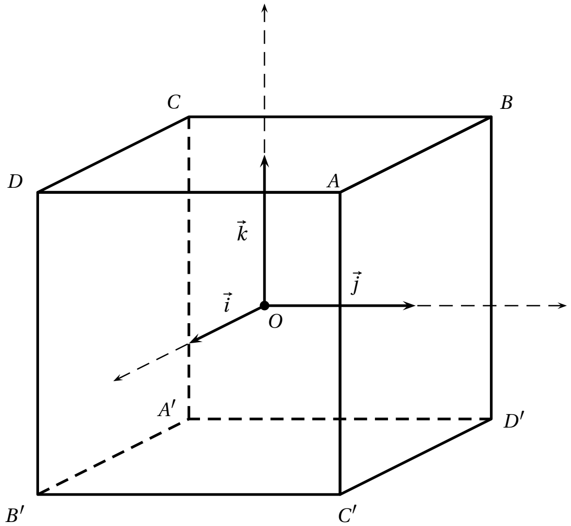
a. Montrer que les valeurs absolues des coordonnées de $\vec{n}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $|\cos\alpha|$, $|\cos\beta|$ et $|\cos\gamma|$.

b. Soit Q un polygone contenu dans le plan $\mathscr{P}$, S son aire, S', S'' et S''' les aires de ses projetés respectifs sur les plans de repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O, \vec{k}, \vec{i})$.
Montrer que : $S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2$.

3.2 Sections planes d'un cube

3.2.1 Généralités

L'espace étant rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le cube $\mathscr{K}$ de centre O représenté ci-contre, dont les sommets ont pour coordonnées :
$A(1,1,1)$
$B(-1,1,1)$
$C(-1,-1,1)$
$D(1,-1,1)$
$A'(-1,-1,-1)$
$B'(1,-1,-1)$
$C'(1,1,-1)$
$D'(-1,1,-1)$
ainsi qu'un plan $\mathscr{P}$ passant par O, dont l'intersection avec $\mathscr{K}$ est un polygone $\mathscr{A}$.



1. Montrer que $\mathscr{P}$ contient 0, 2 ou 4 sommets de $\mathscr{K}$.
2. Combien y a-t-il de plans $\mathscr{P}$ contenant 4 sommets de $\mathscr{K}$? Déterminer dans ce cas la nature de $\mathscr{A}$ ainsi que son aire.
3. On suppose que $\mathscr{P}$ contient exactement deux sommets de $\mathscr{K}$, A et A'.
   a. Montrer que $\mathscr{P}$ rencontre une des trois arêtes $[BC]$, $[CD]$ ou $[BD']$.
   b. On suppose que $\mathscr{P}$ rencontre l'arête $[BC]$ en un point N de coordonnées $(-1,y,1)$. Déterminer, selon la valeur de y, la nature exacte de $\mathscr{A}$ et calculer son aire.
   c. Donner, dans ce cas de figure, le meilleur encadrement possible de l'aire de $\mathscr{A}$ lorsque y varie.
4. On suppose que $\mathscr{P}$ ne contient aucun sommet de $\mathscr{K}$.
   a. Montrer que chacun des demi-espaces limités par $\mathscr{P}$ contient exactement 4 sommets de $\mathscr{K}$.
   b. Prouver que $\mathscr{P}$ rencontre 4 ou 6 arêtes de $\mathscr{K}$.

Dans toute la suite on ne considère que des plans $\mathscr{P}$ ne contenant aucun sommet de $\mathscr{K}$.

3.2.2 Plans $\mathscr{P}$ rencontrant 4 arêtes de $\mathscr{K}$

On considère un plan $\mathscr{P}$ rencontrant l'arête $[AB]$ en un point M de coordonnées $(u,1,1)$ et l'arête $[CD]$ en un point N de coordonnées $(v,-1,1)$.

1. Déterminer, selon la valeur de u et v, la nature exacte de $\mathscr{A}$ et calculer son aire.
2. Donner, dans ce cas de figure, le meilleur encadrement possible de l'aire de $\mathscr{A}$ lorsque u et v varient.

3.2.3 Plans $\mathscr{P}$ rencontrant 6 arêtes de $\mathscr{K}$

On considère un plan $\mathscr{P}$ rencontrant l'arête $[AB]$ en un point M de coordonnées $(x,1,1)$ et l'arête $[BC]$ en un point N de coordonnées $(-1,y,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ rencontre l'arête $[CA']$ en un point R de coordonnées $(-1,-1,z)$. Donner, sur un croquis à main levée, la construction géométrique du point R, les points M et N étant donnés.
2. Établir que les trois nombres réels x, y et z sont liés par la relation :

(1) $$x+y+z+xyz=0$$

3. Dessiner le polygone $\mathscr{A}$ pour $x=y=z=0$ et calculer son aire.
4. Montrer que l'aire S de $\mathscr{A}$ vérifie la relation :
$$S^2=(3-x+y+xy)^2+(3+x-z+xz)^2+(3-y+z+yz)^2$$
On pose désormais :
$$f(x,y,z)=(3-x+y+xy)^2+(3+x-z+xz)^2+(3-y+z+yz)^2$$
5. Déterminer l'ensemble des valeurs de S lorsque les points M et N varient de manière que $x+y=0$.
6. Étant donné des réels strictement positifs u, v et w, on pose $x=\frac{u-1}{u+1}$, $y=\frac{v-1}{v+1}$ et $z=\frac{w-1}{w+1}$.
   a. Vérifier que, lorsque le triplet (x,y,z) vérifie la relation (1), on a $uvw=1$ et $z=\frac{1-uv}{1+uv}$.
   b. On pose :
   $$g(u,v)=f\left(\frac{u-1}{u+1},\frac{v-1}{v+1},\frac{1-uv}{1+uv}\right)$$
   et l'on admet que l'on a la relation :
   $$g(u,v)=32\frac{(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)}{(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2}$$
   Montrer que l'on a, pour tout couple (u,v) de réels strictement positifs, l'encadrement :
   $$24\leqslant g(u,v)\leqslant 32$$
   En déduire, dans ce cas de figure, le meilleur encadrement possible de l'aire de $\mathscr{A}$ lorsque x et y varient.

Concours général des lycées - Session 2005

1 Problème 1

Dans cet exercice, on se place dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1.1 Préliminaires de géométrie élémentaire

1. Soient D et D' deux droites sécantes en un point I, s et s' les symétries axiales respectivement d'axes D et D'.
   Montrer que $s' \circ s$ est une rotation, et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Soit ABC un triangle équilatéral direct, O le centre du cercle circonscrit à AC.
   On désigne par s_1, s_2 et s_3 les symétries axiales respectivement par rapport aux droits (OA), (OB) et (OC) et par r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   Soit M un point de plan, $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

   a. Montrer que $M_2 = r^2(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$ où r^2 désigne $r \circ r$.

   b. Quelle est la nature du triangle $M_1M_2M_3$?

1.2 Nombres complexes

L'affixe du vecteur $\vec{u}$ étant 1 et celle du vecteur $\vec{v}$ étant notée i (avec $i^2 = -1$), comme il est d'usage, on pose $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On considère, dans le plan $\mathscr{P}$, les points O, A, B et C d'affixes respectives 0, 1, j et j^2.
On désigne par s_1, s_2 et s_3 les symétries axiales respectivement par rapport aux droites (OA), (OB) et (OC).
Soit enfin M un point quelconque du plan $\mathscr{P}$, d'affixe $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Soient $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.
   Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\bar{z}$, $j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$.
2. Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC).
   Montrer le point J d'affixe $-\frac{1}{2}$ est le milieu du segment $[M_1M_4]$.
   En déduire l'affixe de M_4.
3. **a.** À quelle condition les points M_2, M_3 et M_4 sont-ils alignés ?

On suppose désormais que M_2, M_3 et M_4 ne sont pas alignés ; on note Ω le centre du cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$.

b. Justifier le fait que Ω appartient à la droite (OM_1).
Dans la suite, on note son affixe $\lambda\mathrm{e}^{-i\theta}$ avec λ réel.

c. Montrer que $\lambda = -\frac{1+2\rho\cos(\theta)}{\rho+2\cos(\theta)}$.

d. En déduire une expression du rayon R du cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$.

e. Montrer que ce rayon est égal à 1 si et seulement si : « $\rho = 1$ ou $(\rho + \cos(\theta))^2 = 1 - 3\cos^2(\theta)$ ».

4. Montrer que le cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$ est de même rayon que le cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$ si et seulement si M appartient à un ensemble Γ que l'on précisera géométriquement. Que peut-on dire dans ce cas des deux cercles circonscrits ?

1.3 Étude de fonctions

On considère l'application s définie pour tout $\theta \in [-\pi; \pi]$ par $s(\theta) = 1 - 3\cos^3(\theta)$.

1. **a.** Étudier les variations de s. Préciser ses extremums, les valeurs de θ pour lesquelles $s(\theta)$ est nul, l'ensemble E des $\theta \in [-\pi; \pi]$ tels que $s(\theta) \geqslant 0$.

   b. En déduire l'allure de la courbe décrite par le point d'affixe $s(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}$ lorsque θ varie.
   On précisera les points d'intersection avec les axes et éventuellement quelques points particuliers (pour $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ par exemple).
   On pourra aussi justifier les symétries de la courbe.
2. Soit la fonction r_1 définie pour tout $\theta \in E$ par $r_1(\theta) = \sqrt{1 - 3\cos^2(\theta)} - \cos(\theta)$.

   a. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $r_1(\theta)$ est nul.

   b. En déduire l'allure de la courbe décrite par le point d'affixe $r_1(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}$ lorsque θ varie.
3. Dessiner, sans chercher à être extrêmement précis, l'ensemble des points M tels que le triangle $M_2M_3M_4$ défini dans la partie 2 ait un cercle circonscrit de rayon 1.

2 Problème 2

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0; 1]$.
On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout x réel de l'intervalle $\left[0; \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions sur $[0; 1]$.
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ; on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

3 Problème 3

On considère dans le plan trois points A_0, B, C non alignés.

1. On désigne par A_1 le centre du cercle inscrit dans le triangle A_0BC (c'est-à-dire le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle A_0BC).
   On poursuit le processus en considérant A_2, centre du cercle inscrit dans le triangle A_1BC, etc.
   Ainsi, pour tout i entier naturel, A_{i+1} est le centre du cercle inscrit dans le triangle A_iBC.
   Démontrer qu'il existe un point A, limite de la suite (A_n), c'est-à-dire tel que AA_n tende vers 0 et préciser sa position.
2. Que devient le résultat précédent si, à chaque étape, pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, on prend pour A_{i+1} l'orthocentre du triangle A_iBC au lieu du centre du cercle inscrit ?

4 Problème 4

Si m_1 et m_2 sont deux entiers tels que $m_1 \leqslant m_2$, on désigne par $[\![m_1; m_2]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $m_1 \leqslant k \leqslant m_2$.
Si a, b et n sont trois entiers, on note $a = b$ (modulo n) lorsque a et b sont congrus modulo n, c'est-à-dire lorsque $b - a$ est multiple de n.
Dans tout cet exercice, p désigne un nombre premier.

4.1 Définition du logarithme discret

Pour tout $A \in \mathbb{N}$, on note $(A \bmod p)$ le reste de la division euclidienne de A par p. C'est l'unique entier de $[\![0; p-1]\!]$ congru à A modulo p.
Un entier $x \in [\![1; p-1]\!]$ est appelé une racine primitive modulo p lorsque l'ensemble des $\left(x^k \bmod p\right)$ pour $k \in N$ est l'ensemble $[\![1; p-1]\!]$, c'est-à-dire lorsque les puissances de x, calculées modulo p, décrivent $[\![1; p-1]\!]$ tout entier.

Ainsi pour $p = 5$:

- 1 n'est pas racine primitive modulo 5 puisque ses puissances valent toujours 1.
- 2 est racine primitive modulo 5 , puisque :

$$\left(2^0 \bmod 5\right) = 1, \left(2^1 \bmod 5\right) = 2, \left(2^2 \bmod 5\right) = 4, \left(2^3 \bmod 5\right) = 3$$

- 3 est racine primitive modulo 5 puisque :

$$\left(3^0 \bmod 5\right) = 1, \left(3^1 \bmod 5\right) = 3, \left(3^2 \bmod 5\right) = 4, \left(3^3 \bmod 5\right) = 2$$

- 4 n'est pas racine primitive de 5 puisque $\left(4^k \bmod 5\right)$, $k \in N$ vaut alternativement 1 ou 4.

1. On prend dans cette question $p = 7$. Déterminer les racines primitives modulo 7.

On admet désormais que, quel que soit le nombre premier p, il existe au moins une racine primitive modulo p. Dans la suite, on désigne par g une racine primitive modulo p.

2. a. Montrer que l'ensemble des $\left(g^k \bmod p\right)$ pour $k \in [\![0; p-2]\!]$ est $[\![1; p-1]\!]$.

b. Soit $A \in [\![1; p-1]\!]$.
Justifier l'existence et l'unicité d'un entier $a \in [\![1; p-2]\!]$ tel que $A = \left(g^a \bmod p\right)$.

a est appelé logarithme de base g modulo p de A ; on le note $\ell(A)$.

c. Soit b un entier naturel congru à a modulo $p - 1$. Calculer $\left(g^b \bmod p\right)$.

3. Une solution élémentaire pour déterminer $\ell(A)$ consiste à calculer les entiers $\left(g^k \bmod p\right)$, pour $k = 0, 1, \ldots$ jusqu'à trouver A.

a. Décrire un algorithme qui réalise ce travail.

b. Dans cette question, on prend : $p = 53$, $A = 40$, $g = 20$ (on admettra que 20 est bien une racine primitive modulo 53).
En programmant l'algorithme précédent sur une calculatrice, déterminer $\ell(A)$.

4.2 Calcul du logarithme discret par la méthode d'Adleman

Cette partie exploite le fait que la connaissance des logarithmes de quelques entiers permet de déterminer rapidement le logarithme de tout entier.

1. On se place dans le cas $p = 113$, $g = 55$ et on donne $\ell(2) = 60$, $\ell(3) = 5 =$. Trouver $\ell(54)$.

On suppose choisis, pour la suite de cette partie, des nombres premiers distincts $p_1, \ldots, p_n$ strictement inférieurs à p et des entiers $a_1, \ldots, a_n$ tels que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, les facteurs premiers de $\left(g^i \bmod p\right)$ appartiennent à $\{p_1; \cdots; p_n\}$.
Pour chaque $i \in [\![1; n]\!]$, on a ainsi une relation $\left(g^{a_i} \bmod p\right) = p_1^{e_{i,1}} p_2^{e_{i,2}} \cdots p_n^{e_{i,n}}$ où les $e_{i,j}$ pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, sont des entiers naturels.

2. Montrer que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$,

$$a_i = e_{i,1}\ell\left(p_1\right) + e_{i,2}\ell\left(p_2\right) + \cdots + e_{i,n}\ell\left(p_n\right) \quad (\text{ modulo } (p-1))$$

3. On prend dans cette question $p = 53$, $g = 20$, $n = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$.

a. A l'aide de g et g^3, déterminer $\ell(2)$ et $\ell(5)$.

b. En déduire $\ell(40)$.

c. Combien d'entiers de $[\![1; 52]\!]$ peuvent s'écrire sous la forme $2^\alpha 5^\beta$, avec α et β entiers naturels ?

4. Soit $A \in [\![1; p-1]\!]$.

a. Montrer que l'ensemble des $\left(g^s A \bmod p\right)$ pour $s \in [\![0; p-2]\!]$ est $[\![1; p-1]\!]$.

b. On suppose connu $s \in N$ tel que $\left(g^s A \bmod p\right)$ se factorise à l'aide de $p_1, \ldots, p_n$ uniquement. Si on suppose connus $\ell\left(p_1\right), \ldots \ell\left(p_n\right)$, en déduire $\ell(A)$.

c. Avec $p = 53$ et $g = 20$, déterminer $\ell(30)$.

5. On revient au cas général.

a. Quel est le nombre d'entiers de $[\![1; p-1]\!]$ qui sont une puissance de p_1 ?

b. En déduire la probabilité pour qu'un entier $s \in [\![0; p-2]\!]$ soit tel que $\left(g^s A \bmod p\right)$ soit une puissance de p_1.

c. Montrer que la probabilité P pour qu'un entier $s \in [\![0; p-2]\!]$ soit tel que $\left(g^s A \bmod p\right)$ se factorise à l'aide de p_1 et p_2 uniquement vérifie :

$$\frac{(\ln(p-1))^2}{2(p-1)\left(\ln p_1\right)\left(\ln p_2\right)} \leqslant P \leqslant \frac{1}{p-1}\left(\frac{\ln(p-1)}{\ln p_1} + 1\right)\left(\frac{\ln(p-1)}{\ln p_2} + 1\right)$$

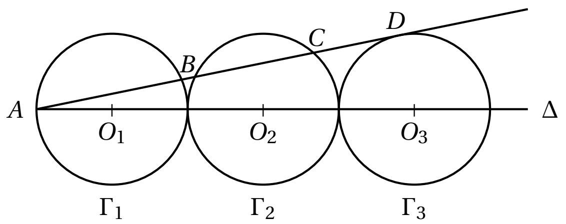
d. Généraliser le résultat au cas de n nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$.

Concours général des lycées - Session 2004

1 Une famille de cercles tangents

Dans le plan, soit A un point et Δ une demi-droite d'origine A.

1. On considère trois cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 de même rayon r non nul, de centres respectifs O_1, O_2, O_3 distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite Δ. Le cercle Γ_1 passe par A et le cercle Γ_2 est tangent aux cercles Γ_1 et Γ_3.
Les diamètres des cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 sur la demi-droite Δ sont notés respectivement $[AA_1]$, $[A_1A_2]$ et $[A_2A_3]$.

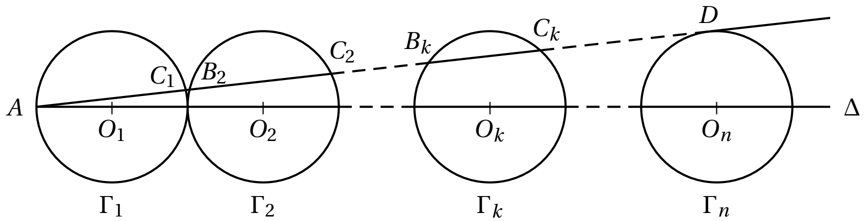


Par le point A, on mène une droite (AD) tangente en D au cercle Γ_3.

a. Montrer que la droite (AD) coupe le cercle Γ_2 en deux points distincts B et C. Calculer la longueur BC.

b. Montrer que les droites (BA_1) et (CA_2) sont sécantes ; on note P leur point d'intersection.
Montrer de même que les droites (CA_1) et (BA_2) sont sécantes ; on note Q leur point d'intersection.
Que peut-on dire de la direction de la droite (PQ) ?

2. **Plus généralement**, on considère un entier n strictement supérieur à 1 et n cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ de même rayon r strictement positif, de centres respectifs $O_1, O_2, \dots, O_n$ distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite Δ. Le cercle Γ_1 passe par A et, pour tout $k > 1$, le cercle Γ_k est tangent au cercle Γ_{k-1}.
Les diamètres des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ sur la droite Δ sont notés respectivement $[AA_1], [A_1A_2], \dots, [A_{n-1}A_n]$.



Par le point A, on mène une droite (AD) tangente en D au cercle Γ_n. Montrer que, pour tout k entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, cette droite coupe le cercle Γ_k en deux points distincts B_k et C_k (on remarque que $B_1 = A$).

a. Calculer la longueur B_kC_k en fonction de n, de k et de r.

Dans toute la suite du problème, on prend $r = 1$. On pose $L(n, k) = B_kC_k$.

b. Montrer que pour que $L(n, k)$ soit rationnel il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

$$(\mathcal{C}_1) \quad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } n(n-1) - k(k-1) = 4a^2$$

2 Étude d'une surface

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées (respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote) d'un point sont notées x, y et z. On considère l'ensemble Σ des points M de coordonnées (x, y, z) vérifiant :

$$z^2 = x(x-1) - y(y-1)$$

1. Soient λ un réel et P_λ le plan d'équation $x = \lambda$.
Montrer que l'intersection de Σ et de P_λ est un cercle C_λ dont on déterminera, en fonction de λ, le centre et le rayon.
2. Soit I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et (d) la droite passant par I de vecteur directeur $\vec{i}$.
Montrer que la droite (d) est un axe de symétrie de Σ. Déterminer et dessiner l'intersection de Σ et du plan d'équation $y = \frac{1}{2}$.
3. Reconnaître la nature de l'ensemble Σ.
4. Soit un entier n strictement supérieur à 2 et un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Montrer que $L(n, k)$ est rationnel si, et seulement si, les points de Σ d'abscisse n et d'ordonnée k ont pour cote un nombre entier pair.

3 Étude d'une limite

À partir de la configuration étudiée partie 1, **2.**, *on définit* λ_n *comme la proportion du segment* $[AD]$ *située à l'intérieur des cercles* (Γ_k), *pour* $1 \leqslant k \leqslant n-1$. *Ainsi, on a* $\lambda_n = \frac{1}{AD}\sum_{k=1}^{n-1} B_kC_k$.

1. **Calculs d'intégrales**

   On définit la fonction f, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ puis la fonction F, de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = f(\sin x)$.

   a. Montrer que la fonction F est dérivable et calculer sa dérivée, notée F'.

   b. Montrer que, pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = \int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

   c. Sans chercher à calculer les intégrales, démontrer l'égalité $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur commune des deux intégrales.

   d. En déduire que $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$; interpréter géométriquement ce résultat.

2. **a.** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\lambda_n = \frac{2}{2n-1}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}}$.

   b. Montrer que si $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1} \leqslant \left(\frac{k}{n}\right)^2$.

   c. On pose $I_{n,k} = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que pour des valeurs convenables de n et k, que l'on précisera, on a :

$$nI_{n,k+1} \leqslant \sqrt{1-\frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n}} \leqslant nI_{n,k-1}$$

3. Démontrer, à partir des résultats des questions **1.** et **2.** ci-dessus, que la suite (λ_n) est convergente et calculer sa limite.

4 Étude de la condition $(\mathcal{C}_1)$

On considère deux entiers n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

1. On pose $p = 2n-1$ et $q = 2k-1$. Montrer que le couple (n,k) vérifie la condition $\mathcal{C}_1$ si, et seulement si, (p,q) est un couple d'entiers naturels impairs tels que $q < p$, vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$ suivante :

$$(\mathcal{C}_2) \quad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^2 - q^2 = 16a^2$$

2. Soit (p,q) un couple de nombres entiers naturels, tel qu'il existe deux entiers $u > 0$ et $v > 0$, de parités différentes, pour lesquels $p = u^2 + v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Montrer que (p,q) est un couple d'entiers naturels impairs tels que $q < p$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$.

3. On considère un couple (p,q), d'entiers naturels impairs et premiers entre eux, tels que $q < p$ et vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$. Montrer qu'il existe deux entiers naturels u et v de parités différentes tels que $p = u^2 + v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Calculer alors, en fonction de u et de v, la valeur de l'entier a qui intervient dans la condition $(\mathcal{C}_2)$.

5 Nombre premier somme de deux carrés

On se propose dans cette partie de déterminer tous les nombres premiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers naturels. On désignera plus simplement un tel nombre comme étant « somme de deux carrés ».

1. **a.** Montrer que si n est un entier naturel impair somme de deux carrés, il est congru à 1 modulo 4.
   b. Écrire 2 et 5 comme somme de deux carrés.

Dans la suite de la partie 5, p désigne un nombre premier congru à 1 modulo 4 et strictement supérieur à 5. On l'écrit sous la forme $p = 4m + 1$ (avec $m > 2$).
On définit $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid 4xy + z^2 = p\right\}$.

2. **a.** Montrer que S est un ensemble fini non vide et que l'intersection de S et de l'ensemble d'équation $x = y + z$ est vide.
   b. À tout triplet (x, y, z) de S, on associe le triplet $\left(x', y', z'\right)$ défini par :

$$\left(x', y', z'\right) = \begin{cases} (x - y - z, y, 2y + z) & \text{si } x > y + z \\ (y + z - x, x, 2x - z) & \text{si } x < y + z \end{cases}$$

   Montrer que pour tout (x, y, z) de S, $\left(x', y', z'\right)$ est aussi élément de S.

On considère désormais la suite de triplets dans S définie en itérant le procédé précédent de la manière suivante :

- *On part du triplet $\left(x_0, y_0, z_0\right) = (m, 1, 1)$;*
- *$\left(x_k, y_k, z_k\right)$ ayant été défini dans S, on prend $x_{k+1} = x'_k$, $y_{k+1} = y'_k$, $z_{k+1} = z'_k$.*

3. **a.** *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question seulement, on prend $m = 10$. Déterminer les triplets $\left(x_k, y_k, z_k\right)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 11$.
   b. Montrer que si $(a, b, c) = \left(x_k, y_k, z_k\right)$, avec $k \geqslant 2$, alors le triplet $\left(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}\right)$ est :

$$\begin{cases} (a - b + c, b, c - 2b) & \text{si } a - 4b + 2c > 0 \\ (b, a - b + c, 2b - c) & \text{si } a - 4b + 2c < 0 \end{cases}$$

   Montrer que ce résultat est encore vrai pour $k = 1$.
   c. Montrer qu'il existe deux entiers distincts k et ℓ tels que $\left(x_k, y_k, z_k\right) = \left(x_\ell, y_\ell, z_\ell\right)$.
   En déduire qu'il existe un entier n strictement positif tel que $\left(x_n, y_n, z_n\right) = (m, 1, 1)$.

On note désormais n le plus petit entier strictement positif tel que :

$$\left(x_n, y_n, z_n\right) = (m, 1, 1)$$

4. **a.** Calculer $\left(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}\right)$ et $\left(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}\right)$.
   b. Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\left(x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1}\right) = \begin{cases} \left(x_{n-j}, y_{n-j}, -z_{n-j}\right) & \text{si } x_{j-1} > y_{j-1} + z_{j-1} \\ \left(y_{n-j}, x_{n-j}, z_{n-j}\right) & \text{si } x_{j-1} < y_{j-1} + z_{j-1} \end{cases}$$

   c. Montrer que n est impair. On pose désormais $n = 2r + 1$.
   d. Montrer que $x_r = y_r$. En déduire qu'il existe une décomposition de p en somme de deux carrés.

5. **a.** Déduire des questions précédentes un algorithme permettant de décomposer p en somme de deux carrés.
   b. Donner le plus petit nombre premier supérieur à 40 qui est somme de deux carrés et, à l'aide de cet algorithme, en préciser une décomposition (on indiquera les triplets calculés aux différentes étapes de l'itération).

6 Retour au problème initial

1. Soient n et m deux entiers naturels somme de deux carrés, $n = a^2 + b^2$, $m = c^2 + d^2$. En introduisant les nombres complexes $a + ib$ et $c + id$ et en considérant $n = |a + ib|^2$ et $m = |c + id|^2$, montrer que le produit mn est un entier somme de deux carrés et en donner explicitement une décomposition en fonction de a, b, c et d.
2. On se propose de démontrer, pour tout entier n strictement positif, la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \text{« tout nombre premier qui divise } n^2 + 1 \text{ est somme de deux carrés ».}$$

   Pour cela, on procède par récurrence sur n.
   a. Montrer que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.
   b. Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose la proposition $\mathcal{P}(j)$ vraie pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n - 1$ et on considère un nombre premier p qui divise $n^2 + 1$.
      i. Montrer que p est différent de n.
      ii. On suppose $p < n$. Montrer que p divise $(n - p)^2 + 1$.
      iii. On suppose $p > n$ et $p < n^2 + 1$. Montrer que les autres diviseurs premiers de $n^2 + 1$ sont strictement inférieurs à n. En déduire, en discutant selon la parité de n, que p est congru à 1 modulo 4.
      iv. Montrer que p est somme de deux carrés.
   c. Conclure.
3. **a.** Pour s entier supérieur ou égal à 2, on note p_s le plus petit diviseur premier du nombre $(s!)^2 + 1$.
   Montrer que $p_s > s$ et que p_s est somme de deux carrés.
   b. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers somme de deux carrés.
4. **a.** Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers (n, k) avec $1 \leqslant k < n$ tels que $L(n, k)$ soit rationnel.
   b. Déterminer un entier n tel qu'il existe plusieurs valeurs de k pour lesquelles $L(n, k)$ est rationnel.

Concours général des lycées - Session 2003

Le problème étudie des configurations du plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On pourra aussi se placer dans le plan complexe associé, i étant l'affixe du point de coordonnées $(0, 1)$.

*On appelle **triangle** tout ensemble de **trois points non alignés** du plan.*

1 Questions préliminaires

1. Soit ABC un triangle et M un point quelconque du plan. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

   En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H appelé **orthocentre** de ce triangle.

2. Soit ABC un triangle, Ω le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que $\Omega H = \Omega A + \Omega B + \Omega C$.
   Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Étant donnée une partie X du plan, supposée non incluse dans une droite, on note $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à X.
*On dira qu'une partie X du plan est **orthocentrique** si elle n'est pas incluse dans une droite et si $\mathcal{H}(X)$ est inclus dans X, c'est-à-dire si tout orthocentre d'un triangle de points de X appartient à X.*

2 Première partie

1. Déterminer les parties orthocentriques à 3 éléments.
2. Déterminer les parties orthocentriques à 4 éléments.
3. Soit X un ensemble de quatre points d'un cercle et $Y = \mathcal{H}(X)$.
   - **a.** Montrer que Y se déduit de X par une transformation simple.
   - **b.** Déterminer $\mathcal{H}(Y)$.
4. **a.** Soit Γ un cercle de rayon strictement positif; déterminer $\mathcal{H}(\Gamma)$.
   b. Soit D un disque de rayon strictement positif; déterminer $\mathcal{H}(D)$.

3 Deuxième partie

Dans cette partie, R est un nombre réel strictement positif, n est un entier au moins égal à 2 et X est l'ensemble des $2n$ sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R.
On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des triangles dont les sommets appartiennent à X. On choisit au hasard, avec équiprobabilité, un élément de $\mathcal{T}$.

1. Quelle est la probabilité de choisir un triangle rectangle ?
2. Quelle est la probabilité de choisir un triangle dont les trois angles sont aigus ?
3. On note L la variable aléatoire qui à tout élément de $\mathcal{T}$ associe le carré de la distance de O à son orthocentre. Déterminer, en fonction de n et R, l'espérance de la variable aléatoire L.

4 Troisième partie

1. Soient a, b, c trois réels tels que $a(b-c) \neq 0$ et A, B, C les points de coordonnées respectives $(0, a)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$.
   Calculer les coordonnées de l'orthocentre D du triangle ABC.
2. Soit X la partie obtenue en prenant la réunion d'une droite Δ et d'un point M n'appartenant pas à Δ.
   Déterminer $\mathcal{H}(X)$. Montrer que $\mathcal{H}(X) \cup X$ est une partie orthocentrique.
3. Soit X une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ et contenant au moins trois points de $(O, \vec{u})$ distincts de O.
   - **a.** Montrer que X contient au moins trois points de $(O, \vec{u})$ d'abscisses non nulles et de même signe
   - **b.** Montrer que X contient au moins trois points de $(O, \vec{u})$ d'abscisses strictement positives.
4. **a.** Déterminer les parties orthocentriques finies, contenant au plus cinq points et incluses dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$.
   b. Soit X une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ et contenant au moins six points. Montrer qu'il existe deux suites (x_n) et $\left(x'_n\right)$ de réels non nuls telles que, pour tout entier n, les points de coordonnées $(x_n, 0)$ et $\left(x'_n, 0\right)$ appartiennent á X, et telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} x'_n = 0$$

   Une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ et contenant au moins six points peut-elle être finie ?

5 Quatrième partie

L'objectif de cette partie est la construction de parties orthocentriques remarquables.

1. Soit k un réel non nul et soit Y l'hyperbole d'équation $xy = k$.

a. Soient A, B, C, D quatre points distincts de Y, d'abscisses respectives a, b, c, d. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $abcd = -k^2$.

b. Soient A, B, C trois points distincts de Y, d'abscisses respectives a, b, c. Déterminer l'orthocentre de ABC.

c. Montrer que Y est orthocentrique.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on considère un entier relatif non nul q et on note X l'ensemble d'équation $x^2 + qxy - y^2 = 1$.

2. a. Montrer que l'équation $t^2 - qt - 1$ possède deux racines réelles distinctes. Montrer que ces racines sont irrationnelles.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on note r et r' ces deux racines et s la similitude définie par la représentation complexe $z \mapsto (1 - ri)z$.

a. Montrer que $s(X)$ est une hyperbole, d'équation $xy = k$, où k est un réel à déterminer. En déduire que X est un ensemble orthocentrique.

2. Soit G l'ensemble des points de X à coordonnées entières et Γ l'ensemble des abscisses des éléments de $s(G)$.

a. Vérifier que Γ est l'ensemble des nombres réels de la forme $x + ry$, où x et y sont deux entiers tels que $(x + ry)\left(x + r'y\right) = 1$.

b. Montrer que $-1 \in \Gamma$; montrer que $r^2 \in \Gamma$.

c. Montrer que le produit de deux éléments de Γ est élément de Γ et que l'inverse d'un élément de Γ est élément de Γ. Montrer que Γ possède une infinité d'éléments.

3. Déduire de ce qui précède que l'ensemble G des points à coordonnées entières de X est une partie orthocentrique infinie.

6 Cinquième partie

On note Y_1 l'hyperbole d'équation $xy = 1$ et Y_0 l'ensemble d'équation $xy = 0$, c'est-à-dire la réunion des axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$.
On admet le résultat suivant :
« *Étant donnés quatre points A, B, C et D du plan, il existe une similitude s telle que $s(A)$, $s(B)$, $s(C)$ et $s(D)$ appartiennent tous à Y_1 ou bien appartiennent tous à Y_0* ».

Soient A_0, B_0, C_0 et D_0 quatre points, trois à trois non alignés, et soit $X_0 = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$.
On définit par récurrence $X_{n+1} = \mathcal{H}(X_n)$ pour tout entier naturel n. On suppose qu'il existe un entier n strictement positif tel que $X_n = X_0$ et on note m le plus petit entier ayant cette propriété.

1. Montrer que $m = 1$ ou $m = 2$.

2. Déterminer les ensembles X_0 tels que $m = 1$, puis ceux tels que $m = 2$.

Concours général des lycées - Session 2002

Dans tout le problème, un triangle ABC est la figure déterminée par les trois points A, B, C supposés non alignés. Conformément à la tradition, les longueurs de ses côtés seront notées $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont les mesures en radians, comprises entre 0 et π, de ses angles.

Les trois premières parties se déroulent dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ associé aux coordonnées (x, y) (ou (X, Y)).

1 Première partie

Soit ABC un triangle. On note P le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et D le symétrique du point C par rapport à la droite (AP).

On dit que ce triangle est *pseudo-rectangle* en A si $|\widehat{B} - \widehat{C}| = \frac{\pi}{2}$.
On précise qu'il est *pseudo-rectangle en A, obtus en B* dans le cas où $\widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si le triangle ABD est rectangle en A.
2. Montrer que $PA^2 = PB.PC$ si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A.
3. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si son orthocentre est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC).
4. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que $PB + PC = 2R$ si et seulement si ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A.
5. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.
6. Dans le plan complexe associé au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on note α, β, γ les affixes des points non alignés A, B, C.

   a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}$ pour que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.

   b. On suppose $\beta = -\gamma = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer l'ensemble (E_1) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.

   c. On suppose $\beta = -\gamma = 1$. Déterminer l'ensemble (E_2) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.

   d. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de (E_2) à (E_1) ?

2 Deuxième partie

1. Soit (a, b, c) un triplet de réels strictement positifs. Établir l'équivalence des conditions suivantes :

   i. il existe un triangle ABC pseudo-rectangle en A et obtus en B tel que $AB = c, BC = a$ et $CA = b$;

   ii. $b^2 - c^2 = a\sqrt{b^2 + c^2}$;

   iii. il existe deux réels ρ et θ vérifiant $\rho > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ et $a = \rho\cos 2\theta, b = \rho\cos\theta$ et $c = \rho\sin\theta$.

   Ces conditions étant réalisées, montrer que θ mesure l'un des angles du triangle ABC. Comment peut-on interpréter géométriquement ρ ?
2. Soit ABC un triangle pseudo-rectangle en A, obtus en B et dont les longueurs des côtés sont des nombres rationnels ; soit ρ et θ les deux réels définis au **1.iii.**
   Dans cette question, on pourra utiliser sans justification les formules trigonométriques suivantes vérifiées par tout réel φ pour lequel $\tan\varphi$ est définie :
   $$\cos 2\varphi = \frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}$$

   a. Montrer que ρ est rationnel et en déduire que $\tan\frac{\theta}{2}$ est rationnel. Soient p et q les entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{p}{q}$.

   b. Vérifier que $0 < p < q(\sqrt{2} - 1)$ et établir l'existence d'un rationnel strictement positif r tel que :
   $$\begin{aligned} a &= r\left(p^4 - 6p^2q^2 + q^4\right) \\ b &= r\left(q^4 - p^4\right) \\ c &= 2pqr\left(p^2 + q^2\right) \end{aligned}$$
3. Montrer réciproquement que les formules du **2.b.** définissent les longueurs des côtés d'un triangle pseudo-rectangle en A, obtus en B et dont les longueurs des côtés sont rationnelles.
4. **a.** Soient p et q deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Déterminer le plus grand diviseur commun aux trois entiers $p^4 - 6p^2q^2 + q^4$, $q^4 - p^4$, $2pq\left(p^2 + q^2\right)$ (on discutera suivant la parité de p et q).

   b. Décrire les triplets d'entiers (a, b, c) tels qu'il existe un triangle ABC, pseudo-rectangle en A obtus en B, tel que $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.
5. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^2\left(y^2 + z^2\right) = \left(y^2 - z^2\right)^2$.
6. Résoudre dans $\mathbb{Q}^*$ l'équation $x^2\left(y^2 + z^2\right) = \left(y^2 - z^2\right)^2$.
7. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^2\left(y^2 - z^2\right)^2 = \left(y^2 + z^2\right)^3$.

3 Troisième partie

Soit $\mathcal{H}$ la courbe définie par $x \geqslant 1$ et $y = \sqrt{x^2-1}$. Soient A un point de $\mathcal{H}$ et (r, s) le couple de ses coordonnées. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan définie par les relations $1 \leqslant x \leqslant r$ et $y^2 \leqslant x^2 - 1$.

1. Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de r et de s (on pourra par exemple effectuer une rotation du repère d'angle $-\pi/4$).

2. *Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent en utilisant une méthode dont le principe remonte à Fermat, sans doute peu après* 1658 *: « De æquationum localium transmutatione et emendatione ad ultimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usu » (Œuvres complètes, Tome I, pages 225-285).*

Soient n un entier naturel non nul et u un réel positif tel que $u^n = r + s$. Pour tout entier k entre 1 et n, on considère le trapèze rectangle T_k (éventuellement réduit à un triangle) dont le côté oblique est le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $\left(u^{k-1}, 0\right)$ et $\left(u^k, 0\right)$, dont les bases ont pour pente -1 et dont l'un des angles droits a pour sommet le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse $\frac{u^{k-1}+u^{1-k}}{2}$.

a. On définit bien ainsi, pour chaque valeur de k, un unique trapèze T_k (réduit à un triangle lorsque $k = 1$) : illustrer par un croquis.

b. Pourquoi peut-on conjecturer que la somme des aires de ces trapèzes admet $\frac{\mathcal{A}+s^2}{2}$ comme limite lorsque n tend vers l'infini ?

c. Démontrer la conjecture précédente en utilisant une autre suite de trapèzes combinée à la première.

d. Retrouver la valeur de $\mathcal{A}$.

3. Soient B et C les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et A un point de coordonnées (x, y) avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ tel que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.

On note S l'aire du triangle ABC et S' l'aire de la partie du plan constituée des points de la plaque triangulaire définie par le triangle ABC dont les coordonnées (X, Y) vérifient $Y^2 \leqslant X^2 - 1$.

Étudier une éventuelle limite lorsque x tend vers l'infini du rapport $\frac{S'}{S}$.

4 Quatrième partie

Cette partie se déroule dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *associé aux coordonnées* (x, y, z).

Dans le plan d'équation $z = 0$, soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et soient T et P deux points distincts tels que la droite (TP) soit tangente au cercle (C) en T. Soient B et C les intersections de la droite (OP) avec le cercle (C) et (D) la droite perpendiculaire au plan d'équation $z = 0$ passant par P.

1. a. Montrer qu'il existe deux points A et A' appartenant à la droite (D) tels que les triangles ABC et $A'BC$ soient pseudo-rectangles respectivement en A et A' ; donner une construction simple de ces deux points.

b. Montrer que les coordonnées de ces deux points vérifient l'égalité $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

2. Soit (H) l'ensemble des points A et A' quand T et P varient.

a. Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan orthogonal à $\vec{w}$?

b. Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan contenant la droite $(O; \vec{w})$?

c. Montrer que l'ensemble (H) est inclus dans une réunion de droites que l'on précisera.

3. On s'intéresse dans cette dernière question aux points entiers de l'ensemble (H), c'est-à-dire aux éléments de (H) dont les trois coordonnées sont des nombres entiers.

a. Soit (x, y, z) le triplet des coordonnées d'un tel point. Montrer que x ou y est impair.
On note désormais $\mathcal{S}$ l'ensemble des triplets (x, y, z) d'entiers naturels strictement positifs tels que x est impair et $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

b. Soit d un entier strictement positif fixé. Démontrer que l'ensemble des éléments (x, y, z) de $\mathcal{S}$ tels que $\text{PGCD}(x + 1, y + z) = d$ est l'ensemble vide si d est impair et un ensemble infini si d est pair.

c. Soit m un entier naturel impair supérieur ou égal à 3. Combien y a-t-il d'éléments (x, y, z) de $\mathcal{S}$ tels que $x = m$?
Déterminer ces éléments lorsque $m = 3, 5, 7, 9$.