CONVERGENCES

terme de rang 18 (Février 2004)

Le journal qui a de la suite dans les idées......Sans être monotone et borné!...

Responsable de Publication
Thérèse Le Chevalier
1153 Boulevard de la République
59500 DOUAI
lechevalier@wanadoo.fr

A.P.M.E.P – Régionale de Lille

Sommaire

Editorial

En ce début d'année, il est d'usage de formuler des voeux et j'y souscris avec plaisir. Que cette année soit heureuse pour vous et pour tous ceux qui vous sont chers.

Je formulerai aussi des voeux pour Convergences : Qu'il trouve enfin un rythme de parution acceptable. Cela suppose que vous soyez nombreux à l'alimenter par vos articles ou vos critiques, les articles sur lesquels vous souhaitez réagir, les livres qui vous ont plu. . . ou déplu, les sites mathématiques que vous avez visités avec intérêt.

Je formulerai aussi des voeux pour notre Régionale : que vous soyez toujours plus nombreux à venir aux rendez-vous que nous vous proposons. En Octobre nous vous avons convié à une conférence sur la Musique et les Mathématiques. Vous en trouverez un compte-rendu dans ce numéro. Nous vous invitons à un nouvel après-midi, le 11 février, à la rencontre des origamis modulaires (voir l'annonce ci-dessous).

Je formulerai aussi des voeux pour l'A.P.M.E.P. : que la remontée du nombre d'adhérents qui s'est faite jour ces dernières années se poursuive. Pour cela , il faut, si vous ne l'avez pas encore fait que vous n'oubliez pas votre adhésion 2004. Et pensez à faire adhérer vos collègues et vos établissements.

Je formulerai enfin des voeux pour l'enseignement des mathématiques. Elles sont nées de l'observation du monde qui nous entoure et sont constituantes de notre statut d'être humain. En ce sens, elles font partie de notre culture commune et leur exigence de rigueur n'enlève rien à leur beauté, ni à leur créativité, ni au plaisir d'en faire. Souhaitons que dans les conclusions du débat national sur l'école, cette dimension de notre enseignement ne soit pas oubliée.

Lille 2004, capitale de la culture.
Dans ce cadre, et dans la continuité des propos précédents, je vous invite à visiter et à emmener vos élèves à l'exposition « Symétrie et jeux de miroirs » présentée dans ce numéro.

Thérèse Le Chevalier.

Prochaine réunion

Mercredi 11 Février à 14h15 – Lycée COROT à DOUAI. (L'entrée se fait par le quai)

Les origamis modulaires

« Découvrir et construire les polyèdres par une étonnante méthode de pliage : l'origami modulaire. Originalité. . . beauté. . . magie. Quelles mathématiques faisons nous ? Comment l'utiliser dans nos classes tant en collège qu'en lycée ? »

La réunion sera animée par Stéphane ROBERT, professeur de mathématiques au collège Adulphe DELEGORGUE (Courcelles-les-Lens) et animateur IREM

1 Conférence de Vincent Parbelle du mercredi 01 octobre 2003

Catherine Farjot

Vincent Parbelle est professeur de physique en classe préparatoire aux grandes écoles à Lens ; il est également un musicien confirmé : il a chanté et chante dans plusieurs ensembles vocaux, en particulier au Conservatoire de Lille, il a une formation de chef de chœur. Sa fréquentation du conservatoire lui permet, avec l'aide d'un professeur de clavecin, d'illustrer sa conférence par des enregistrements faits sur un clavecin accordé selon les besoins.
La conférence porte sur *les différents tempéraments* adoptés selon les circonstances : il faut donc d'abord expliquer cette notion de tempérament et pourquoi il y a un problème.

Le son musical résulte d'une pression acoustique provoquée dans l'air par un instrument de musique et cette onde de pression a une certaine régularité ; d'où l'étude physique de certaines propriétés musicales.
La conférence débute par un rappel des définitions nécessaires et des correspondances entre les termes de physique et les termes musicaux : intensité ↔ amplitude, hauteur ↔ fréquence, timbre ↔ « forme » de la vibration.

La fréquence est le nombre de vibrations par seconde : le *la* du diapason vibre à 440 Hz.
Les sons peuvent être simples (*son sinusoïdal*) comme le son du diapason ou complexes (*superposition de sons simples*) ; ces sons simples ont alors tous une fréquence multiple d'une fréquence, dite *fréquence fondamentale* ; on obtient ainsi les harmoniques de rang 1, de rang 2, de rang 3,...
Dans cette optique, les intervalles musicaux sont des rapports de fréquence : l'intervalle fondamental qui est l'octave correspond à un rapport de 2/1, la quinte à 3/2 ; la quarte à 4/3, la tierce majeure à 5/4, la tierce mineure à 6/5 ; un intervalle pur correspond à un rapport de $n + 1/n$.

Se pose maintenant le problème de la **consonance** : deux rapports sont consonants si les spectres de leurs notes (*i.e. le dosage de leurs harmoniques*) ont des harmoniques en commun : par exemple, dans une quinte, une harmonique sur deux est en commun. Par contre, la dissonance se produit quand deux sons sont très voisins ; il se produit alors un phénomène de battement désagréable, avec une sensation d'instabilité : le son se gonfle et se dégonfle. L'accord consiste à faire disparaître ces battements.

Le problème qui fonde les tempéraments est que les cycles des octaves et des quintes ne coïncident pas : si on parcourt 12 quintes successives et 7 octaves, on arrive au *si#* avec les quintes et au *do* avec les octaves ; or le *si#* obtenu est plus haut que le *do*, car $(3/2)^{12} > 2^7$. L'intervalle ainsi défini est appelé *comma pythagoricien* (il vaut $(3/2)^{12}/2^7 \approx 1,0137$) et c'est ce comma qu'il faut faire disparaître.
Si, par contre, on compare les cycles des quintes et des tierces (quatre quintes correspondent à une tierce et deux octaves), on obtient de nouveau une différence : le *comma syntonique* qui vaut $(3/2)^4/5 = 1,0125$. On voit que les deux commas sont très peu différents.
On peut appliquer plusieurs principes pour obtenir une octave pure : garder toutes les quintes pures, sauf une (*accord pythagoricien*) ou répartir la différence sur plusieurs quintes (on obtient ainsi différents tempéraments selon la manière de répartir cette différence).

Les principes de tempérament diffèrent : dans le tempérament égal, tous les demi-tons sont égaux ; dans le tempérament mésotonique classique, on s'arrange pour avoir un maximum de tierces majeures pures.
Selon l'époque, plusieurs tempéraments ont été utilisés ; ils donnent une couleur différente à la musique selon la tonalité utilisée ; ce qui explique l'habitude d'attribuer un caractère différent (joyeux, mélancolique, ?) aux morceaux selon leur tonalité.
Le système pythagoricien est en usage jusque vers 1500, le mésotonique à tierces pures majeures jusque vers 1700 ; la période 1700-1850 est une période de transition ; par la suite, le tempérament égal est de rigueur. L'évolution a été plus rapide en Allemagne, plus lente en France.

L'application au clavecin et à l'orgue n'est pas tout à fait la même puisque le clavecin est un instrument dont il est facile de modifier l'accord, ce qui n'est pas le cas de l'orgue.

Bibliographie

- Pierre-Yves Asselin, *Musique et tempérament*, Costallat (1985)
- Nikolaus Harnoncourt, *Le discours musical*, Gallimard (1984)
- Nikolaus Harnoncourt, *Le dialogue musical*, Gallimard (1985)
- Philippe Beaussant, *Vous avez dit barique ?*, Actes Sud (1988, 1994)

Bibliographie complémentaire

- une brochure de l'A.P.M.E.P. : N° 53 « MUSIQUE & MATHEMATIQUES », par Bernard Parzysz, suivi de « GAMMES NATURELLES », par Yves Hellegouarch - 1984 -

– un numéro hors-série de la revue Tangente (*http ://tangente.poleditions.com/*) : HS n°11 paru en février 2002 « Maths et musique », en 2 parties.
– un article des actes du colloque « Destin de l'art - Desseins de la science », université de Caen, octobre 1986 : L« essai d'une nouvelle théorie de la musique » de Leonhard Euler, par Yves Hellegouarch

Sites Web

(Il ne s'agit ici que de quelques adresses trouvées au hasard des requêtes faites sur les mots 'Maths et Musique' qui n'engagent que les auteurs de ces recherches)
– *http ://www.dma.ens.fr/culturemath/* – Dans Dossiers figure un article de Michel Broué « Les tonalités musicales vues par un mathématicien »
– *http ://www.eleves.ens.fr/home/ollivier/musique.html.fr* – un tout autre ton mais de la musique et des liens vers des pages de théorie musicale
– *http ://bailhache.humana.univ-nantes.fr/thmusique/* – Des travaux en histoire de l'acoustique musicale et parmi eux, un article « Tempéraments musicaux et mathématiques » ; un autre « Euler : la musique traduite en mathématiques ».
– *http ://www.eduscol.education.fr/D0126/uescience_boye.pdf* – « La musique au carrefour des mathématiques, des sciences et des arts », par Anne Boyé, professeur de mathématiques au lycée de La Baule et animatrice IREM. il s'agit d'un article extrait des actes de l'université d'été « La pluridisciplinarté dans les enseignements scientifiques »,qui s'est déroulée à Poitiers en juillet 2001
– *http ://mathemusic.free.fr/Mathemusic.pdf* – « Musique et Mathématiques » avec en sous titre 'La musique est un exercice caché d'arithmétique tel que l'esprit ignore qu'il compte'(Leibniz, 1712) un travail de recherche réalisé par Carine Pascal et Nathalie Tomas dans le cadre d'un T.E.R réalisé à la Faculté des Sciences de Luminy

Dans le cadre de Lille 2004

Exposition « Symétrie, jeux de miroirs »

22 mars au 30 avril – Maison Folies - Porte de Mons – Maubeuge

Lorsque des étoiles de mer, des escargots, des frises et des boules en verre aux couleurs chatoyantes rencontrent des miroirs, les mathématiques laissent apparaître leur beauté.
L'exposition « Symétrie et jeux de miroir », croisement des sciences et de l'esthétisme, s'adresse à tous les publics.
Les amateurs d'art et les assoiffés de sciences, les adultes et les enfants, y trouveront tous des sources d'étonnement, d'émerveillement et découvriront que les mathématiques peuvent toucher chacun d'entre nous.
La symétrie est omniprésente dans nôtre quotidien. Elle apparaît notamment sur les céramiques qui ornent nombre de façades sambriennes. D'où une exposition symétrique à « Symétrie et jeux de miroir » : lorsque les symétries visibles dans la Sambre font écho à celles qui sont présentées par les mathématiciens.
La symétrie traverse toutes les expressions artistiques, d'où la possibilité de rencontres déconcertantes : Soirée Jazz et mathématique, avec le groupe Ondes Parallèles ; Soirée Littérature et symétrie, avec l'Oulipo. *Dispositif imaginé et mis en place en étroite collaboration avec l'Association pour la création de la Cité des Géométries, en collaboration avec Valério Vassallo (Professeur à Lille 1) et Aziz El Kacimi (Directeur du Laboratoire de Mathématique de l'Université Valenciennes Hainaut-Cambrésis). L'exposition « Symétrie et jeux de miroir » a été conçue par le Département Mathématique de l'Université F. Enriques de Milan.*

Séances scolaires		**Séances tous publics**
Collège	**Ecoles primaires**	Vendredi : 14h - 19h
Mardi	Jeudi	Samedi : 14h - 23h
14h15 à 15h30 – 15h45 à 17h	9h à 10h – 10h15 à 11h15 14h à 15h – 15h15 à 16h15	Dimanche : 10h - 19h

Renseignements :
Dominique Thomas – 03 27 65 15 00 – *domthomas@easynet.fr*
Sandrine Sénéchal et Vincent Vaillant – 03 27 53 01 35 – *v.vaillant.adus@free.fr*

2 Introduction à la géométrie d'aujourd'hui

Michel Garritte.

Préambule : Si l'article ci-dessous ne comporte pas de figure, c'est que le modèle fonctionne sans être plongé dans un ensemble plus vaste (le plan ?).
Ceci fera l'objet d'articles ultérieurs.

Introduction à la géométrie d'aujourd'hui

Depuis la fin du XIX^{e} siècle, grâce en soit rendue à Peano et consorts, on sait définir les nombres sans recourir à la mesure d'objets géométriques.
Dans ce cadre, il paraît juste de fonder l'étude de la géométrie sur la notion de nombre.
Pour ce faire, il faut **commencer** par un **modèle** élémentaire qui recouvre les notions précédemment établies.

> Deux points A et B étant donnés, on appelle droite (AB) l'ensemble des points M vérifiant l'égalité
> $$(u+v)M = uA + vB$$
> Dans cette écriture, u et v sont des nombres (sans précision pour l'instant).

Jouons avec les nombres. L'opposé du nombre v est noté $-v$. Etant donné le point M tel que $(u+v)M = uA+vB$, considérons le point N tel que $(u-v)N = uA - vB$. Le point N est un autre point de la droite (AB).
Ajoutons membre à membre les deux égalités

$$(u+v)M + (u-v)N = (uA+vB) + (uA-vB) = 2uA$$

en appliquant le regroupement de termes se rapportant au même point.
De même, retranchons membre à membre les deux égalités

$$(u+v)M - (u-v)N = (uA+vB) - (uA-vB) = 2vB$$

Comme les nombres v et $-v$ sont dits *opposés*, on dira désormais que M et N sont **conjugués relativement** à A et B. Le calcul ci-dessus permet également de dire que A et B sont conjugués relativement à M et N.
Il est important de conserver une écriture comportant 2 nombres, car, en faisant ainsi, on garde la symétrie des expressions.

A et B sont les **points de base**. A tout couple de réels, on associe un point.
Le produit de 2 nombres est, soit positif, soit négatif, soit nul si l'un des nombres est nul. Le produit nul caractérise les points de base.
Si le produit uv est positif, alors $u(-v)$ est négatif. On voit se dessiner deux nouvelles régions sur la droite : celle où le produit uv est positif, l'autre où il est négatif. La conjugaison définie plus haut associe à un point d'une région un point de l'autre.

Considérons le point I tel que $A+B = 2I$. C'est un point de la région à produit positif.
On l'appelle **milieu de {A,B}**. Son conjugué $A-B$ n'est pas un point au sens classique du terme. On convient de l'appeler **point idéal de la droite** (AB). Il est associé à tout couple de nombres de somme nulle.

Abordons d'autres calculs. Posons

$$(u+v)M = uA+vB \qquad et \qquad (u'+v')M' = u'A+v'B$$

$$\begin{aligned}(u+v)(u'+v')[M+M'] &= (u'+v')(uA+vB) + (u+v)(u'A+v'B)\\ &= (2uu'+uv'+u'v)A + (2vv'+uv'+u'v)B\\ &= 2(uu'A+vv'B) + (u'v+uv')[A+B]\\ &= 2(u+v)(u'+v')J\\ &= 2(uu'+vv')K + 2(u'v+uv')I\end{aligned}$$

en posant I est le milieu de $\{A,B\}$, J est le milieu de $\{M,M'\}$, K est le point tel que $(uu'+vv')K = uu'A+vv'B$.

> On convient de dire que c'est le **produit de M et de M'**.
> $$K = M * M'$$

$$\begin{aligned}(u+v)(u'+v')[M-M'] &= (u'+v')(uA+vB)-(u+v)(u'A+v'B)\\ &= (uv'-u'v)A+(u'v-uv')B\\ &= (u'v-uv')[B-A]\end{aligned}$$

On constate que le conjugué de $M+M'$ est proportionnel à $B-A$, donc confondu avec lui.

Intéressons-nous au facteur $u'v-uv'$, u, v, u', v' étant tous non nuls.

$$u'v-uv'=0 \Leftrightarrow u'v=uv' \Leftrightarrow u'/u=v'/v=k$$

$$u'A+v'B=kuA+kvB=k(uA+vB)=k(u+v)M=(u'+v')M$$

Deux couples de nombres proportionnels sont associés au même point. On dit que l'écriture d'un nombre est définie à une constante multiplicative près ou qu'elle est *homogène*.

Faisons une autre étape

$$\begin{aligned}(u+v)M &= uA+vB\\ (u+v)M-(u+v)A &= uA+vB-(u+v)A\\ (u+v)[M-A] &= v[B-A]\end{aligned}$$

Si $u+v$ est non nul, on obtient

$$M-A=v/(u+v)[B-A] \qquad \text{ou} \qquad M=A+v/(u+v)[B-A]$$

On retrouve ici l'écriture traditionnelle avec une origine et une unité.
Ceci avec une rupture de symétrie et une perte de sens puisque, en supposant $u+v$ non nul, on s'interdit le contact avec le point idéal que l'on réintroduit cependant dans l'écriture. Pour retrouver un peu de sens, posons $k=v/(u+v)$ et alors

$$M=A+k[B-A]=(1-k)A+kB$$

Le nombre k est appelé **abscisse de M dans la base** (A,B).
Le produit $k(1-k)$ n'est positif que si k appartient à l'intervalle $]0;1[$, l'ensemble des points de la droite (AB) à produit positif est associé à cet intervalle. On l'appelle **segment ouvert** $]AB[$. La cohabitation de ces deux vocables a été la source de bien des problèmes de potaches.

Allons cependant plus loin. La droite (AB) se partage en trois parties : la paire $\{A,B\}$, de produit nul ; l'intérieur, de produit strictement positif (ces deux régions réunies constituant le segment $[AB]$; l'extérieur, de produit strictement négatif.
La conjugaison, énoncée plus haut, réalise l'association point par point de l'intérieur et l'extérieur, le milieu de $\{A,B\}$, point intérieur, étant associé au point idéal, réputé être à l'extérieur.

Revenons sur les calculs plus haut : le milieu de $\{M,M'\}$ est confondu avec celui de $\{A,B\}$ dans le cas où le produit est confondu avec 1, c'est à dire quand $uu'=vv'=1$ soit $u'=1/u$ et $v'=1/v$ ou encore, en multipliant par le produit uv, $u'=v$ et $v'=u$.
Lorsqu'on échange dans M les nombres affectés à A et à B, on obtient un point M' tel que $M+M'=2I$ soit $M'=2I-M$. Cette association point à point est appelée *bascule* de centre I.
Remarquons que $2I-M'=M$. Comme la conjugaison plus haut, la bascule est sa propre réciproque.

Pour terminer cette première partie, faisons le résumé des résultats obtenus.

La droite (AB) définie à partir de deux points A et B, est constituée de nombreux points, parmi lesquels on a repéré :
- des points particuliers : le milieu de $\{A,B\}$ et son conjugué, le point idéal de (AB)
- des opérations : l'addition $M+M'$ et le produit $M*M'$
- et des applications :
  - La conjugaison $(u+v)M=uA+vB$ et $(u-v)M'=uA-vB$
  - la bascule de centre I : $M'=2I-M$

Un complément sur la conjugaison. Soit $k=v/(u+v)$ et $k'=-v/(u-v)$. On a

$$k+k'=(v(u-v)-v(u+v))/(u^2-v^2)=-2v^2/(u^2-v^2)=2kk'$$

Soit

$$(2k-1)k'=k \text{ ou encore } k'=k/(2k-1) \text{ et } (k-1/2)(k'-1/2)=\frac{1}{4}$$

Pour les initiés, la conjugaison relative à $\{A,B\}$ est l'inversion de centre I et de puissance $1/4$.

3 La vie de la Régionale

Le mot du Trésorier

L'étiquette d'envoi de ce numéro mentionne l'année de votre dernière adhésion à l'A.P.M.E.P. Les ressources de la Régionale proviennent essentiellement de la ristourne reversée par le National et elle est proportionnelle au nombre d'adhérents de celle-ci. N'oubliez pas de verser votre cotisation et suscitez de nouveaux adhérents.

Jean-Luc Le Chevalier

A propos de la maquette

Comme vous avez pu le remarquer, Convergences a fait peau neuve. Les initiés auront reconnu une mise en page réalisée à l'aide de LaTeX. Nous pouvons remercier Christophe POULAIN, professeur de mathématiques au collège de Beuvrages, co-animateur du site Syracuse (*http ://melusine.eu.org/syracuse/*) qui présente « des sources pour partager et se familiariser avec les langages LaTeX, MetaPost, PostScript ». Une initiation se fera au fil des prochains numéros.

Le bloc-notes

⋆ **Les rendez-vous de l'IREM** (*http ://www.univ-lille1.fr/irem ; irem@univ-lille1.fr*)
- Journées Académiques les 15 et 16 avril. Thème : « Le Hasard »
  Conférenciers : Nicolas BOULEAU, Michel CARBON, Michel HENRY et Pierre Henri TERRACHER.
  Et, comme tous les ans, de nombreux ateliers... Il s'agit d'un stage à public désigné. L'annonce est arrivée dans les lycées.
- Le Rallye Mathématique des Collèges. La finale est prévue le 12 juin.

⋆ **Les cycles de conférences de l'université.**
- **Le laboratoire d'Astronomie de l'UFR de mathématiques** organise :

  COLLOQUIUM LAL-IMCCE 2004
  Astronomie & Dynamique des Systèmes Gravitationnels

  (Contact :*http ://www.univ-lille1.fr/math/ ; Alain.Vienne@univ-lille1.fr*)

  La première conférence a eu lieu le 16 janvier à Lille1. Quatre autres vendredi suivront à 10h30 au M2.
  - 12 mars : « Réduction dans le problème planétaire », Philippe Robutel, ASD-IMCCE
  - 02 avril : « Évolution de planètes sous résonance », Sylvio Ferraz-Mello, Université de Sao Paulo (Brésil)
  - 16 avril : « Dynamique dans les anneaux et les petits satellites de Saturne », Bruno Sicardy, Université de Paris VI
  - 11 juin : « La ceinture de Kuiper et son évolution primitive », Alessandro Morbidelli, Observatoire de Nice
- **L'espace Culture de l'USTL** propose dans le cadre de Lille 2004 (*http ://www.univ-lille1.fr/culture/*) une exposition scientifique « L'art de la mesure » du 10 mars au 1er avril (vernissage le 10 mars à 18h30) et une série de conférences sur ce thème (réflexion-débat à 18h30) :
  - Mardi 16 mars « L'homme est la mesure de toute chose », Barbara Cassin, CNRS Paris IV
  - Mardi 23 mars « Pratique et théorie de la mesure dans la tradition scientifique arabe (IXe au XVe siècle) », Ahmed Djebbar, USTL
  - Mardi 30 mars : « La mesure en mécanique quantique : un nouveau concept ? », Roger Balian, CEA Saclay
  - Mardi 4 mai ; « Enjeux politiques de la mesure », Michel Senellart, ENS-LSH Lyon
  - Mardi 11 mai : « La mesure du temps », Bruno Jacomy, CNAM Paris
  - Mardi 18 mai : « Quel statut pour la mesure ? », Bernard Maitte, USTL

⋆ **Des Vidéos en mathématiques par l'Association MédiaMaths**
(Contact : Eliane Cousquer *Eliane.Cousquer@univ-lille1.fr*)
Une série de neuf vidéos du programme « Mathematics ! » réalisées par Tom Apostol de l'Institut Caltech vient d'être adaptée en français. Ces films marient des séquences mathématiques, fondées sur l'animation de figures, des illustrations technologiques ou d'actualité et la présentation de documents historiques. Ils présentent des synthèses de questions transversales et comportent une forte composante historique et culturelle.
Le CNDP met en vente 3 cassettes vidéo comportant chacune 3 vidéos de 30 mn.
- Mathématics 1 : Le théorème de Pythagore - Similitude - Le tunnel de Samos
- Mathématics 2 : Histoire de Pi - Histoire de Mathématiques - Polynômes
- Mathématics 3 : Sinus et Cosinus 1 - Sinus et Cosinus 2 - Sinus et Cosinus 3

Un stage MAT-11-B dont le titre est « Usages de vidéos en mathématiques » aura lieu Les lundi 2 février 2004, Jeudi 19 février 2004, Mercredi 10 mars 2004. Bât P7 salle bleue, USTL, Villeneuve d'Ascq.
Animateurs : Eliane Cousquer, Said Belmehdi.