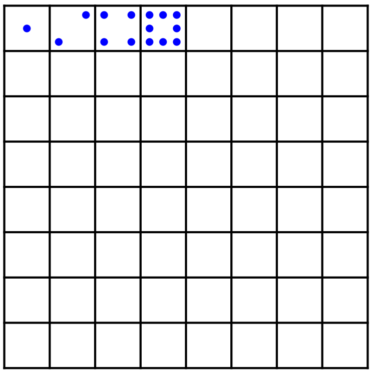
ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU

Spécialité « Mathématiques » – Sujet 1 – 2021

Classe de première – Corrigé

Exercice 1 **5 points**

Une ancienne légende raconte que le jeu d'échecs a été inventé par un vieux sage.
Son roi voulut le remercier en lui accordant n'importe quel cadeau en récompense.
Le vieux sage demanda qu'on lui fournisse un peu de riz pour ses vieux jours, et plus précisément qu'on place :
un grain de riz sur la première case du jeu qu'il venait d'inventer, puis deux grains de riz sur la case suivante, puis quatre grains de riz sur la troisième case, et ainsi de suite, en doublant le nombre de grain de riz entre une case et la suivante, et ce jusqu'à la 64ᵉ case (puisqu'un plateau de jeu d'échecs comporte 64 cases).



On note u_1 le nombre de grains de riz présents sur la première case, u_2 le nombre de grains sur la deuxième case, et ainsi de suite jusqu'à la 64ᵉ case.

1. $u_1 = 1$, $u_2 = 2 \times u_1 = 2$, $u_3 = 2 \times u_2 = 4$, $u_4 = 2 \times u_3 = 8$ et $u_5 = 2 \times u_4 = 16$.
2. On double le nombre de grain de riz entre une case et la suivante, donc pour tout entier naturel n non nul, on a $u_{n+1} = 2 \times u_n$.
3. La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = 2$.
   On en déduit que, pour tout n non nul, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.
4. Le nombre de grains de riz qui doivent être disposés sur le plateau pour satisfaire à la demande du vieux sage est :
   $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 1 \times \dfrac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$
5. On veut écrire une fonction en langage Python qui détermine à partir de quelle case, le vieux sage disposera d'au moins R grains de riz.

   Une ébauche de cette fonction est donnée ci-contre.

   On complète cette fonction afin qu'elle renvoie le résultat désiré.

```
def nb_cases (R) :
    case = 1
    u = 1
    somme = u
    while somme < R :
        u = 2 * u
        somme = somme + u
        case = case + 1
    return case
```

Exercice 2 **5 points**

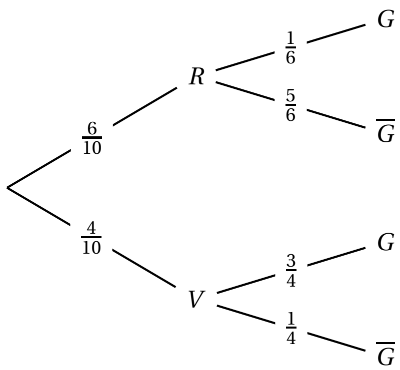
Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant »et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les évènements :

R : « le jeton tiré est rouge »,

V : « le jeton tiré est vert »,

G : « le jeton tiré est gagnant ».

1. On modélise la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.



2. La probabilité de l'évènement « le jeton tiré est un jeton vert et marqué gagnant » est :
$P(V \cap G) = p(V) \times P_V(G) = \dfrac{4}{10} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10}$.

3. Soit $P(G)$ la probabilité de tirer un jeton gagnant.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(G) = P(R \cap G) + P(V \cap G) = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

4. Sachant que le jeton tiré est gagnant, la probabilité qu'il soit de couleur rouge est :
$P_G(R) = \dfrac{P(R \cap G)}{P(G)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \dfrac{1}{4}$.

5. On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, deux jetons dans l'urne.
On cherche la probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant ».

- Nombre de tirages perdant-perdant : $\dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ (divisé par 2 car il ne faut compter qu'une fois le tirage RV et VR des mêmes jetons) ;
- Nombre de tirages gagnant-perdant ou perdant-gagnant : avec 6 perdants et 4 gagnants on a $6 \times 4 = 24$ tirages avec un seul gagnant ;
- Nombre de tirages gagnant-gagnant : $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6$.

Il y a donc 6 tirages gagnant-gagnant sur un total de $15 + 24 + 6 = 45$ tirages différents.
La probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant »est donc égale à $\dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$.

Exercice 3 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
   $f'(x) = 3x^2 + 7 \times 2x + 11 \times 1 = 3x^2 + 14x + 11$.
2. On résout dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.
   On cherche d'abord si le polynôme admet des racines dans $\mathbf{R}$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 3 \times 11 = 196 - 132 = 64 = 8^2$
   Le discriminant est positif donc le polynôme admet deux racines réelles :
   $x' = \dfrac{-b - \sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{-14 - 8}{6} = \dfrac{-22}{6} = \dfrac{-11}{3}$ et $x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{-14 + 8}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1$.
   On en déduit le signe du polynôme $3x^2 + 14x + 11$ qui est du signe de $a = 3$ donc positif, à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		$-\frac{11}{3}$		-1		$+\infty$
$3x^2 + 14x + 11$		+	0	−	0	+	

   L'ensemble solution de l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$ est donc $S = \left]-\infty ; -\dfrac{11}{3}\right[\cup \left]-1 ; +\infty\right[$.
   On cherche les extrémums : $f\left(-\frac{11}{3}\right) = -\frac{392}{27} \approx -14{,}52$ et $f(-1) = -24$.
   On établit le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		$-\frac{11}{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	$\approx -14{,}52$	↘	-24	↗	

3. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$.
   $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$ donc $f(0) = -19$; $f'(x) = 3x^2 + 14x + 11$ donc $f'(0) = 11$.
   La tangente a pour équation : $y = -19 + 11(x - 0)$ c'est-à-dire $y = 11x - 19$.
4. Soit l'équation $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.
   $1^3 + 7 \times 1^2 + 11 \times 1 - 19 = 19 - 19 = 0$ donc 1 est solution de l'équation $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.
   Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(x-1)(x^2+8x+19) = x^3+8x^2+19x-x^2-8x-19 = x^3+7x^2+11x-19 = f(x)$.
5. Étudier le signe de la fonction f revient à étudier le signe de $f(x) = (x-1)(x^2+8x+19)$, donc le signe de chacun des facteurs.
   - $x - 1 > 0 \iff x > 1$
   - Pour étudier le signe de $x^2 + 8x + 19$, on cherche si ce polynôme a des racines.
     $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 19 = -12 < 0$ donc le polynôme n'a pas de racine, il garde donc un signe constant, celui du coefficient de x^2 ; il est donc toujours positif.

   On établit le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		−	0	+	
$x^2 + 8x + 19$		+	|	+	
$f(x)$		−	0	+	

Exercice 4 — 5 points

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A (3 ; 1), B (−3 ; 3) et C (2 ; 4).

1. On regarde si les coordonnées de A et de B vérifient l'équation $x+3y-6=0$:

- $x_{\text{A}}+3y_{\text{A}}-6=3+3\times1-6=0$ donc les coordonnées de A vérifient l'équation.
- $x_{\text{B}}+3y_{\text{B}}-6=-3+3\times3-6=0$ donc les coordonnées de B vérifient l'équation.

Donc l'équation $x+3y-6=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Soit d la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le point C.
On sait qu'une droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(-b\,;\,a)$. Donc la droite (AB) a le vecteur $\vec{v}\,(-3\,;\,1)$ pour vecteur directeur.
La droite d est perpendiculaire à la droite (AB) donc le vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (AB) est un vecteur normal à la droite d. Donc d a une équation de la forme $-3x+y+c=0$.
Le point C appartient à la droite d donc les coordonnées de C vérifient l'équation de d :
$-3x_{\text{C}}+y_{\text{C}}+c=0 \iff -3\times2+4\times1+c=0 \iff c=2$
La droite d a pour équation $-3x+y+2=0$.

3. Le point K, projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), est le point d'intersection des droites (AB) et d ; ses coordonnées vérifient donc le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-6 &=& 0\\ -3x+y+2 &=& 0\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-6 &=& 0\\ -3x+y+2 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} 3x+9y-18 &=& 0 & (L_1\leftarrow 3L_1)\\ -3x+y+2 &=& 0 &\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x &=& -3y+6 &\\ 10y-16 &=& 0 & (L_2\leftarrow L_1+L_2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1{,}2\\ y &=& 1{,}6\end{array}\right.$$

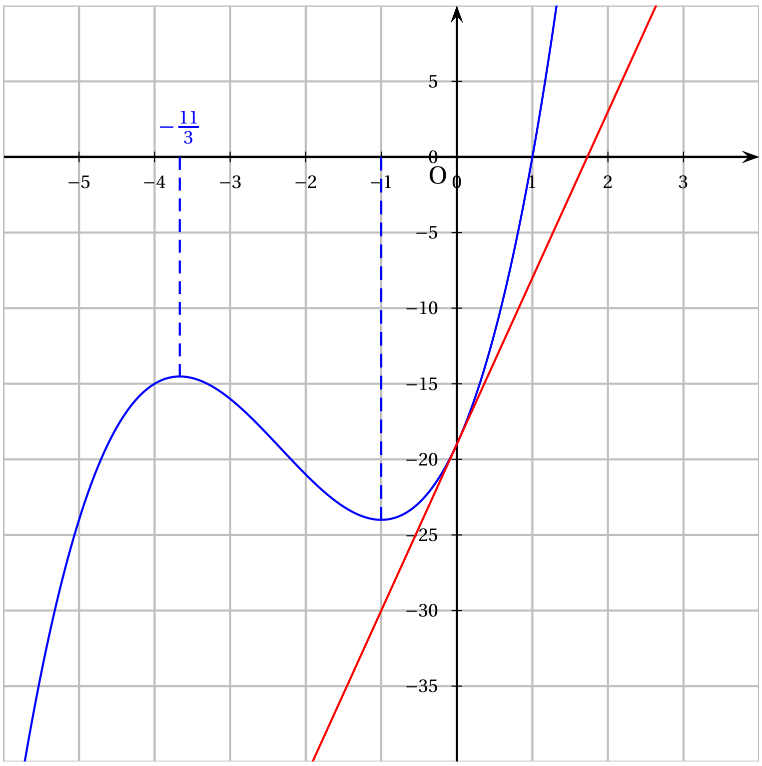
Donc le point K a pour coordonnées (1,2 ; 1,6).

4.
- On est placé dans un repère orthonormé donc :
$\text{AB}=\sqrt{(x_{\text{B}}-x_{\text{A}})^2+\left(y_{\text{B}}-y_{\text{A}}\right)^2}=\sqrt{(-3-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
- Le milieu M de [AB] a pour coordonnées les moyennes des coordonnées de A et de B :
$x_{\text{M}}=\dfrac{x_{\text{A}}+x_{\text{B}}}{2}=\dfrac{3-3}{2}=0$ et $y_{\text{M}}=\dfrac{y_{\text{A}}+y_{\text{B}}}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2$
Donc M a pour coordonnées (0 ; 2).

5. Le cercle de diamètre [AB] a pour centre M (0 ; 2) et a pour rayon $R=\dfrac{\text{AB}}{2}=\sqrt{10}$, donc il a pour équation :
$(x-x_{\text{M}})^2+\left(y-y_{\text{M}}\right)^2=R^2$ c'est-à-dire $(x-0)^2+\left(y-2\right)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$ soit $x^2+\left(y-2\right)^2=10$.

Figures (non demandées)

Exercice 2



Exercice 4