Les angles :
leur utilisation dans les problèmes de géométrie

par Antoine Gouteyron
IREM de Bordeaux

Présentation du document

1. Objectif visé

L'objectif de cet article est d'introduire la notion d'angle d'un couple de vecteurs non nuls et de montrer comment cette notion ainsi que celle de "**double d'angle**" interviennent dans la résolution de certains problèmes de géométrie plane.

2. Contenu

Il est constitué à partir de notes élaborées pour l'essentiel dans les années 80-81 et destinées — en principe — aux élèves de première et terminale C. Il se compose de trois parties :

Partie A : Première présentation des angles (niveau T. C)

Elle met en jeu la notion de rotation "vectorielle". Satisfaisante du point de vue théorique, elle présente l'inconvénient d'être actuellement inabordable en classe de première scientifique.

Partie B : Deuxième présentation des angles (niveau 1re S)

Elle fait plus appel à l'intuition qu'à la rigueur mathématique : pour orienter à priori le plan, puis pour introduire la notion de "mesure d'un arc orienté" qui préfigure celle de "mesure d'un angle". Non satisfaisante pour le puriste, elle est de lecture plus facile que la première, parsemée d'exercices d'application immédiate, et donc directement utilisable dans les classes de premières scientifiques.

Spécifiquement à chacune de ces présentations :
- est définie l'addition des angles
- sont introduites les notions de *"double"* et de *"moitiés"* d'un angle
- sont établis — ou admis — les effets des transformations sur les angles.

Partie C : Usage des angles

Sa lecture peut être entreprise après étude de l'une ou de l'autre des parties A et B (cela signifie que, dans un premier temps, on peut passer outre la lecture d'une de ces deux parties).

Les thèmes abordés sont les suivants :

Caractérisation en termes d'angles de la colinéarité,de l'orthogonalité de deux vecteurs.

On dispose dès lors d'un nouvel outil pour aborder, dans le plan ponctuel, les problèmes d'alignement, de parallélisme et d'orthogonalité.

Caractéristation en termes d'angles

- de la bissectrice de deux demi-droites de même origine,
- des bissectrices de deux droites sécantes.

Cela nous permettra de mettre en évidence quelques propriétés des bissectrices.

Nota : la bissectrice de deux demi-droites de même origine est ici la droite de la réflexion qui échange ces demi-droites.

Caractérisation en termes d'angles

- d'un cercle dont on connaît soit le centre et deux de ses points, soit trois de ses points,
- de la cocyclicité de quatre points,
- de la tangente en un point à un cercle (dont on connaît par ailleurs soit le centre et un autre point, soit deux autres points).

La mise en évidence de configurations fondamentales ainsi que la résolution de quelques problèmes complètent l'étude de ces trois thèmes.

Etude des lignes de niveau de l'application : $M \to \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}$.

Ce paragraphe est un complément indispensable à l'ensemble. Mais l'introduction des lignes de niveau fait appel à des notions plus difficiles à manier que celles utilisées jusqu'ici, en particulier à celle de convexité. Il serait donc souhaitable, si les programmes de la classe de première nous le permettaient, de reporter l'étude de ce paragraphe en classe de terminale.

3. Notations utilisées

Notre étude est conduite dans un plan noté **P** (plan ponctuel). On note $\widetilde{\mathbf{P}}$ l'ensemble des vecteurs de **P** (plan vectoriel associé à **P**).

On désigne par $\mathbf{P}_0$ le plan ponctuel muni d'un point origine 0. On sait alors que $\widetilde{\mathbf{P}}$ est identifiable au "plan pointé" $\mathbf{P}_0$ du fait que la correspondance $\left| \begin{array}{l} \mathbf{P}_0 \to \widetilde{\mathbf{P}} \\ M \to \overrightarrow{OM} \end{array} \right.$ est bijective.

Etant donnés des points A, B, C,... de **P**, nous notons $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \dots$

Inversement, étant donnés des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ de $\widetilde{\mathbf{P}}$, nous désignons par les majuscules U, V, W, ... les points de $\mathbf{P}_0$ identifiés à ces vecteurs. Donc $\overrightarrow{OU}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OW}=\vec{w}$, ...

Dès lors, l'égalité $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ signifie que, dans $\mathbf{P}_0$, OABU est un parallélogramme et, d'après la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a} .$$

Etant donné un vecteur non nul $\vec{v}$, nous notons $\mathbf{R}.\vec{v}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v}$.

Les ensembles

$$\mathbf{R}_+.\vec{v} = \{\alpha.\vec{v}\in\widetilde{\mathbf{P}}/\alpha\in\mathbf{R}_+\}$$
$$\mathbf{R}_-.\vec{v} = \{\alpha.\vec{v}\in\widetilde{\mathbf{P}}/\alpha\in\mathbf{R}_-\}$$

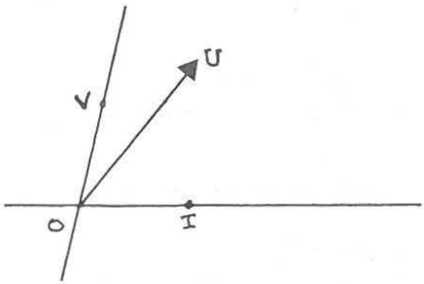
sont appelés demi-droites vectorielles. $\mathbf{R}_+.\vec{v}$ et $\mathbf{R}_-.\vec{v}$ sont dites opposées.

Les transformations du plan ponctuel **P** (réflexions, homothéties, translations(*)) sont désignées par des lettres minuscules s, h, t... Celles du plan vectoriel $\widetilde{\mathbf{P}}$ (réflexions, rotations) sont désignées par des lettres minuscules surmontées d'un tilde : $\widetilde{s}$, $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{r}$, $\widetilde{\rho}$, ... $\widetilde{I}$ désigne l'application identique de $\widetilde{\mathbf{P}}$.

4. Représentations concrètes

Dans le plan physique matérialisant **P** (feuille de papier, tableau...), un vecteur est représenté

- *soit par un point de* $\mathbf{P}_0$, par exemple, le point I représente le vecteur $\overrightarrow{OI}$ encore noté $\vec{i}$, O représente le vecteur nul noté $\vec{0}$;
- *soit par une "flèche" d'origine O*(**), par exemple, la flèche d'origine O et d'extrémité U représente le vecteur $\vec{u}$.



La droite vectorielle $\mathbf{R}.\vec{v}=\{\alpha.\vec{v}\in\widetilde{\mathbf{P}}/\alpha\in\mathbf{R}\}$ est, en conformité avec la "vision ponctuelle" d'un vecteur, représentée par la droite (OV). De même les demi-droites vectorielles $\mathbf{R}_+.\vec{v}$ et $\mathbf{R}_-.\vec{v}$ sont représentées par la demi-droite [OV) et par la demi-droite qui lui est opposée.

(*) Les rotations "ponctuelles" ne sont pas mentionnées dans ces pages car elles sont introduites après le chapitre sur les angles.

(**) Cette présentation traditionnelle des vecteurs, chère aux physiciens, n'est pas sans présenter quelques inconvénients. En particulier, elle ne permet pas de représenter le vecteur nul, ni de donner une représentation cohérente des droites vectorielles.

Partie A : Première présentation des angles

La lecture de cette présentation des angles nécessite quelques connaissances sur les automorphismes orthogonaux du plan vectoriel $\widetilde{\mathbf{P}}$.

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant deux vecteurs non nuls de même norme, nous notons :

$\widetilde{s}_{\vec{i}\to\vec{j}}$ l'unique symétrie orthogonale qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{j}$

$\widetilde{r}_{\vec{i}\to\vec{j}}$ l'unique rotation qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{j}$.

I. Angle d'une rotation de $\widetilde{\mathbf{P}}$

Définition

Le graphe $\{(\vec{u},\vec{v})\ ;\ (\vec{w},\vec{t})\ ;\ (\vec{z},\vec{x})\ ;\ .....\}$ d'une quelconque rotation $\widetilde{r}$ de $\widetilde{\mathbf{P}}$ est appelé ***angle de la rotation*** $\widetilde{r}$.

On le note : $\widehat{\widetilde{r}}$.

$\widehat{\widetilde{r}}$ se lit : "angle de $\widetilde{r}$".

En particulier,

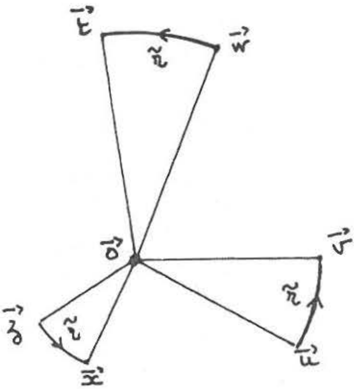
- l'angle de la rotation $\widetilde{I}$ est appelé ***angle nul.***

On le note $\widehat{\widetilde{I}}$ ou $\widehat{0}$ (la seconde notation est plus fréquente) ;

- l'angle de la rotation $-\widetilde{I}$ est appelé ***angle plat***.

On le note $-\widehat{\widetilde{I}}$ ou de préférence $\widehat{\Pi}$.

Nous désignerons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles des rotations de $\widetilde{\mathbf{P}}$.



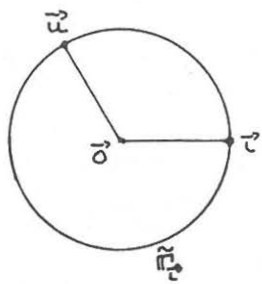
II. Représentation des angles

1. **L'ensemble $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$**

Désignons par $\widetilde{\Gamma}$ l'ensemble des vecteurs $\widetilde{\mathbf{P}}$ de norme 1.

Un vecteur $\vec{i}$ étant fixé sur $\widetilde{\Gamma}$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\widetilde{\Gamma}$, il existe une unique rotation $\widetilde{r}$ de $\widetilde{\mathbf{P}}$ qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{u}$.



A chaque vecteur u, associons l'angle de la rotation $\widetilde{r}_{\vec{i}\to\vec{u}}$. On définit ainsi l'application : $\psi : \widetilde{\Gamma} \to \mathcal{A}$

$$\vec{u} \to \widehat{\widetilde{r}_{\vec{i}\to\vec{u}}}$$

• ψ est une application bijective car, pour tout élément $\widehat{\tilde{r}}$ de $\mathcal{A}$, il existe un unique vecteur $\vec{u}$ de $\tilde{\Gamma}$ tel que $(\vec{i}, \vec{u}) \in \widehat{\tilde{r}}$, à savoir : $\vec{u} = \tilde{r}(\vec{i})$.
En outre, on a : $\psi(\vec{i}) = \widehat{\tilde{r}_{\vec{i}\to\vec{i}}} = \hat{\tilde{I}} = \hat{0}$.
D'où le

Théorème :

Un vecteur $\vec{i}$ étant choisi sur $\tilde{\Gamma}$ l'application

$$\psi : \tilde{\Gamma} \to \mathcal{A}$$
$$u \to \widehat{\tilde{r}_{\vec{i}\to\vec{u}}}$$

est une bijection qui associe le vecteur $\vec{i}$ à l'angle nul $\hat{0}$ de $\mathcal{A}$.

2. **Identification de $\mathcal{A}$ à $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$**

Choisissons arbitrairement un vecteur $\vec{i}$ sur $\tilde{\Gamma}$ (noté désormais $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$). Dès lors, tout vecteur $\vec{u}$ de $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$ est bijectivement associé, par ψ, à l'angle $\widehat{\tilde{r}_{\vec{i}\to\vec{u}}}$.

On peut, dans ces conditions, considérer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles est identique à l'ensemble $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$. Autrement dit, $\mathcal{A}$ *est identifiable à* $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$.

Notations

$\vec{u}$ étant un élément quelconque de $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$, nous noterons :

$\hat{u}$ l'angle bijectivement associé à $\vec{u}$. Ainsi : $\hat{\vec{u}} = \widehat{\tilde{r}_{\vec{i}\to\vec{u}}}$

$\tilde{r}_{\hat{u}}$ la rotation de $\tilde{\mathbf{P}}$ d'angle $\hat{u}$. Ainsi : $\tilde{r}_{\hat{u}} = \tilde{r}_{\vec{i}\to\vec{u}}$

En particulier, on obtient les équivalences

dans $\mathcal{A}$: $\hat{u} = \hat{0} \iff$ *sur* $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$: $\vec{u} = \vec{i}$

dans $\mathcal{A}$: $\hat{u} = \hat{\pi} \iff$ *sur* $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$: $\vec{u} = -\vec{i}$

car :

$$\hat{u} = \hat{0} \iff \hat{u} = \hat{\tilde{I}} \iff \vec{u} = \tilde{I}(\vec{i}) = \vec{i}$$
$$\hat{u} = \hat{\pi} \iff \hat{u} = -\hat{\tilde{I}} \iff \vec{u} = -\tilde{I}(\vec{i}) = -\vec{i}$$

Remarque

Dans $\mathbf{P}$, le cercle de centre O et de rayon 1 sous-jacent à $\tilde{\Gamma}$ sera noté Γ. Le point I représentant le vecteur $\vec{i}$ sera appelé point origine de Γ. Le cercle Γ muni du point origine I sera noté Γ_I.

Il est clair que $\mathcal{A}$ est également identifiable au cercle pointé Γ_I. Dans la suite de cet exposé, $\mathcal{A}$ sera représenté soit par $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$, soit par Γ_I.

III. Le groupe ($\mathcal{A}$, +)

1. Addition dans $\mathcal{A}$

Définition

On appelle *addition* dans $\mathcal{A}$ l'application

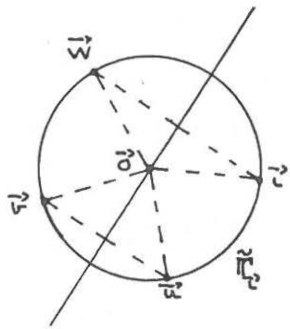
$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$
$$(\widehat{\tilde{r}_1}, \widehat{\tilde{r}_2}) \to \widehat{\tilde{r}_2 \circ \tilde{r}_1}$$

On écrira : $\widehat{\tilde{r}_1} + \widehat{\tilde{r}_2} = \widehat{\tilde{r}_2 \circ \tilde{r}_1}$.

Somme de deux angles : traductions sur $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$

Quels que soient les angles $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$ de $\mathcal{A}$ i.e. ....les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{u} + \hat{v} = \hat{w} &\iff \tilde{r}_{\hat{w}} = \tilde{r}_{\hat{v}} \circ \tilde{r}_{\hat{u}} \\ &\iff \vec{w} = \tilde{r}_{\hat{w}}(\vec{i}) = (\tilde{r}_{\hat{v}} \circ \tilde{r}_{\hat{u}})(\vec{i}) \\ &\iff \vec{w} = \tilde{r}_{\hat{v}}(\vec{u}) \end{aligned}$$



ce qui peut se résumer dans le schéma suivant :

dans $\mathcal{A}$: $\quad \hat{u} \ +' \ \hat{v} \ = \ \hat{w}$

sur $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$: $\quad \vec{u} \xrightarrow{\tilde{r}_{i \to v}} \vec{w}$

Le vecteur $\vec{w}$ associé à l'angle $\hat{w}$ peut aussi s'obtenir par symétrie. En effet, désignons par $\tilde{s}$ la symétrie orthogonale qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Nous avons : $\quad \tilde{s} \circ \tilde{r}_{\hat{v}} = (\tilde{s} \circ \tilde{r}_{\hat{v}})^{-1} \quad$ car $\tilde{s} \circ \tilde{r}_{\hat{v}}$ est une symétrie
$$= \tilde{r}_{\hat{v}}^{-1} \circ \tilde{s}$$

Par suite : $\quad \tilde{s}(\vec{w}) = \tilde{s}[\tilde{r}_{\hat{v}}(\vec{u})] = (\tilde{s} \circ \tilde{r}_{\hat{v}})(\vec{u}) = \tilde{r}_{\hat{v}}^{-1}[\tilde{s}(\vec{u})]$
$$= \tilde{r}_{\hat{v}}^{-1}(\vec{v}) = \vec{i} \quad \ldots \text{ car } \tilde{r}_{\hat{v}}(\vec{i}) = \vec{v}$$

Autrement dit : $\quad \vec{w} = \tilde{s}(\vec{i}) \ \ldots \ $ avec $\ \tilde{s} = \tilde{s}_{\vec{u} \to \vec{v}}$.

En conclusion, nous pouvons énoncer le

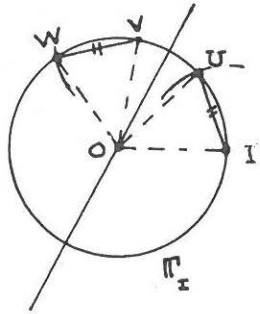
Théorème :

Dans $\mathcal{A}$: $\quad \hat{u} + \hat{v} = \hat{w} \iff$ *sur* $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$: $\vec{w} = \tilde{r}_{\vec{i} \to \vec{v}}(\vec{u})$
$\quad \iff$ *sur* $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$: $\vec{w} = \tilde{s}_{\vec{u} \to \vec{v}}(\vec{i})$

Remarque pratique :

Posons encore $\tilde{s} = \tilde{s}_{\vec{u} \to \vec{v}}$. Nous avons :

$$\tilde{s}(\overrightarrow{IU}) = \tilde{s}(\vec{u} - \vec{i}) = \tilde{s}(\vec{u}) - \tilde{s}(\vec{i}) = \vec{v} - \vec{w} = \overrightarrow{WV}$$



On en déduit :
$\|\overrightarrow{IU}\| = \|\overrightarrow{WV}\|$ ... car $\tilde{s}$ conserve la norme puis, dans **P** : IU = VW.

Dans le plan physique **P**, on voit comment user du compas pour construire, sur Γ_I, le point W lorsque les points U et V sont donnés.

2. **Le groupe ($\mathcal{A}$, +)**

Théorème :

L'ensemble $\mathcal{A}$ des angles muni de la loi + a une structure de groupe commutatif.

Démonstration

Rappelons que, quels que soient les élements $\widehat{\tilde{r}_1}$ et $\widehat{\tilde{r}_2}$ de $\mathcal{A}$:

$$\widehat{\tilde{r}_1} + \widehat{\tilde{r}_2} = \widehat{\tilde{r}_2 o \tilde{r}_1} .$$

Il en résulte que les propriétés de l'addition dans $\mathcal{A}$ sont celles de la composition des rotations dans $\tilde{R}$ (ensèmble des rotations de $\tilde{\mathbf{P}}$). Donc, à l'instar de ($\tilde{R}$,o), ($\mathcal{A}$, +) est un groupe commutatif.

- Son élément neutre est l'angle nul $\hat{0}$ ... i.e. $\tilde{I}$ car

$$\forall\, \widehat{\tilde{r}} \in \mathcal{A} \ : \widehat{\tilde{r}} + \widehat{\tilde{I}} = \widehat{\tilde{I} o \tilde{r}} = \widehat{\tilde{r}}$$

- Le symétrique d'un quelconque élément $\widehat{\tilde{r}}$ de $\mathcal{A}$ est $\widehat{\tilde{r}^{-1}}$.

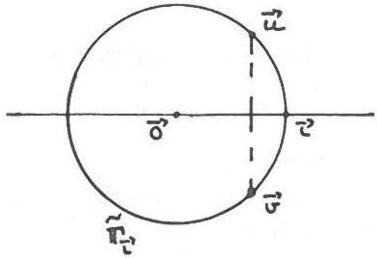
En effet : $\widehat{\tilde{r}} + \widehat{\tilde{r}^{-1}} = \widehat{\tilde{r}^{-1} o \tilde{r}} = \widehat{\tilde{I}} = \hat{0}$

On l'appelle *opposé* de $\widehat{\tilde{r}}$. On le note : $-\widehat{\tilde{r}}$.

Dès lors, nous ayons : $\forall\, \widehat{\tilde{r}} \in \mathcal{A}$: $-\widehat{\tilde{r}} = \widehat{\tilde{r}^{-1}}$.

En particulier : $-\widehat{\Pi} = \widehat{\Pi}$... car $\widehat{\Pi} + \widehat{\Pi} = \widehat{-\tilde{I} o -\tilde{I}} = \widehat{\tilde{I}} = \hat{0}$.

3. **Angles opposés : traduction sur $\tilde{\Gamma}_i$**



Quels que soient les angles $\hat{u}$ et $\hat{v}$ de $\mathcal{A}$ i.e. ...les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$, nous avons, compte tenu des résultats précédemment acquis :

$\hat{u} + \hat{v} = \hat{0} \iff \tilde{s}_{\vec{u}\to\vec{v}}(\vec{i}) = \vec{i}$... th(11 − 2)

$\iff \tilde{s}_{\vec{i}\to\vec{i}}(\vec{u}) = \vec{v}$

Nous retiendrons donc le

Théorème :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Dans } \mathcal{A} : & \hat{u} + \hat{v} = \hat{0} \\ \text{i.e. :} & \hat{v} = -\hat{u} \end{array}\right\} \iff \text{sur } \tilde{\Gamma}_{\vec{i}} : v = \tilde{s}_{\vec{i}\to\vec{i}}(u)$$

Conséquence : angles égaux à leurs opposés

Quel que soit l'élément $\hat{u}$ de $\mathcal{A}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{u} = -\hat{u} &\iff \text{sur } \tilde{\Gamma}_{\vec{i}} : \vec{u} = \tilde{s}_{\vec{i}\to\vec{i}}(\vec{u}) \\ &\iff \text{sur } \tilde{\Gamma}_{\vec{i}} : \vec{u} = \vec{i} \text{ ou } \vec{u} = -\vec{i} \\ &\iff \text{dans } \mathcal{A} : \hat{u} = \hat{0} \text{ ou } \hat{u} = \widehat{\pi} \end{aligned}$$

Ainsi, deux angles et deux seulement sont leurs propres opposés : l'angle nul et l'angle plat.

4. **Règles du calcul dans ($\mathcal{A}$, +)**

Ce sont celles en vigueur dans un groupe commutatif.

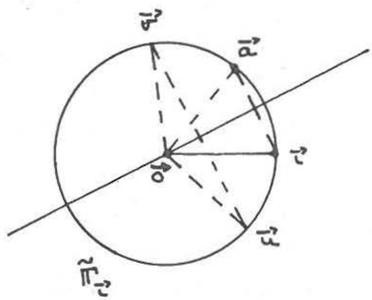
1. $\forall(\hat{u},\hat{v},\hat{w}) \in \mathcal{A}^3 : \hat{u}+\hat{w} = \hat{v}+\hat{w} \Rightarrow \hat{u} = \hat{v}$
2. $\forall(\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{A}^2 : -(\hat{u}+\hat{v}) = (-\hat{u})+(-\hat{v})$
3. Pour tout couple $(\hat{a},\hat{b})$ d'éléments donnés de $\mathcal{A}$, il existe un unique élément $\hat{u}$ de $\mathcal{A}$ tel que : $\hat{b}+\hat{u} = \hat{a}$.

Cet angle est $\hat{u} = \hat{a}+(-\hat{b})$. On l'appelle *différence de $\hat{a}$ et $\hat{b}$* . On le note : $\hat{a}-\hat{b}$.

On les établit de façon classique. Toutefois pour la troisième on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{b}+\hat{u} = \hat{a} &\iff \tilde{s}_{\vec{b}\to\vec{u}}(\vec{i}) = \vec{a} \\ &\iff \tilde{s}_{\vec{i}\to\vec{a}}(\vec{b}) = \vec{u} \end{aligned}$$

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant donnés sur $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$, on est alors assuré de l'existence et de l'unicité de $\vec{u}$ sur $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$ (donc de $\hat{u}$ dans $\mathcal{A}$).



En outre, on a :

$-\hat{b}+(\hat{b}+\hat{u}) = -\hat{b}+\hat{a}$ ... autrement dit : $\hat{u} = -\hat{b}+\hat{a} = \hat{a}+(-\hat{b})$.

IV. Double et moitiés d'un angle

1. Le double d'un angle

Définition :

Etant donné un angle $\hat{u}$, l'angle $\hat{u}+\hat{u}$ est le *double de $\hat{u}$* . On le note $2\hat{u}$.

On retiendra le

Théorème :

Quels que soient les angles $\hat{u}$ et $\hat{v}$:

- $2\hat{u}=\hat{0} \iff (\hat{u}=\hat{0}$ ou $\hat{u}=\widehat{\pi})$
- $2\hat{u}=2\hat{v} \iff (\hat{u}=\hat{v}$ ou $\hat{u}=\hat{v}+\widehat{\pi})$

Démonstration :

- $2\hat{u}=\hat{0} \iff \hat{u}=-\hat{u}$
  $\iff (\hat{u}=\hat{0}$ ou $\hat{u}=\widehat{\pi})$
- $2\hat{u}=2\hat{v} \iff 2(\hat{u}-\hat{v})=\hat{0}$
  $\iff (\hat{u}-\hat{v}=\hat{0}$ ou $\hat{u}-\hat{v}=\widehat{\pi})$
  $\iff (\hat{u}=\hat{v}$ ou $\hat{u}=\hat{v}+\widehat{\pi})$

Attention, on doit se garder des conclusions du type "$2\hat{u}=\hat{0}$ donc $\hat{u}=\hat{0}$" ou encore "$2\hat{u}=2\hat{v}$ donc $\hat{u}=\hat{v}$" qui, pour être tentantes, n'en sont pas moins *fausses*.

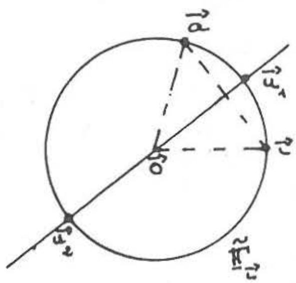
2. **Les deux moitiés d'un angle**

Problème : Etant donné un élément $\hat{a}$ de $\mathcal{A}$, déterminer l'ensemble des éléments $\hat{u}$ de $\mathcal{A}$ tels que : $2\hat{u}=\hat{a}$.

Désignons par $\vec{a}$ et $\vec{u}$ les deux vecteurs de $\widetilde{\Gamma}_i$ bijectivement associés à $\hat{a}$ et $\hat{u}$. Nous avons alors :

$\hat{u}+\hat{u}=\hat{a} \iff \widetilde{s}_{\vec{u}\to\vec{u}}(\vec{i}) = \vec{a}$

$\iff (\vec{u}=\vec{u}_1$ ou $\vec{u}=\vec{u}_2=-\vec{u}_1)$



$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant les deux vecteurs unitaires de la droite de *la* symétrie orthogonale qui échange $\vec{i}$ et $\vec{a}$.

Ainsi : $\hat{a}=2\hat{u}_1=2\hat{u}_2$.

En outre, sur $\widetilde{\Gamma}_i$, on a :

$\vec{u}_1=-\widetilde{I}(\vec{u}_2)$ et $\vec{u}_2=-\widetilde{I}(\vec{u}_1)$

ce qui, dans $\mathcal{A}$, se traduit par :

$\hat{u}_1=\hat{u}_2+\widehat{\pi}$ et $\hat{u}_2=\hat{u}_1+\widehat{\pi}$.

Théorème et définition :

- Dans $\mathcal{A}$, l'équation : $2\hat{u}=\hat{a}$ ($\hat{a}$ donné, $\hat{u}$ inconnu) admet deux solutions qui diffèrent de $\widehat{\pi}$.
- Ces deux angles solutions sont appelés les *deux moitiés de $\hat{a}$*.

En particulier, l'angle nul $\hat{0}$ a deux moitiés : $\hat{0}$ et $\widehat{\pi}$ puisque

$$\hat{0}+\hat{0}=\hat{0} \quad \text{et} \quad \widehat{\pi}+\widehat{\pi}=\hat{0}.$$

3. Les deux angles droits

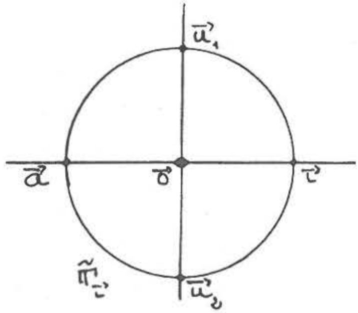
Nous allons étudier ici les deux moitiés de l'angle plat. Lorsque $\hat{a} = \hat{\pi}$, sur $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$ on a : $\vec{a} = -\vec{i}$.

La droite de la symétrie orthogonale qui échange $\vec{i}$ et $-\vec{i}$ est orthogonale à $\mathbf{R}.\vec{i}$.

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$ associés aux deux moitiés $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ de $\hat{\pi}$ sont alors homologues dans la symétrie orthogonale de droite $\mathbf{R}.\vec{i}$.

Les angles $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont donc opposés (voir le théorème de la page 121).

Il s'ensuit la :



Définition :

Chacune des deux moitiés de l'angle plat est appelée angle droit. L'un de ces angles est dit direct, l'autre est dit indirect (ils sont opposés).

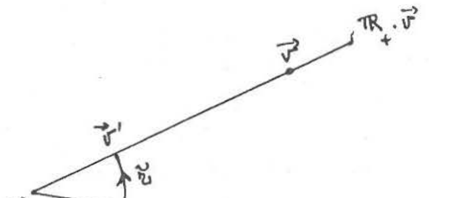
Nota : Le choix, entre les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, pour représenter l'angle droit direct sera fait ultérieurement.

V. Angle d'un couple de vecteurs non nuls

Définition :

Etant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\tilde{\mathbf{P}}$, il existe une rotation $\tilde{r}$ et une seule qui transforme $\mathbf{R}_+.\vec{u}$ en $\mathbf{R}_+.\vec{v}$ à savoir :

$\tilde{r}_{\vec{u}' \to \vec{v}'}$ ... où $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont respectivement les vecteurs unités de ces deux demi-droites vectorielles.



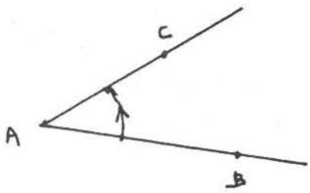
On convient alors de désigner par $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ l'angle de la rotation $\tilde{r}$ qui transforme $\mathbf{R}_+.\vec{u}$ en $\mathbf{R}_+.\vec{v}$.

On dit que $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est *l'angle du couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$*. C'est un élément de $\mathcal{A}$.

2. **Représentation traditionnelle**

Soit A, B, C trois points non alignés du plan **P**.

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ est représenté comme le montre la figure ci-contre (la flèche permet de distinguer quel est le premier élément du couple $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.



3. **Convention du langage**

Dans la suite de cet exposé, les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$ seront simplement appelés *angles*.

VI. Relation de Chasles

1. **Préliminaire**

Nous allons, pour établir la relation de Chasles, utiliser le résultat suivant :

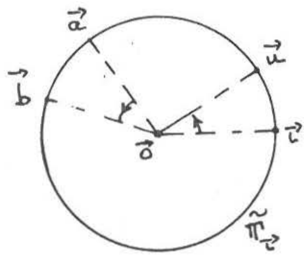
Quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de $\tilde{\Gamma}_{\vec{\imath}}$: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\hat{b}-\hat{a}$.

Démonstration :

Posons : $\hat{u}=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.
$\hat{u}$ est donc l'angle de la rotation qui transforme $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Autrement dit, on a : $\tilde{r}_{\hat{u}}(\vec{a})=\vec{b}$
ce qui, dans $\mathcal{A}$, se traduit par :

$$\hat{a}+\hat{u} = \hat{b} .$$

Ainsi : $\hat{u}=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\hat{b}-\hat{a}$.



2. **Relations de Chasles** (pour les angles et leurs doubles)

Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

- $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$
- $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+2(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = 2(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.

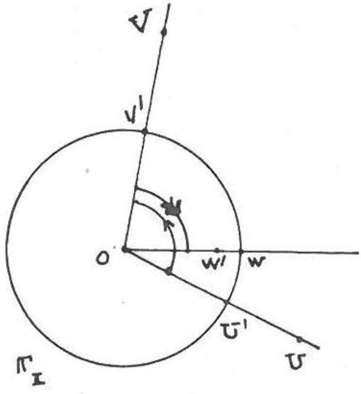
relations de Chasles

Démonstration :

Désignons par $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$ les vecteurs unitaires des demi-droites vectorielles $\mathbf{R}_+.\vec{u}$, $\mathbf{R}_+.\vec{v}$ et $\mathbf{R}_+.\vec{w}$.

Les vecteurs $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$ sont alors éléments de $\widetilde{\Gamma}_I$ et, en utilisant le lemme précédent, on a :

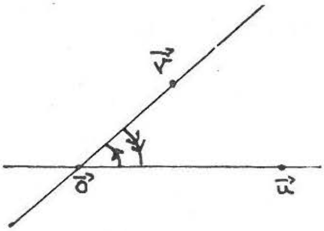
$$\begin{aligned}\widehat{(\vec{u},\vec{v})}+\widehat{(\vec{v},\vec{w})} &= \widehat{(\vec{u}',\vec{v}')}+\widehat{(\vec{v}',\vec{w}')}\\ &= (\hat{v}'-\hat{u}')+(\hat{w}'-\hat{v}')\\ &= \hat{w}'-\hat{u}'\\ &= \widehat{(\vec{u}',\vec{w}')}\\ &= \widehat{(\vec{u},\vec{w})}\end{aligned}$$



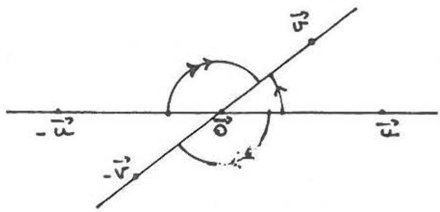
La deuxième égalité en découle de façon immédiate.

3. **Premières conséquences**

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

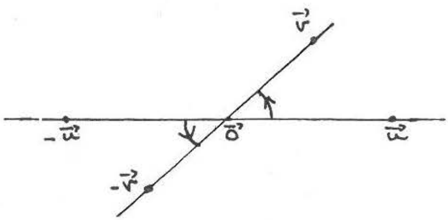


$\widehat{(\vec{v},\vec{u})} = -\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$



$\widehat{(\vec{u},-\vec{v})} = \widehat{(-\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \hat{\pi}$

$\widehat{(-\vec{u},-\vec{v})} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$



Démonstration :

Nous avons, en utilisant la relation de Chasles :

- $\widehat{(\vec{v},\vec{u})}+\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{v},\vec{v})} = \hat{0}$

  donc : $\widehat{(\vec{v},\vec{u})} = -\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$

• $\widehat{(\vec{v},\vec{u})} + \widehat{(\vec{u},-\vec{v})} = \widehat{(\vec{v},-\vec{v})} = \widehat{\pi}$

$\widehat{(-\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{v},\vec{u})} = \widehat{(-\vec{u},\vec{u})} = \widehat{\pi}$

donc : $\widehat{(\vec{u},-\vec{v})} = \widehat{(-\vec{u},\vec{v})} = \pi - \widehat{(\vec{v},\vec{u})} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{\pi}$

• En utilisant le résultat précédent, il vient :

$$\begin{aligned} &\widehat{(-\vec{u},-\vec{v})} + \widehat{(-\vec{u},\vec{v})} + \widehat{\pi} \\ &= [\widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{\pi}] + \widehat{\pi} \\ &= \widehat{(\vec{u},\vec{v})} \end{aligned}$$

VII. Effet des transformations sur les angles

1. Résultats essentiels

Théorème :

Dans $\tilde{\mathbf{P}}$:
- les rotations et les homothéties conservent les angles
- les symétries orthogonales changent les angles en leurs opposés.

Démonstration :

1. Soient :
$\tilde{r}$ une rotation vectorielle
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\tilde{\mathbf{P}}$.

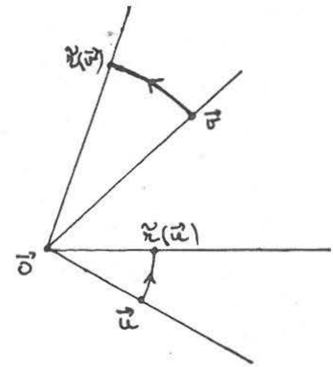
Nous avons :

$$\widehat{\tilde{r}} = \widehat{(\vec{u},\tilde{r}(\vec{u}))} = \widehat{(\vec{v},\tilde{r}(\vec{v}))}$$

On en déduit, par échange des termes moyens :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\tilde{r}(\vec{u}),\tilde{r}(\vec{v}))}$$

ce qu'on traduit par : $\tilde{r}$ "conserve" les angles.



2. Soient :
$\tilde{h} = \lambda.\tilde{I}$ une homothétie de $\tilde{\mathbf{P}}$ ($\lambda \in \mathbf{R}^*$)
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\tilde{\mathbf{P}}$

• *Si* $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ *alors*

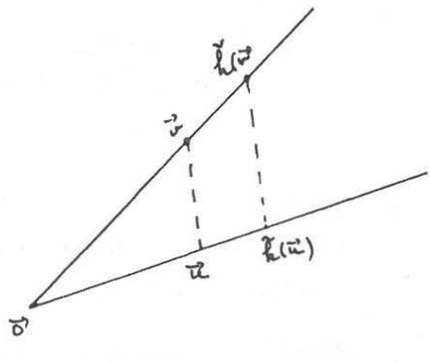
$\tilde{h}(\vec{u}) \in \mathbf{R}_+.\vec{u}$

$\tilde{h}(\vec{v}) \in \mathbf{R}_+.\vec{v}$

et on a :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\tilde{h}(\vec{u}),\tilde{h}(\vec{v}))}$$

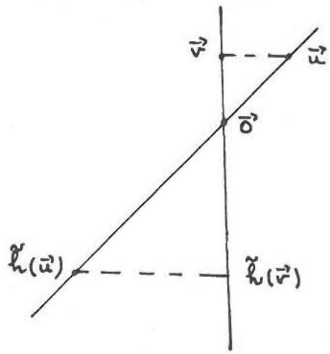
toute homothétie positive $\tilde{h}$ conserve donc les angles.



• *Si* $\lambda \in \mathbf{R}_-^*$ *alors*

$\tilde{h}$ est la composée de la rotation $(-\tilde{I})$ par l'homothétie positive $(-\lambda).\tilde{I}$.

$\tilde{h}$ conserve donc les angles puisque, séparément, $-\tilde{I}$ et $(-\lambda).\tilde{I}$ le font.



3. Soient :

$\tilde{s}$ une symétrie orthogonale de $\tilde{\mathbf{P}}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\tilde{\mathbf{P}}$

Posons :

$$\vec{u}\,' = \frac{1}{\|\vec{u}\|}.\vec{u} \quad ; \quad \vec{v}\,' = \frac{1}{\|\vec{v}\|}.\vec{v}$$

$$\tilde{r} = \tilde{r}_{\vec{u}\,' \to \vec{v}\,'}, \quad \text{i.e.} \quad \tilde{r} = \widehat{(\vec{u}\,', \vec{v}\,')}$$

Nous avons de façon évidente :

$$\widehat{(\vec{u}\,', \vec{v}\,')} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\ .$$

En outre :

$$\tilde{s}(\vec{u}) = \tilde{s}(\|\vec{u}\|.\vec{u}\,') = \|\vec{u}\|.\tilde{s}(\vec{u}\,')$$

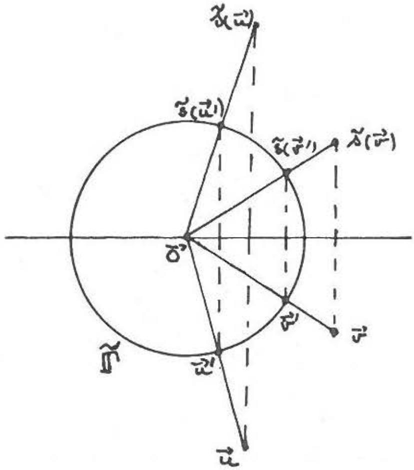
donc $\quad \tilde{s}(\vec{u}) \in \mathbf{R}_+.\tilde{s}(\vec{u}\,')$

De même :

$$\tilde{s}(\vec{v}) \in \mathbf{R}_+.\tilde{s}(\vec{v}\,')$$

de sorte que :

$$\widehat{(\tilde{s}(\vec{u}), \tilde{s}(\vec{v}))} = \widehat{(\tilde{s}(\vec{u}\,'), \tilde{s}(\vec{v}\,'))}\ .$$



Considérons alors la symétrie $\tilde{s}o\tilde{r}$.

Nous avons :

$$\tilde{s}o\tilde{r} = (\tilde{s}o\tilde{r})^{-1} = \tilde{r}^{-1}o\tilde{s}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\widehat{(\tilde{s}(\vec{u}\,'), \tilde{s}(\vec{v}\,'))} &= \widehat{(\tilde{s}(\vec{u}\,'), \tilde{s}[\tilde{r}(\vec{u}\,')])} \\
&= \widehat{(\tilde{s}(\vec{u}\,'), \tilde{r}^{-1}[\tilde{s}(\vec{u}\,')])} \\
&= \widehat{\tilde{r}^{-1}} = -\tilde{r} \\
&= -\widehat{(\vec{u}\,', \vec{v}\,')}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\widehat{(\tilde{s}(\vec{u}), \tilde{s}(\vec{v}))} = -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

Il en résulte, pour le plan **P**, le

Théorème :

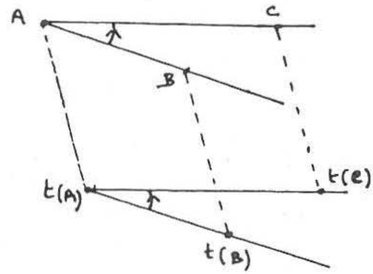
Dans **P** :

- les translations, les homothéties conservent les angles
- les symétries orthogonales changent les angles en leurs opposés.

Démonstration :

Soient dans **P** :

- une translation t
- une homothétie h... (de centre Ω)
- une symétrie orthogonale s (de droite **D**)
- trois points distincts A, B, C .



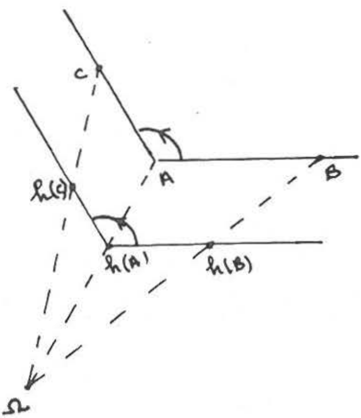
Nous avons :

1. $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\tilde{t}(\overrightarrow{AB}),\tilde{t}(\overrightarrow{AC}))}$
$= \widehat{(\overrightarrow{t(A)t(B)},\overrightarrow{t(A)t(C)})}$

t conserve donc les angles.

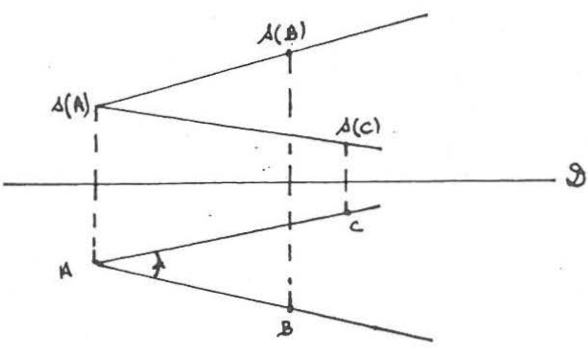
2. $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\tilde{h}(\overrightarrow{AB}),\tilde{h}(\overrightarrow{AC}))}$
$= \widehat{(\overrightarrow{h(A)h(B)},\overrightarrow{h(A)h(C)})}$

h conserve donc les angles.



3. $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = -\widehat{(\tilde{s}(\overrightarrow{AB}),\tilde{s}(\overrightarrow{AC}))}$
$= -\widehat{(\overrightarrow{s(A)s(B)},\overrightarrow{s(A)s(C)})}$

s change donc les angles en leurs opposés.

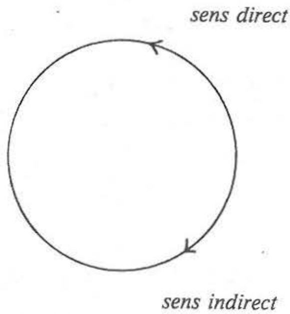


Partie B : Deuxième présentation des angles

I. Orientation du plan et mesures d'un arc orienté

1. Orientation du plan

Intuitivement, il va de soi que tout cercle d'un plan peut être parcouru dans deux sens. L'un est appelé sens *direct* ou trigonométrique, l'autre est appelé *indirect* ou rétrograde.

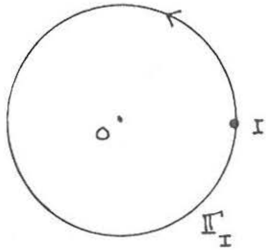


Orienter le plan **P**, c'est choisir sur tous les cercles de ce plan le même sens direct (conventionnellement le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre). Lorsqu'il en est ainsi, le plan est dit *orienté.*

Dans tout ce qui suit, le plan **P** *est supposé orienté et muni d'un point origine O.*

2. Le cercle Γ_I

Nous désignons par Γ_I le cercle de centre O, de rayon 1, muni d'un point origine I (figure ci-contre).



3. Repérage d'un point sur Γ_I : abscisses curvilignes

En enroulant "une droite graduée Δ" sur le cercle Γ_I, comme le suggère la figure de la page suivante, on définit une application :

$$\mathbf{R} \to \Gamma_I$$
$$\mu \to M$$

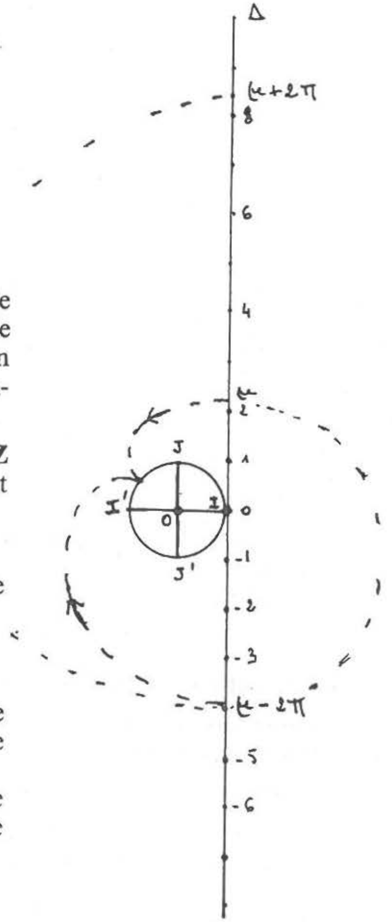
Par exemple :

au réel 0 correspond le point I

au réel $\frac{\pi}{2}$ correspond le point J

au réel π correspond le point I'

au réel $-\frac{\pi}{2}$ correspond le point J'



Plus généralement, tout point M de Γ_I a une infinité d'antécédents dans **R** de la forme $\mu + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Un seul de ces antécédents appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Les réels $\mu + k \times 2\pi$ où k décrit **Z** sont appelés *abscisses curvilignes* du point M de Γ_I.

Il ressort de l'étude expérimentale décrite ci-dessus que :

- les abscisses curvilignes d'un même point différent d'un multiple entier de 2π ;
- pour tout point M du cercle Γ_I, il existe une abscisse curviligne et une seule appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Convention d'écriture :

Convention d'écriture :

Pour exprimer que deux réels x et y diffèrent d'un multiple de 2π, nous utilisons la notation : "$y = x[2\pi]$" qui se lit : "y égale x modulo 2π".

Cette notation signifie qu'il existe un entier relatif k tel que

$$y = x + k \times 2\pi .$$

Exercice 1

Vérifier que $y = x\ [2\pi]$ dans chacun des cas suivants :

a) $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{7\pi}{2}$ b) $x = -\frac{7\pi}{3}$, $y = \frac{11\pi}{3}$

c) $x = \frac{3\pi}{4}$, $y = -\frac{5\pi}{4}$ d) $x = -\frac{63\pi}{6}$, $y = \frac{3\pi}{2}$

Exercice 2

Dans chacun des cas ci-dessous, x désigne une abscisse curviligne d'un point M de Γ_I.
Donner celle y qui est élément de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

a) $x = \frac{5\pi}{4}$ b) $x = -\pi$ c) $x = -\frac{7\pi}{6}$ d) $x = \frac{63\pi}{12}$

4. **Mesures d'un arc orienté**

a) ***Arc orienté : définition***

Soit (A,B) un couple de points de Γ_I. On dit que (A,B) est un bipoint de Γ_I ou, tradition oblige, un *arc orienté* de ce cercle. A la notation habituelle (A,B), on préfère la notation $\overset{\frown}{AB}$ apparemment plus "suggestive". A est l'origine de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$, B en est l'extrémité.

b) ***Mesures d'un arc orienté***

Soit un arc orienté $\overset{\frown}{AB}$, α et β deux des abscisses curvilignes respectives des points A et B.

On dit que le réel $\beta - \alpha$ est une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.

Cet arc a donc une infinité de mesures qui diffèrent d'un multiple entier de 2π. Conformément à la convention précédente, on écrit alors :

$$\text{mes } \overset{\frown}{AB} = \beta - \alpha\ [2\pi]$$

mes $\overset{\frown}{AB}$ se lit : "mesure de l'arc orienté AB" ou plus simplement "mesure de AB".

Remarques :

• On a : mes $\overset{\frown}{BA} = \alpha - \beta\ [2\pi]$

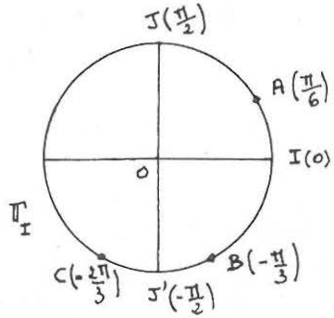
Les arcs orientés $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BA}$ ont donc des mesures opposées modulo 2π.

• mes $\overset{\frown}{IA} = \alpha\ [2\pi]$ car 0 est une abscisse curviligne de I.

Exemple :

Dans la figure ci-dessous, la notation $M(\mu)$ signifie que mes $\overset{\frown}{IM} = \mu\ [2\pi]$.

On a alors :



$$\text{mes } \overset{\frown}{AB} = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$\text{mes } \overset{\frown}{JC} = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$= -\frac{7\pi}{6} \quad [2\pi]$$

ou encore

$$\text{mes } \overset{\frown}{JC} = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$

Exercice 3

1. Citer tous les arcs orientés de la figure ci-dessus ayant pour mesure :

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{4\pi}{3}$

2. Placer le point I′ tel que mes $\overset{\frown}{II'} = \pi \ [2\pi]$.
Exprimer ensuite mes $\overset{\frown}{I'A}$, mes $\overset{\frown}{I'B}$, mes $\overset{\frown}{I'C}$.

c) ***Relation de Chasles***

On montre — voir exercice 4 — que, quels que soient les points A, B, C de Γ_I, on a :

$$\text{mes } \overset{\frown}{AB} + \text{mes } \overset{\frown}{BC} = \text{mes } \overset{\frown}{AC} \quad [2\pi]$$

Exercice 4

Soit α, β, γ des abscisses curvilignes des points A, B et C. Exprimer mes $\overset{\frown}{AB}$ + mes $\overset{\frown}{BC}$ − mes $\overset{\frown}{AC}$. En déduire la relation de Chasles.

Indication : On écrira :

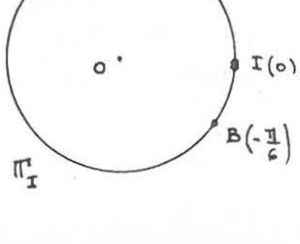
$$\text{mes } \overset{\frown}{AB} = \beta - \alpha + k_1 \times 2\pi \quad \text{avec } k_1 \in \mathbf{Z}$$
$$\text{mes } \overset{\frown}{BC} = \qquad \text{etc.}$$

Exercice 5

1. Dans la figure ci-contre, placer les points E et F tels que :

$$\text{mes } \overset{\frown}{AE} = \pi \ [2\pi]$$
et
$$\text{mes } \overset{\frown}{BF} = -\pi \ [2\pi]$$

2. Exprimer : mes $\overset{\frown}{IE}$, mes $\overset{\frown}{IF}$, mes $\overset{\frown}{EF}$ et mes $\overset{\frown}{AB}$.



II. Angle d'un couple de vecteurs non nuls

Etant donnés des vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$... les vecteurs

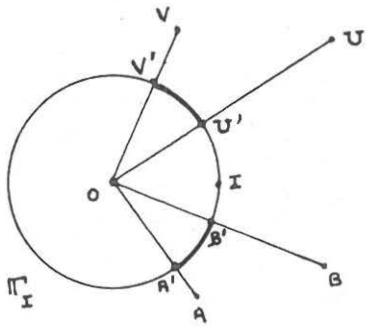
$$\vec{u}' = \frac{1}{\|\vec{u}\|}.\vec{u} \quad ; \quad \vec{v}' = \frac{1}{\|\vec{v}\|}.\vec{v} \quad ; \quad \vec{w}' = \frac{1}{\|\vec{w}\|}.\vec{w} \ldots$$

seront désormais appelés vecteurs unitaires associés aux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ... Dans le plan pointé $\mathbf{P}_0$, ils sont représentés par des points U′, V′, W′ du cercle $\widetilde{\Gamma}_I$.

1. ***Définition d'un angle***

On appelle *angle d'un couple* $(\vec{u},\vec{v})$ *de vecteurs non nuls,* l'ensemble de tous les couples $(\vec{a},\vec{b})$ de vecteurs non nuls tels que :

$$\text{mes}\ \overset{\frown}{A'B'} = \text{mes}\ \overset{\frown}{U'V'}\ [2\pi]$$



On note $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ l'angle d'un couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$. $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ se lit : "angle vecteur u , vecteur v " ou plus simplement "angle u,v".

Il résulte de la définition et des notations adoptées que, quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}',\vec{v}')}.$$

Conventions

• Dans la suite de cet exposé, nous utiliserons le mot "angle" à la place de "angle d'un couple de vecteurs non nuls". Nous désignerons éventuellement un angle par une lettre surmontée d'un "chapeau" pour rappeler la nature de l'objet qui est considéré. Par exemple $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, ... désignent des angles. $\widehat{\alpha}$ se lit : "angle α".

• L'ensemble des angles sera noté $\mathcal{A}$.

Représentation traditionnelle

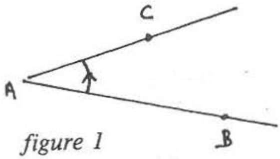


figure 1

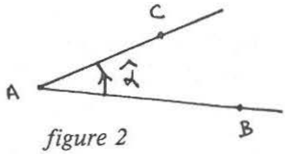


figure 2

soit A, B, C trois points non alignés du plan **P**.

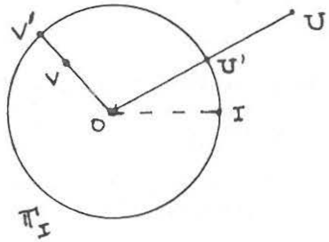
L'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ est représenté comme le montre la figure 1. (La flèche permet de distinguer quel est le premier élément du couple).

Lorsqu'on désigne par $\widehat{\alpha}$ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, on illustre cette situation comme l'indique la figure 2.

2. **Mesures en radians d'un angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$**

On appelle mesure *en radians* de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ une quelconque mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{U'V'}$.

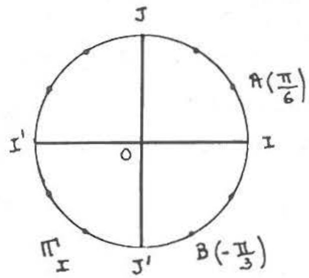
Un angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ a donc une infinité de mesures en radians. Elles diffèrent entre elles d'un multiple de 2π. On note **mes** $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ une quelconque mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.



Mesure principale

Il existe une et une seule mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On l'appelle *mesure principale* de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Exercice 6



Sur la figure ci-dessous, la notation A($\frac{\pi}{6}$) signifie que $\frac{\pi}{6}$ est une abscisse curviligne de A.

Donner les mesures principales des angles $\widehat{(\vec{OI},\vec{OA})}$; $\widehat{(\vec{OB},\vec{OI}')}$; $\widehat{(\vec{OA},\vec{OJ}')}$; $\widehat{(\vec{OB},\vec{OJ})}$; $\widehat{(\vec{OA},\vec{OB})}$ et $\widehat{(\vec{OB},\vec{OA})}$.

3. Egalité de deux angles

Il résulte des définitions précédentes que deux angles sont égaux si et seulement si leurs mesures sont égales modulo 2π .

$$\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \iff \text{mes } \widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\text{mes } \widehat{(\vec{u},\vec{v})} \ [2\pi]$$

4. Relation de Chasles pour les mesures d'angles

Il découle de la définition d'une mesure d'un angle ainsi que de la relation de Chasles sur les mesures d'arcs orientés que, quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\text{mes } \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \text{mes } \widehat{(\vec{v},\vec{w})} = \text{mes } \widehat{(\vec{u},\vec{w})} \ [2\pi]$$

Exercice 7

Illustrer et justifier ce résultat.

III. Addition des angles

1. *Définition*

On appelle somme de deux angles de mesure α et β l'angle dont une mesure est $\alpha+\beta$.

La somme de deux angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ se note $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}$.

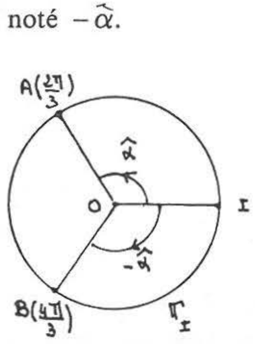
2. *Propriétés*

Les propriétés de l'addition des angles sont analogues à celles de l'addition des nombres réels, à savoir :

1. l'addition dans $\mathcal{A}$ est commutative et associative,
2. elle admet un *élément neutre* : l'angle de mesure zéro. On le note $\hat{0}$. On l'appelle l'angle nul,
3. tout élément $\widehat{\alpha}$ de $\mathcal{A}$ admet un *opposé* noté $-\widehat{\alpha}$.

Par exemple, les angles de mesures $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ sont opposés car $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$ et donc

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 0 \ [2\pi] .$$



Exercice 8

Déterminer la mesure principale de la somme et de la différence des angles dont les mesures respectives sont :

a) $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$ d) $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$

Exercice 9

Pour quelles valeurs du réel α de l'intervalle $]-\pi,\pi]$ les angles de mesure α et $\alpha+\pi$ sont-ils opposés ?

3. **Angles égaux à leur opposé**

Soit $\widehat{\alpha}$ un angle. Désignons par α une de ses mesures. Nous avons :

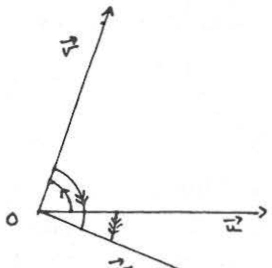
$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}=-\widehat{\alpha} &\iff 2\alpha=0\ [2\pi]\\ &\iff \text{il existe } k\in\mathbf{Z} : 2\alpha=k\times 2\pi\\ &\iff \text{il existe } k\in\mathbf{Z} : \alpha=k\pi\end{aligned}$$

Il existe donc deux angles égaux à leur opposé : l'angle nul et l'angle dont la mesure principale est π. Ce dernier angle est appelé *angle plat*. On le note $\widehat{\pi}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}\neq\vec{0}$: $\widehat{(\vec{u},\vec{u})}=\widehat{0}$ et $\widehat{(\vec{u},-\vec{u})}=\widehat{(-\vec{u},\vec{u})}=\widehat{\pi}$.

4. **Relation de Chasles** (pour les angles)

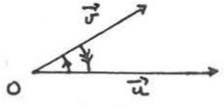
Il résulte immédiatement de la définition de la somme de deux angles et de la relation de Chasles sur les mesures d'angle qui, quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :



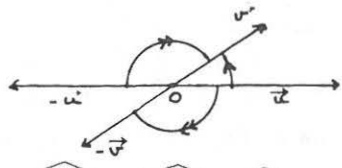
$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{v},\vec{w})} = \widehat{(\vec{u},\vec{w})}$$

Les résultats énoncés et illustrés ci-après sont des conséquences immédiates de cette pròpriété.

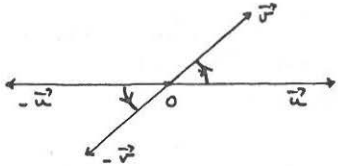
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a :



$\widehat{(\vec{v},\vec{u})}=-\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$



$\widehat{(\vec{u},-\vec{v})}=\widehat{(-\vec{u},\vec{v})}=\widehat{(\vec{u},\vec{v})}+\widehat{\pi}$



$$\widehat{(-\vec{u},-\vec{v})}=\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$$

Exercices

10. - Utiliser la relation de Chasles pour établir les résultats précédents.

11. - Soit un parallélogramme (ABCD). Montrer que :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})} + \widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})} = \widehat{0}\ .$$

5. Double et moitiés d'un angle

a) *Double d'un angle*

Définition :

On appelle double de l'angle $\widehat{\alpha}$ l'angle $\widehat{\alpha}+\widehat{\alpha}$ que l'on note $2\widehat{\alpha}$.

Il est clair que le double d'un angle de mesure α a pour mesure 2α .

Exercice 12

Déterminer la mesure principale du double d'un angle de mesure

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $-\frac{\pi}{2}$ e) π

Théorème

Quels que soient les angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$, on a :

- $2\widehat{\alpha}=\widehat{0}$ si et seulement si $\widehat{\alpha}=\widehat{0}$ ou $\widehat{\alpha}=\widehat{\pi}$
- $2\widehat{\alpha}=2\widehat{\beta}$ si et seulement si $\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$ ou $\alpha=\widehat{\beta}+\pi$

Démonstration :

- L'égalité $2\widehat{\alpha}=\widehat{0}$ équivaut à $\widehat{\alpha}=-\widehat{\alpha}$.

Autrement dit α est égal à son opposé. Dans ce cas, on a vu que $\widehat{\alpha}=\widehat{0}$ ou $\widehat{\alpha}=\widehat{\pi}$.

- $2\widehat{\alpha}=2\widehat{\beta} \Leftarrow 2(\widehat{\alpha}-\widehat{\beta})=\widehat{0}$

$\iff [\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}=\widehat{0}$ ou $\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}=\widehat{\pi}]$

$\iff [\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$ ou $\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}+\widehat{\pi}]$

(c.q.f.d)

Relation de Chasles (pour les doubles d'angles)

On vérifie aisément que les doubles d'angles satisfont à la relation de

Chasles. Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

$$2\widehat{(\vec{u},\vec{v})} + 2\widehat{(\vec{v},\vec{w})} = 2\widehat{(\vec{u},\vec{w})} .$$

Exercice 13

Déterminer les mesures principales des angles dont le double a pour mesure :

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) 3π d) $\frac{5\pi}{4}$

b) ***Les deux moitiés d'un angle.***

Résolution de l'équation $2\widehat{\alpha} = \widehat{a}$

Soit $\hat{a}$ un angle. Désignons par θ sa mesure principale.

L'angle $\widehat{\beta}$ de mesure principale $\frac{\theta}{2}$ est alors tel que :

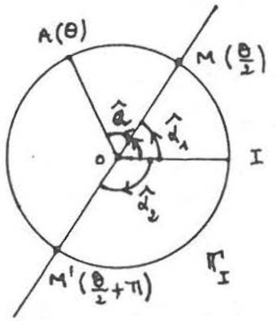
$$2\widehat{\beta} = \hat{a} .$$

Par suite, nous avons :

$2\widehat{\alpha} = \hat{a} \iff 2\widehat{\alpha} = 2\widehat{\beta}$

$\iff \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ ou $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} + \widehat{\pi}$

L'équation $2\widehat{\alpha} = \hat{a}$ a donc deux solutions $\widehat{\alpha}_1$ et $\widehat{\alpha}_2$.



Ces solutions diffèrent de l'angle plat. En effet, si $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}_2 = \widehat{\beta} + \widehat{\pi} = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\pi}$, on a aussi : $\widehat{\alpha}_2 = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\pi}$ car $-\widehat{\pi} = \widehat{\pi}$.

On peut donc énoncer :

Théorème et définition :

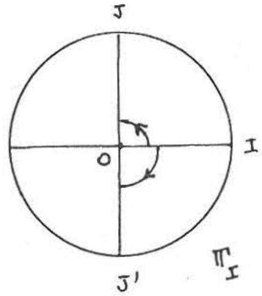
- Dans l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles, l'équation $2\widehat{\alpha} = \hat{a}$ ($\hat{a}$ donné, $\widehat{\alpha}$ inconnu) admet deux solutions qui diffèrent de $\widehat{\pi}$.
- Les deux angles solutions de cette équation sont appelés les deux moitiés de l'angle $\hat{a}$.

Tout angle a donc deux moitiés. Par exemple :

- l'angle nul a deux moitiés $\hat{0}$ et $\widehat{\pi}$;
- l'angle plat a deux moitiés dont les mesures principales sont respectivement $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Ces deux

angles sont appelés angles droits. Ils sont opposés.

En conformité avec le sens direct adopté sur le cercle Γ_I, l'angle $(\widehat{\vec{OI},\vec{OJ}})$ est appelé angle droit direct et l'angle $(\widehat{\vec{OI},\vec{OJ'}})$ est appelé angle droit indirect.



Remarque :

La notation $\frac{1}{2}\widehat{\alpha}$ n'a aucun sens puisqu'un angle a deux moitiés. Il est par contre tout à fait cohérent de parler de la moitié d'une mesure d'un angle puisqu'il s'agit, dans ce cas, de la moitié d'un nombre réel.

Exercices

14. - Déterminer les mesures principales des moitiés d'un angle de mesure θ dans les cas suivants :

a) $\theta = -\frac{\pi}{3}$ b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ c) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ d) $\theta = 3\pi$

15. - Montrer que l'angle plat est le seul angle dont les moitiés sont opposées.

IV. Propriétés géométriques

1. Effet des transformations

Théorème :

- Les translations, les homothéties (en particulier les symétries centrales) conservent les angles.
- Les réflexions changent les angles en leurs opposés.

Démonstration :

Désignons par A, B, C trois points distincts de **P** .

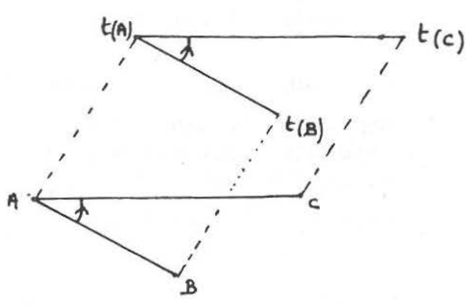
- Soit t une translation. Rappelons que l'on a :

$\overrightarrow{t(A)t(B)} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{t(A)t(C)} = \overrightarrow{AC}$

On en déduit trivialement que :

$(\widehat{\overrightarrow{t(A)t(B)}, \overrightarrow{t(A)t(C)}}) = (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})$

Ainsi : "t conserve les angles".



• Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \neq 0$). Rappelons que l'on a :

$$\overrightarrow{h(A)h(B)} = k.\overrightarrow{AB}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{h(A)h(C)} = k.\overrightarrow{AC}$$

De sorte que les vecteurs unitaires associés aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $k.\overrightarrow{AB}$ d'une part ; $\overrightarrow{AC}$ et $k.\overrightarrow{AC}$ d'autre part, sont

- égaux lorsque $k > 0$
- opposés lorsque $k < 0$

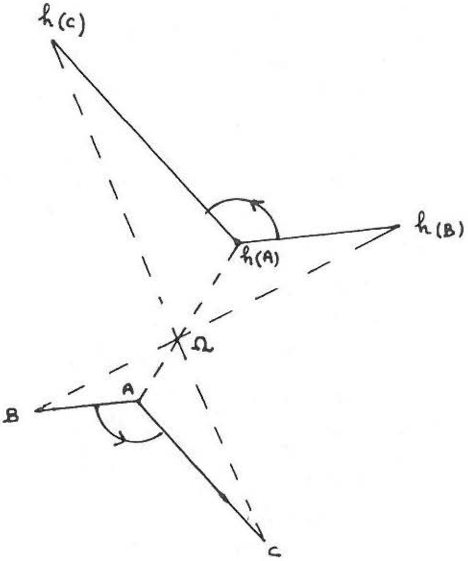
On en déduit alors :

$$\widehat{(k.\overrightarrow{AB}, k.\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} .$$

Autrement dit :

$$\widehat{(\overrightarrow{h(A)h(B)},\overrightarrow{h(A)h(C)})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$$

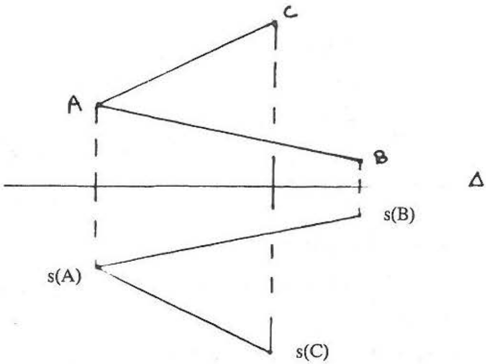
Ainsi : "h conserve les angles".



• Soit s une réflexion d'axe Δ. Au vu de la figure ci-contre, on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{s(A)S(B)},\overrightarrow{s(A)S(C)})} = -(AB,AC)$$

Nous admettrons ici que les réflexions changent les angles en leurs opposés.



Partie C : Usage des angles

I. Colinéarité, orthogonalité - Bissectrices

1. Deux exercices résolus

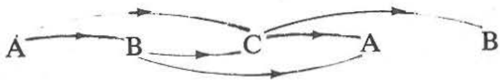
Exercice 1 : *"Somme des angles d'un triangle"*

Soit un triangle ABC. Calculer la somme :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$$

qui, par abus de langage, est souvent appelée "somme des angles du triangle ABC".

Nota : Pour écrire ces angles on tient compte de l'ordre dans lequel sont donnés les sommets du triangle, ainsi que le montre le schéma :



Première solution :

Désignons par Ω le milieu de $[A,C]$ et posons :

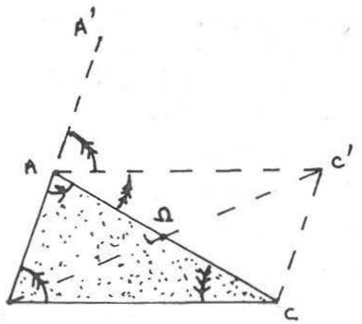
$$A' = t_{\overrightarrow{BA}}(A) \quad \text{et} \quad C' = t_{\overrightarrow{BA}}(C)$$

Ω est alors le milieu de $[B,C']$ car $(ABCC')$ est un parallélogramme. Nous avons alors, d'une part

$\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AA'})}$... effet de la translation $t_{\overrightarrow{BA}}$

d'autre part

$\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'})}$... effet de la symétrie S_Ω



On en déduit :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'})} + \widehat{(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AA'})}$$
$$= \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'})} = \widehat{\pi}$$

Deuxième solution :

Nous avons : $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(-\overrightarrow{CA},-\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})}$...

On en déduit :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA})} = \widehat{\pi}$$

On retiendra le résultat suivant :

La somme des angles déterminés par un triangle est égale à l'angle plat. La somme de leurs doubles est égale à l'angle nul.

Exercice 2 : *Caractérisation des triangles isocèle et équilatéral*

Soit un triangle (ABC). Montrer que :

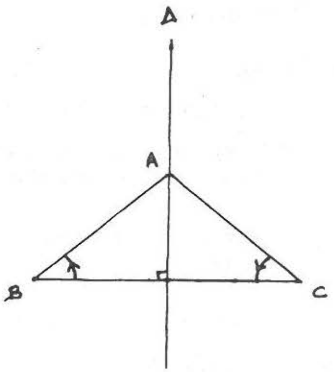
1. le triangle (ABC) est isocèle en $A \Longleftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$
2. le triangle (ABC) est équilatéral $\Longleftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$

Solution :

1. Désignons par Δ la médiatrice de $[B, C]$.
Alors : le triangle (ABC) est isocèle en A $\Rightarrow S_\Delta(A) = A$ et $S_\Delta(B) = C$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = -(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$ (effet de S_Δ)

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$



Réciproquement :

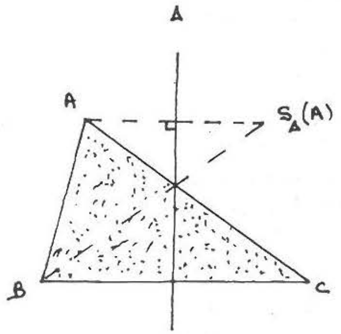
$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = -(\widehat{\overrightarrow{BS_\Delta(A)}, \overrightarrow{BC}})$ (effet de S_Δ)

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS_\Delta(A)}})$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BS_\Delta(A)}$ colinéaires

$\Rightarrow S_\Delta(A) = A$

$\Rightarrow$ le triangle (ABC) est isocèle en A



2. Le triangle (ABC) est équilatéral $\Longleftrightarrow$ le triangle (ABC) est isocèle en A

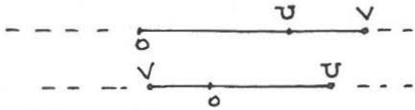
$\Longleftrightarrow$ le triangle (ABC) est isocèle en B

$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \\ (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \end{cases}$

$\Longleftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$

2. Angles et colinéarité

a) *Résultats essentiels*



Théorème :

Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\hat{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont éléments de la même demi-droite vectorielle

- $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\hat{\pi}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont éléments de demi-droites vectorielles opposées

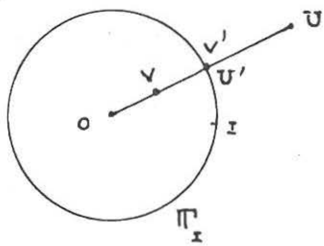
- $2\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\hat{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration :

Désignons par $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ les vecteurs unitaires associés aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a alors, rappelons-le :

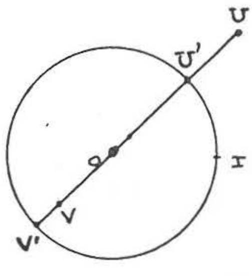
$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}',\vec{v}')} .$$

Ceci étant, il vient :



- $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\hat{0} \iff \widehat{(\vec{u}',\vec{v}')}=\hat{0}$
  $\iff \vec{u}'=\vec{v}'$
  $\iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont éléments de la même demi-droite vectorielle

- $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\hat{\pi} \iff \widehat{(\vec{u}',\vec{v}')}=\hat{\pi}$
  $\iff \vec{v}' = -\vec{u}'$
  $\iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont éléments de demi-droites vectorielles opposées



- Il s'ensuit que :
  $2\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\hat{0} \iff [\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\hat{0}$ ou $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\hat{\pi}]$
  $\iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Remarque :

Les résultats précédents montrent à l'évidence que, en termes d'angle, la notion de *double d'angle* caractérise de manière simple celle de colinéarité de deux vecteurs. Son emploi sera essentiel dans les problèmes d'alignement et de parallélisme.

Corollaire :

- Quels que soit les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$:

$2\widehat{(\vec{x},\vec{u})}=2\widehat{(\vec{x},\vec{v})} \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$2\widehat{(\vec{u},\vec{x})}=2\widehat{(\vec{v},\vec{x})} \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

• Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x} \text{ colinéaire à } \vec{u}\\ \vec{y} \text{ colinéaire à } \vec{v}\end{array}\right\} \Rightarrow 2\widehat{(\vec{x},\vec{y})} = 2\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$$

Démonstration :

• $$\begin{aligned} 2\widehat{(\vec{x},\vec{u})} = 2\widehat{(\vec{x},\vec{v})} &\iff 2\widehat{(\vec{x},\vec{v})} - 2\widehat{(\vec{x},\vec{u})} = \hat{0}\\ &\iff 2\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \hat{0}\\ &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires}\end{aligned}$$

• $$\begin{aligned}\left.\begin{array}{l}\vec{x} \text{ colinéaire à } \vec{u}\\ \vec{y} \text{ colinéaire à } \vec{v}\end{array}\right\} &\Longrightarrow 2\widehat{(\vec{x},\vec{u})} = 2\widehat{(\vec{y},\vec{v})} = \hat{0}\\ &\Longrightarrow 2\widehat{(\vec{x},\vec{u})} + 2\widehat{(\vec{u},\vec{y})} = 2\widehat{(\vec{u},\vec{y})} + 2\widehat{(\vec{y},\vec{v})}\\ &\Longrightarrow 2\widehat{(\vec{x},\vec{y})} = 2\widehat{(\vec{u},\vec{v})}\end{aligned}$$

Commentaire :

Les résultats précédents sont souvent utilisés dans les problèmes de géométrie où interviennent les angles. Ainsi :

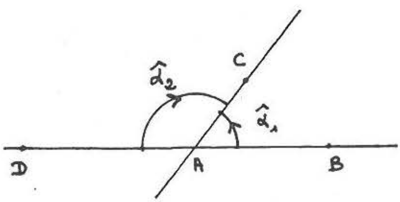
1) Pour établir que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on peut choisir un "vecteur auxiliaire $\vec{x}$" et montrer que l'on a, par exemple : $2\widehat{(\vec{x},\vec{u})} = 2\widehat{(\vec{x},\vec{v})}$.

2) Lorsqu'on manipule des doubles d'angles, on peut remplacer n'importe quel vecteur qui entre dans leur libellé par un vecteur non nul qui lui est colinéaire. Cette façon de procéder est, on le verra par la suite, d'une importance capitale...

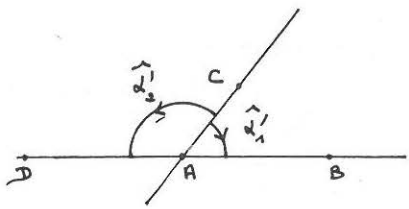
b) *Configuration des "angles à doubles égaux"*

Première configuration :

Nous avons :



$2\widehat{\alpha}_1 = 2\widehat{\alpha}_2$



$2\widehat{\alpha}'_1 = 2\widehat{\alpha}'_2$

En effet :

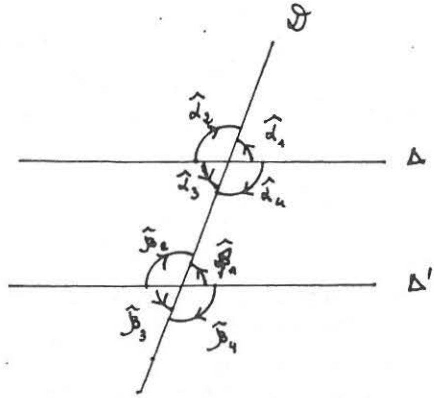
$$2\widehat{(\vec{AB},\vec{AC})} = 2\widehat{(\vec{AD},\vec{AC})} \qquad \text{et} \qquad 2\widehat{(\vec{AC},\vec{AB})} = 2\widehat{(\vec{AC},\vec{AD})}$$

car les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont colinéaires.

On peut, pour rendre compte de cette situation, dire de façon imaginée que deux angles ont des *doubles égaux* lorsqu'ils *"se font face"* ou lorsqu'ils *"se tournent le dos"*.

Deuxième configuration :

• *Si les droites Δ et Δ' sont parallèles,* alors tous les $\widehat{\alpha_i}$ et les $\widehat{\beta_j}$ ont des doubles égaux.



• *Si l'un des $\widehat{\alpha_i}$ et l'un des $\widehat{\beta_j}$ ont des doubles égaux* alors les droites Δ et Δ' sont parallèles.

3. **Angles et orthogonalité**

a) *Résultat essentiel*

Théorème :

Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $2\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{\pi}$.

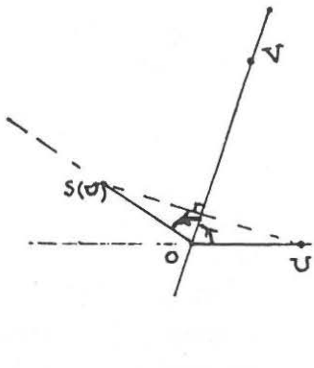
Démonstration :

Soit U et V les points de **P** définis par $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$.

Désignons par S la réflexion d'axe (OV). Nous avons alors :

$\widehat{(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV})} = -\widehat{(\overrightarrow{OS(U)},\overrightarrow{OV})}$... effet de S

$= \widehat{(\overrightarrow{OV},\overrightarrow{OS(U)})}$



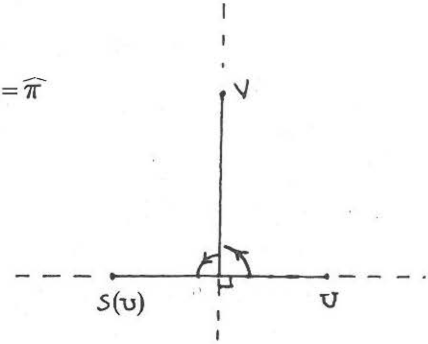
Ceci étant, il vient :

$\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$ orthogonaux

$$\iff \widehat{(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OS(U)})} = \widehat{\pi}$$

$$\iff \widehat{(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV})} + \widehat{(\overrightarrow{OV},\overrightarrow{OS(U)})} = \widehat{\pi}$$

$$\iff 2\widehat{(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV})} = \widehat{\pi}$$



Nota : On voit que c'est encore la notion de double d'angle qui intervient pour caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs.

b) *Caractérisation d'un triangle rectangle*

Exercice résolu

Soit un triangle (ABC). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

— le triangle (ABC) est rectangle en A

— $2\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{\pi}$

— $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$

— $2\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + 2\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{\pi}$.

Solution

• Le triangle (ABC) est rectangle en A $\iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

$$\iff 2\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{\pi}$$

• $2\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{\pi} \iff 2\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$

$$\iff \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$$

• $2\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \widehat{\pi} \iff \widehat{\pi} + 2\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + 2\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{0}$

$$\iff 2\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + 2\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = -\widehat{\pi} = \widehat{\pi}$$

Nota : Il peut être utile de retenir qu'un triangle est rectangle si et seulement si la somme des doubles de deux de "ses angles" est égale à l'angle plat.

4. **Angles et bissectrices**

a) *Caractérisation de la bissectrice de deux demi-droites de même origine*

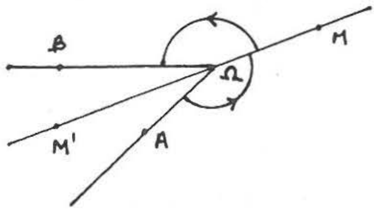
Théorème :

Soit **D** la bissectrice de deux demi-droites $[\Omega A)$ et $[\Omega B)$, M un point quelconque du plan **P**.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
— M est un point de **D** autre que Ω (1)
— $\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M})}=\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega B})}$ (2)
— $2\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M})}=\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega B})}$ (3)
— Quels que soient les points distincts P et Q :
$2\widehat{(\vec{PQ},\vec{\Omega M})}=\widehat{(\vec{PQ},\vec{\Omega A})}+\widehat{(\vec{PQ},\vec{\Omega B})}$ (4) utilisation d'un vecteur auxiliaire $\overrightarrow{PQ}$
— Il existe deux points distincts P et Q :
$2\widehat{(\vec{PQ},\vec{\Omega M})}=\widehat{(\vec{PQ},\vec{\Omega A})}+\widehat{(\vec{PQ},\vec{\Omega B})}$ (5)

Démonstration :

Première partie :

• Supposons M élément de $\mathbf{D}\setminus\{\Omega\}$
Alors, en désignant par s la symétrie orthogonale de droite **D**, on a :



$\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M})}=-\widehat{(\overrightarrow{\Omega s(A)},\vec{\Omega M})}$... effet de s
$=\widehat{(\vec{\Omega M},\overrightarrow{\Omega s(A)})}$
$=\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega B})}$... car $s(A)\in[\Omega B)$

• *Réciproquement,* supposons que :
$\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M})}=\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega B})}$.

Alors en désignant par M′ un point de **D** autre que Ω, on a :

$$\begin{aligned}2\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega M'})} &= \widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega A})}+\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M'})}+\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega B})}+\widehat{(\vec{\Omega B},\vec{\Omega M'})}\\ &= [\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega B})}+\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega A})}]+[\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M'})}-\widehat{(\vec{\Omega M'},\vec{\Omega B})}]\\ &= \hat{0}+\hat{0}\end{aligned}$$

On en déduit : $\vec{\Omega M}$ et $\vec{\Omega M'}$ sont colinéaires
puis : $M\in\mathbf{D}\setminus\{\Omega\}$

Ainsi, nous venons d'établir que :
$M\in\mathbf{D}\setminus\{\Omega\} \iff \widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M})}=\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega B})}$. Autrement dit : (1) $\iff$ (2).

Deuxième partie :

• Nous avons : (2) $\Rightarrow$ (3). En effet,

$$\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M})}=\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega B})} \Rightarrow 2\widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega M})}+\widehat{(\vec{\Omega M},\vec{\Omega B})} = \widehat{(\vec{\Omega A},\vec{\Omega B})}$$

• Nous avons : (3) ⇒ (4). En effet, supposons que l'on ait :

$$2\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})}\,.$$

Alors, quels que soient les points distincts P et Q :

$$\begin{aligned} 2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega M})} &= 2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega A})} + 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega M})} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega A})} + [\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega A})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})}] \\ &= \widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega A})} + \widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega B})} \end{aligned}$$

• Il est manifeste que : (4) ⇒ (5).

• Nous avons enfin : (5) ⇒ (2). En effet, supposons qu'il existe deux points distincts P et Q tels que :

$$2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega A})} + \widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega B})}$$

Alors :

$$2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega M})} = [\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega M})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega A})}] + [\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega M})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega B})}]$$

On en déduit immédiatement :

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega A})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega B})} = \hat{0}$$

et donc : $$\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega B})}$$

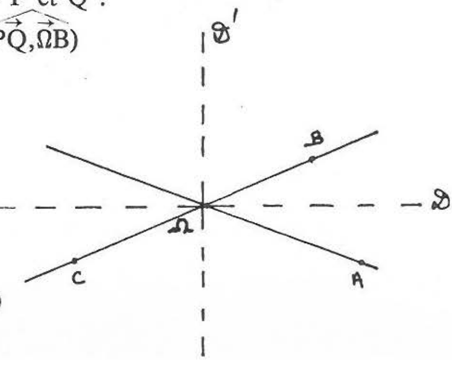
ce qui achève la démonstration.

b) *Caractérisation des bissectrices de deux droites sécantes*

Théorème :

Soit **D** et **D**′ les bissectrices de deux droites (ΩA) et (ΩB), M un point quelconque du plan **P**.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
— M est un point de **D** ∪ **D**′ autre que Ω
— $2\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega M})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega B})}$
— $4\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega M})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})}$
— Quels que soient les points distincts P et Q :
$4\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega M})} = 2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega A})} + 2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega B})}$
— Il existe deux points distincts P et Q :
$4\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega M})} = 2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega A})} + 2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{\Omega B})}$

utilisation d'un vecteur auxiliaire



Démonstration

Soit C un point de (ΩB) ∖ [ΩB] .
Nous avons, pour tout point M de **P** :

$$M \in (\mathbf{D} \cup \mathbf{D}') \setminus \{\Omega\} \iff \begin{cases} \bullet \text{ soit } (\Omega M) \text{ est la bissectrice de } [\Omega A) \text{ et } [\Omega B) \\ \bullet \text{ soit } (\Omega M) \text{ est bissectrice de } [\Omega A) \text{ et } [\Omega C) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \bullet \text{ soit } (\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega M}}) = (\widehat{\vec{\Omega M},\vec{\Omega B}}) \\ \bullet \text{ soit } (\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega M}}) = (\widehat{\vec{\Omega M},\vec{\Omega C}}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \bullet \text{ soit } (\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega M}}) = (\widehat{\vec{\Omega M},\vec{\Omega B}}) \\ \bullet \text{ soit } (\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega M}}) = (\widehat{\vec{\Omega M},\vec{\Omega B}}) + \widehat{\pi} \end{cases}$$

$$\iff 2(\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega M}}) = 2(\widehat{\vec{\Omega M},\vec{\Omega B}})$$

La suite de la démonstration est laissée aux bons soins du lecteur.

II. Angles et cercles

1. Caractérisation d'un cercle dont on connaît le centre et deux points.

Théorème :

Soit, dans le plan **P**, un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux points distincts A et B de ce cercle.
Alors, pour tout point M de **P** :

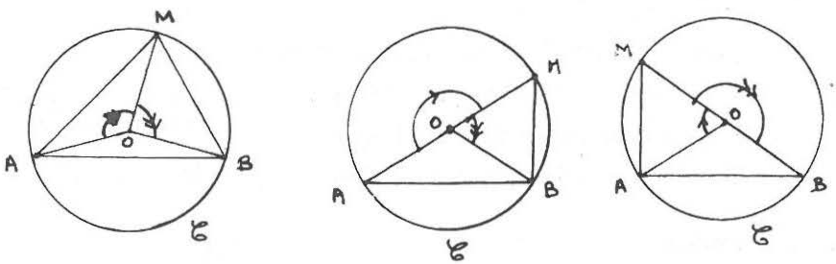
$$M \in \mathscr{C} \setminus \{A,B\} \iff 2(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = (\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) .$$

Démonstration :

1^re^ partie : Etude directe

Supposons M élément de $\mathscr{C} \setminus \{A,B\}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) &= (\widehat{\vec{OA},\vec{OM}}) + (\widehat{\vec{OM},\vec{OB}}) \\ &= [\pi - 2(\widehat{\vec{MO},\vec{MA}}) + [\widehat{\pi} - 2(\widehat{\vec{MB},\vec{MO}}) \text{ (*)} \\ &= 2(\widehat{\vec{MA},\vec{MO}}) + 2(\widehat{\vec{MO},\vec{MB}}) \\ &= 2(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}})\end{aligned}$$

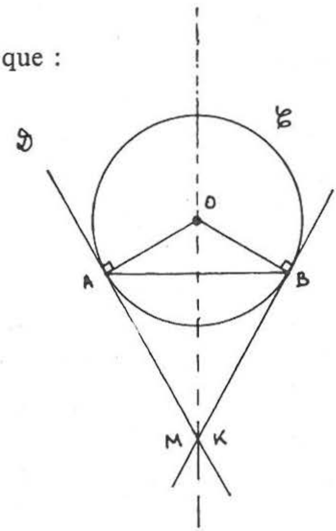


(*) Cette égalité est obtenue, dans le cas général, en utilisant le fait que les triangles OAM et OMB sont isocèles en O. Elle reste encore vraie dans les deux cas particuliers illustrés ci-dessus.

2ᵉ partie : Etude réciproque

Soit M un point de $\mathbf{P} \setminus \{A,B\}$ tel que :

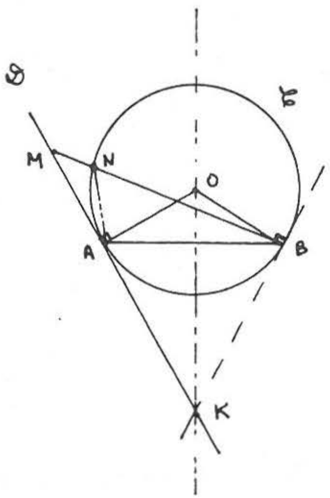
$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.



1° - *M ne peut être un point de (AB)* sinon, on aurait :

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \hat{0}$

ce qui est manifestement faux.



2° - *M ne peut être un point de la tangente $(\mathcal{D})$ à $(\mathcal{C})$ en A*. En effet :

• *pour M=K* (voir figure ci-dessus), on aurait :

$$2(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA}}) = \hat{\pi}$$

car le triangle OAM est rectangle en A, puis :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}) = \widehat{\pi}$$

car A et B sont symétriques par rapport à (OM) et, compte tenu de l'hypothèse, on obtiendrait : $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\pi}$ ... ce qui est faux car M n'est pas un point de]A,B[.

• *pour* $M \in \mathcal{D} \setminus \{A,K\}$, la droite (MB) couperait $\mathcal{C}$ en un point N autre que A et B. On aurait, dans ce cas :

$$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \,(*) = 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \ldots$$ (*) voir étude directe

puis : $2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{MB}})$ ... car $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{NB}$ sont colinéaires.

Par suite, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{NA}$ seraient colinéaires ce qui est manifestement faux car $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ n'ont pas de point commun en dehors du point A.

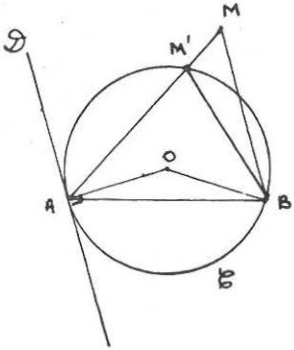
3° - On est maintenant assuré que la droite (MA) coupe $\mathcal{C}$ en un point M' autre que A et B. On a alors :

$$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}}) .$$

On en déduit : $2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{M'B}})$ car les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{M'A}$ sont colinéaires.

Cette dernière égalité prouve que les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{M'B}$ sont aussi colinéaires et donc que les points M et M' sont confondus. Autrement dit, on a :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A,B\} \ldots \quad \text{(c.q.f.d.)}$$



2. **Caractérisation d'un cercle dont on connaît trois points**

Théorème :

Soit, dans le plan **P**, un triangle ABC et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ce triangle.

Alors pour tout point M de **P** :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A,B\} \iff 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$$

Démonstration :

Désignons par O le centre du cercle $\mathcal{C}$.
Nous avons alors :

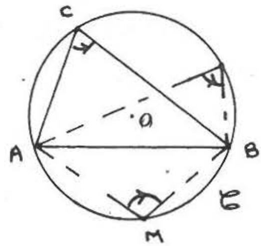
$$(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) .$$

Par suite :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A,B\} \iff 2(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = (\widehat{\vec{OA},\vec{OB}})$$

$$\iff 2(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$$

(c.q.f.d.)



3. **Angles et cocyclicité**

Théorème :

Soit A,B,C,D quatre points du plan **P** ; A, B et C étant non alignés.
Alors :

$$A,B,C,D \text{ cocycliques} \iff 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) = 2(\widehat{\vec{DA},\vec{DB}})$$

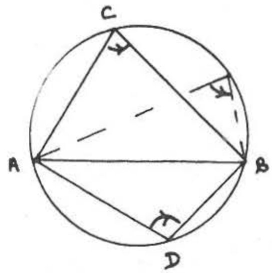
Démonstration :

Désignons par $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Nous avons alors :

A,B,C,D cocycliques

$\iff$ **D**$\in \mathcal{C} \setminus \{A,B\}$

$\iff 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) = 2(\widehat{\vec{DA},\vec{DB}})$



4. **Caractérisation de la tangente en un point à un cercle dont on connaît le centre et un autre point**

Théorème :

Soit, dans le plan **P**, un cercle $\mathcal{C}$ de centre O ; deux points A et B de ce cercle et $\mathcal{D}$ sa tangente au point A.
Alors, pour tout point T de **P** :

$$T \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \iff 2(\widehat{\vec{AT},\vec{AB}}) = (\widehat{\vec{OA},\vec{OB}})$$

Démonstration :

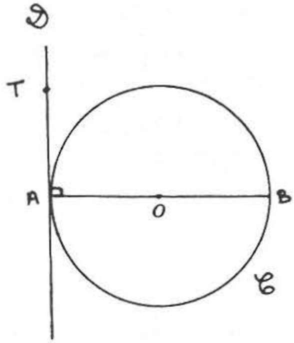
1^re^ partie : Etude directe

Nous allons distinguer deux cas :

1° - *A et B sont diamétralement opposés.* Dans ce cas :

$T \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \iff \overrightarrow{AT} \perp \overrightarrow{AB}$

$\iff 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = \widehat{\pi} = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$



2° - *A et B ne sont pas diamétralement opposés.* Dans ce cas, désignons par H le projeté orthogonal de O sur (AB). On a d'une part :

$2(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AO}}) = \widehat{\pi}$... car le triangle OAH est rectangle en H, ou encore, du fait que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires,

$$2(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) = \widehat{\pi} \ldots \quad \text{(i)}$$

Si $T \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$ alors on a, d'autre part :

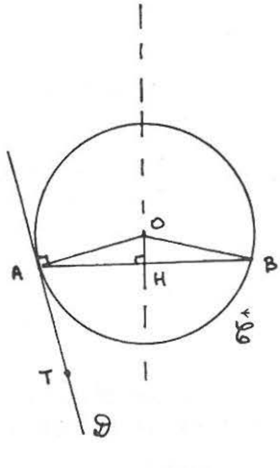
$2[\widehat{(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})}] = 2(AT,AO) = \widehat{\pi}$ ou encore :

$$2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) = \widehat{\pi} \ldots \quad \text{(ii)}$$

Des égalites (i) et (ii) on déduit :

$2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}})$ (*) $= (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ ...

(*) car (OH) est bissectrice de [OA) et [OB)



Ainsi se trouve établie la proposition

"Pour tout point T de **P**, $M \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

2^e partie : Etude réciproque

Soit T un point de $\mathbf{P}\setminus\{A\}$ tel que : $2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}})=(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

Désignons par C un point de $\mathcal{D}$ autre que A. Nous avons alors :

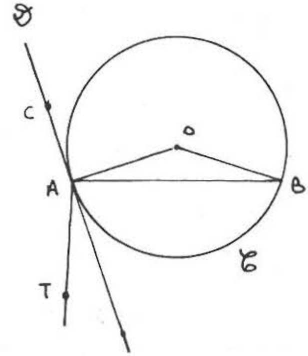
$2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})=(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}})$

(voir proposition ci-dessus).

L'égalité $2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})=2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}})$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AT}$ sont colinéaires. Les points A, C et T sont donc alignés. Autrement dit :

$$T \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$$

ce qui achève la démonstration.



5. **Caractérisation de la tangente en un point à un cercle dont on connaît deux autres points**

Théorème :

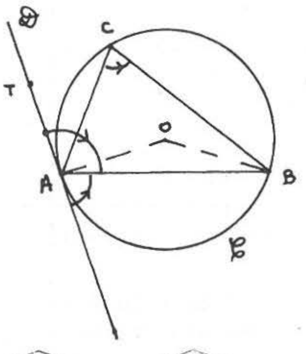
Soit, dans le plan $\mathbf{P}$, un triangle ABC ; $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et $\mathcal{D}$ la tangente en A à $\mathcal{C}$.
Alors, pour tout point T de $\mathbf{P}$,

$$T\in \mathcal{D}\setminus\{A\} \iff 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$$

Démonstration :

Désignons par O le centre du cercle $\mathbf{C}$. Nous avons alors :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) .$$

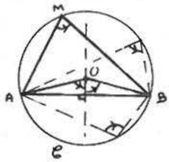
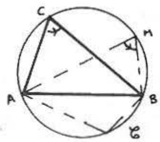
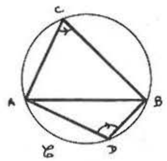
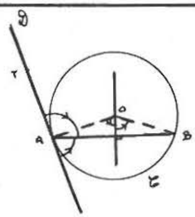
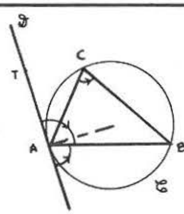
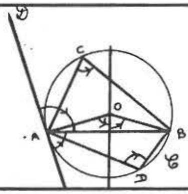


Par suite :

$$M\in \mathcal{D}\setminus\{A\} \iff 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$$

$$\iff 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \ldots \text{(c.q.f.d.)}$$

6. Tableau des principaux résultats

Les données : Les points O,A,B ; le cercle $\mathcal{C}$. *Le résultat :* $M \in \mathcal{C} \setminus \{A,B\} \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$	
Les données : Les points A,B,C ; le cercle $\mathcal{C}$. *Le résultat :* $M \in \mathcal{C} \setminus \{A,B\} \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$	
Les données : Le quadrilatère A,B,C,D. *Le résultat :* A,B,C,D cocycliques $\Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$	
Les données : Les points O,A,B ; le cercle $\mathcal{C}$, la tangente $\mathcal{D}$ en A à $\mathcal{C}$. *Le résultat :* $T \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$	
Les données : Les points A,B,C ; le cercle $\mathcal{C}$, la tangente $\mathcal{D}$ en A à $\mathcal{C}$. *Le résultat :* $T \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$	
Configuration des "angles à doubles égaux" Tous les angles représentés dans la figure ci-contre ont des *doubles égaux.*	

III. Problèmes résolus

Problème 1

Montrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à chacun de ses trois côtés appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.

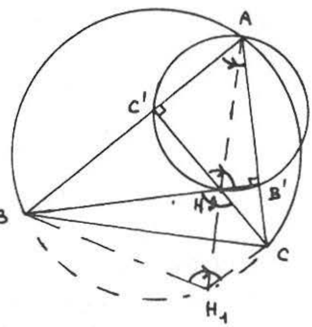
Résolution :

Soit un triangle (ABC), H son orthocentre. A priori, aucun côté de ce triangle ne jouant un rôle particulier, il suffit d'établir que le symétrique H_1 de H par rapport à (BC) appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC).

1.*Cas général : le triangle (ABC) est non rectangle*

Dans ce cas, désignons par B′ et C′ les projetés orthogonaux de B et C sur (CA) et (AB) respectivement.

Il est clair que B′ et C′ appartiennent au cercle de diamètre [A,H].



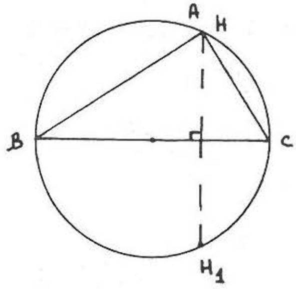
Nous avons alors :

$$
\begin{array}{rcll}
2(\widehat{\overrightarrow{H_1B},\overrightarrow{H_1C}}) & = & -2(\widehat{\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}}) \ldots & \text{effet de } s_{(BC)} \\
 & = & 2(\widehat{\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB}}) & \\
 & = & 2(\widehat{\overrightarrow{HC'},\overrightarrow{HB'}}) \ldots & \text{colinéarité de } \begin{array}{l}\overrightarrow{HC} \text{ et } \overrightarrow{HC'} \\ \overrightarrow{HB} \text{ et } \overrightarrow{HB'}\end{array} \\
 & = & 2(\widehat{\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AB'}}) \ldots & \text{cocyclicité de A, H, C', B'} \\
 & = & 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \ldots & \text{colinéarité de } \begin{array}{l}\overrightarrow{AC'} \text{ et } \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AB'} \text{ et } \overrightarrow{AC}\end{array}
\end{array}
$$

On en déduit : A, H_1, B et C sont cocycliques. Autrement dit, H_1 appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC).

2. ***Cas particuliers***

a) *Le triangle (ABC) est rectangle en A*



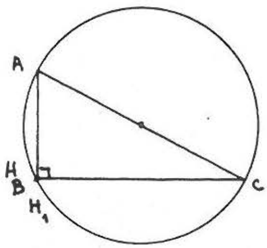
Dans ce cas, A et H sont confondus et situés sur le cercle Γ de diamètre [B,C]. Par suite :

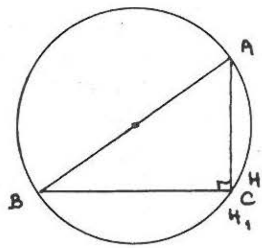
$$s_{(BC)}(H) \in \Gamma .$$

Autrement dit : H_1 appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC).

b) *Le triangle (ABC) est rectangle en B ou en C*

Il est alors trivial que H_1 appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC) puisque H et H_1 sont confondus avec B ou avec C.





Commentaire

L'emploi des angles dans la résolution d'un problème de géométrie plane présente souvent quelques petits inconvénients qu'il faut savoir accepter. En effet, il arrive que l'un ou l'autre des angles, qu'on fait intervenir dans cette résolution soit, lors d'une situation particulière, non défini parce qu'un des vecteurs qui entre dans son libellé est nul. C'est, par exemple, ce qui se passe dans l'exercice précédent lorsque le triangle (ABC) est rectangle en A, B ou C.

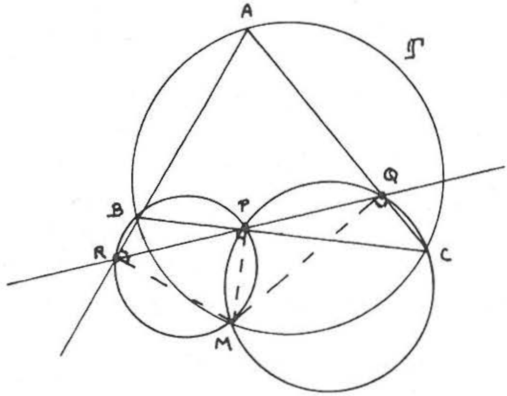
Pour être rigoureux on doit donc, en marge du cas général, traiter à part les cas particuliers dus à cette anomalie. On verra, à l'usage, que leur étude ne présente aucune difficulté.

Problème 2

Soit, dans un plan **P**, un triangle (ABC), M étant un point quelconque du cercle Γ circonscrit à ce triangle, on désigne respectivement par P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur (BC), (CA), (AB).
Montrer que les points P, Q, R sont alignés.

Comment chercher :

On commence par faire une figure. On trace donc un cercle Γ puis un triangle (ABC) non isocèle et non rectangle inscrit dans ce cercle. On choisit ensuite un point M sur Γ de sorte que les différents points cités dans l'énoncé soient distincts.



Etablir que P, Q, R sont alignés revient à montrer, par exemple, que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires ; autrement dit, à prouver que :

$$2\widehat{(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})} = \hat{0} .$$

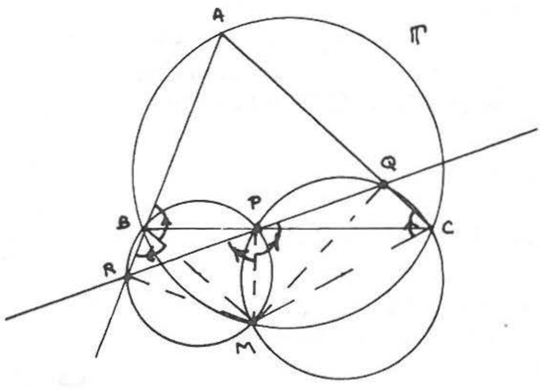
Cette dernière proposition peut encore être remplacée par :

$$2\widehat{(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PQ})} = 2\widehat{(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR})}$$

qui lui est théoriquement équivalente.

Au vu de la figure ci-dessus, il apparaît que les points

$$\left.\begin{array}{ll} \text{M, P, Q, C} & \text{d'une part} \\ \text{M, P, R, E} & \text{d'autre part} \end{array}\right\} \text{ sont cocycliques.}$$



On a donc :

- $2(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PQ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CQ}})$
  $= 2(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}})$ ... colinéarité de $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CA}$
- $2(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BR}})$
  $= 2(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}})$ ... colinéarité de $\overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{BA}$
- $2(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}})$ ... cocyclicité de C, B, A, M.

On en déduit alors :

$$2(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PQ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}}) \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

Reste encore à remarquer que tous les angles (ou plus précisément ces doubles d'angle) sont définis dès lors que le point M est distinct de B, C et A'... A' étant le point de Γ diamétralement opposé à A.

On est maintenant en mesure de rédiger une solution.

Résolution (on trace la figure ci-dessus)

Désignons par A' le point de Γ diamétralement opposé à A.

1° - *Cas général :* $M \in \Gamma \setminus \{B, C, A'\}$

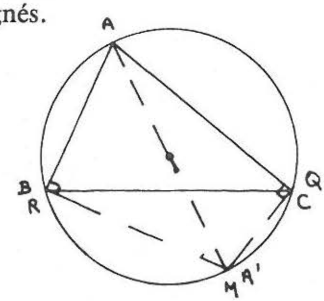
Nous avons, dans ce cas :

- $2(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PQ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CQ}})$ ... cocyclicité de M, P, Q, C
  $= 2(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}})$ ... colinéarité de $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CA}$
- $2(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BR}})$ ... cocyclicité de M, P, R, B
  $= 2(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}})$ ... colinéarité de $\overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{BA}$
- $2(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}})$ ... cocyclicité de C, B, A, M.

On en déduit alors :

$$2(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PQ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}})$$

puis : $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires.
Autrement dit : les points P, Q, R sont alignés.



2° - *Cas particuliers*

a) $M = B$. Dans ce cas, on a : P = R . Les points P, Q, R sont donc alignés.

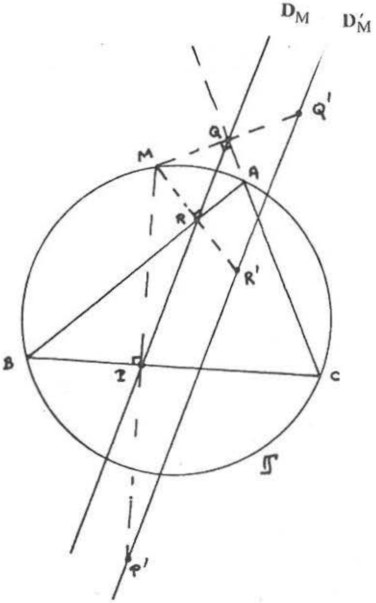
b) $M = C$. Dans ce cas, on a : P = Q . Les points P, Q, R sont donc encore alignés.

c) $M = A'$. Dans ce cas, on a : $Q = C$ et $R = B$ et $P \in (BC)$. Les points P, Q, R sont donc toujours alignés.

Nota : La droite $\mathbf{D}_M$ déterminée par deux des trois points P, Q, R est appelée droite de Simson du triangle (ABC) relative au point M.

Remarque :

Désignons par P′, Q′, R′ les symétriques de M par rapport à (BC), (CA), (AB).



Les points P′, Q′, R′ sont respectivement les images des points P, Q, R par l'homothétie de centre M et de rapport 2. Par suite, lorsque M appartient au cercle Γ :

$$\left.\begin{array}{ll} P, Q, R & \text{d'une part} \\ P', Q', R' & \text{d'autre part} \end{array}\right\} \text{ sont alignés}$$

La droite $\mathbf{D}'_M$ déterminée par deux des trois points P′, Q′, R′ est appelée *droite de Steiner du triangle (A,B,C) relative au point M.* On a évidemment :

$$\mathbf{D}_M \;//\; \mathbf{D}'_M .$$

Problème 3

Soit un cercle $\mathcal{C}$, [A,B] un diamètre de ce cercle ; $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles coupant la droite (AB) en A et B respectivement et M un point de $\mathcal{D} \setminus \{A,B\}$.

On désigne par I, J, K les projetés orthogonaux de M sur les droites (AB), $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Montrer que le triangle IJK est rectangle en I.

Solution :

Notons d'abord que :
a) les points M, J, K sont alignés ;
b) les points M, I, A, J appartiennent au cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [A,M] ;
c) les points M, I, B, K appartiennent au cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre [B,M].

Ceci étant :

1° - Lorsque $M \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, nous avons : figures 1 et 2

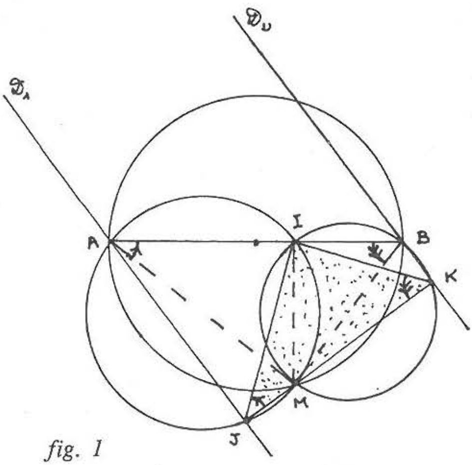


fig. 1

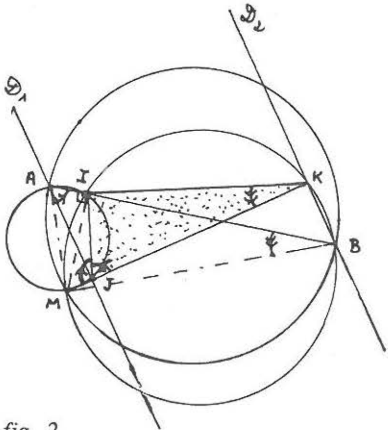


fig. 2

$$\bullet\ 2(\widehat{\overrightarrow{JK},\overrightarrow{JI}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{JM},\overrightarrow{JI}}) \quad \text{... voir (a)}$$
$$= 2(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI}}) \quad \text{... voir (b)}$$
$$= 2(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}}) \quad \text{... car } \overrightarrow{AB} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AI}$$

$$\bullet\ 2(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KM}}) \quad \text{... voir (a)}$$
$$= 2(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BM}}) \quad \text{... voir (c)}$$
$$= 2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}}) \quad \text{... car } \overrightarrow{BA} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{BI}$$

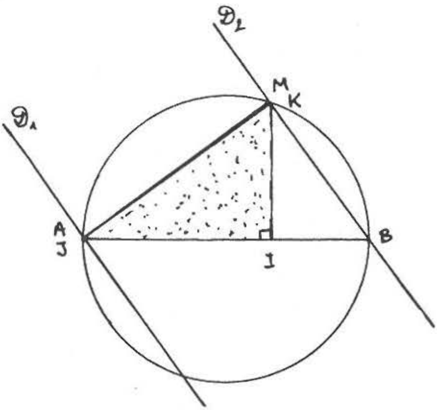
On en déduit :

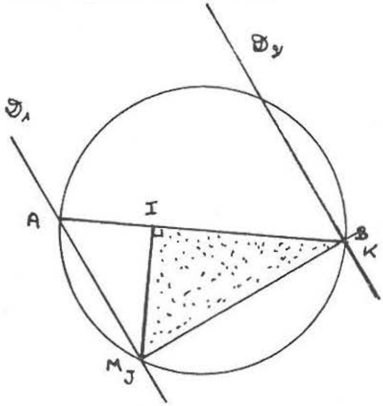
$$2(\widehat{\overrightarrow{JK},\overrightarrow{JI}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}}) \ (*) = \widehat{\pi}$$

(*) car le triangle AMB est rectangle en M.

L'égalité $2\widehat{(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{JI})} + 2\widehat{(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KM})} = \widehat{\pi}$ nous prouve alors que le triangle IJK est rectangle en I.

2° - Lorsque $M \in \mathcal{D}_1$ ou $M \in \mathcal{D}_2$, le triangle IJK est trivialement rectangle en I comme le montrent les deux figures suivantes.





Problème 4

Soit un triangle ABC non rectangle, H son orthocentre, A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C. Montrer que les droites (A_1H), (B_1H), (C_1H) sont des bissectrices du triangle $A_1B_1C_1$.

Solution :

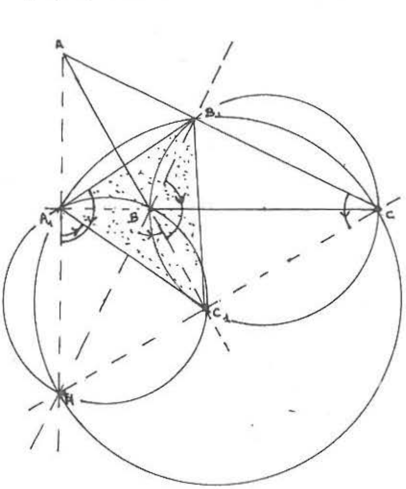
Nous avons :

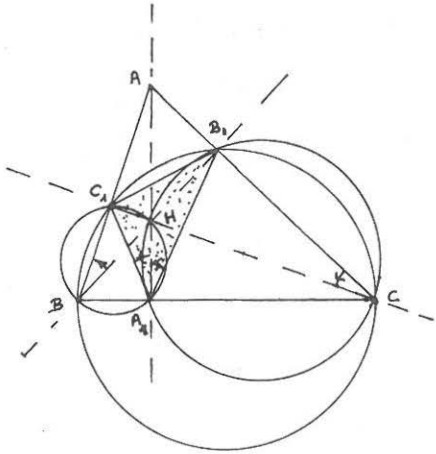
$$\begin{aligned}
2\widehat{(\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1H})} &= 2\widehat{(\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{CH})} && \text{... car } A_1,\ C,\ B_1,\ H \text{ sont cocycliques}\\
&= 2\widehat{(\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{CC_1})} && \text{... car } \overrightarrow{CC_1} \text{ est colinéaire à CH}\\
&= 2\widehat{(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC_1})} && \text{... car } C,\ B,\ B_1,\ C_1 \text{ sont cocycliques}\\
&= 2\widehat{(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC_1})} && \text{... car } \overrightarrow{BH} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{BB_1}\\
&= 2\widehat{(\overrightarrow{A_1H},\overrightarrow{A_1C_1})} && \text{... car } B,\ B_1,\ H \text{ et } C_1 \text{ sont cocycliques}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que (A_1H) est *une* bissectrice du triangle $A_1B_1C_1$.

On établirait de façon analogue que (B_1H) et (C_1H) sont aussi des bissectrices de ce triangle.

Ainsi les trois hauteurs du triangle ABC sont *des* bissectrices du triangle $A_1B_1C_1$ (c.q.f.d.).





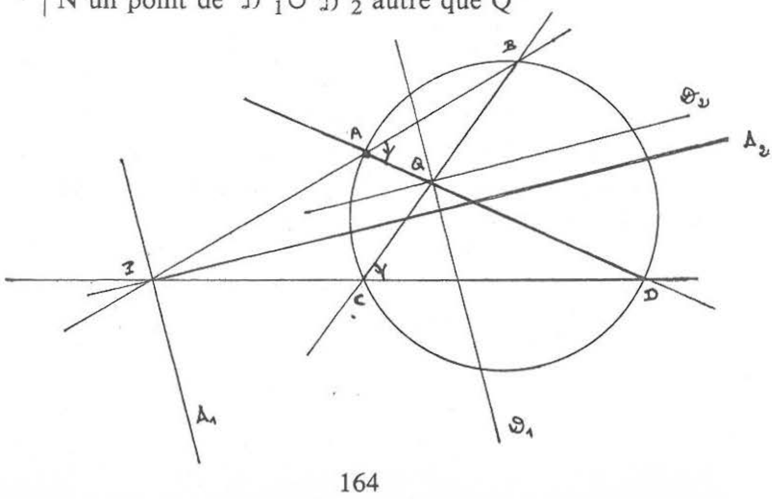
Problème 5

Soit quatre points A,B,C,D distincts, cocycliques et tels que les droites (AB) et (CD) se coupent en P ; les droites (AD) et (BC) en Q.

Montrer que les bissectrices Δ_1 et Δ_2 des droites (PA) et (PC) et celles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ des droites (QA) et (QC) sont deux à deux parallèles ou orthogonales.

Solution :

Soit | M un point de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ autre que P
| N un point de $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ autre que Q



Nous avons alors :

$$2(\widehat{\vec{PQ},\vec{PA}}) = 2(\widehat{\vec{PQ},\vec{QA}}) + 2(\widehat{\vec{QA},\vec{PA}})$$
$$2(\widehat{\vec{PQ},\vec{PC}}) = 2(\widehat{\vec{PQ}\ \vec{QC}}) + 2(\widehat{\vec{QC},\vec{PC}})$$ Relation de Chasles

Compte tenu de la caractérisation des bissectrices de deux droites, on obtient par addition membre à membre :

$$4(\widehat{\vec{PQ},\vec{PM}}) = 4(\widehat{\vec{PQ},\vec{QN}}) \qquad \text{(e)}$$

En effet :

$$2(\widehat{\vec{QC},\vec{PC}}) = 2(\widehat{\vec{CB},\vec{CD}}) \quad \text{... colinéarité de} \begin{cases} \vec{QC} \text{ et } \vec{CB} \\ \vec{PC} \text{ et } \vec{CD} \end{cases}$$
$$= 2(\widehat{\vec{AB},\vec{AD}}) \quad \text{... cocyclicité de A,B,C,D}$$
$$= 2(\widehat{\vec{PA},\vec{QA}}) \quad \text{... colinéarité de} \begin{cases} \vec{AB} \text{ et } \vec{PA} \\ \vec{AD} \text{ et } \vec{QR} \end{cases}$$
$$= -2(\widehat{\vec{QA},\vec{PA}})$$

de sorte que : $2(\widehat{\vec{QA},\vec{PA}}) + 2(\widehat{\vec{QC},\vec{PC}}) = \hat{0}$.

De l'égalité (e) on déduit immédiatement :

$$4(\widehat{\vec{PM},\vec{QN}}) = \hat{0}$$

puis :

- $2(\widehat{\vec{PM},\vec{QN}}) = \hat{0}$ ... ce qui montre que (PM)//(QN)

ou

- $2(\widehat{\vec{PM},\vec{QN}}) = \hat{\pi}$ ... ce qui montre que (PM) $\perp$ (QN)

Ainsi les droites Δ_1 et Δ_2 d'une part, et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'autre part, sont parallèles ou orthogonales (c.q.f.d.).

Problème 6

Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles sécants, A et B leurs points communs ; Δ et Δ' deux droites passant par A et B respectivement et distinctes de la droite (AB).

On désigne par P et Q les points d'intersection de Δ avec $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, par P$'$ et Q$'$ les points d'intersection de Δ' avec $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Montrer que les droites (PP$'$) et (QQ$'$) sont parallèles dans les cas suivants :

1) les points P, Q, P$'$, Q$'$, A et B sont distincts (cas général) ;
2) l'une des droites Δ ou Δ' est tangente à l'un des cercles $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$, par exemple Δ est tangente à $\mathcal{C}_1$;
3) les deux droites Δ et Δ' sont l'une tangente à $\mathcal{C}_1$, l'autre tangente à $\mathcal{C}_2$, par exemple Δ est tangente à $\mathcal{C}_1$;
4) les deux droites Δ et Δ' sont tangentes au même cercle, par exemple à $\mathcal{C}_1$;

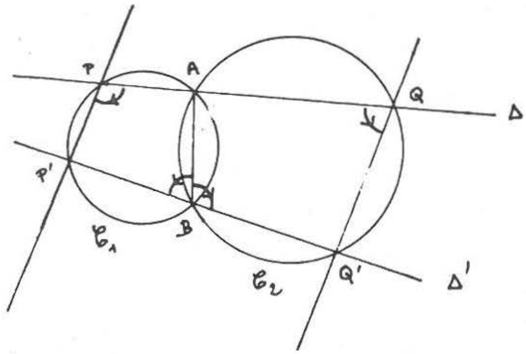
5) deux des points P et P′ ou Q et Q′ sont confondus, par exemple P et P′. Dans ce cas, on convient que (PP′) désigne la tangente en P au cercle $\mathcal{C}_1$.

Solution :

1) Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned}
2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PP'}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PP'}}) && \text{... car } \overrightarrow{PA} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{PQ}\\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BP'}}) && \text{... car P, B, A, P' cocycliques}\\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BQ'}}) && \text{... car } \overrightarrow{BQ'} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{BP'}\\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car B, Q, A, Q' cocycliques}\\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car } \overrightarrow{PQ} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{QA}
\end{aligned}$$

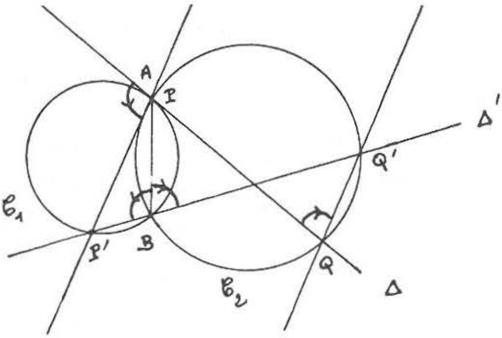
L'égalité $2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PP'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QQ'}})$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{PP'}$ et $\overrightarrow{QQ'}$ sont colinéaires et donc que les droites (PP′) et (QQ′) sont parallèles.



2) Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned}
2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PP'}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BP'}}) && \text{... car } \Delta \text{ est tangente en P à } \mathcal{C}_1\\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BQ'}}) && \text{... car } \overrightarrow{BQ'} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{BP'}\\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car B, Q, P, Q' cocycliques}\\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car } \overrightarrow{PQ} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{QP}
\end{aligned}$$

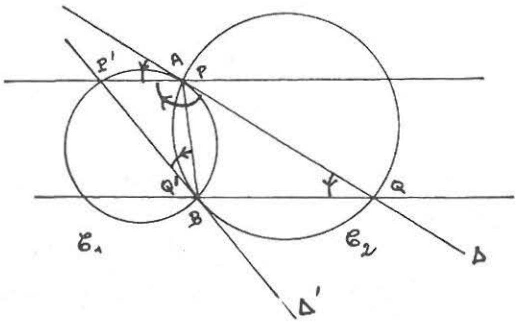
Nous obtenons la même égalité que dans le cas précédent, ce qui nous conduit à la même conclusion.



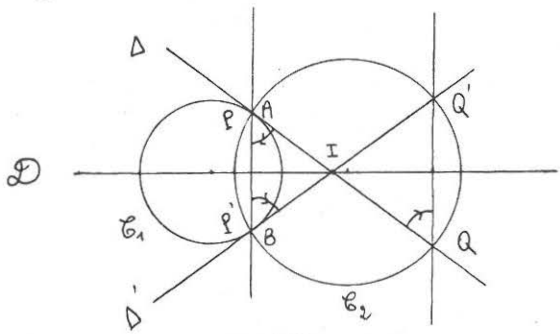
3) Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned} 2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PP'}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BP'}}) && \text{... car } \Delta \text{ est tangente en P à } \mathcal{C}_1 \\ &= 2(\widehat{\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car } \Delta \text{ est tangente en Q' à } \mathcal{C}_2 \\ &= 2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car } \overrightarrow{PQ} \text{ est colinéaires à } \overrightarrow{QP} \end{aligned}$$

ce qui montre que les droites (PP′) et (QQ′) sont parallèles.



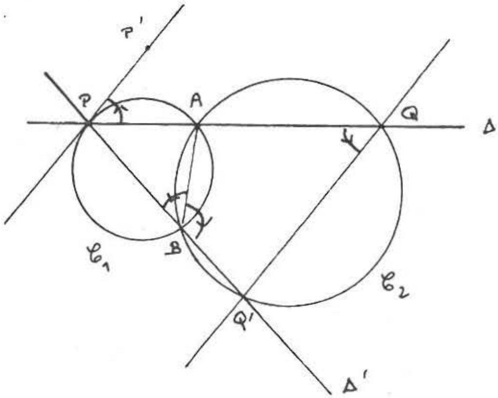
4) Dans ce cas, la médiatrice $\mathcal{D}$ de [A,B] est axe de symétrie de la figure. Les points P et P′ d'une part, Q et Q′ d'autre part, sont homologues dans la réflexion $S_{\mathcal{D}}$. Il s'ensuit que les droites (PP′) et (QQ′) sont parallèles.



5) a) Lorsque Δ' est sécante à $\mathcal{C}_2$, nous avons, en désignant par P' un point autre que P de la tangente en P à $\mathcal{C}_1$.

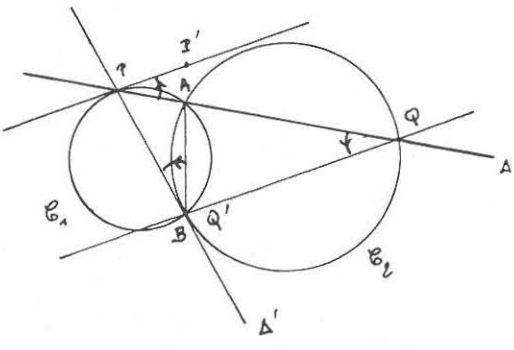
$$
\begin{aligned}
2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PP'}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PP'}}) \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BP}}) && \text{... car(PP') est tangente à } \mathcal{C}_1 \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BQ'}}) && \text{... car } \overrightarrow{BQ'} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{BP} \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car B, Q, A, Q' cocycliques} \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car } \overrightarrow{PQ} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{QA}
\end{aligned}
$$

Egalité qui prouve que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles.



b) Lorsque Δ' est tangente à $\mathcal{C}_2$, nous avons, en conservant les notations précédentes :

$$
\begin{aligned}
2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PP'}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PP'}}) && \text{... car } \overrightarrow{PA} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{PQ} \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{Q'A},\overrightarrow{BP}}) && \text{... car (PP') est tangente en P à } \mathcal{C}_1 \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QQ'}}) && \text{... car } \Delta' \text{ est tangente en Q' à } \mathcal{C}_1 \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QQ'}})
\end{aligned}
$$



Egalité qui prouve que les droites (PP′) et (QQ′) sont parallèles.

Commentaire :

Pour établir le parallélisme des droites (PP′) et (QQ′), on recherche sur la figure correspondant à chaque cas étudié une suite d'angles qui, par égalités successives de leurs doubles, nous conduit à la conclusion :

$$2(\widehat{\vec{PQ},\vec{PP'}}) = 2(\widehat{\vec{PQ},\vec{QQ'}})$$

On peut ainsi, en représentant de tels angles, concevoir des démonstrations plus expéditives que celles rédigées ci-dessus. Ici on s'est efforcé de marquer les différentes étapes à observer pour faire un usage strict des résultats précédemment acquis. Il nous paraît souhaitable, dans un premier temps, de demander aux élèves des rédactions de ce type de façon à leur faire bien assimiler le maniement des angles à "doubles égaux".

Plus tard, on pourra envisager des solutions plus concises. En particulier, la suivante :

Désignons par $\vec{\delta}$, $\vec{\delta}'$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ des vecteurs directeurs des droites $\triangle$, $\triangle'$, (PP′), (QQ′)... en convenant que :

$\vec{p}$ est un vecteur directeur de la tangente en P à $\mathcal{C}_1$ lorsque $P = P'$

$\vec{q}$ est un vecteur directeur de la tangente en Q à $\mathcal{C}_2$ lorsque $Q = Q'$

On a alors, quel que soit le cas de figure envisagé :

$$2(\widehat{\vec{\delta},\vec{p}}) = 2(\widehat{\vec{AB},\vec{\delta}'}) = 2(\widehat{\vec{\delta},\vec{q}})$$

ce qui prouve que... etc.

Le fait que le *double d'un angle* ne change pas, quand on remplace un vecteur entrant dans son libellé par un vecteur colinéaire, permet d'attribuer un vecteur directeur *non fixé* à chaque droite intervenant dans le problème. On n'a plus alors à rendre compte de ces changements de vecteurs, ce qui allège d'autant la rédaction de la solution.

Problème 7

Soit un triangle ABC, son cercle circonscrit $\mathcal{C}$; M un point de autre que B et C, P un point n'appartenant pas à $\mathcal{C} \cup (MB) \cup (MC)$.

On désigne par :

$\mathcal{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle CMP

$\mathcal{C}_2$ le cercle circonscrit au triangle BMP

Q le point d'intersection, si possible autre que C, de (AC) et $\mathcal{C}_1$

R le point d'intersection, si possible autre que B, de (AB) et $\mathcal{C}_2$

A′ le pont d'intersection, si possible autre que M, de (MP) et $\mathcal{C}$.

1) Montrer que les droites (PQ) et (PR) sont parallèles...
- soit à la droite (AA′) lorsque $A' \neq A$
- soit à la tangente à $\mathcal{C}$ en A lorsque $A' = A$.

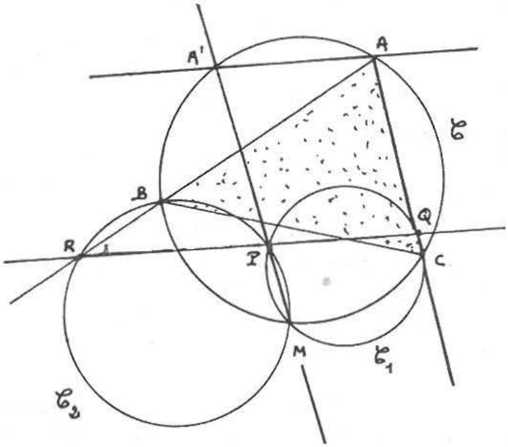
Que peut-on en déduire quant aux points P, Q, R ?

2) Examiner le cas particulier où P est le projeté orthogonal de M sur (BC). Que représente alors la droite définie par deux des trois points P, Q, R ?

3) On désigne par M_1 le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à M. Montrer que les droites de Simson du triangle ABC relatives aux points M et M_1 sont orthogonales.

Solution :

1) Le résultat du problème 6 appliqué
a) aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sécants en B et M
b) aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2$ sécants en C et M



nous prouve que les droites

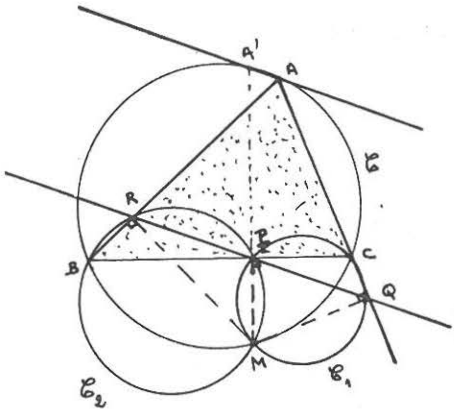
$$\left.\begin{array}{l}(PQ) \text{ et } (AA') \\ (PR) \text{ et } (AA')\end{array}\right\} \text{ sont parallèles}$$

en convenant que (AA′) désigne la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$ lorsque $A' = A$. Les points P, Q, R sont donc alignés.

2) Lorsque P est le projeté orthogonal de M sur (BC), le cercle $\mathcal{C}_1$ a pour diamètre [M,C]. Le point Q est alors le projeté orthogonal de M sur (CA).

On montre de même que R est le projeté orthogonal de M sur (AB). La droite passant par les points P, Q, R est alors dans ce cas la droite de Simson du triangle ABC relative au point M (*).

(*) La droite de Simson d'un triangle apparaît donc comme un cas particulier de celle étudiée à la question 1.



3) Désignons par P_1 le projeté orthogonal de M_1 sur (BC) et par A_1 le point d'intersection de (M_1P_1) et $\mathcal{C}$. Par la symétrie de centre O (centre de $\mathcal{C}$), la droite (MP) a pour image la droite parallèle à (MP) passant par M_1. Autrement dit, on a :

$$S_0[(MP)] = (M_1P_1) .$$

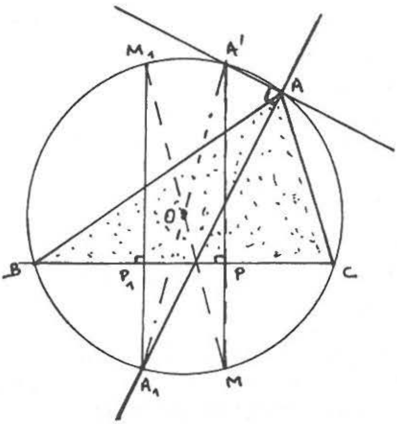
Il s'ensuit que :

$$S_0[(MP) \cap \mathcal{C}\ ] = S_0[(MP)] \cap S_0(\mathcal{C}\ ) = (M_1P_1) \cap \mathcal{C}$$

ce qui montre que $A_1 = S_0(A')$.

Le triangle A_1AA' est donc rectangle en A. En d'autres termes, les droites (AA') et (AA_1) sont orthogonales.

Par suite, les droites de Simson du triangle ABC relatives aux points M et M_1 étant respectivement parallèles à (AA') et (AA_1) sont aussi orthogonales (c.q.f.d.).



IV. Ligne de niveau $(A,B)_{\widehat{\alpha}}$

1. Définition :

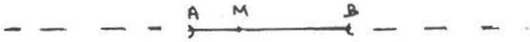
Etant donné deux points distincts A et B du plan **P** et un angle $\widehat{\alpha}$. On appelle *ligne de niveau* $\widehat{\alpha}$ *pour le bipoint (A,B)* l'ensemble noté $(A,B)_{\widehat{\alpha}}$ des points M de $\mathbf{P} \setminus \{A,B\}$ tels que

$$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha} \ .$$

Ainsi, par exemple :

- $(A,B)_{\widehat{0}} = (AB) \setminus [A,B]$

- $(A,B)_{\widehat{\pi}} =]A,B[$



2. Mise au point

Pour aborder la détermination de $(A,B)_{\widehat{\alpha}}$ lorsque $\widehat{\alpha}$ n'est ni nul, ni plat, il convient de préciser ce qui doit être connu concernant les demi-plans et les disques.

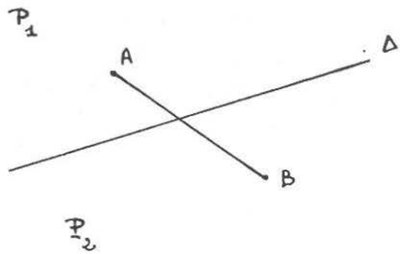
a) *Sur les demi-plans*

On admet que :

Toute droite Δ du plan **P** partage celui-ci en deux parties *convexes* $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$, appelées *demi-plans ouverts de frontière* Δ, satisfaisant à :

1 - $\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 = \phi$
et $\mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2 = \mathbf{P} \setminus \Delta$

2 - Pour tout point A de $\mathbf{P}_1$ et tout point B de $\mathbf{P}_2$, le segment]A,B[et la droite Δ ont en commun un point et un seul.



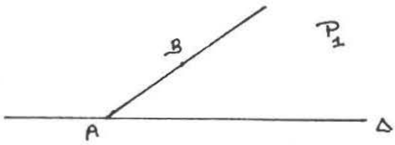
Les ensembles $\mathbf{P}_1 \cup \Delta$ et $\mathbf{P}_2 \cup \Delta$ sont appelés demi-plans *fermés*.

On considère le résultat suivant comme acquis.

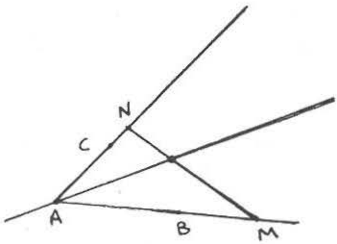
Soit $\mathbf{P}_1$ un demi-plan ouvert (fermé) de frontièreΔ et A un point de $\mathbf{P}_1$. Alors l'image de $\mathbf{P}_1$ par une réflexion S est le demi-plan ouvert (fermé) de frontière $S(\Delta)$ contenant le point $S(A)$.

On établit alors facilement les deux propriétés suivantes :

Etant donné un demi-plan fermé $\mathbf{P}_1$ de frontière Δ, toute demi-droite [AB) telle que $A \in \Delta$ et $B \in \mathbf{P}_1$ est contenue dans $\mathbf{P}_1$.



Soit M et N deux points distincts appartenant respectivement à deux demi-droites distinctes [AB) et [AC).
Alors le segment]M,N[et la bissectrice de ces demi-droites ont en commun un point et un seul.



b) *Sur les disques*

Sont connues :

- la convexité du disque
- l'intersection d'une droite et d'un disque.

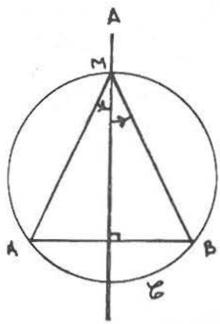
3. Deux résultats importants

Théorème 1 :

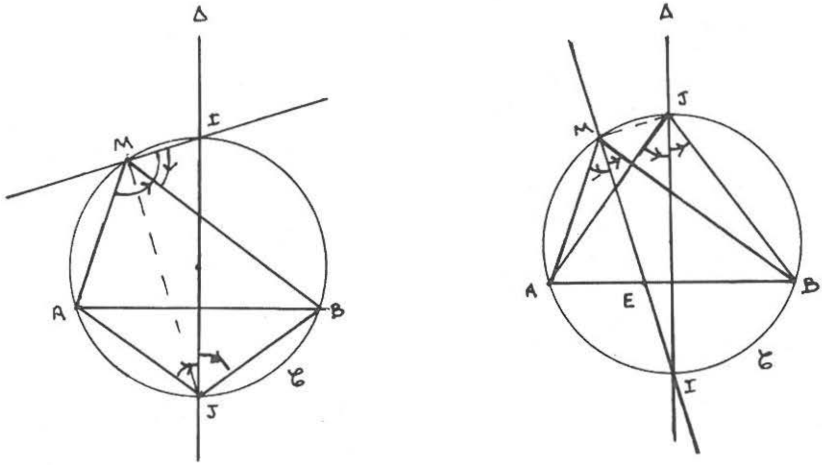
Soit A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$, Δ la médiatrice de [A,B], M un point quelconque de $\mathcal{C} \setminus \{A,B\}$.
Alors la bissectrice des demi-droites [MA) et [MB) passe par le point de $\Delta \cap \mathcal{C}$ n'appartenant pas au demi-plan de frontière (AB) dont M est élément.

Démonstration :

Observons d'abord que la propriété annoncée est trivialement vérifiée lorsque $M \in \Delta$.



Supposons maintenant que $M \notin \Delta$. Soit I et J les points communs à $\mathcal{C}$ et Δ. Nous avons : figures 1 et 2



d'une part :

$$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MI}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JI}}) \quad \text{... car M, J, A, I sont cocycliques}$$

$$2(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JB}}) \quad \text{... car M, J, I, B sont cocycliques}$$

d'autre part :

$(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JI}}) = (\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JB}})$ ... car Δ est bissectrice des demi-droites [JA) et [JB) .

Il s'ensuit que :

$$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MI}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MB}}) \ ...$$

ce qui montre que le point I appartient à l'une ou à l'autre des bissectrices $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des *droites* (MA) et (MB)..

Comme les droites (MI) et (MJ) sont orthogonales, on est assuré que le point J appartient à celle des deux bissectrices qui ne passe pas par I.

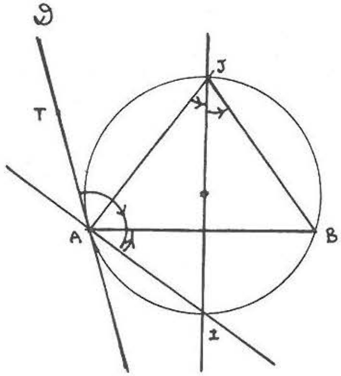
Convenons alors de désigner par $\mathcal{B}$ *la* bissectrice des *demi-droites* [MA) et [MB) et par I le point de $\Delta \cap \mathcal{C}$ qui lui appartient. On sait que $\mathcal{B}$ a, avec le segment]A,B[, un point commun E et un seul (voir figure 2). Ce point E de]A,B[est élément du disque ouvert $\mathcal{C}$. Donc on a : $E \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ c'est-à-dire $E \in]M,I[$. Ainsi se trouve établi que le point M et le point I commun à $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et Δ sont situés de part et d'autre de la droite (AB) (c.q.f.d.).

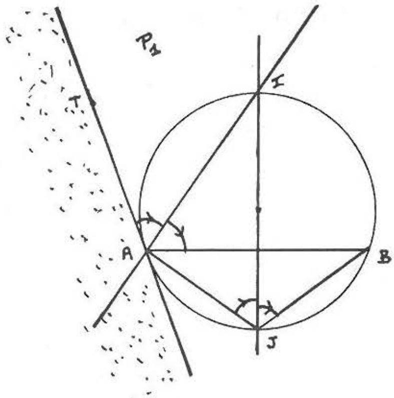
Théorème 2 :

Soit A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$, Δ la médiatrice de [A,B], $\mathcal{D}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point A, T un point quelconque de $\mathcal{D} \setminus \{A\}$.
Alors la bissectrice des demi-droites [AT) et [AB) passe par le point de $\Delta \cap \mathcal{C}$ appartenant au demi-plan de frontière (AB) dont T est élément.

Démonstration :

Soit I et J les points communs à $\mathcal{C}$ et Δ. Nous avons : figures 1 et 2





d'une part :

$2\widehat{(\vec{AI},\vec{AI})} = 2\widehat{(\vec{JA},\vec{JI})}$ ... car $T \in \mathcal{D}$

$2\widehat{(\vec{AI},\vec{AB})} = 2\widehat{(\vec{JI},\vec{JB})}$ ... car A, J, I, B sont cocycliques

d'autre part :

$\widehat{(\vec{JA},\vec{JI})} = \widehat{(\vec{JI},\vec{JB})}$ ... car Δ est bissectrice des demi-droites [JA) et [JB).

Il s'ensuit que :

$$2\widehat{(\vec{AT},\vec{AI})} = 2\widehat{(\vec{AI},\vec{AB})} \ldots$$

ce qui montre que le point I appartient à l'une ou à l'autre des bissectrices $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des *droites* (AT) et (AB).

Comme les droites (AI) et (AJ) sont orthogonales, on est assuré que le point J appartient à celle de ces deux bissectrices qui ne passe par par I.

Convenons alors de désigner par $\mathcal{B}$ *la* bissectrice des *demi-droites* [AT) et [AB) et par I le point de $\Delta \cap \mathcal{C}$ qui lui appartient. Désignons encore par $\mathbf{P}_1$ le demi-plan fermé de frontière $\mathcal{D}$ contenant I et par S la réflexion de droite $\mathcal{B}$. Nous avons $S(\mathcal{D}) = (AB)$ et $S(I) = I$ de sorte que $S(\mathbf{P}_1)$ est le demi-plan fermé de frontière (AB) contenant I.

Notons maintenant que *B est élément de* $\mathbf{P}_1$... sinon le segment [I,B] aurait un point commun E avec la droite $\mathcal{D}$. Ce point E appartiendrait au disque fermé $\mathcal{C}$ et, de ce fait, la droite $\mathcal{D}$ passant par les points distincts A et E ne serait pas tangente à $\mathcal{C}$.

Il en résulte que : $[AB) \subset \mathbf{P}_1$

puis : $S([AB)) \subset S(\mathbf{P}_1)$

Autrement dit, la demi-droite [AT) est incluse dans le demi-plan fermé de frontière (AB) contenant I.

Concluons : le point T et le point I commun à $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et Δ appartiennent au même demi-plan de frontière (AB) (c.q.f.d.).

4. **Détermination de $(A,B)_{\widehat{\alpha}}$** pour $\widehat{\alpha} \neq \hat{0}$ et $\widehat{\alpha} \neq \widehat{\pi}$

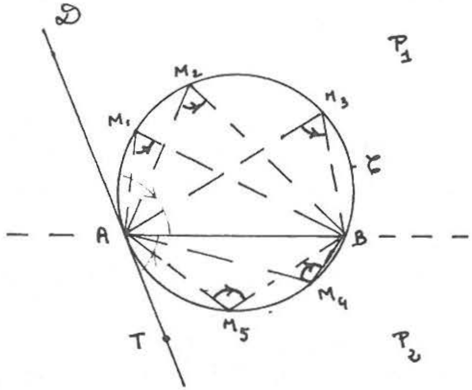
a) *Pour se faire une idée*, la droite $\mathcal{D}$ étant la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point A, on sait que les angles représentés sur la figure ci-contre ont tous des doubles égaux.

En posant : $(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = \widehat{\alpha}$ on a donc, pour tout point M de $\mathcal{C} \setminus \{A,B\}$:

$$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = 2\widehat{\alpha}$$

c'est-à-dire :

$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha}$ ou $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha} + \widehat{\pi}$.



Désignons par $\mathbf{P}_2$ celui des demi-plans ouverts de frontière (AB) qui contient T, par $\mathbf{P}_1$ l'autre. Il semble plausible, au vu de la figure, que :

$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha}$ lorsque $M \in \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1$

$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha} + \widehat{\pi}$ lorsque $M \in \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_2$

ce qui nous permet de formuler la conjecture : $(A,B)_{\widehat{\alpha}} = \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1$.

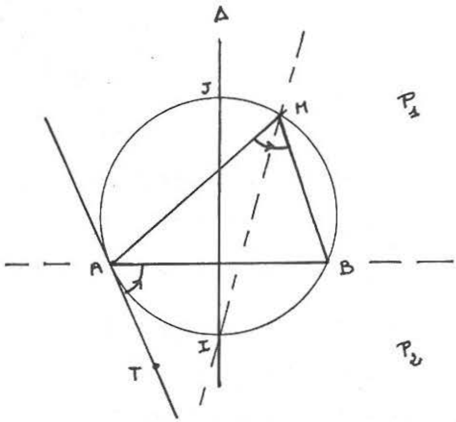
b) *Vérification de la conjoncture précédente*

Etant donnés deux points distincts A et B du plan **P** et un angle $\widehat{\alpha}$ autre que $\widehat{0}$ et $\widehat{\pi}$, désignons par :

- [AT) la demi-droite de **P** telle que $(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = \widehat{\alpha}$ (*)
- $\mathcal{C}$ le cercle passant par A et B et tangent à la droite (AT)
- $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ les demi-plans ouverts de frontière (AB) avec $T \in \mathbf{P}_2$
- Δ la médiatrice du segment [A,B]
- I et J les points de $\Delta \cap \mathcal{C}$ avec $J \in \mathbf{P}_1$.

Il s'agit de montrer que : $(A,B)_{\widehat{\alpha}} = \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1$.

Nous avons, pour tout point M de $\mathbf{P} \setminus \{A,B\}$:



1° - $M \in \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1 \Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MI}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AI}})$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = \widehat{\alpha}$ ... car

(MI) est bissectrice des demi-droites [MA) et [MB)
(AI) est bissectrice des demi-droites [AT) et [AB)

$\Rightarrow M \in (A,B)_{\widehat{\alpha}}$

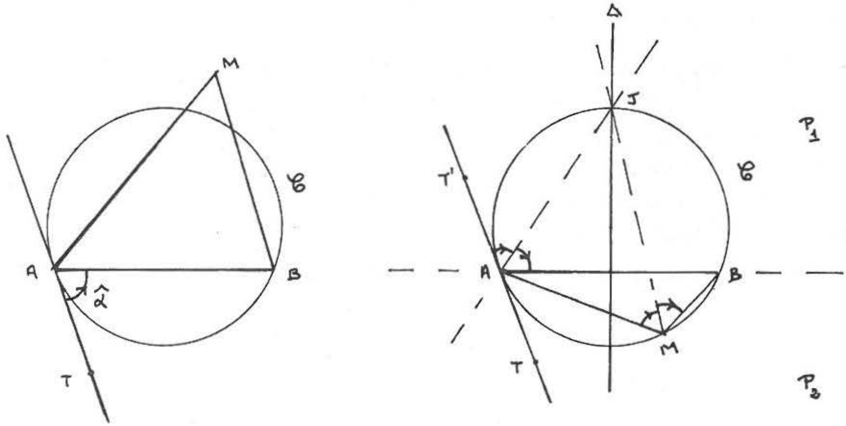
ce qui prouve l'inclusion :

$$\mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1 \subset (A,B)_{\widehat{\alpha}} \ldots \text{(i)}$$

(*) Sa construction fera l'objet d'une étude ultérieure.

2° - $M \notin \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1 \Rightarrow$ • soit $M \notin \mathcal{C}$ ... figure 1

• soit $M \in \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_2$ ... figure 2



• *Dans le premier cas,* nous avons : $2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \neq 2(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}})$

c'est-à-dire : $2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \neq 2\widehat{\alpha}$

On en déduit : $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \neq \widehat{\alpha}$, autrement dit : $M \notin (A,B)_{\widehat{\alpha}}$.

• *Dans le deuxième cas,* T' étant le point de $\mathbf{P}_1$ tel que $\overrightarrow{AT'} = -\overrightarrow{AT}$,

nous avons : $2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MJ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AJ}})$

On en déduit : $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}})$

car $\begin{cases} \text{(MJ) est bissectrice des demi-droites [MA) et [MB)} \\ \text{(AJ) est bissectrice des demi-droites [AT') et [AB)} \end{cases}$

puis : $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) + \widehat{\pi} = \widehat{\alpha} + \widehat{\pi}$

et enfin : $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \neq \widehat{\alpha}$ autrement dit : $M \notin (A,B)_{\widehat{\alpha}}$

Ainsi : $M \notin \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1 \Rightarrow M \notin (A,B)_{\widehat{\alpha}}$

Il s'ensuit que : $M \in (A,B)_{\widehat{\alpha}} \Rightarrow M \in \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1$

ce qui prouve l'inclusion : $(A,B)_{\widehat{\alpha}} \subset \mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1$ ... (ii).

Concluons : Il résulte de (i) et (ii) que : $(A,B)_{\widehat{\alpha}} = \mathcal{C} \cap P_1$.

On retiendra donc le résultat suivant :

Théorème :

Etant donnés deux points distincts A et B du plan **P** et un angle $\widehat{\alpha}$ autre que $\hat{0}$ et $\widehat{\pi}$

l'ensemble des points M de $\mathbf{P} \setminus \{A,B\}$ tels que $(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = \widehat{\alpha}$
Autrement dit, la ligne de niveau $(A,B)_{\widehat{\alpha}}$ est l'arc $\mathcal{C} \cap \mathbf{P}_1$
où

- $\mathcal{C}$ est le cercle passant par A et B et tangent à la droite (AT) définie par $(\widehat{\vec{AT},\vec{AB}}) = \widehat{\alpha}$
- $\mathbf{P}_1$ est le demi-plan ouvert de frontière (AB) dont T n'est pas élément.

Remarque : La ligne de niveau $(A,B)_{\widehat{\alpha}+\widehat{\pi}}$ est l'arc $\mathcal{C} \cap \mathbf{P}_2$.

5. **Construction de $(A,B)_{\widehat{\alpha}}$**

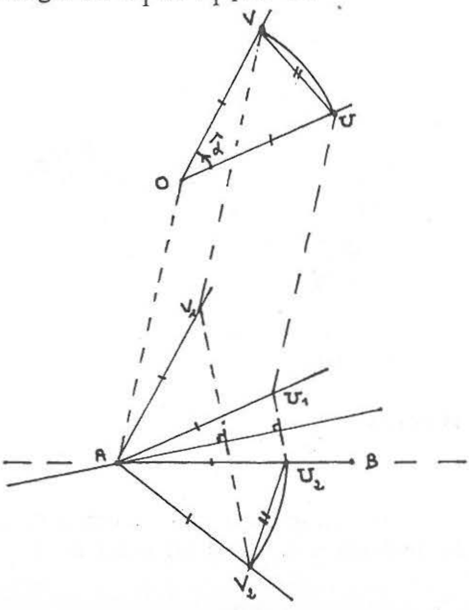
A, B et $\widehat{\alpha}$ sont donnés. $\widehat{\alpha} \neq \hat{0}$ et $\widehat{\alpha} \neq \pi$.

a) *Construction de la demi-droite [AT) telle que $(\widehat{\vec{AT},\vec{AB}}) = \widehat{\alpha}$*

On peut considérer, sans diminuer la généralité, que $\widehat{\alpha}$ est donné sous la forme de l'angle d'un couple de deux vecteurs non nuls $\vec{OU}$ et $\vec{OV}$ de même norme.

Désignons alors par :

- t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$
- U_1 et V_1 les images de U et V par t
- s la réflexion qui échange les demi-droites $[AU_1)$ et $[AB)$
- U_2 et V_2 les images de U_1 et V_1 par s .



Nous avons :

$$\widehat{(\overrightarrow{AU_1},\overrightarrow{AV_1})} = \widehat{(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV})} \text{ ... effet de } t$$

puis :

$$\widehat{(\overrightarrow{AV_2},\overrightarrow{AU_2})} = -\widehat{(\overrightarrow{AV_1},\overrightarrow{AU_1})} \text{ ... effet de } s$$

$$= \widehat{(\overrightarrow{AU_1},\overrightarrow{AV_1})} = \widehat{(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV})} = \widehat{\alpha}$$

et enfin, en notant T un point autre que A de la demi-droite $[AV_2)$, on obtient :

$$\widehat{(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})} = \widehat{(\overrightarrow{OV_2},\overrightarrow{OU_2})}$$

c'est-à-dire :

$$\widehat{(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})} = \widehat{\alpha}$$

Remarque : Les transformations t et s étant des isométries, on a donc :

$$AU_2 = AV_2 = OU = OV \quad \text{et} \quad U_2V_2 = UV .$$

En marge de l'étude théorique précédente, on voit alors comment, en pratique, se servir du compas pour construire la demi-droite [AT) telle que

$$\widehat{(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})} = \widehat{\alpha} .$$

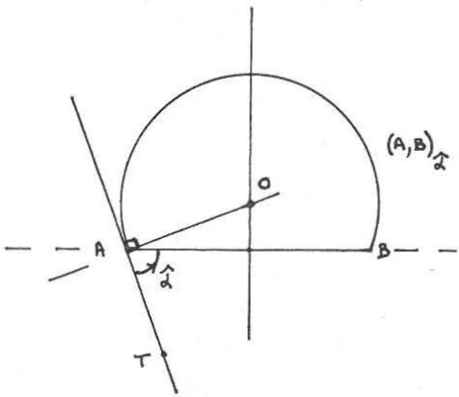
b) *Construction de $(A,B)_\alpha$*

On trace successivement :

- la demi-droite [AT) telle que $\widehat{(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})} = \widehat{\alpha}$... voir (a)
- la médiatrice de [A,B] et l'orthogonale en A à la droite (AT).

Ces deux droites se coupent en O.

- la partie du cercle de centre O passant par A contenue dans le demi-plan de frontière (AB) dont T n'est pas élément.



V. Problèmes résolus

Problème 8

Soit un cercle $\mathcal{C}$, I un de ses points ; Γ un cercle de centre I coupant en deux points distincts A et B, M un point de $\mathcal{C} \setminus \{A,B\}$.

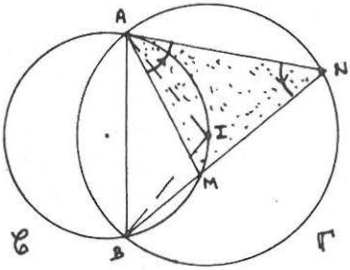
On désigne par N le point d'intersection, autre que B, de la droite (BM) et du cercle Γ. Montrer que le triangle AMN est isocèle en M.

Solution

Désignons par Γ le disque de frontière Γ. Deux éventualités sont à envisager :

1. $M \in \Gamma \cap \mathcal{C}$. Dans ce cas :

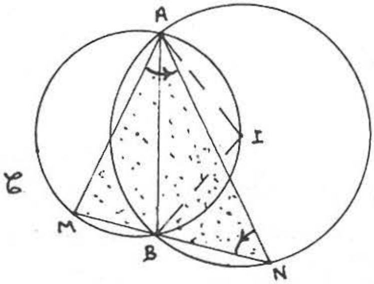
$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM}}) + (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}}) &= \widehat{\pi} - (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN}}) + (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MB}}) \quad \text{... car } M \in]B,N[\\
&= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}) \quad \text{... car } M \in \text{arc AIB}
\end{aligned}$$



2. $M \notin \Gamma \cap \mathcal{C}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM}}) + (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}}) &= \widehat{\pi} - (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN}}) + \widehat{\pi} \\
&= (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) + \widehat{\pi} \quad \text{... car } MN \in \mathbf{R}_+ . \overrightarrow{MB} \\
&= (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})
\end{aligned}$$

... car les points M et I du cercle $\mathcal{C}$ appartiennent à deux arcs distincts d'extrémités A et B.



Ceci étant, dans les deux cas, on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM})}+\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})} = \widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})}$$

$$= 2\widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})} \quad \text{... car } N\in\Gamma$$

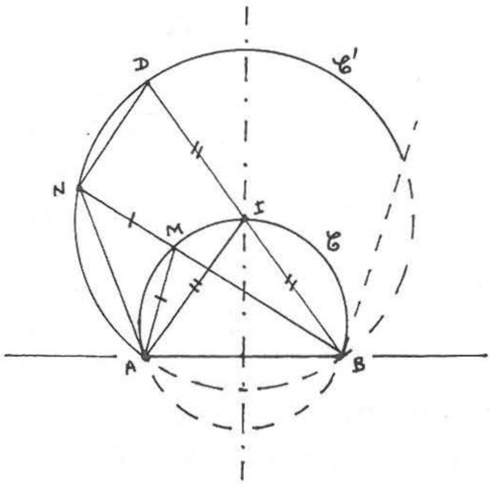
$$= 2\widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM})} \quad \text{... car } \overrightarrow{NM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{NB}$$

On en déduit : $\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})}=\widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM})}$ ... ce qui prouve que le triangle AMN est isocèle en M (c.q.f.d.).

Problème 9

Soit M un point d'un arc $\widehat{AB}$ porté par un cercle $\mathcal{C}$. Déterminer pour quelle(s) position(s) de M sur l'arc $\widehat{AB}$ la somme $MA+MB$ est maximum.

Ecartons d'abord les cas $M=A$ et $M=B$ pour lesquels le maximum de $MA=MB$ n'est visiblement pas réalisé.
M étant maintenant un point de l'arc $\widehat{AB}$ autre que A et B, on remplace le segment [M,A] par le segment [M,N] où le point N est tel que $M\in[B,N]$ et $MN=MA$.



On a alors :

$$2\widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NM})} \quad \text{... car } \overrightarrow{NB} \text{ et } \overrightarrow{NM} \text{ sont colinéaires}$$

$$= \widehat{\pi}-\widehat{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MA})} \quad \text{... car le triangle AMN est isocèle en M}$$

$$= \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN})}+\widehat{\pi}$$

$$= \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN})}+\widehat{(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MB})} \quad \text{... car } M\in[B,N]$$

$$= \widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}$$

$$= \widehat{(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})} \quad \text{... en désignant par I le point de l'arc } \widehat{AB} \text{ équidistant de A et B.}$$

Cette dernière égalité prouve que le point N est élément du cercle $\mathcal{C}'$ de centre I passant par A (et par B).
Cela dit, soit D le point de $\mathcal{C}'$ diamétralement opposé à B.

Alors :

- pour tout point M de $\overset{\frown}{AB}$ autre que A, B et I le triangle BND est rectangle en N et on a $BN < BD$, c'est-à-dire $MA + MB < IA + IB$;
- pour $M = I$, on a trivialement $MA + MB = IA + IB$.

Ainsi, lorsque M décrit l'arc $\overset{\frown}{AB}$, le réel $MA + MB$ est maximum pour $M = I$ et uniquement dans ce cas.

Remarque : Du fait que $AB \leqslant IA + IB$, on peut étendre le résultat précédent aux cas où $M = A$ et $M = B$.

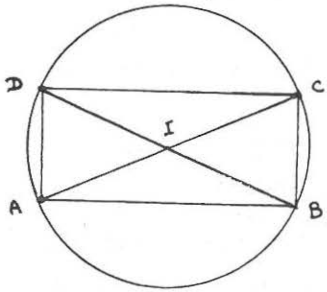
Ainsi, pour tout point M de l'arc $\overset{\frown}{AIB}$ (A et B compris), le réel $MA + MB$ est maximum lorsque $M = I$ et seulement dans ce cas.

Problème 10

Montrer qu'un parallélogramme inscrit dans un cercle est un rectangle.

Solution :

Désignons par I le centre *du parallélogramme* ABCD inscrit dans un cercle .
Nous allons proposer pour ce problème deux solutions. La première, à l'opposé de la seconde, prend en compte le fait qu'un demi-plan est une partie convexe du plan.



1) Nous avons d'une part :

$\widehat{(\vec{AB},\vec{AD})} = \widehat{(\vec{CD},\vec{CB})}$ ... effet de la symétrie de centre I

d'autre part :

$\widehat{(\vec{AB},\vec{AD})} = \widehat{(\vec{CB},\vec{CD})} + \widehat{\pi}$ ... car A,B,C,D, sont cocycliques
A et C ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (BD), sinon ...

On en déduit, par addition membre à membre : $2\widehat{(\vec{AB},\vec{AD})} = \widehat{\pi}$ ce qui prouve l'orthogonalité des droites (AB) et (AD). Le parallélogramme ABCD est donc un rectangle.

2) Nous avons d'une part :

$2\widehat{(\vec{AB},\vec{AD})} = 2\widehat{(\vec{CD},\vec{CB})}$ ... effet de la symétrie de centre I

d'autre part :

$2\widehat{(\vec{AB},\vec{AD})} = 2\widehat{(\vec{CB},\vec{CD})}$ ... car A, B, C, D sont cocycliques.

On en déduit, par addition membre à membre : $4(\widehat{\vec{AB},\vec{AD}})=\hat{0}$, puis :

$$2(\widehat{\vec{AB},\vec{AD}})=\hat{0} \quad \text{ou} \quad 2(\widehat{\vec{AB},\vec{AD}})=\hat{\pi}.$$

Or, l'éventualité $2(\widehat{\vec{AB},\vec{AD}})=\hat{0}$ qui traduit que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont colinéaires ne peut se produire. Finalement, on a :

$$2(\widehat{\vec{AB},\vec{AD}}) = \hat{\pi}$$

qui conduit à la même conclusion que précédemment.

Problème 11

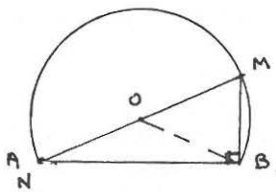
Un point M décrit un arc de cercle d'extrémités A et B. A chaque point M ($M \neq A$ et $M \neq B$), on associe le point N de la droite (MA) tel que le triangle MBN soit rectangle en B. Quel est le lieu des points N ?

Solution :

Désignons par O le centre du cercle C portant l'arc $\widehat{AB}$, par **E** le lieu cherché et posons :

$$(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}})=\hat{\alpha}.$$

On peut alors observer que A est un point de **E**, voir figure 1.



Ceci étant

a) supposons que N soit un point de **E** autre que A.

On a alors : voir figure suivante

$2(\widehat{\vec{NM},\vec{NB}}) = \hat{\pi}-2(\widehat{\vec{MB},\vec{MN}})$ ... car le *triangle MBN est rectangle en B.*

On en déduit :

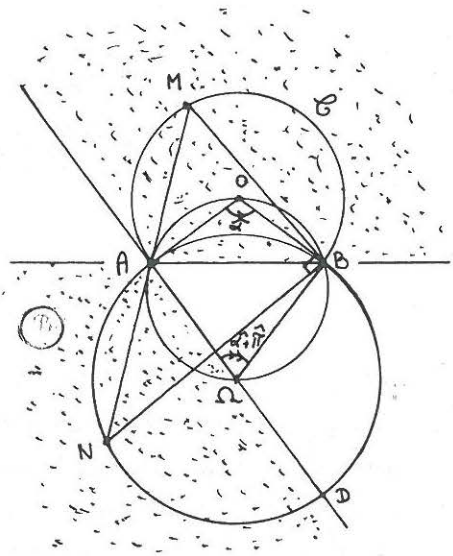
$2(\widehat{\vec{NA},\vec{NB}}) = \hat{\pi}-2(\widehat{\vec{MB},\vec{MA}})$ ...car $\vec{NA}$ est colinéaire à $\vec{NM}$
$\vec{MA}$ est colinéaire à $\vec{MN}$

puis :

$$\begin{aligned}2(\widehat{\vec{NA},\vec{NB}}) &= \hat{\pi}-(\widehat{\vec{OB},\vec{OA}})\\ &= (\widehat{\vec{OA},\vec{OB}})+\hat{\pi}\\ &= \hat{\alpha}+\hat{\pi}\end{aligned}$$

ce qui montre que N appartient au cercle Γ de centre Ω passant par A où Ω est le point diamétralement opposé à O sur le cercle circonscrit au triangle AOB.

En outre, les points M, A et N étant alignés, N appartient aussi à la partie $\mathcal{B}$ (en grisé sur la figure). On est ainsi assuré que N est élément de l'arc $\Gamma \cap \mathcal{B}$. Autrement dit, on a : $\mathbf{E} \subset \Gamma \cap \mathcal{B}$.



Réciproquement, soit N un point autre que A de l'arc $\Gamma \cap \mathcal{B}$.

Désignons par M le point de la droite (NA) tel que le triangle NBM soit rectangle en B.

On montre alors comme précédemment que M appartient à l'arc $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ et donc N est un point du lieu. Autrement dit, on a :

$$\Gamma \cap \mathcal{B} \subset \mathbf{E} .$$

Conclusion : Le lieu cherché est l'arc $\Gamma \cap \mathcal{B}$ — sur la figure l'arc $\overset{\frown}{BAD}$, B et D exclus.

Problème 12

Soit A et B deux points diamétralement opposés d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Deux points D et E décrivent ce cercle de sorte que l'angle $\widehat{(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE})}$ reste égal à un angle $\widehat{\alpha}$ donné ($\widehat{\alpha} \neq \widehat{0}$ et $\widehat{\alpha} \neq \widehat{\pi}$).

On désigne par M le point d'intersection des droites (AE) et (BD). Quel est le lieu des points M ?

Nota : On convient de remplacer (AE) — respectivement (BD) — par la tangente à $\mathcal{C}$ en A — respectivement en B — lorsque $E = A$ $(D = B)$.

Solution :

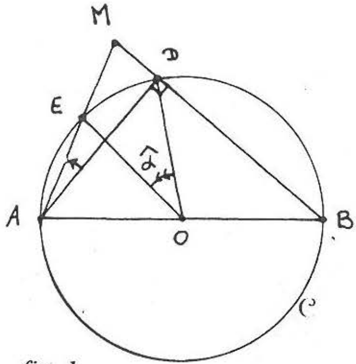


fig. 1

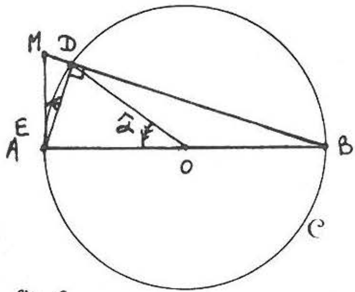


fig. 2

Nous avons, pour $E \neq A$, $E \neq B$, $D \neq A$...(figure 1):

$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD}})$ ... car $\overrightarrow{MD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MA}$

$= \widehat{\pi} - 2(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM}})$ ... car le triangle MAD est rectangle en D

$= \widehat{\pi} - 2(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}})$ ... car $\overrightarrow{AE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$

$= \widehat{\pi} - (\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}})$ ... car A, E, D sont éléments du cercle $\mathcal{C}$ de centre O

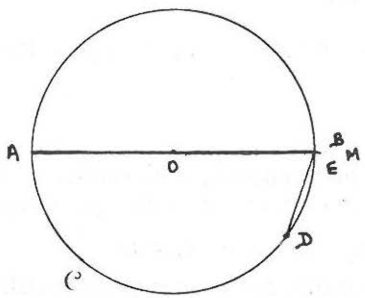
$= \widehat{\pi} - \widehat{\alpha}$

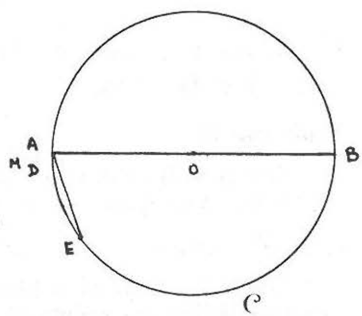
La même démonstration s'applique au cas où $E = A$(figure 2):

$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD}}) = \widehat{\pi} - 2(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM}})$

$= \widehat{\pi} - (\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}})$ ... car (AM) est tangente en A à $\mathcal{C}$.

Lorsque $E = B$ ou $D = A$ on a respectivement $M = A$ ou $M = B$.





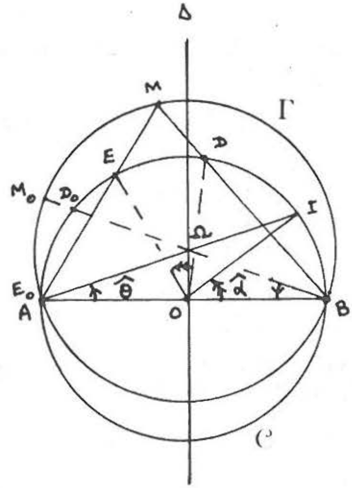
Ainsi, tout point M du lieu **L** cherché est un point du cercle Γ de centre Ω passant par A où Ω est le point de la médiatrice Δ de [A,B] tel que

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})} = \widehat{\pi}-\widehat{\alpha}\ .$$

Le détail de la construction du cercle Γ est donné dans la figure ci-dessous où on a visiblement :

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})} = \widehat{\pi}-2\widehat{\theta} = \widehat{\pi}-\widehat{\alpha}$$

On a donc : $\quad \mathbf{L}\subset\Gamma$.



Réciproquement, soit M un point de Γ autre que A et B. Nous avons (figure 3) :

$$\begin{aligned}
\widehat{(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE})} &= 2\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})} && \text{... lorsque } M\neq M_0\\
&= 2\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM})}\\
&= \widehat{\pi}-2\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD})} && \text{... car le triangle ADM est rectangle en D}\\
&= \widehat{\pi}-2\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})} && \text{... car MB est colinéaire à MD}\\
&= \widehat{\pi}-\widehat{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})} && \text{... car } M\in\Gamma\\
&= \widehat{\pi}-(\widehat{\pi}-\widehat{\alpha})\\
&= \widehat{\alpha}
\end{aligned}$$

ce qui montre que M est élément du lieu **L** cherché. Comme A et B sont visiblement des points du lieu, on a donc : $\Gamma\subset\mathbf{L}$.

Ainsi le lieu cherché est le cercle Γ .

V. Pour conclure

Remarque 1

On se place dans l'hypothèse où le déroulement de l'exposé est 1° partie B - 2° partie C.

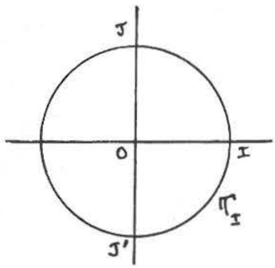
Force est alors de constater qu'il est possible de résoudre des problèmes de géométrie plane à l'aide des angles sans que le plan soit préalablement orienté, ni introduite la notion de mesure d'un angle.

Remarque 2

On se place encore dans l'hypothèse où le déroulement de l'exposé est 1° partie A - 2° partie C.

a) On définit alors comme suit l'orientation des plans $\widetilde{\mathbf{P}}$ et $\mathbf{P}$.

Désignons par $\vec{j}$ et $\vec{j}'$ les vecteurs de $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$ (respectivement par J et J′ les points de Γ_I) représentant les deux angles droits (direct et indirect).



Orienter $\widetilde{\mathbf{P}}$ *et* $\mathbf{P}$ consiste à choisir entre les angles $\widehat{(\vec{i},\vec{j})}$ et $\widehat{(\vec{i},\vec{j}')}$ —respectivement $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}')}$— celui qui sera l'angle droit direct (on connaît la réponse : $\widehat{(\vec{i},\vec{j})}$ est l'angle droit direct).

b) Etant entendu qu'il est hors de propos d'introduire à ce niveau la notion de mesure d'un angle de façon convenable, on adopte la présentation faite dans la partie B, paragraphe I. On admet alors que l'application

$$\psi : \mathcal{A} \to]-\pi,+\pi]$$
$$\hat{x} \to x$$

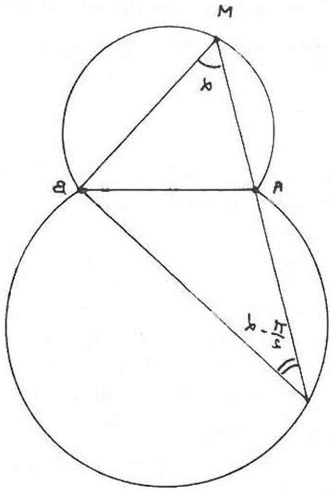
satisfait à la propriété suivante :

$$\forall(\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{A}^2 , \quad \psi(\hat{u}+\hat{v}) = \psi(\hat{u}) + \psi(\hat{v}) \quad [2\pi]$$

Remarque 3

Il nous semble préjudiciable de faire *prématurément* la confusion d'écriture entre un angle et une de ses mesures. Parce que, derrière le nombre qui le mesure, l'angle d'un couple de vecteurs non nuls se métamorphose souvent dans l'esprit des élèves en un angle géométrique. Ce dérapage vers une notion plus familière peut alors les amener à "établir" de faux résultats. Pour illustrer ce propos par un exemple, reprenons le problème n° 11 dont on rappelle brièvement l'énoncé :

"Un point M décrit un arc $\overset{\frown}{AB}$. A chaque point M, on associe le point N de la droite (MA) tel que le triangle MBN soit rectangle en M. Lieu des points M ?".



Solution :

Posons $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \alpha$. On a alors :

$$(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}) = \frac{\pi}{2} - \alpha .$$

Donc N appartient à la ligne de niveau $(A,B)_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.

Réciproquement, soit N un point de $(A,B)_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.

Désignons par M le point de la droite (NA) tel que le triangle NBM soit rectangle en B. On a alors :

$$(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}) = \frac{\pi}{2} - \alpha .$$

On en déduit : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \alpha$. Donc M appartient à l'arc donné $\overset{\frown}{AB}$.

Tout point N de $(A,B)_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ est ainsi un point du lieu cherché.

Conclusion : Le lieu des points N est l'arc $(A,B)_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.

On observera que dans la première solution de ce problème où il n'est pas fait appel aux mesures des angles, l'emploi des doubles d'angle est nécessaire pour traduire que le triangle MBN est rectangle en B (voir caractérisation du triangle rectangle). On en déduit alors que le point N appartient à un *cercle* passant par A et B. La réciproque, en prenant N sur ce cercle, ne peut alors conduire qu'à l'appartenance du point M, non pas à l'arc donné $\widehat{AB}$, mais au *cercle* qui porte cet arc.

On est donc *contraint* pour atteindre l'objectif visé de restreindre le "lieu de N". On est alors en mesure de fournir une "bonne solution".

Remarque 4

L'utilisation fréquente de doubles d'angle dans la résolution de problèmes nous amène à introduire dans l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles la relation $\mathcal{R}$ définie comme suit :

$$\widehat{\alpha}\ \mathcal{R}\ \widehat{\beta} \iff 2\widehat{\alpha} = 2\widehat{\beta}\ .$$

Cette relation est manifestement une relation d'équivalence. En outre, elle est trivialement compatible avec la loi additive de $\mathcal{A}$. On peut donc installer sur l'ensemble quotient $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ une loi quotient, notée +, qui confère à cet ensemble une structure de groupe commutatif.

Le fait que le double d'un angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ reste *invariant* lorsqu'on remplace respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par des vecteurs non nuls des droites vectorielles $\mathbf{R}.\vec{u}$ et $\mathbf{R}.\vec{v}$ nous conduit à adopter la notation $\widehat{(\mathbf{R}.\vec{u},\mathbf{R}.\vec{v})}$ pour désigner la classe de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ modulo $\mathcal{R}$.

On dit alors que $\widehat{(\mathbf{R}.\vec{u},\mathbf{R}.\vec{v})}$ est l'angle du couple de droites $(\mathbf{R}.\vec{u},\mathbf{R}.\vec{v})$. C'est l'ensemble de tous les couples de droites $(\mathbf{R}.\vec{x},\mathbf{R}.\vec{y})$ tels $2\widehat{(\vec{x},\vec{y})} = 2\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.

En conséquence, un quelconque élément de l'ensemble $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ devrait être appelé :

- angle d'un couple de *droites vectorielles* si l'on fait référence au plan **P** ;
- angle d'un couple de *directions de droite* si l'on fait référence au plan ponctuel **P**.

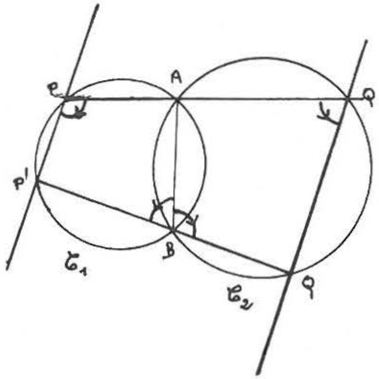
Mais il est de tradition de remplacer les directions de droite par des droites de **P** pour désigner les éléments de $\mathcal{A}/\mathcal{R}$.

Par exemple, la notation $\widehat{(\Delta,\Delta')}$ qui se lit "angle Δ,Δ'" désigne l'angle du couple des directions de droite auxquelles Δ et Δ' appartiennent respectivement.

Un tel abus de langage et d'écriture est évidemment très commode. Il ne présente en outre aucun danger dès lors qu'on convient que "l'angle de deux droites parallèles" est nul.

L'emploi des "angles de droites" dans certains problèmes peut alléger la rédaction de la solution. Par exemple, celle du problème 6 peut se résumer à :

$$\begin{aligned}(\widehat{PQ,PP'}) &= (\widehat{AB,P'Q'})\\ &= (\widehat{PQ,\ QQ'})\end{aligned}$$



en convenant que :
(PP') désigne la tangente à $\mathcal{C}_1$ en P lorsque $P' = P$;
(QQ') désigne la tangente à $\mathcal{C}_2$ en Q lorsque $Q' = Q$.

Par contre, il est des problèmes pour lesquels les angles de droites sont des outils inadaptés et donc d'aucun secours. Citons à titre d'exemple le problème 12.

En définitive, pour faire un bilan concernant leur utilisation, disons que hormis le fait qu'ils permettent une solution plus concise de certains problèmes, leur introduction au niveau des classes de lycée ne paraît pas être une impérieuse nécessité. Ajoutons à cela que pour bien les utiliser en situation de recherche sur une figure, il est bon d'avoir au préalable une bonne expérience du maniement des angles à doubles égaux.