

LES MATHS : L'Ω ?

Organe officiel de la Régionale de CAEN de l'APMEP : Numéro 2 de l'An 2006

Rédacteur en Chef : Richard Choulet

Éditorial. L'idée devait être bonne car voici déjà un deuxième numéro qui sort toujours en l'an 2006. Pour l'instant, on a encore de quoi dire mais un jour il faudra bien de la fraîche ! L'article de fond abordera les **concours mathématiques**.

Erratum (et pan sur le mec pour parodier qui vous savez). Marqué par son passage à Namur (voir plus loin) et par ce dilemme tintinophile sur l'orthographe des Dupondt(s), le rédacteur a écrit Clermond Ferrand ; que les Puydedomiens ou domois l'excusent. La relectrice bénévole qui a abandonné ses tâches ménagères pour finaliser l'œuvre ne sera pas ici lâchement poignardée dans le dos.

Un petit air de Sambre et Meuse

Je ne parle pas de cette musique altièrre qui redorerait n'importe quel coq décati par un long 2×45 minutes au soleil un certain jour de juillet, non je parle de la bonne ville de Namur au confluent des susnommés fleuves.

L'ami François Drouin vous narra par le menu dans le dernier BGV les activités pédagogiques ou didactiques (ouh ouh j'ai du mal à employer ces mots là) qui s'y déroulèrent du 22 au 24 août de cette année évidemment. J'ai participé personnellement à un atelier qui m'émut aux larmes : de la vrai combinatoire comme autrefois chez nous, un vrai cours au tableau avec toutefois des outils modernes, des vraies permutations à répétitions, non pas un faire valoir de probabilités, non : de la combinatoire aimée pour ce qu'elle est. J'alla aussi d'un pas décidé voir un atelier sur «narrations de recherche»-je dirais faut voir- enlevé de main de maîtresse par une hyper tonique Valérie Henry et enfin plus pianepiane Arnaud Gazagnes dans Activités numériques, dessins et plausibilité de l'erreur. J'ai trouvé de la pâture pour les élèves de seconde et d'ailleurs : LISEZ **JEUX 7** il y a travaillé. J'ai été marqué par un autre que j'avais oublié : et pour cause il venait après la soirée que j'évoquerai après et en conséquence j'ai sommnolé. C'est dommage car au début je comprenais bien mais ça s'est gâté au bout d'une demi-heure. C'était «quelques-uns de mes problèmes favoris» par notre collègue espagnol de Valladolid qui parle très bien le français mais que voulez-vous quand le corps lâche ! Francisco Bellot-Rosado s'est occupé de longues années de la préparation aux olympiades internationales dans son pays.

Par le menu ai-je écrit plus haut. Je vais vous le donner le menu de la dégustation de Vins et Fromages organisé par notre collègue combinateur. Dans l'ordre nous eûmes, humâmes, mangeâmes et bûmes :

Morceau de ↓	→ ↑	→ arrosé avec du ↓
Comté		Chardonnay d'Ardèche
Chèvre		Sauvignon
Brie		Moulin à Vent
Livarot		Vin Italien
Camembert		Côte du Rhône
Munster		Riesling
Époisse		Savennières
Bleu		Madiran Blanc
Gruyère		Arbois
Fondant au chocolat		Maury



Certes c'étaient des doses de dégustation un peu musclée mais tout le monde resta digne et de toute façon on dormait sur place vu que nous étions à la cantine de l'internat ; quelles qu'en soient les raisons, cela nous mena tard et ce n'est pas une excuse pour mon manque d'assiduité mais j'essplique.

La place manque pour parler de la réception par le bourgmestre, de la visite guidée chez le parfumeur Guy Delforge (Médaille d'Or de Paris en 1990 avec son «Carré Blanc») et du banquet des journées ; je vous laisse rêver. ♥

Les concours mathématiques : en pratique ...

Le Challenge WIMS - Coupe Mathématique 2006 Collège et lycée

La date du challenge : le jeudi 21 décembre 2006

Le prix : 2 euros par élève

Inscriptions en ligne du 11 septembre au 7 décembre et renseignements : <http://www.concours-wims.com>

Annales : www.eval-wims.com

Le Kangourou : Nadine vous dit.

«Concours individuel ainsi nommé en hommage au concours australien dont il est inspiré. Ce concours est organisé sur le plan national, une fois par an, un jeudi matin du mois de mars, sous forme de Q.C.M. (26 questions de difficulté progressive) et sur une durée de 50 min. Il s'adresse aux élèves du CE2 à l'université en 5 sujets différents : Écoliers (CE2, CM1 et CM2), Benjamins (6ème, 5ème), Cadets (4ème, 3ème, CAP, 2nde prof, Term. BEP), Juniors (Bac pro 1ère, Bac pro Term, 2nde, 1ère, Term. sauf S), Étudiants (Term. S, Bac +). Le classement se fait par niveau. Il a lieu dans chaque établissement participant, sur la base du volontariat. Un collègue par établissement se charge des inscriptions (2,50 euros par élève pour plus de 25 inscrits), de la réception des sujets, de l'organisation de la passation, de l'expédition des réponses et de la distribution des lots lors d'une remise des prix. Chaque participant reçoit un journal : " les Malices du Kangourou " et un instrument de géométrie. Ce concours permet aux élèves d'exprimer leurs qualités de raisonnement logique et leurs capacités de recherche rapide dans des situations variées. Cette année scolaire, le concours a lieu **le jeudi 22 mars**. Les éditions du Kangourou publient les annales des concours des années antérieures ainsi que de nombreuses brochures " pour aimer les maths ". Renseignements : <http://www.mathkang.org> »

Le Rallye Virtuel de l'académie de Caen : Jérôme, membre éminent de l'équipe organisatrice vous le fait découvrir.

«Vous connaissez bien sûr le Rallye Dynamique et Virtuel de l'IREM de Basse-Normandie ! Le groupe Rallye de l'IREM Basse-Normandie a organisé l'année 2005/2006 la troisième édition du Rallye. Plus de 80 classes de 3ème, de 2nde et de lycées professionnels de l'académie de Caen y ont participé. Et cette nouvelle année scolaire verra la 4ème édition ! Alors ne manquez pas d'y participer ! Nos capacités sont énormes ...

Ce rallye, entièrement gratuit (gratuit, de nos jours, c'est rare ...), se déroulera le **vendredi 20 avril 2007** dans l'après-midi (date en attente de confirmation). Et une autre caractéristique unique dans le monde des rallyes : c'est la classe toute entière qui joue, et non pas l'élève individuellement.

La classe, sous la responsabilité d'un professeur d'une autre discipline que les mathématiques

(aucun professeur ne doit aider à la résolution des énigmes, Résistez !! et observez votre classe, c'est riche d'enseignement), est placée devant des énigmes mathématiques, et doit renvoyer la réponse via internet ; le site internet conçu spécialement pour ce rallye permet aussi bien les inscriptions, les informations, le déroulement du rallye, l'affichage des résultats que l'envoi par mail automatisé de tous les courriers, sans aucun dysfonctionnement et avec une sécurité totale.

Les énigmes à support mathématique sont réalisées par les membres du groupe Rallye de l'IREM. La première énigme n'est pas forcément la plus simple, ni la plus compliquée. Comme le dit le proverbe «une classe avertie en vaut deux», et un professeur aussi ! La conception générale repose sur le principe de tout rallye : on ne peut passer à l'étape suivante qu'en ayant répondu correctement à l'étape précédente ; toutefois, pour éviter les blocages et le découragement, cette année encore, des jokers sont potentiellement utilisables par classe. De plus des énigmes bonus permettent aux équipes de gagner des points supplémentaires. Ce sont des énigmes un peu plus courtes, et plus simples à résoudre, qui permettent de diversifier l'activité de recherche des élèves, et ainsi de faire participer le plus grand nombre d'entre eux. Ces bonus ont été très bien accueillis l'an passé par les participants. Vous avez bien compris, c'est la classe qui joue, qui travaille et qui gagne !

Le classement se fait de la façon suivante : un classement général et un classement pour les 3èmes, un autre pour les 2ndes. Les lots sont donc attribués aux classes. Ces lots sont offerts principalement par l'IREM de Basse-Normandie, l'APMEP de Basse-Normandie et le Rectorat de Caen. En 2006, année paire, une finale s'est déroulée au Mémorial de Caen qui a offert aussi de nombreux lots. Mais en 2007, année impaire (!), pas de finale. Oui, il nous faut deux ans pour mettre tout cela sur pied !

Donc le rallye 2007 aura lieu le vendredi 20 avril 2007 (en attente de confirmation). Il faut vous y préparer : courriers envoyés aux établissements, site internet à consulter (<http://www.math.unicaen.fr/irem/sommaire.html>) cliquez sur

le lien du Rallye Dynamique et Virtuel. Et pour gagner, voici quelques conseils pour les professeurs et leurs élèves : bien lire le règlement et le procédé de mise en place, se procurer les renseignements indispensables à l'inscription en ligne (en cas d'erreur de mail, d'adresse, de téléphone, ... l'équipe du Rallye ne sera pas tenue pour responsable), installer la salle informatique et faire une répétition générale avec les énigmes d'entraînement qui seront mises en ligne, insister lors de l'entraînement sur la gestion du groupe par les élèves eux-mêmes (ils doivent penser à une stratégie de groupe : comment chercher les énigmes ? qui s'intéresse aux bonus ? qui s'occupe de l'ordinateur en lien avec le serveur de l'IREM ? Y a-t-il un leader dans la classe ? ...), consulter régulièrement le site du Rallye.

Et pour vous donner une idée, voici une énigme (NDLR ci-dessus à droite) que nous avons sélectionnée d'un rallye précédent. Nous vous attendons nombreux pour le Rallye 2007 (un vœu : une classe au minimum par établissement !!). »

Enigme Il vous reste énigmes à résoudre

Le rallye de l'IREM de Basse-Normandie A. Roux, T. Hervez, J. Besson

Aujourd'hui en somme ...

1103 C L I C 2005

Trouvez la valeur de chacune des lettres C, L, et I.

JOKER La réponse à fournir est le produit de L et I Cliquez ici pour la réponse

Énigmath 2006

Il est dit sur la fiche incitative : «Énigmath est un questionnaire gratuit ne nécessitant que des connaissances élémentaires. Ce jeu est ouvert à tous du 9 octobre au 9 décembre 2006. Les participants sont invités à donner leur réponse en remplissant

le formulaire sur le site : <http://www.enigmath.org>. Le règlement du jeu et la liste des 100 lots proposés aux gagnants sont disponibles sur le site.»

Voici par exemple le quatrième problème. «On considère la suite de nombres entiers suivante. On choisit un premier nombre, puis : s'il est pair on le divise par 2 ou s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On recommence ensuite avec le nouveau nombre obtenu. **Si le premier nombre est 5, quel sera le 2006^e ?**»

On pourra avoir des informations sur un moteur de recherche comme Exalead ou Google, à propos de ces suites, à la rubrique **Syracuse** ou **Collatz**.

Trophée Lewis Carroll

«En participant au trophée Lewis Carroll, vous pouvez en réalité participer à trois compétitions : le championnat international des jeux mathématiques (indépendamment), le championnat de jeux littéraires (indépendamment), le combiné des deux championnats appelé trophée Lewis Carroll.»

Exemple pour Seconde à Terminale en jeux mathématiques. «Alice dit à Bertrand : Prête-moi 96 euros. Je n'ai pas assez, répond Bertrand. Combien as-tu ? dit Alice. Si j'avais le double de ce que j'ai, une fois ta demande exaucée, il me resterait la somme qui me manque pour répondre à ta demande. **Combien Bertrand possède-t-il ?**»

Renseignements sur <http://www.tangente-jeux.com> ou <http://www.poleditions.com>.

Les Olympiades

Les chefs d'établissements ont reçu un courrier de la délégation académique à l'action culturelle incitant à mobiliser les élèves de première de toutes séries. Les épreuves auront lieu le 14 mars de 14 à 18 heures.

Des annales commentées se trouvent sur le site disciplinaire du rectorat ; par ailleurs vous trouverez également de quoi nourrir vos élèves sur www.animaths.fr. Le journal se verrait très bien passer les petites annonces des collègues désireux de lancer des séances de préparation ou de faire un pot commun en vue d'entraîner leurs élèves : tout est possible dès que le lecteur prend la plume! ♥

Dans le dernier numéro : Une partie des solutions

* Le casse-bête chinois : on peut tester numériquement en décroissant à partir de 100 ou se faire un petit théorème des restes chinois mijotés à la sauce nem (ou men si l'on est anthropophage) pour trouver : 93.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc} 9 & 2 & 5 & 4 \end{array} \\
 + \begin{array}{cccc} 9 & 2 & 5 & 4 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 5 & 0 \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc} 8 & 2 & 5 & 3 \end{array} \\
 + \begin{array}{cccc} 8 & 2 & 5 & 3 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc} 1 & 6 & 5 & 0 \end{array}
 \end{array}$$

* **Le problème : de la belle et bonne mathématique! Il y a du nombre d'or en filigrane. Mais rien n'est simple!**

La place manquant (pour l'instant A_3 recto-verso), nous donnons le

Prix de l'élégance à la solution de François Couchot (Université de Caen). Nous réservons le prix de l'efficacité à Didier Trotoux pour une prochaine édition.

«Compte-tenu de la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et après simplification, l'équation $\binom{x+1}{y} = \binom{x}{y+1}$ devient

$$(x+1)(y+1) = (x-y)(x-y+1).$$

De plus, si on pose $t = x - y$ et $z = y + 1$, on obtient :

$$(z+t)z = t(t+1). \tag{1}$$

Soit w le pgcd de z et t . Alors $z = wz'$ et $t = wt'$ où z' et t' sont 2 entiers premiers entre eux. Après simplification par w de l'équation (1) on obtient :

$$w(z'+t')z' = t'(t+1). \tag{2}$$

Puisque t et $t+1$ sont des entiers premiers entre eux, w est premier avec $t+1$. D'après le théorème de Gauss w divise t' . Donc $t' = wt''$ et après une simplification par w de l'équation (2) on obtient :

$$(z'+t')z' = t''(t+1). \tag{3}$$

Or t'' est premier avec z' . Il s'ensuit que t'' est aussi premier avec $z'+t'$ et avec le produit $(z'+t')z'$. D'autre part t'' divise ce produit. On en déduit que $t'' = 1$ et l'égalité suivante :

$$(z'+t')z' = (t'^2 + 1). \tag{4}$$

Ma calculatrice, que j'ai programmée pour rechercher des couples $(x ; y)$ solutions du problème, m'a sorti les 2 couples $(14 ; 5)$ et $(103 ; 39)$. Avec la solution triviale $(1 ; 0)$ on peut faire le tableau suivant :

$(x ; y)$	z'	t'	$z'+t'$
$(1 ; 0)$	1	1	2
$(14 ; 5)$	2	3	5
$(103 ; 39)$	5	8	13

Lorsqu'on connaît, les nombres 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... font penser à la célèbre suite d'entiers $(f_n)_{n \geq 1}$, dite de Fibonacci, définie par : $f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 2$.

Par récurrence il est facile de vérifier qu'on a l'égalité $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n, \forall n \geq 2$. En effet $f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = (f_{n+1} + f_n)f_n - (f_n + f_{n-1})f_{n+1} = -(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2)$. Donc avec les indices pairs on obtient $f_{2p+1}f_{2p-1} = f_{2p}^2 + 1, \forall p \geq 1$. Si les entiers x_p et y_p sont définis par $x_p = f_{2p+1}f_{2p} - 1$ et $y_p = f_{2p-1}f_{2p} - 1, \forall p \geq 1$, alors ils vérifient

$$\begin{pmatrix} x_p + 1 \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p + 1 \end{pmatrix}, \forall p \geq 1.$$

Il reste à montrer que toute solution $(x ; y)$ de notre problème est un élément de la suite $((x_p ; y_p))_{p \geq 1}$ définie ci-dessus à partir de la suite de Fibonacci. On garde les mêmes notations.

Il est très facile de vérifier que $z' = t'$ si et seulement si $t' = 1$. Dans ce cas $(x ; y) = (x_1 ; y_1)$. Si $t' \neq z'$ alors on a $z' < t'$. En effet, puisque $z' > 0$ l'égalité (4) entraîne que :

$$z't' < t'^2 + 1 \text{ soit } z' < t' + \frac{1}{t'} < t' + 1 \text{ et donc } z' < t'.$$

On a $t'(t' - z') - z'^2 = t'^2 - z'(t' + z') = -1$ d'après l'égalité (4). Par conséquent $t'(t' - z') = z'^2 - 1$. Puisque $t' > z'$, on a donc

$$z'(t' - z') < z'^2 - 1 \text{ soit } (t' - z') < z' - \frac{1}{z'} < z'.$$

De plus $z'(2z' - t') - (t' - z')^2 = z'^2 + z't' - t'^2 = 1$. Posons $z' = z_1$ et $t' = t_1$. Lorsque $z_1 \neq t_1$ alors les entiers z_2 et t_2 , définis par $t_2 = t_1 - z_1$ et $z_2 = 2z_1 - t_1$, vérifient l'égalité $z_2(z_2 + t_2) = t_2^2 + 1$. Donc le couple $(t_2(t_2 + z_2) - 1 ; t_2z_2 - 1)$ est aussi solution de notre problème. Ou bien $z_2 = t_2$, et dans ce cas $(x ; y) = (x_2 ; y_2)$, ou bien $z_2 \neq t_2$, et alors les entiers t_3 et z_3 , définis par $t_3 = t_2 - z_2$ et $z_3 = 2z_2 - t_2$, vérifient l'égalité $z_3(z_3 + t_3) = t_3^2 + 1$. On peut recommencer le processus et construire une suite $((z_n ; t_n))$ jusqu'à obtenir un entier n tel que $t_n = z_n$. C'est possible, car sinon on obtiendrait une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante d'entiers strictement positifs, ce qui est impossible. On a alors $t_n = 1$ et donc $(x ; y) = (x_n ; y_n)$.

Pour terminer voici un tableau donnant les 15 premières solutions. »

p	f_{2p-1}	f_{2p}	x_p	y_p
1	1	1	1	0
2	2	3	14	5
3	5	8	103	39
4	13	21	713	272
5	34	55	4 894	1 869
6	89	144	33 551	12 815
7	233	377	229 969	87 840
8	610	987	1 576 238	602 069
9	1 597	2 584	10 803 703	4 126 647
10	4 181	6 765	74 049 689	28 284 464
11	10 946	17 711	507 544 126	193 864 605
12	28 657	46 368	3 478 759 199	1 328 767 775
13	75 025	121 393	23 843 770 273	9 107 509 824
14	196 418	317 811	163 427 632 718	62 423 800 997
15	514 229	832 040	1 120 149 658 759	427 859 097 159

NDLR : Si vous voulez bûcher les $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ qui sont là-dessous, vous reprendrez avec profit un grimoire ancien comme le Samuel chez Hermann (1987), récent comme le Duverney chez Dunod (1998). ♡

Les nouvelles. La journée de la régionale. Où ? à Caen, sur les rangs Fresnel, IUFM, Allende. Quand ? le 21 ou 28 mars (cela dépend du conférencier). Les ateliers ? Socle commun, TP au bac S et + si affinités ; du moins cela se dessine mais pour l'instant rien n'est écrit dans le marbre.

Dans le prochain numéro : Reportage des journées de Clermont Ferrand !
Bonne lecture et surtout pensez à alimenter le **Courrier des (é)lecteurs** !

Post Scriptum On aurait bien aimé parler du **Concours Intégral** avec sa composante humanitaire mais le temps manque entre la conception, la lecture et la sortie qu'on souhaitait début décembre à cause des dates des concours ; de mémoire l'an dernier l'inscription devait se faire avant la fin décembre. Il y a aussi le **Concours Général** certes un peu moins fun mais néanmoins enrichissant.