LES $\mathcal{M}$ATHS : L'Ω ?

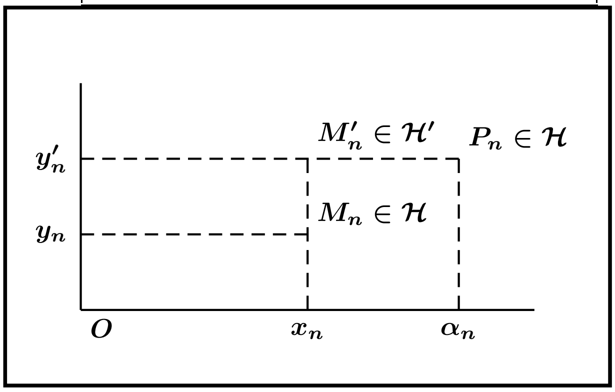
Organe officiel de la Régionale de CAEN de l'APMEP : **Numéro 3 - Année 2007**

Rédacteur en Chef : Richard Choulet

Éditorial. Un petit changement de programme : ce numéro devait être le spécial journées de Clermont. En fait on fait court pour annoncer la journée de la régionale. Donc vous lirez dans ce numéro croupion : deux autres solutions de notre exercice, le programme de la journée du 21 mars et encore un petit exercice à faire.

Bis repetita placent

Prix de géométrie à Claude Dujardin



Voici une solution de notre petit exercice du numéro 1 qui nous est proposée par notre ex-collègue savourant une retraite bien méritée, j'ai nommé Claude Dujardin.
Une solution de l'équation $\binom{x+1}{y} = \binom{x}{y+1}$ - désolé Claude j'ai pris la notation moderne nous sommes envahis par les Anglois - qui devient $(x+1)(y+1) = (x-y)(x-y+1)$, équation d'une hyperbole. Soit $\mathcal{E}$ l'équation : $y^2-(3x+2)y+x^2-1=0$. On s'intéresse aux points de coordonnées entières strictement positives : $0 \leqslant y \leqslant x-1$ c'est-à-dire les points de la branche d'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation : $y = \dfrac{3x+2-\sqrt{5x^2+12x+8}}{2}$. L'autre branche est notée $\mathcal{H}'$.

Il y a, au moins la solution $(1\ ;\ 0)$ avec la convention $0! = 1$. Soit donc une solution $(x_n\ ;\ y_n)$ correspondant au point M_n de $\mathcal{H}$. On peut lui associer le point $M'_n(x_n\ ;\ y'_n)$ de l'autre branche d'hyperbole puis le point $P_n(\alpha_n\ ;\ y'_n)$ de $\mathcal{H}$ (voir le dessin explicatif).
On sait ainsi que l'équation $\mathcal{E}$ admet pour solutions x_n et α_n lorsque $y = y'_n$.
En effectuant la division de $x^2-3xy'_n+y'^2_n-2y'_n-1$ par $x-x_n$, on trouve pour quotient $Q = x+(x_n-3y'_n)$ et pour reste $R = y'^2_n - y'_n(3x_n+2)+x_n^2-1$.

Or $R=0$ puisque $M'_n \in \mathcal{H}$. Ainsi $\alpha_n = 3y'_n - x_n$. Je dis que α_n est un entier car $y_n = \dfrac{3x_n+2+\sqrt{\Delta}}{2}$ en est un par hypothèse ; $y'_n = \dfrac{3x_n+2+\sqrt{\Delta}}{2}$ aussi puisque $3x_n - \sqrt{\Delta} \in 2\mathbb{N}$.
On peut donc poser $\alpha_n = x_{n+1}$ et $y'_n = y_{n+1}$ (on a bien $0 \leqslant y_{n+1} \leqslant x_{n+1}-1$ c'est-à-dire $2y'_n \geqslant x_n+1$ qui équivaut à $3x_n+2+\sqrt{\Delta} \geqslant x_n+1$ ou encore à $\sqrt{\Delta} \geqslant -2x_n-1$.
<u>Exemple</u> : la solution $(1\ ;\ 0)$ fournit $(14\ ;\ 5)$.
<u>Je cherche maintenant une relation de récurrence</u> pour les x_n et les y_n.
x_n et x_{n+1} sont solutions de $x^2-3xy'_n+y'^2_n-2y'_n-1=0$ donc $x_n+x_{n+1} = 3y_{n+1}$ et aussi $x_n+x_{n-1} = 3y_n$ en descendant d'un rang. Par addition : $x_{n+1}+2x_n+x_{n-1} = 3(y_n+y_{n+1})$.
De même pour un x_n fixé, il y a deux points sur $\mathcal{H}$ d'ordonnées y_n et $y'_n = y_{n+1}$ données par $y^2-(3x_n=2)y+x_n^2-1=0$, d'où $y_n+y_{n+1} = 3x_n+2$. On obtient la relation entre les x_n : $\boxed{x_{n+1}-7x_n+x_{n-1}=6}$ $(\mathcal{R}_x)$.
Le même travail avec les y_n donne : y_n et y_{n+1} sont solutions de $\mathcal{E}$ donc $y_n+y_{n+1} = 3x_n+2$ et $y_{n-1}+y_n = 3x_{n-1}+2$ qui donnent par addition $y_{n+1}+2y_n+y_{n-1} = 4+3(x_n+x_{n-1})$ où l'on utilise $x_{n-1}+x_n = 3y_n$. Alors $\boxed{y_{n+1}-7y_n+y_{n-1}=4}$ $(\mathcal{R}_y)$.
<u>Exemple</u> : les couples $(1\ ;\ 0)$ et $(14\ ;\ 5)$ donnent $(103\ ;\ 39)$ puis $(713\ ;\ 272)$, $\cdots$.
<u>En prime</u> : On sait résoudre ce genre d'équations. Par exemple, pour les x, on cherche les suites stationnaires (on trouve $-\frac{6}{5}$) et en posant $X_n = x_n - \frac{6}{5}$ on résout $X_{n+1}-7X_n+X_{n-1}=0$ pour trouver X_n sous la forme $X_n = a\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n$ qui fournissent a et b avec $X_0 = -\frac{1}{5}$ et $X_1 = \frac{64}{5}$. C'est le même travail pour les y.
<u>Prime encore</u> : Ces $(x_n\ ;\ y_n)$ là sont les solutions entières de $y^2-(3x+2)+x^2-1=0$ ou de $x^2-3xy+y^2-2y-1=0$ dont les discriminants respectifs sont donc des carrés parfaits. C'est le cas de $x_0=1$ avec 5^2 et $y_0=0$ avec 2^2 ; $x_1=14$ avec 34^2 et $y_1=5$ avec 13^2 ; $x_2=103$ avec 233^2 et $y_2=39$ avec 89^2 $\cdots$.
NDLR : Le schéma n'est là que pour fixer les notations car vous voyez bien qu'avec la croissance relativement rapide des solutions, on ne saurait faire tenir sur la feuille, sans distorsions, une ébauche de graphique correct visualisant les premières solutions. Y en a qu'ont essayé mais y z'ont eu des problèmes : moi en particulier. Un problème c'est que la courbe est quasiment assimilée à ses asymptotes.

Prix de l'efficacité à la belle solution «carrée» de Didier Trotoux (I.U.T)

En préliminaires notre collègue donne l'équivalence :

$$\frac{(x+1)!}{y!(x+1-y)!} = \frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!} \iff 5(2x-3y)^2-(5y+4)^2-4=0,$$

ce qui l'amène à étudier $X^2-5Y^2=-4$ (1) en posant $X=5y+4$ et $Y=2x-3y$.
«Il s'agit donc de déterminer les solutions entières $(X\ ;\ Y)$ de l'équation (1) telles que $X\equiv 4[5]$.
En effet, $y=\dfrac{X-4}{5}$ et $x=\dfrac{1}{2}\left(Y+3\dfrac{X-4}{5}\right)=\dfrac{1}{10}(5Y+3X-12)$ sont des nombres entiers car $X\equiv 4[5] \Rightarrow 5Y+3X-12\equiv 0[5]$ et il est facile de voir que si $(X\ ;\ Y)$ est une solution de (1), alors X et Y sont de même parité. On en déduit que $5Y+3X-12\equiv 0[2]$.
L'entier $5Y+3X-12$ étant divisible par 5 et par 2, il est divisible par 10. x est bien un entier naturel.
L'équation (1) est dite équation de Pell-Fermat et admet pour solution minimale le couple $(X_1\ ;\ Y_1)=(1\ ;\ 1)$.
On peut montrer que les autres solutions $(X_n\ ;\ Y_n)$ s'obtiennent toutes à l'aide de cette solution minimale par la formule :

$$X_n+Y_n\sqrt{5}=2\left(\frac{X_1+Y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}=2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}. \qquad (2)»$$

Il calcule ensuite X_n et Y_n en précisant que les couples qui nous intéressent sont tous les couples $(X_{2n}\ ;\ Y_{2n})_{n\geqslant 1}$ et ainsi $\begin{cases} X_{2n+2}=\frac{7}{2}X_{2n}+\frac{15}{2}Y_{2n} \\ Y_{2n+2}=\frac{3}{2}X_{2n}+\frac{7}{2}Y_{2n}\end{cases}$ avec $(X_2\ ;\ Y_2)=(4\ ;\ 2)$.

Par calcul matriciel il obtient toutes les solutions du problème par : $\begin{cases} x_{n+1}=8x_n-3y_n+6 \\ y_{n+1}=3x_n-y_n+2\end{cases}$ avec $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Les solutions suivantes sont : $\begin{pmatrix}14\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}103\\39\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}713\\272\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4894\\1869\end{pmatrix}, \ldots$

Il fignole ensuite avec le calcul explicite des solutions en utilisant le nombre d'or $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour obtenir le résultat magique : $\begin{cases} x_n=\dfrac{1}{5}\left(4\cosh((4n-2)\ln(\Phi))+2\sqrt{5}\sinh((4n-2)\ln(\Phi))-6\right) \\ y_n=\dfrac{1}{5}\left(\cosh((4n-2)\ln(\Phi))+\sqrt{5}\sinh((4n-2)\ln(\Phi))-4\right)\end{cases}$.

NB : Cet exercice, délayé à souhait, a constitué la partie II de la deuxième épreuve du CAPES (de maths a priori quoique maintenant avec l'option complémentaire $\cdots$) 2006. Je l'ai trouvé par hasard dans la Revue de Mathématiques Spéciales.

La journée de la Régionale : le 21 mars au lycée Fresnel Caen

Pour entrer : essentiellement rue Eustache Restout -c'est mieux pour se garer- en demandant la cantine à la loge (car c'est dessous qu'on travaille) ou boulevard de Foucault en face du lycée Rostand, les locaux mis à notre disposition (merci à Monsieur Vidot proviseur du lycée et à Dédé son intendant) sont tout de suite à droite après avoir gravi le petit raidillon.

Le programme

de 9 h à 9 h 30 **Accueil café bla bla**

de 9 h 30 à 11 h 15 Ateliers avec :

TICE en terminales : quelle épreuve expérimentale en TS ? Modérateur non encore connu à ce jour

Au collège et après : quel socle commun ? Modérateur non encore connu à ce jour

Encore des maths : existe-t-il un (des) nombre(s) d'argent ? c'est moi qui m'y colle

de 11 h 15 à 12 h 30 Assemblée Générale et son cortège de figures imposées

de 12 h 45 à 14 h **Repas à la cantine (très bien au demeurant) pour ceux qui le souhaitent**

de 14 h à 14 h 45 Compte rendu des ateliers par un lampiste secrétaire de séance

à partir de 15 h Conférence : en gros des maths pour les scribouillards à Babylone par Christine Proust.

Remarque Les trous sont prévus pour les débordements zéventuels, les déplacements ou pour respirer (un p'tit clop ?).

Le nouvel exercice

A, B et C son trois points quelconques fixés du plan. Les points M, N et P sont quelconques tels que le triangle MNP soit équilatéral et que les droites portant ces points passent par A, B et C ; on peut dire, afin de parler d'une même voix, que (MN) passe par C, (NP) passe par A et (MP) passe par B. Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles MNP lorsque M, N et P décrivent le plan ?