A propos du nombre d'or

G. Mison et R. Gauthier

Nous avons essayé de rassembler des activités variées, à caractère géométrique ou algébrique, se rapportant toutes au "nombre d'or".

Ces activités permettent :

— de calculer, avec ou sans machine
— d'organiser des calculs
— d'interpréter des résultats
— de revoir des notions géométriques et trigonométriques
— d'effectuer des dessins
— de mettre en œuvre plusieurs notions du programme de seconde.

Le document complet (pages 56 à 64) a été distribué à chaque élève en cours d'année (février - mars) avec les consignes suivantes : un délai de deux ou trois mois est laissé à chaque élève pour la recherche et la rédaction. Chaque élève devra rendre individuellement un dossier-réponse ; ce dossier pourra être complété d'informations historiques éventuelles, de documents supplémentaires sur le nombre d'or et ses utilisations.
Des heures sont prévues pour répondre aux questions qui peuvent se poser (préciser une rédaction volontairement sommaire, apporter des compléments d'information mathématique, etc.).

En fin d'année scolaire, les dossiers corrigés (partiellement) ont été rendus aux élèves, accompagnés d'un corrigé complet photocopié. La remise de ce document permettait de ne pas corriger en détail toutes les fautes de calcul.

Faut-il préciser que certains travaux rendus furent remarquables (le mot n'est pas trop fort), alors que d'autres furent bien pauvres !

Dans leur grande majorité, les élèves ont effectué les calculs demandés avec une grande conscience, sans voir toujours les liens entre certains résultats.

Il est bien évident que la plupart de nos élèves n'ont pas senti l'unité profonde de ce document, en dépit de nos mises au point.

Ce travail a été fait dans deux classes de seconde au lycée Ampère et au lycée Récamier à Lyon.

Nombre d'or

Activité 1

Avec une machine, si vous tapez 5 puis $\sqrt{\ }$, vous obtenez une approximation de $\sqrt{5}$: 2, 236 068 .
Le but de cette activité est autre : supposons que notre machine ne dispose pas de touche $\sqrt{\ }$, et cherchons cependant des encadrements de ce réel $\sqrt{5}$.

$\sqrt{5}$ est le réel positif dont le carré est 5. Or $4<5<9$ dont $2<\sqrt{5}<3$. Prenez le milieu de l'intervalle $[2;3]$: c'est 2,5 .

$$(2,5)^2=6,25 \ : \ 4<5<6,25 \quad \text{donc} \quad 2<\sqrt{5}<2,5 \ .$$

Prenez alors le milieu de l'intervalle $[2;2,5]$, soit 2,25 et poursuivez la recherche... jusqu'où vous pourrez !

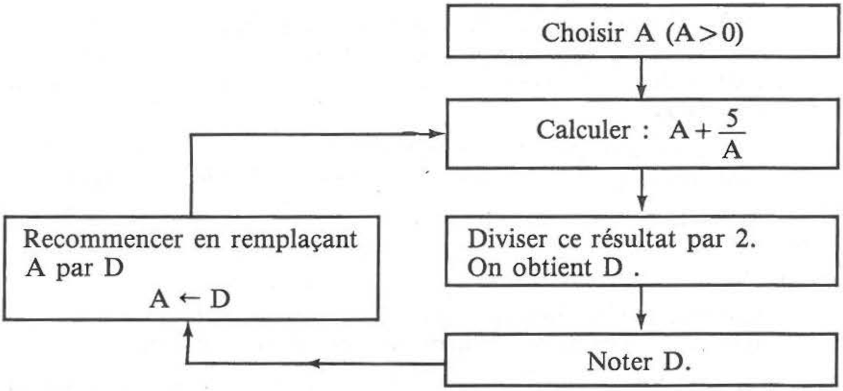
Disposez clairement vos calculs. Vous comprendrez vite pourquoi !

Activité 2

Voici une autre façon de retrouver des approximations de $\sqrt{5}$.

Voici un programme de calcul. C'est vous qui choisissez A au départ. Bien noter tous les résultats D et marquer sur un axe les points successifs ayant pour abscisses ces nombres D trouvés.

Que faites-vous si la machine affiche deux fois de suite le même résultat ?



Recommencer avec un autre A au départ.

Activité 3

Où il est question d'une équation dans **R**, *représentée de la façon suivante par les mathématiciens de Mésopotamie :*
"J'ai retranché le côté de mon carré de la surface de ce carré : 1".

Il s'agit dans notre "langage" de l'équation : $X^2 - X = 1$ ou encore

$$X^2 = 1 + X \qquad (1)$$

1) Montrez que aucun entier naturel n'est solution de cette équation. Pour cela, vérifiez d'abord pour 0 ; 1 et 2 ...
Ensuite, démontrez que si $n > 2$, alors $n^2 > n + 1$.

2) On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vérifiez que ce réel α est solution de cette équation (1). Démontrez ensuite que l'inverse de l'opposé de α est aussi solution de cette équation. (On admettra que α est la SEULE solution positive).

3) Donnez des valeurs décimales approchées de α et de $\dfrac{1}{\alpha}$ et observez bien les décimales...
Comment l'expliquez-vous ?

Activité 4

Où l'on reprend le réel α de l'activité 3 et où l'on s'intéresse à ses puissances successives.

Si l'on se souvient que α est solution de l'équation : $X^2 = 1 + X$, on a immédiatement : $\alpha^2 = 1 + \alpha$.

Cherchons α^3 : c'est le produit $\alpha^2 \times \alpha$ donc

$$\alpha^3 = (1+\alpha)\alpha = \alpha + \alpha^2 = 1 + 2\alpha.$$

Cherchons α^4 : c'est le produit $\alpha^3 \times \alpha$ donc

$$\alpha^4 = (1+2\alpha)\alpha = \alpha + 2\alpha^2 = 2 + 3\alpha.$$

Continuez jusqu'à α^{10} et essayez d'imaginer une règle de "passage" de α^n à α^{n+1}.

Intéressons-nous maintenant aux puissances d'exposants négatifs de α.

On sait que

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \alpha - 1$$

De même :

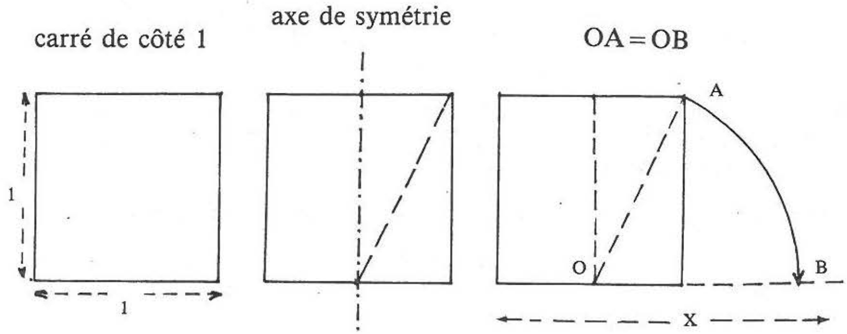
$$\alpha^{-2} = \frac{\alpha^{-1}}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \alpha + 1 = -\alpha + 2 \ldots$$

Continuez jusqu'à α^{-10} et essayez d'imaginer une règle de "passage" de α^{-n} à α^{-n-1}.

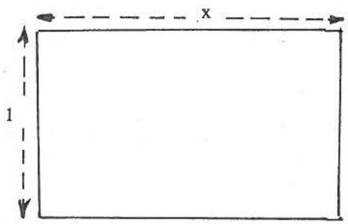
Calculez : $\alpha - \alpha^{-1}$; $\alpha^2 + \alpha^{-2}$; $\alpha^3 - \alpha^{-3}$; $\alpha^4 + \alpha^{-4}$; ...

Activité 5

Où l'on retrouve α en géométrie, comme l'avaient déjà fait les géomètres grecs, bien longtemps avant vous.



Calculez x .



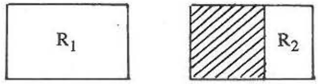
Activité 6

Déjà Euclide avait découvert ces rectangles d'or.

On part d'un rectangle de petit côté 1 et de grand côté X. On supposera X compris entre 1 et 2. C'est le rectangle R1.

De R1, on enlève le carré "hachuré" : il reste alors un rectangle R2. Quelles sont ses dimensions ?

Trouver X pour que le quotient $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ soit le même pour R1 et pour R2.



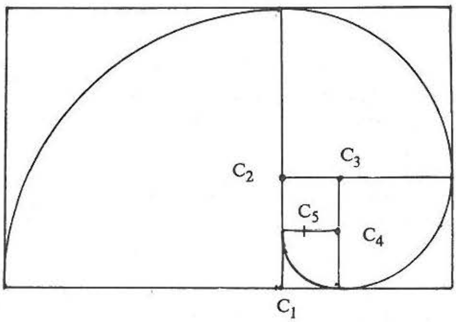
A partir de R2, on recommence : c'est-à-dire que l'on enlève de R2 le carré de côté (X – 1). On obtient un rectangle R3. Quel est, pour R3, le quotient L/ℓ ?

Et vous pouvez continuer...

Activité de dessin

Tracez avec précision un rectangle de dimensions 150 mm × 243 mm. Construisez, à l'intérieur, les rectangles R2, R3, R4... comme l'indique le dessin et, dans chaque carré, tracez un quart de cercle comme il est indiqué : vous obtenez une spirale.

Les dimensions choisies au départ l'ont-elles été au hasard ?



Activité 7

Cette activité était chère à Léonard de Pise, appelé encore Fibonacci (XII^e^ siècle - Italie).

Au départ, choisir deux nombres : A et B. Le troisième est la somme des deux premiers : $C = A + B$.
Le suivant est la somme des deux qui le précèdent : $B + C$ etc.

Vous obtenez ainsi une SUITE telle que chaque terme, à partir du 3^e^, est égal à la somme des deux termes précédents :

$U_1 = A$; $U_2 = B$; $U_3 = U_1 + U_2$ ... ; $U_n = U_{n-2} + U_{n-1}$ ...

En choisissant A et B, écrivez les dix premiers termes de la suite.

On fabrique alors une autre suite à partir de cette suite de Fibonacci : on divise chaque terme par celui qui le précède, à partir du 2^e^ :

$$U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \ldots$$

$$V_1 = \frac{U_2}{U_1} \qquad V_2 = \frac{U_3}{U_2} \qquad V_3 = \frac{U_4}{U_3} \qquad V_4 = \frac{U_5}{U_4}$$

Trouvez des valeurs décimales approchées des termes V_1, V_2, V_3... jusqu'à V_9, avec 7 décimales.
Comparez ces nombres au réel α (activité 3).

Placez sur un axe les points ayant pour abscisses ces réels ; examinez la différence entre deux termes consécutifs et prévoyez la position de V_{10}, V_{11}... Calculez alors V_{10} et V_{11} .

Recommencez avec, au départ, deux autres réels A et B.

Activité 8

Où des intersections de courbes permettent de retrouver (... encore !) le réel α.

1) $f : x \mapsto x^2$ $\qquad$ $g : x \mapsto 1+x$.

Pour x prenant des valeurs dans l'intervalle $[-3; +3]$, tracer avec soin point par point une représentation graphique de f (c'est la parabole d'équation $y=x^2$) puis sur le même dessin celle de g (c'est la droite d'équation $y=1+x$).

Ces deux courbes se coupent en deux points : l'un d'abscisse positive, c'est A. Comparez f(1) et g(1), puis f(2) et g(2) : en déduire un encadrement de l'abscisse du point A. Affinez cet encadrement.

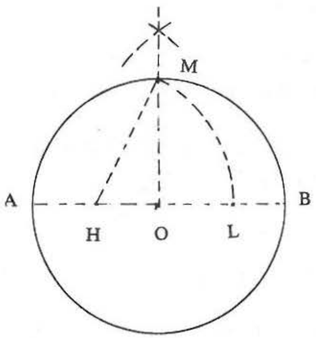
Démontrez que l'abscisse de A est le réel α (n° 3). Encadrez l'abscisse de l'autre point B ; quel est ce réel ?

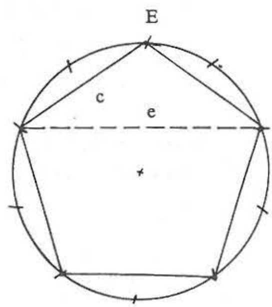
2) Reprendre les activités du 1) avec les deux fonctions suivantes :

$$F : x \rightarrow 1+\frac{1}{x} \qquad G : x \rightarrow x$$

Activité 9

Du dessin géométrique : décagones et pentagones réguliers.





Voici un programme de dessin :
— tracer un cercle de centre O ($R=1$) ;
— tracer un diamètre AB ; H est le milieu de [AO] ;
— OM est un rayon perpendiculaire à AB ;
— le cercle de centre H et de rayon HM coupe OB en L.

Démontrer que $AL=\alpha$ et que $OL=\frac{1}{\alpha}$.

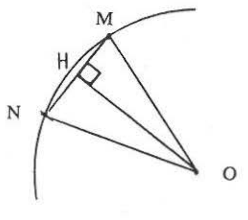
— tracer un autre cercle de même rayon et à partir d'un point E de ce cercle, porter des cordes successives de longueur $OL=1/\alpha$;
— au bout de 10 tracés, on retombe sur le point E. On construit ainsi un *décagone* régulier convexe ;
— construire aussi un décagone étoilé ;
— construire ensuite un *pentagone* régulier convexe puis un pentagone régulier étoilé.

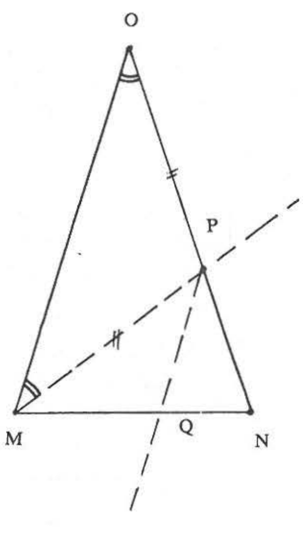
Vous apprendrez peut-être que, pour les pentagones, le quotient :

$$\frac{e}{c} = \text{(côté du P. étoilé) / (côté du P. convexe)} = \alpha .$$

Activité 10

Un triangle d'or... où l'on a besoin de trigonométrie.





Reprenons le décagone régulier de l'activité (9). [MN] est un côté de ce décagone : nous allons nous intéresser au triangle OMN appelé *triangle d'or*, car $OM/MN=\alpha$: démontrez-le !

— Quels sont les angles de ce triangle ?
— Tracez la hauteur [OH] : calculez OH en fonction de α.

— Quels sont les angles et les côtés du triangle OHM ?
— En déduire, en fonction de α, sin 18°, cos 18°, cos 72°, sin 72°.
— Calculez en fonction de α les autres hauteurs de OMN, ainsi que l'aire de ce triangle.

Et l'on refait encore du dessin !

— Dessinez un autre triangle d'or assez grand : prendre par exemple OM = 20 cm et attention aux angles.
— Tracez la bissectrice de $\widehat{OMN}$: elle coupe (ON) en P. Montrez que MNP est encore un triangle d'or et que OP = PM. Calculez alors PN en fonction de α.
— Tracez la bissectrice de $\widehat{MPN}$ qui coupe (MN) en Q. Que dire du triangle PQN ? Démontrez que QP = QM.
Calculez QN en fonction de α.
— ... et vous pouvez continuer avec la bissectrice de $\widehat{PQN}$...
— Mettre en évidence des droites parallèles.

Et en admettant que $\cos 36° = 1 - 2(\sin 18°)^2$, calculez cos 36° en fonction de α.

Activité 11

Avec des fractions... continues.

Simplifiez :

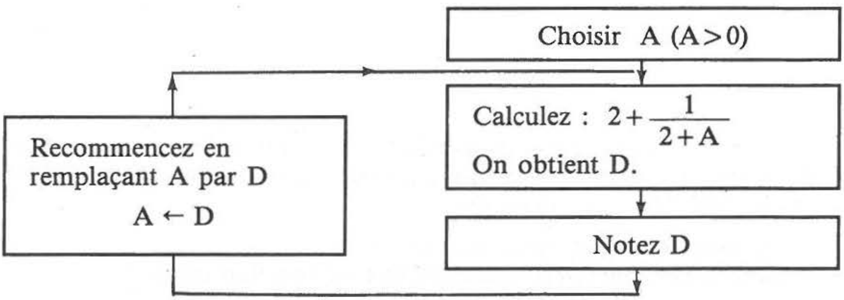
$$2+\frac{1}{2} \quad ; \quad 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}} \quad ; \quad 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}} \quad ; \quad 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

Attention au passage d'une fraction à la suivante ; écrivez ce qui viendrait après : le cinquième terme de cette SUITE.

Donnez des valeurs approchées décimales de chaque fraction.

Comparez à $\sqrt{5}$.

Faites "fonctionner" l'organigramme ci-dessous (voir activité (2)). Quel est le lien avec ce qui précède ?



Activité 12

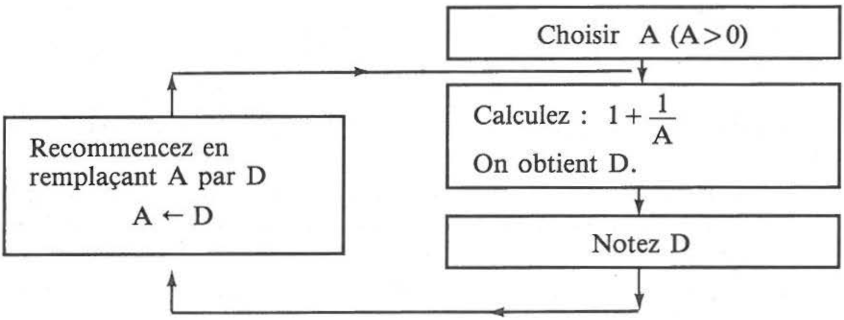
Simplifiez :

$$1+\frac{1}{2}\ ;\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\ ;\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}\ ;\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

Attention au passage d'une fraction à la suivante ; écrivez ce qui viendrait après !

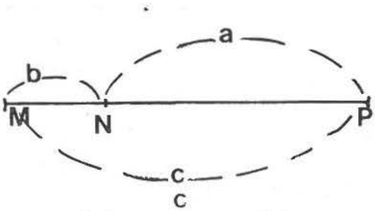
Donnez des valeurs décimales approchées.

Faites fonctionner l'organigramme ci-dessous.
Quel est le lien avec ce qui précède ?
Comparez à α .



Activité 13

Où l'on retrouve encore une activité chère à Euclide.



[MP] est un segment de longueur c , N est un point de ce segment. a et b sont les longueurs respectives NP et NM. On suppose bien sûr que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

— Ecrire tous les quotients X/Y (avec $X \neq Y$) X et Y étant pris dans $\{a;b;c\}$.
Vous trouverez six quotients.

— En associant ces quotients deux à deux, écrire toutes les égalités distinctes qui se présentent (il y en a 15, on peut faire un tableau).

— Remplacer chacune des 15 égalités par une relation simple entre a, b et c.
On rencontrera des cas particuliers : lesquels ?
des impossibilités : lesquelles ?
On montrera en particulier que l'égalité $c^2 = a.b$ est impossible.

— En éliminant les cas particuliers et les impossibilités, il reste DEUX relations : lesquelles ?

— En posant $a = 1$ et $c = 1 + b$, remplacer chacune de ces deux égalités par une relation ne contenant que b.
On vérifiera que le nombre α est solution de l'une des équations obtenues et que $1/\alpha$ est solution de l'autre.

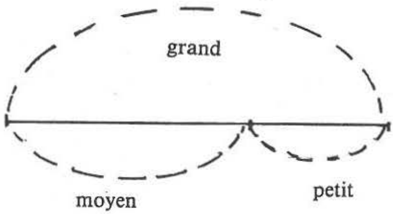
La solution α trouvée correspond à la situation :

$$\alpha = \frac{\textit{grand segment}}{\textit{segment moyen}} = \frac{\textit{segment moyen}}{\textit{petit segment}}$$

C'est ce que l'on appelle la "SECTION DORÉE". Cette étude a déjà été faite par Euclide (Livre VI) :

"Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand est au plus petit"...

On notera que, dans ce texte, "droite" est pris au sens de "segment de droite".

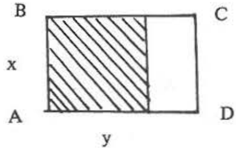


L'escargot d'or

Les activités suivantes permettent :

- en classe de seconde :
  — d'effectuer des dessins
  — de faire du calcul algébrique
  — de la géométrie
- en classe de première :
  — d'étudier des suites
- en terminale :
  — d'utiliser les nombres complexes
  — les similitudes.

ABCD étant un rectangle ($BC > AB$, $BC \neq 2AB$), si on découpe le carré hachuré on obtient un nouveau rectangle. On voudrait que le rapport des côtés du premier rectangle soit égal au rapport des côtés du second rectangle. En désignant par x la mesure de AB et y celle de BC, déterminer le rapport $\frac{y}{x}$ correspondant au problème.



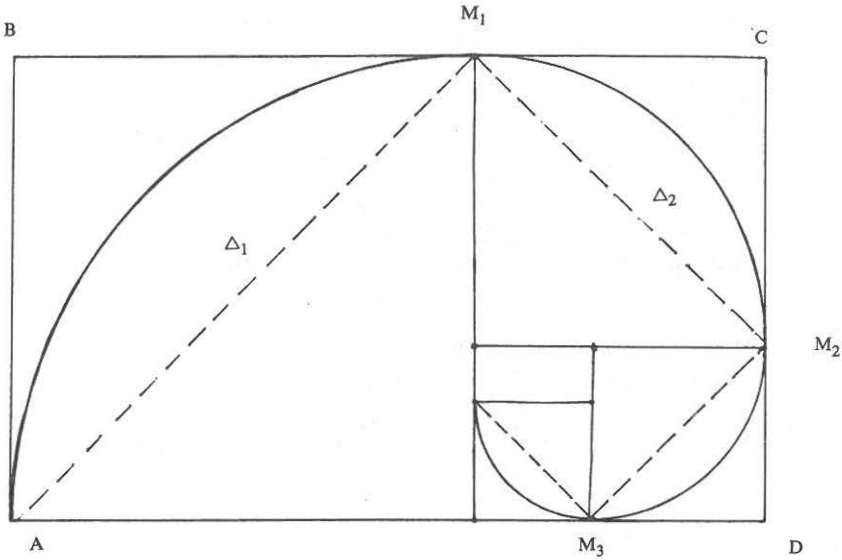
Etude de quelques suites

Etant donné un rectangle R_n, on désigne par L_n, ℓ_n et d_n les mesures respectives de sa longueur, sa largeur et sa diagonale.
Pour R_1, on prend $\ell_1 = 1$ et donc $L_1 = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exprimer L_n et d_n en fonction de ℓ_n , puis L_{n+1} en fonction de L_n, ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n et d_{n+1} en fonction de d_n.

Etudier les suites (L_n), (ℓ_n) et (d_n).

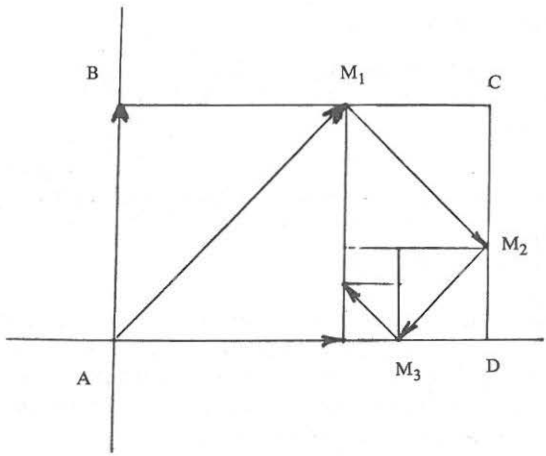
On souhaite, désormais, déterminer la position des carrés successifs obtenus. Pour cela, on décide que si on a tracé une diagonale Δ_n du carré C_n, alors le carré C_{n+1} est construit de sorte que l'une de ses diagonales, Δ_{n+1} ait une extrémité commune avec Δ_{n+1} et soit perpendiculaire à Δ_n.
Faites la construction correspondante.



Essayons de préciser "l'enroulement" de la courbe $AM_1M_2M_3\ldots$ ou encore le problème de "limite de M_n".

Choisissons un repère orthonormé direct $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}=\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AD}$.

Exprimer $M_{n+1}M_{n+2}$ en fonction de M_nM_{n+1}, puis en fonction de $M_{n-1}M_n$. Puis les vecteurs $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ et $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$.



En désignant par z_n l'affixe de M_n, montrer que :

$$z_{n+2}-z_{n+1} = -\frac{i}{\alpha}(z_{n+1}-z_n)$$

En posant $u_n=z_{n+1}-z_n$, exprimer z_n en fonction de $u_0=1+i$.

Soit Ω le point d'affixe $\omega=\dfrac{u_0}{1+\frac{i}{\alpha}}$, étudier $\|\overrightarrow{\Omega M_n}\|$ et sa limite.

Conséquence pour la "suite de points" M_n ?

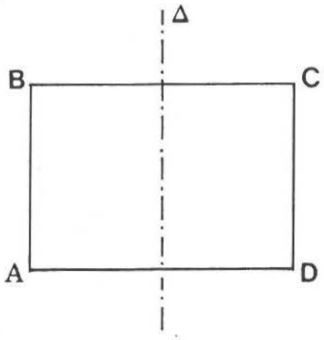
Proposez une construction géométrique simple de Ω.

Le rectangle de l'imprimeur

En imprimerie, on utilise des "formats" normalisés représentés par des rectangles R_0, R_1,... R_n qui obéissent aux règles suivantes :

le quotient $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même pour tous les rectangles.

On obtient le rectangle R_{n+1} en partageant un rectangle R_n en deux suivant la médiatrice des grands côtés.



Si a_n et b_n désignent respectivement la longueur et la larguer de R_n, on a :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = b_n \ ; \ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

d'où :

$$\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}\ .$$

On notera que si l'on prend pour R_0 un rectangle de 1 m² d'aire (format A_0), on trouve pour R_4 les dimensions $29{,}7 \times 21$ en centimètres (format A_4).

Etude de suites

Etant donné un rectangle R_n, on désigne par L_n, ℓ_n et d_n les mesures respectives de sa longueur, sa largeur et sa diagonale. Pour R_1 on prend $L_1 = \sqrt{2}$. Etudier les suites (L_n), (ℓ_n), (d_n) ainsi que la suite (A_n) des aires des rectangles.

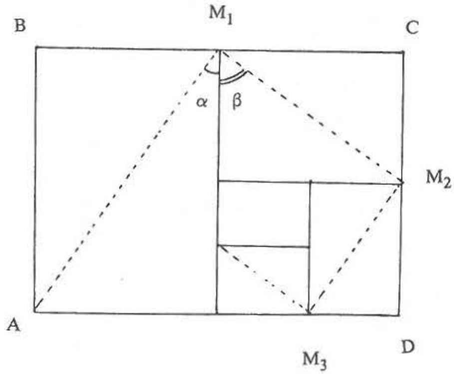
Etude de la ligne polygonale AM_1M_2...

Comme pour *l'escargot d'or* convenons, à partir du rectangle R_n, de placer, à l'intérieur, les rectangles suivants R_{n+1}, R_{n+2} comme l'indique la figure : les diagonales successives AM_1, M_1M_2, M_2M_3... ont une extrémité commune et intéressons-nous à la ligne polygonale $AM_1M_2M_3$...

- Etudier les directions de AM_1 et M_1M_2 ; de M_nM_{n+1} et $M_n + 1M_{n+2}$.
- Exprimer $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ en fonction de $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$, en déduire en désignant par z_n l'affixe de M_n que :

$$z_{n+2} = z_{n+1}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\, z_n\ .$$

• Etudier alors la suite u : $u_0 = z_1 - z_0$, $u_n = z_{n+1} - z_n$. En déduire que la "suite de points M_n" admet un point limite de coordonnées $(\frac{2\sqrt{2}}{3} ; \frac{1}{3})$ dont on précisera la position par rapport à [BD] et au cercle de diamètre $[AM_1]$.



Annexe 1 : L'escargot d'or
Quelques résultats obtenus en Terminale

A. Etude des suites

Rectangle R_1 $\quad \ell_1 = 1 \quad L_1 = \alpha \quad d_1 = \sqrt{1+\alpha^2}$

Rectangle R_{n+1} $\quad L_{n+1} = \ell_n = \frac{1}{\alpha} L_n$

$$\ell_{n+1} = L_n - \ell_n = \ell_n(\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha}\ell_n$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{\alpha} d_n$$

Les suites (L_n), (ℓ_n) et (d_n) sont des suites géométriques de même raison $\frac{1}{\alpha}$, où $\frac{1}{\alpha} < 1$ donc ces suites sont convergentes avec pour limite zéro.

B. Utilisation des nombres complexes (cf. figure)

$M_1M_2 = \frac{1}{\alpha} AM_1$ et plus généralement $M_{n+1}M_{n+2} = \frac{1}{\alpha} M_nM_{n+1}$

et $M_{n+1}M_{n+2} = \frac{1}{\alpha^2} M_{n-1}M_n$

AM_1 est perpendiculaire à M_1M_2, elle-même perpendiculaire à M_2M_3 donc les droites AM_1 et M_2M_3 sont parallèles. Plus généralement, les droites $M_{n+1}M_{n+2}$ et $M_{n-1}M_n$ sont parallèles. Compte tenu du dessin et des conventions faites, on a donc :

$$\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}} = -\frac{1}{\alpha^2}\,\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$$

Le vecteur $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ est l'image de $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$ par l'homothétie vectorielle de rapport $(-1/\alpha^2)$. Si l'on désigne par z_n l'affixe complexe du point M_n, on a donc :

$$z_{n+2}-z_{n+1} = -\frac{1}{\alpha^2}(z_n - z_{n-1}) .$$

Or : $$(\overrightarrow{AM_1},\overrightarrow{M_1M_2}) \equiv -\pi/2\ [2\pi] .$$

De même : $$(\overrightarrow{M_nM_{n+1}},\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}) \equiv -\pi/2\ [2\pi] .$$

Le vecteur $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ est l'image de $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ par la similitude vectorielle de "rapport" $-\frac{i}{\alpha}$ (angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$ et rapport $\frac{1}{\alpha}$).

D'où :

$$(1) \qquad z_{n+2}-z_{n+1} = -\frac{i}{\alpha}(z_{n+1}-z_n)$$

Considérons la suite (U_n) telle que $U_n = z_{n+1}-z_n$.

La relation (1) devient : $U_{n+1} = -\frac{i}{\alpha}U_n \qquad (2)$.

C'est une suite géométrique de nombres complexes, de premier terme $U_0 = z_1 - z_0 = z_1$, $U_0 = 1+i$ (c'est l'affixe du point M_1).

La raison en est $\frac{-i}{\alpha}$.

La somme vectorielle :

$$\overrightarrow{AM_n} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \ldots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n}$$

conduit à l'égalité :

$$z_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$$

d'où : $$z_n = U_0\,\frac{1-\left(-\frac{i}{\alpha}\right)^n}{1+\frac{i}{\alpha}} = \frac{U_0}{1+\frac{i}{\alpha}} - \frac{U_0\left(-\frac{i}{\alpha}\right)^n}{1+\frac{i}{\alpha}}$$

$$(3) \qquad z_n - \frac{U_0}{1+\frac{i}{\alpha}} = -\frac{U_0\left(\frac{-i}{\alpha}\right)^n}{1+\frac{i}{\alpha}}$$

Si l'on désigne par Ω le point image du complexe $\frac{U_0}{1+\frac{i}{\alpha}}$, l'égalité (3) donne avec les modules :

$$\|\overrightarrow{\Omega M_n}\| = \left| \frac{-U_0\left(\frac{-i}{\alpha}\right)^n}{1+\frac{i}{\alpha}} \right| = \frac{|U_0| \times \left|\frac{i}{\alpha}\right|^n}{1+\frac{i}{\alpha}}$$

Examinons alors la suite réelle (W_n) avec

$$W_n = \frac{|U_0| \times \left|\frac{i}{\alpha}\right|^n}{\left|1+\frac{i}{\alpha}\right|}$$

C'est une suite géométrique réelle de raison : $q = \left|\frac{i}{\alpha}\right| = \frac{1}{\alpha}$.

Or $\frac{1}{\alpha} < 1$. Donc cette suite (W_n) converge vers zéro.

Ainsi $\lim\limits_{+\infty} W_n = \lim\limits_{+\infty} (\Omega M_n) = 0$.

On a ainsi démontré que la "suite de points" M_n a un "point limite" : le point Ω, dont il reste à calculer les coordonnées.

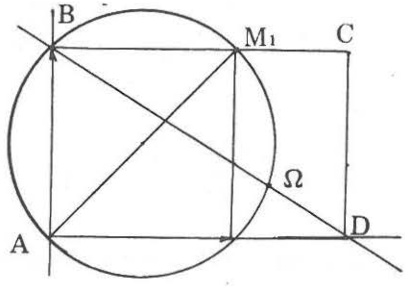
L'affixe de Ω est : $z_\Omega = \dfrac{U_0}{1+\frac{i}{\alpha}} = \dfrac{\alpha(1+i)}{\alpha+i} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha^2+1} + i\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2+1}$

ou encore : $z_\Omega = \dfrac{2\alpha+1}{\alpha+2} + i\dfrac{1}{\alpha+2} = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} + i\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$

L'escargot d'or se "referme" sur ce point $\Omega\left(\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} ; \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$.

Et ce point-limite est facile à construire...

La diagonale (BD) a pour équation : $\frac{x}{\alpha} + y = 1$.



Remplaçons (x,y) par les coordonnées de Ω :

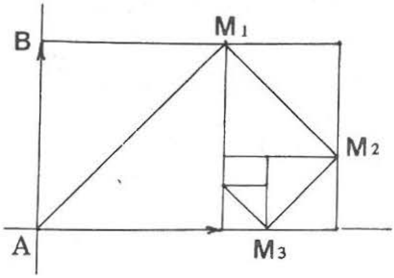
$$\frac{\alpha+1}{\alpha^2+1} + \frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha^2+1} = 1\,.$$

Ce qui montre que Ω est un point de(BD) Quant au cercle de diamètre $[AM_1]$, il a pour équation : $x^2+y^2-x-y=0$.

Le lecteur vérifiera sans peine que Ω est un point de ce cercle... D'où la construction géométrique simple de Ω.

Encore des similitudes

Il existe une similitude directe unique σ qui à $(A\,M_1)$ associe (M_1M_2).



$$\sigma \quad \begin{cases} A(0;0) \rightarrow M_1(1;1) \\ M_1(1;1) \rightarrow M_2(\alpha;2-\alpha) \end{cases}$$

Elle est de rapport $\frac{1}{\alpha}$ et d'angle de mesure $(-\frac{\pi}{2})$.

La fonction F associée dans $\mathbb{C}$ est du type : $F : z \rightarrow z' = -\frac{i}{\alpha}z+b$.

Or, l'origine a pour image M_1 d'affixe $1+i$, donc :

$$z' = -\frac{i}{\alpha}z+(1+i)\,.$$

Le centre de σ vérifie : $z+\frac{i}{\alpha}z=1+i$ d'où $z=\frac{\alpha(1+i)}{\alpha+i}$.

On retrouve l'affixe de notre point Ω ci-dessus.
Ω est donc le centre de notre similitude σ.

On a : $\sigma(A)=M_1$; $\sigma(M_1)=M_2$. Vérifions que $\sigma(M_2)=M_3$.

Coordonnées de M_3 : $\begin{cases} x_3=\alpha-y_2=\alpha-(2-\alpha)=2\alpha-2 \\ y_3=0 \end{cases}$

$$F(z_2) = -\frac{i}{\alpha}(\alpha+i(2-\alpha))+1+i=2\alpha-3=z_3\,,$$

donc : $\sigma(M_2) = M_3$.

De même, on démontre que, si $M_{n+1} = \sigma(M_n)$, alors $M_{n+2} = \sigma(M_{n+1})$.

En effet, $M_{n+1} = \sigma(M_n)$ signifie : $z_{n+1} = -\frac{i}{\alpha} z_n + 1 + i$

Or, d'après (1) : $$z_{n+2} = z_{n+1} - \frac{i}{\alpha} z_{n+1} + \frac{i}{\alpha} z_n$$

D'où l'on déduit : $$z_{n+2} = -\frac{i}{\alpha} z_{n+1} + 1 + i$$

Cette similitude σ de centre Ω transforme M_k en M_{k+1}, quel que soit k . Nous sommes donc capables de calculer les coordonnées d'un point M_{n+1} quelconque en fonction de celles de M_n : il suffit d'utiliser la forme analytique de σ

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{\alpha} y_n + 1 \\ y_{n+1} = -\frac{1}{\alpha} x_n + 1 \end{cases}$$

Et enfin, de la "vraie" géométrie... (voir figure)

• La similitude σ a un angle de mesure $(-\pi/2)$:

$$\sigma(A) = M_1 \quad \text{et} \quad \sigma(M_1) = M_2 .$$

Le centre Ω est donc commun aux cercles de diamètres $[AM_1]$ et $[M_1M_2]$. De même tout cercle de diamètre $[M_nM_{n+1}]$ passe par ce point Ω.

• La similitude composée $\sigma o \sigma$ est une similitude directe de centre Ω et d'angle de mesure π : $\sigma o \sigma(A) = M_2$, donc la droite AM_2 passe par Ω. Il en est de même de la droite M_1M_3, de la droite M_2M_4... et de toute droite M_nM_{n+2}.

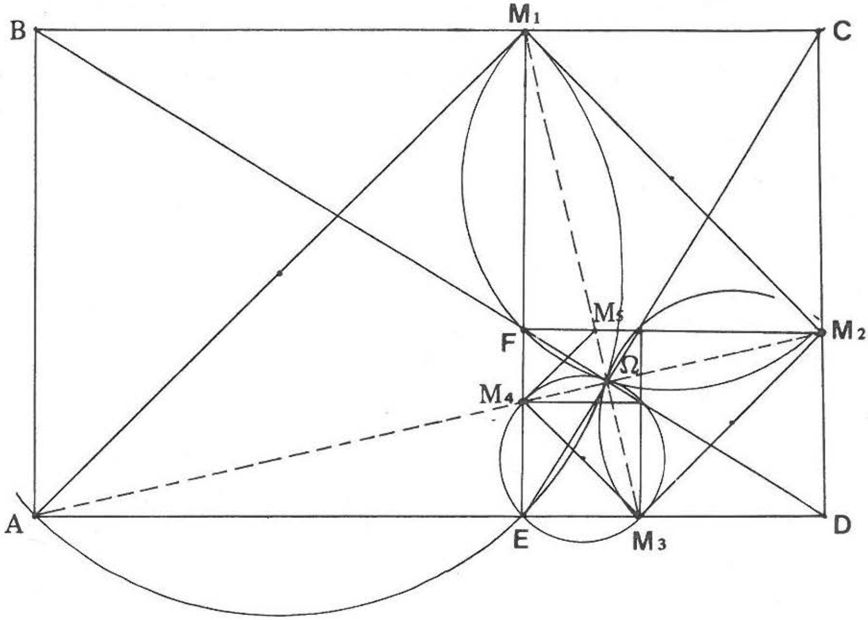
En fait, ΩM_1 est perpendiculaire à ΩM_2... Tous les points M_n se répartissent sur les deux segments : $[AM_2]$ pour les indices pairs et $[M_1M_3]$ pour les indices impairs.

$\sigma(B) = C$ et $\sigma(C) = D$.

Donc ΩC est perpendiculaire à ΩB et ΩD, ce qui confirme que Ω est sur la droite BD. Mais rien n'est jamais fini... on remarquera encore que

$$\frac{M_1B}{M_1C} = \frac{1}{1-\alpha} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\Omega B}{\Omega C} = \alpha \quad \text{d'où} \quad \frac{M_1B}{M_1C} = \frac{\Omega B}{\Omega C}$$

ΩM_1 est donc la bissectrice de $B\Omega C$.



Annexe 2 : Le rectangle de l'imprimeur
Quelques résultats obtenus en Terminale

A. Etude des suites

Rectangle R_1 : $\quad \ell_1 = 1 \qquad L_1 = \sqrt{2} \qquad d_1 = \sqrt{3}$

Rectangle R_n : $\quad \ell_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell_{n-1} \qquad L_n = \frac{\sqrt{2}}{2}L_{n-1} \qquad d_n = \frac{\sqrt{2}}{2}d_{n-1}$

Les suites (ℓ_n), (L_n) et (d_n) sont des suites géométriques de même raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

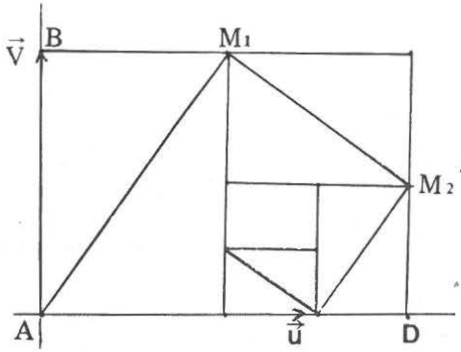
Aire des rectangles : $\quad A_1 = \sqrt{2} \qquad A_n = \frac{1}{2} A_{n-1}$

$\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \beta = \sqrt{2}$ donc AM_1 est perpendiculaire à M_1M_2...

B. Utilisation des nombres complexes

Prenons comme repère $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}$.

$$M_1M_2=\frac{1}{\sqrt{2}}AM_1 \quad \text{et} \quad M_{n+1}M_{n+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}M_nM_{n+1}$$



Par ailleurs : $\qquad (\overrightarrow{AM_1},\overrightarrow{M_1M_2}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

De même $\qquad (\overrightarrow{M_nM_{n+1}},\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Le vecteur $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ est l'image de $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ par la similitude vectorielle de "rapport" (complexe) : $\frac{-i}{\sqrt{2}}$, d'où :

$$(1) \qquad z_{n+2}-z_{n+1} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(z_{n+1}-z_n) .$$

ce qui équivaut à : $\quad z_{n+2}=z_{n+1}(1-\frac{i}{\sqrt{2}})+\frac{i}{\sqrt{2}}z_n$

La suite U telle que $U_n=z_{n+1}-z_n$ est donc une suite géométrique complexes de premier terme

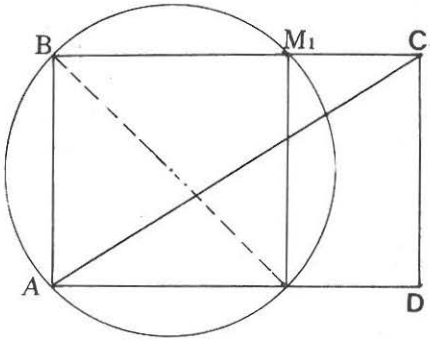
$$U_0 = z_1-z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}+i \qquad \text{et de raison} \qquad (-\frac{i}{\sqrt{2}}) .$$

Une étude analogue à celle qui a été détaillée pour l'escargot d'or conduit à la détermination du "point limite" de la suite de points M_n. On trouvera le point K de coordonnées $(\frac{2\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3})$.

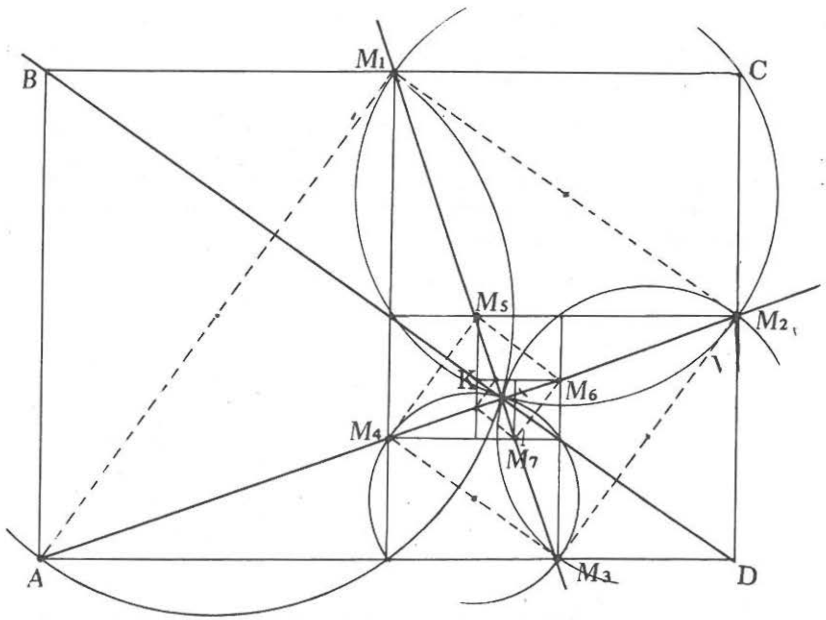
On notera que ce point K est sur la diagonale [BD] et que

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}\ .$$

K est également sur le cercle de diamètre $[AM_1]$, comme pour le point limite Ω, trouvé dans l'escargot d'or.



En reprenant une méthode analogue à celle de l'escargot, on montrera que M_{n+1} est l'image de M_n par la similitude directe de centre K, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle de mesure $(-\frac{\pi}{2})$ associée à la fonction :



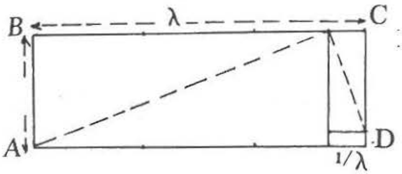
$$z \mapsto -\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{\sqrt{2}+2i}{2}$$

De même, M_{n+2} est l'image de M_n par l'homothétie de centre K et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Les points M_n se répartissent sur les deux droites perpendiculaires AM_2 et M_1M_3.

En conclusion

Visiblement, ces deux situations ne sont que des cas particuliers d'un problème plus général.



Partant d'un rectangle R_1 de largeur 1 et de longueur λ, il s'agit de "découper" dans R_1 un rectangle R_2 tel que

$$\frac{L_2}{\ell_2} = \lambda$$

et ainsi de suite pour R_3, à partir de R_2, etc.

Pour le rectangle d'or : $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\lambda} = \lambda - 1$ (il reste un carré).

Pour le rectangle de l'imprimeur : $\lambda = \sqrt{2}$ et $\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{2}$ (on découpe avec la médiatrice). A chaque λ est associé un "point limite" situé sur BD... Ce point limite L est le barycentre de B et D, de coefficients respectifs 1 et λ^2, dans les deux situations étudiées.

Mais est-ce un résultat général ?