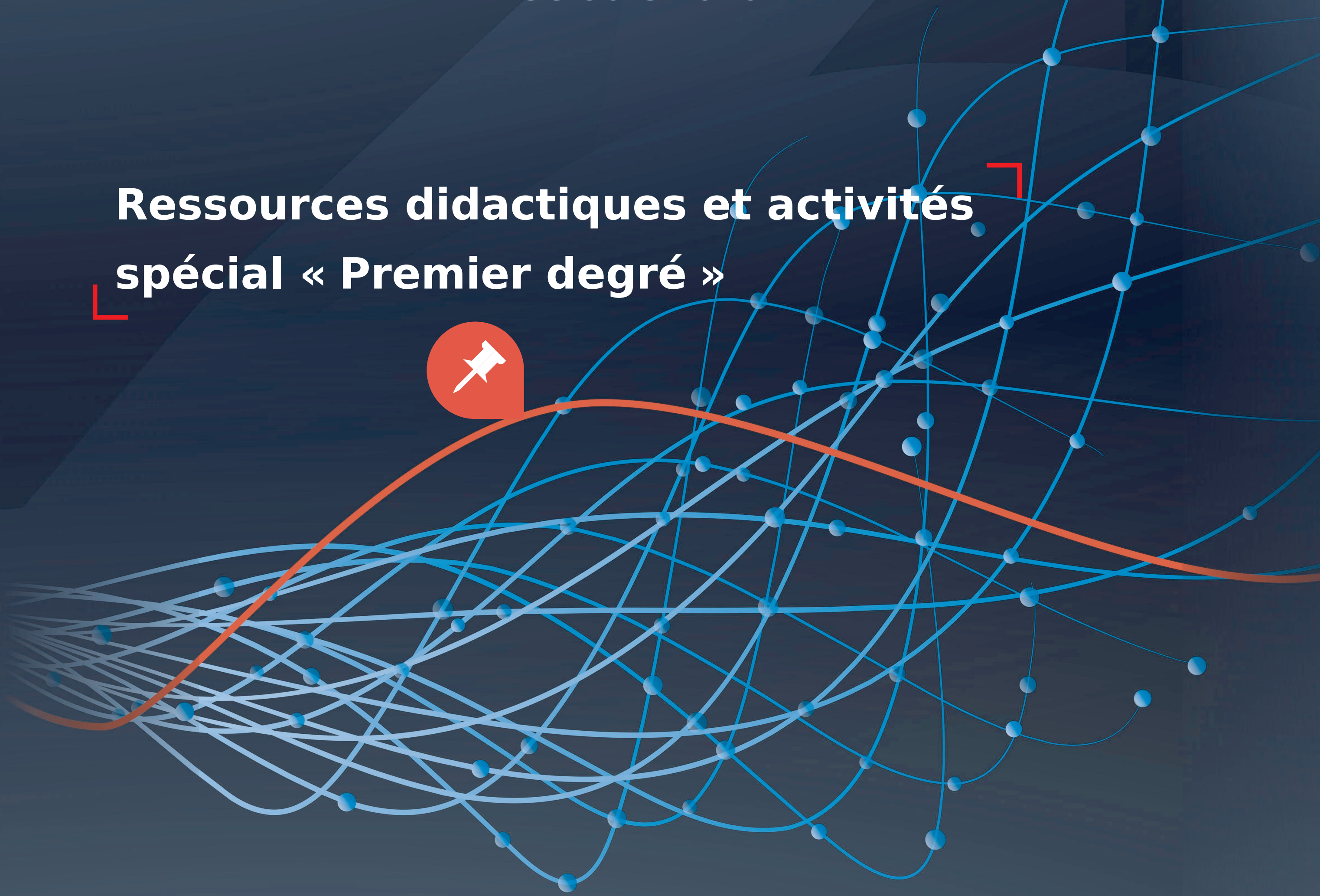
Le bulletin de l’APMEP - Numéro spécial

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l’université. . .

Octobre 2020

Ressources didactiques et activités spécial « Premier degré »



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

AU FIL DES MATHS

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Octobre 2020
ISSN : 2608-9297

Présentation

L'APMEP, l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, est heureuse de mettre à votre disposition ces quelques articles issus de ses publications récentes. Nous espérons qu'ils vous seront utiles à la fois dans votre culture mathématique et didactique personnelle, et dans votre pratique de classe ou votre mission de RMC.

Au fil des maths, le bulletin trimestriel de l'APMEP, s'adresse à tout enseignant de mathématiques, de la maternelle à l'enseignement supérieur. Il s'agit d'une revue professionnelle, tournée vers les préoccupations et besoins « de terrain », complémentaire de revues plus didactiques et théoriques telles que *Grand* $\mathbb{N}$ ou *Repères IREM*. Nous publions à chaque numéro un ou plusieurs articles en lien avec l'enseignement en école primaire. Vous serez probablement aussi intéressé·e par des articles tournés vers la 6ᵉ, sources d'inspiration possible pour les classes de CM1 et CM2, qui donnent aussi accès à des idées pour enseigner les mathématiques en vue du cycle 4.

Un numéro d'*Au fil des maths* est toujours constitué de cinq rubriques principales :

« Opinions »
Des débats sur l'actualité de l'enseignement, des paroles d'experts.

« Ouvertures »
Des mathématiques pour réfléchir ou pour sortir des sentiers battus, des découvertes, des liens avec d'autres disciplines.

« Avec les élèves »
Des activités de classe, des analyses didactiques, des échanges de pratiques pour tous niveaux.

« Récréations »
Des jeux pour vous et vos élèves, des énigmes et problèmes, des curiosités mathématiques.

« Au fil du temps »
Des éléments d'histoire des mathématiques, des anniversaires, des rendez-vous réguliers.

Les articles de didactique sont écrits par des auteurs actuels reconnus en recherche, avec l'objectif de se mettre à la portée de tout enseignant ou formateur. La plupart peuvent donc être utilisés tels quels pour se former, faire réfléchir ou approfondir un point de didactique. Ils sont émaillés d'exemples et accompagnés d'une bibliographie qui vous permettra d'aller plus loin sur le sujet, selon vos besoins.

Les articles de pratique de classe relatent des expérimentations ou présentent des ressources qui ont toutes été testées avec des élèves. Ils cherchent à en dégager à la fois les points forts et les limites. Là encore, vous pourrez y puiser des idées, cette fois très concrètes ; la plupart des activités sont quasiment « clefs en main » mais sont bien sûr destinées à être adaptées au contexte dans lequel vous travaillez.

« Au fil des problèmes » propose dans chaque numéro de jolis problèmes à chercher : pour vos élèves parfois, pour vous toujours ! Une source d'inspiration, en tout cas.

Enfin, nous recensons la plupart des ouvrages mathématiques qui sont édités. Parmi eux, quelques pépites pour l'école primaire, mais aussi des contenus de niveaux variés qui sauront aiguiser votre curiosité mathématique.

*

* *

Dans le même esprit que cette sélection, *Au fil des maths* mettra en vente dans les prochains mois un hors-série spécial « Premier degré ». Vous pourrez y retrouver ces articles en version papier, complétés par de nombreux autres parus au fil des numéros de la revue et par quelques jeux issus des travaux du groupe « Jeux » de l'association et utilisables clefs en main en classe.

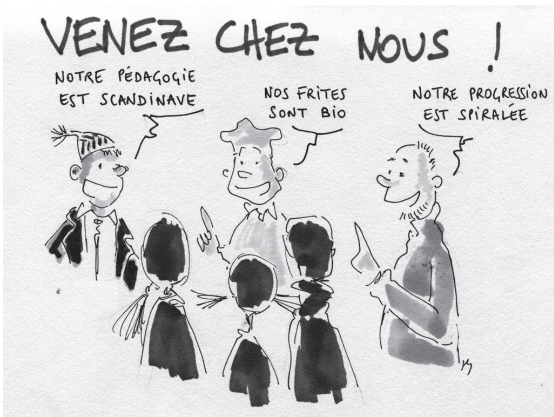
Ce hors-série pourra être acheté en ligne à l'adresse suivante :

En attendant, vous avez accès à cette adresse à la boutique en ligne, qui contient toutes les ressources « premier degré » éditées par l'association.

Pour adhérer à l'association, rendez-vous ici :
ou en avant-dernière page de ce fichier.

* *

*



Sommaire

Manipuler en mathématiques. . . oui mais

Cet article propose une mise en scène d'actions de formation afin de lancer un débat sur le rôle et la place de la manipulation au sein d'une séquence de mathématiques. À lire de la maternelle à l'université ! Vos réactions seront les bienvenues.

Joël Briand

Au moment où le ministère met en avant une méthode appelée imprudemment « méthode de Singapour » avec sa marchandisation associée [1], au prétexte que les élèves y mènent des activités « *mathématiques concrètes à partir de matériel attrayant* » et passent « *du monde concret qui leur est familier à une vision abstraite* », il convient de revenir sur le rôle et la place de la manipulation et de l'expérience [2] dans l'activité mathématique. Ce point est en effet mis en avant par les promoteurs de la « méthode ». L'enfant manipulerait, il schématiserait et enfin il passerait à l'abstraction.

> Or, depuis 40 ans, les recherches en didactique des mathématiques ont montré à la fois l'importance de la manipulation dans la genèse d'une activité mathématique mais aussi les obstacles à l'acquisition de savoirs mathématiques qu'une manipulation mal organisée pouvait créer.

En tant que formateur, j'ai l'habitude d'aborder cette question à l'aide d'un exemple qui consiste à faire une analyse comparée de deux séquences (fictives) se déroulant dans un cours préparatoire. Le même type d'analyse peut être effectué dans une séquence de classe de collège. Je donnerai donc un second exemple.

En cours préparatoire

Imaginons deux professeurs des écoles qui se donnent pour but de faire concevoir que $4 + 3$ font 7. Pour organiser leur séance de classe, ces deux professeurs décident d'utiliser du matériel : ce sont deux boîtes et sept cubes.

Le premier professeur montre quatre cubes et les place dans une boîte. Il écrit « 4 » au tableau. Il montre ensuite trois cubes, les place dans l'autre boîte. Il écrit « 3 » au tableau. Devant les élèves, il renverse le contenu de la seconde boîte dans la première. Il fait alors compter le tout. Les élèves disent « 7 ». Le professeur approuve et complète au tableau en écrivant $4 + 3 = 7$. Les élèves recopient cette égalité sur leur cahier.

Le second professeur, avec le même matériel montre quatre cubes et les place dans une boîte. Il écrit « 4 » au tableau. Il montre ensuite trois cubes, il les place dans l'autre boîte. Il écrit « 3 » au tableau. Devant les élèves, il renverse le contenu de la seconde boîte dans la première et **ferme cette boîte**. Il donne alors la consigne : « *Prévoyez le nombre de cubes qu'il y a dans la boîte fermée. Pour cela, vous pouvez écrire ce qui vous paraît utile sur votre cahier de brouillon. Lorsque vous aurez prévu, nous ouvrirons la boîte pour vérifier* ».

Après un moment, les élèves annoncent leurs prévisions et la façon dont ils ont pu prévoir à l'aide d'un écrit ou/et de gestes (comptage à l'aide des doigts, dessins des boîtes et des objets, bâtonnets, numérotage, nombres écrits, etc.), la boîte est ouverte et le professeur fait compter le tout. Les élèves disent « 7 ». Certaines prévisions s'avèrent donc justes, d'autres fausses. Le professeur complète au tableau en écrivant $4 + 3 = 7$. Les élèves recopient sur leur cahier.

1. Une analyse didactique vous en sera proposée dans le nº 532 de notre revue.
2. *La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe*, Revue « Petit x », nº 75, pp. 7-33, 2007.

Professeur 1

4 3

écrit au tableau

Boîte ouverte.
La nature de la tâche est de dénombrer une quantité ; résultat : 7.

$4+3=7$

Le professeur écrit au tableau $4+3=7$.

Même milieu matériel.

Professeur 2

4 3

écrit au tableau

Boîte fermée.
La nature de la tâche est de prévoir à l'aide d'écrits personnels un nombre.

Les prévisions sont validées ou invalidées en ouvrant la boîte.

$4+3=7$

Le professeur résume les écrits personnels en institutionnalisant à l'aide de $4+3=7$.

Comparons ces deux moments de classe.

Le premier professeur a illustré à l'aide d'une manipulation ce qu'il veut faire apprendre :

$4+3=7$. Les élèves n'ont eu à aucun moment à prévoir un « résultat » qui serait issu d'une utilisation des signes « 4 » et « 3 ». Leur tâche a été de dénombrer une quantité présente à leurs yeux. L'écrit lié à ce moment est celui donné *in fine* par le professeur : $4+3=7$.

Le second professeur organise un moment afin que les élèves, à l'aide d'un langage écrit en devenir, prévoient un résultat. La tâche des élèves consiste à produire des écrits qui permettent de contrôler ce que contient la boîte fermée. L'ouverture de cette boîte permettra de valider (ou d'invalider) les prévisions. L'écriture $4+3=7$ (écriture experte) qui sera donnée par le professeur sera une autre façon d'écrire ce que les élèves avaient déjà rédigé.

> Nous pouvons dire que, dans ces deux moments de classe, le **milieu matériel** est le même. C'est le **milieu d'apprentissage** qui a changé.

En comparant les deux tableaux, un visiteur pourra observer que les deux professeurs ont écrit le même texte : $4+3=7$, et pourra conclure un peu trop rapidement que ces deux professeurs ont fait la même leçon.

L'idée communément admise que, pour faire des mathématiques il faut manipuler, est donc porteuse de graves malentendus.

> Les deux scénarios s'appuient sur une manipulation mais seul le second propose une activité mathématique, c'est-à-dire une activité au cours de laquelle les élèves ont à produire un modèle (par une représentation ou un écrit) qui permet de contrôler une action effectuée dans un milieu matériel.

Bien sûr, il faudra plusieurs séances pour que les élèves progressent dans les écrits mais l'activité mathématique se situe au niveau de l'écrit. L'écrit sert à prévoir ; les formes d'écrit évoluent toujours avec pour but de contrôler le milieu matériel. L'écriture $4+3=7$ ponctue l'évolution des écrits des élèves. *A contrario*, le premier scénario ne donne aucune garantie sur ce que peut signifier l'écriture $4+3=7$, qui ne fait suite à aucune production écrite des élèves. La phrase $4+3=7$ sera éventuellement retenue par ceux des élèves qui ont bien intégré qu'au-delà de la manipulation, l'enjeu à l'école est d'apprendre cette égalité.

En sixième

Cette analyse peut être conduite de l'école maternelle au lycée en passant par le collège. Imaginons le même montage de formation à partir d'un autre exemple, cette fois en nous servant des travaux des collègues de l'IREM de Lyon[3] à propos de l'addition de fractions décimales en sixième, et en construisant deux scénarios comme précédemment.

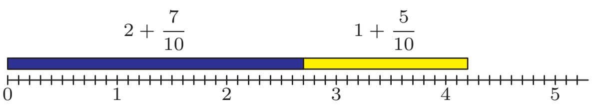
Scénario 1 : le professeur propose à chaque élève ou groupe d'élèves deux bandes de longueurs différentes dont la mesure donnée est une fraction décimale de l'unité (l'unité pouvant être le mètre). La première bande mesure $1u + \frac{3}{10}u$ la seconde mesure $\frac{85}{100}u$. Ces deux mesures sont écrites au tableau. Il demande de mettre bout à bout ces deux baguettes puis de mesurer la baguette obtenue. Le résultat du mesurage (sous contrôle du professeur) est $2u + \frac{1}{10}u + \frac{5}{100}u$. Il écrit ensuite au tableau :

$$\left(1u + \frac{3}{10}u\right) + \frac{85}{100}u = 2u + \frac{1}{10}u + \frac{5}{100}u.$$

Scénario 2 :[4] le professeur montre les deux bandes de mesures et donne leurs mesures. La première mesure $1u + \frac{3}{10}u$, la seconde mesure $\frac{85}{100}u$. Les élèves doivent d'abord prévoir quelle sera la longueur obtenue en mettant les deux bandes bout à bout puis trouver une disposition des nombres qui leur permette d'effectuer rapidement l'addition posée des deux mesures. Les élèves effectuent des calculs et produisent un résultat. Le mesurage effectif permettra de valider ou d'invalider les prévisions des élèves. On peut prévoir une discussion liée à l'équivalence d'écritures.

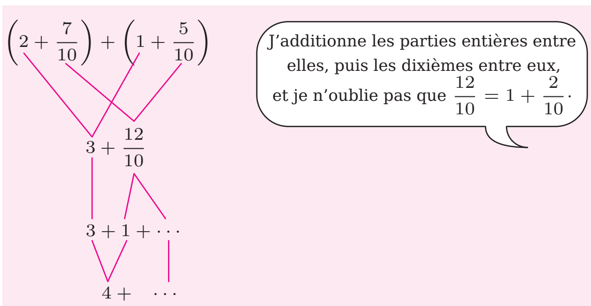
La même analyse que celle effectuée au cours préparatoire peut être conduite. Le milieu matériel est le même ; le milieu d'apprentissage diffère. Dans le scénario 1, la manipulation est une finalité. La tâche des élèves est de mesurer la bande obtenue par mise bout à bout des deux bandes. Seuls les élèves qui ont compris que l'enjeu n'était pas de mesurer mais de se servir des mesures données auront éventuellement appris quelque chose. Dans le scénario 2, la manipulation sert à la fois à poser le problème et à valider (ou invalider) des résultats prévisionnels obtenus à l'aide d'un travail sur les écrits mathématiques. La consigne du professeur engage les élèves à travailler à l'aide des écritures des deux mesures.

Ajoutons que le passage d'une validation pragmatique (par mesurage de la bande obtenue par mise bout à bout des deux bandes) à une validation syntaxique (les calculs) est porteur de ruptures. Prenons cette fois deux bandes l'une de mesure $2u + \frac{7}{10}u$ et l'autre de mesure $1u + \frac{5}{10}u$ et reprenons le déroulement du scénario 2. Les élèves prévoient. La vérification des prévisions s'effectue par mise bout à bout des deux bandes :



Vérification par mise bout à bout.

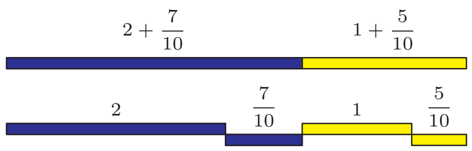
Cette vérification matérielle valide ou invalide les prévisions. Le professeur s'appuie alors sur les écritures et leur transformation, à la manière de cette illustration.



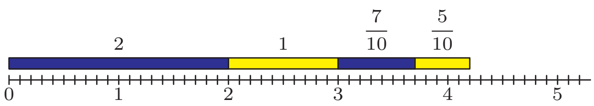
Les calculs.

3. S. Roubin et B. Rozanes (IREM de LYON).
4. Proposé par l'équipe de l'IREM de Lyon :

Si, pour les élèves, les deux mesures signifient « les deux bandes », alors les calculs constituent une rupture de signification. En effet, les élèves qui cherchent à faire le lien entre le matériel et les calculs sont à la peine. Pour que le lien puisse se reconstruire, il faut sans doute revenir sur les deux bandes et effectuer des découpages et un réassemblage :



Retour sur le matériel.



Réassemblage.

Conclusions

- Dans les deux exemples, le premier scénario aurait sa place en classe à condition qu'il ait pour seul objectif d'expliquer la règle d'un jeu qui se joue avec le second scénario.
- La manipulation, si elle n'est pas intégrée dans un processus d'apprentissage, ne permet pas aux élèves de progresser, sauf pour ceux qui ont compris qu'au-delà de la manipulation, le seul enjeu était de retenir le savoir affiché par le professeur. Si le résultat peut être obtenu par l'action, les élèves n'ont pas à engager un travail cognitif. Ils se bornent à faire des constats qui restent attachés au contexte.
- Le passage d'une validation pragmatique à une validation syntaxique est constitué de continuités et de ruptures. Il est donc utile de lier les transformations dans le milieu des signes et les transformations dans le milieu matériel lorsque c'est possible.
- Cet enseignement qui consiste à demander de prévoir est-il destiné à une élite du côté des élèves ? Non, bien au contraire ! **La tendance à vouloir faire manipuler (au sens des premiers scénarios) les élèves qui seraient en difficulté en mathématiques ne fait que creuser l'écart entre ceux qui sont déjà entrés dans les écrits mathématiques et ont compris leur usage et ceux qui tardent à comprendre l'intérêt de ces écrits.**

En conclusion, déclarer qu'il est nécessaire de passer « *du monde concret. . . à une vision abstraite* » est une vieille lune qui n'a jamais aidé à construire des séquences de classe et à laquelle il est toujours bon d'opposer ce qu'écrivait Paul Langevin : « *Le concret, c'est de l'abstrait devenu familier par l'usage* ».

Références

[1] I. Bloch. « Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyse théorique et contingence. » In : *Actes de la 11e École d'Été de DDM, Corps 2001* (2002), pp. 125-140.

[2] T. Assude. « Travaux pratiques au collège ? Conditions et contraintes d'émergence et de vie d'un dispositif ». In : *M. Bridenne (eds)* Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées (2002).

[3] J. Bolon. « L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire ». In : *Grand* ℕ 52 (1992).

[4] J. Briand. « La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe ». In : *Petit x* 75 (2007), pp. 7-33.

[5] J. Briand. « Réflexions actuelles sur les mathématiques à l'école primaire ». In : *Le Café pédagogique* (2010).

[6] C. Chambris. « Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du XXe siècle. Connaissances des élèves actuels. » Paris 7, 2008.

[7] G. Brousseau. « Le contrat didactique : le milieu ». In : *RDM* 9.3 (1988).

[8] Y. Chevallard. « Le caractère expérimental de l'activité mathématique ». In : *Petit x* 30 (2007), pp. 5-15.

[9] T. Dias. « La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. » Lyon, Université Claude Bernard, 2009.

Joël Briand est maître de conférences honoraire en mathématiques et formateur en IUFM-ÉSPÉ à Bordeaux.

briandjoel@free.fr

Résolution de problèmes et apprentissage de la langue à l'école élémentaire

Comprendre un énoncé de problème en mathématiques n'est pas toujours simple pour des élèves, mais c'est déterminant pour la réussite... Annie Camenisch et Serge Petit nous proposent ici quelques pistes pour travailler sur la langue en mathématiques en cycle 2.

Annie Camenisch & Serge Petit

Le langage oral et écrit a une place prépondérante dans toutes les étapes liées à la résolution de problèmes mathématiques : en amont pour comprendre les énoncés sous forme textuelle, voire non textuelle, pendant la résolution pour garder trace de son raisonnement, en aval pour communiquer le résultat. Parce qu'elle est inégalement maîtrisée par les élèves, la langue peut s'ériger en obstacle à la résolution de problème. La tentation est alors forte de simplifier à outrance l'énoncé ou la réponse attendue afin d'éviter toute difficulté liée à la langue, remettant à plus tard (ou à jamais) l'autonomie de certains élèves. Nous avons adopté la posture inverse, à savoir, dès la classe de CP, de permettre aux élèves de réaliser des apprentissages explicites portant sur la langue. En effet, en nous appuyant sur des constats tirés des classes, nous proposons de développer des stratégies de lecture et des activités écrites de reformulation, propositions dont certains effets peuvent être mesurables.

Le problème

La question suivante a été proposée à des enseignants de cycle 3[1] : *« Quelle est la principale difficulté que vos élèves rencontrent en résolution de problèmes ? »*. Parmi les réponses fournies par les enseignants ressort comme problème principal, la non compréhension des énoncés de problèmes, difficulté soulignée par ailleurs dans des évaluations internationales comme PISA ou TIMSS.

Voici trois exemples de réponses :

Enseignant 1 : « Lors de résolution de problèmes, les principales difficultés observées se trouvent dans la lecture et la compréhension de l'énoncé ; c'est là que l'on retrouve certaines difficultés rencontrées lors des apprentissages de la langue française, [...] » ;

Enseignant 2 : « La principale difficulté se situe au niveau de la lecture et de la compréhension. Il faut d'abord expliquer ce dont il s'agit ; les faire réagir par rapport à des situations de la vie courante » ;

Enseignant 3 : « Les principales difficultés rencontrées par mes élèves en résolution de problèmes sont d'une part, la compréhension de l'énoncé [...] ».

Un autre enseignant fournit un exemple tiré d'une classe de CE2 :

> « La maman de Sophie n'a que des billets de 5 € dans son porte-monnaie.
> Au total, elle a 35 €.
> Combien a-t-elle de billets ?
> Voici le raisonnement et la réponse de l'élève :
> $5+5+5+5+5+5+5=35$
> Elle a 35 €. »

L'enseignant précise : « Les élèves rencontrent des difficultés pour interpréter leur calcul. Le calcul est exact. En revanche, la réponse n'est pas juste. »

1. La question suivante a été proposée à des enseignants de cycle 3 lors d'une conférence en février 2018.

L'erreur portant sur la réponse qui ne correspond pas à la question posée, alors que le calcul est exact, donne un indice sur une certaine incompréhension de l'élève. Quelles hypothèses peut-on émettre sur ses causes ?

- Étourderie ? Peut-être.
- Non compréhension de la question posée ? Peut-être pas puisque la décomposition de 35 correspond bien à cette question.
- Incapacité à relier une représentation dans le registre des écritures symboliques mathématiques ($5+5+5+5+5+5+5=35$) à la représentation correspondante en langue naturelle (chaque 5 écrit représente un billet de 5 €) ? Peut-être.
- Perte de vue de l'objectif ? Peut-être aussi.

Comment dès lors est-il possible de permettre à cet élève et à bien d'autres de cadrer leur travail, de se forger par eux-mêmes les rails de sécurité nécessaires ?

Un travail explicite portant sur la langue française peut développer cet auto-guidage nécessaire vers la rédaction d'une phrase réponse correcte.

Une stratégie possible de lecture d'un énoncé de problème

Si l'élève doit parvenir *in fine* à comprendre l'énoncé en autonomie, il appartient à l'enseignant de donner des outils permettant aux élèves d'avoir accès à cette compréhension. Cela se traduit souvent en classe par des relectures ou reformulations orales de l'énoncé, à chaque fois recommencées, mais non par le développement d'une stratégie explicite, transposable à tout énoncé.

> On peut ainsi faire porter l'attention des élèves sur certaines difficultés langagières récurrentes apparaissant souvent dans les énoncés. Ces difficultés peuvent être lexicales (mot inconnu qui bloque la représentation) ou grammaticales. Si les premières peuvent se résoudre en convoquant explicitement l'univers de référence, les secondes demandent un travail écrit systématique (au début du cycle 2) ou différencié (en fonction des compétences de lecture des élèves).

C'est souvent le cas lors de l'utilisation de pronoms dans les énoncés où le référent d'un pronom n'est pas toujours clairement identifié, pronom personnel *il ou elle* au début des apprentissages, mais surtout les pronoms *en* ou *y*, voire le pronom indéfini *chacun*.

Dans l'énoncé ci-dessus, la présence du pronom *elle* ne semble pas avoir d'incidence sur la compréhension. Si l'on retient l'hypothèse d'une perte de vue de l'objectif du problème, il convient de développer chez l'élève une certaine posture adaptée à ce type d'écrit spécifique aux mathématiques.

Un énoncé de problème étant composé d'une partie informative et d'une partie injonctive, le plus souvent sous forme de question, une stratégie de lecture spécifique à cet écrit consiste à décomposer les deux séquences textuelles. On peut ainsi faire repérer et reformuler ce qu'il faut chercher.

L'élève sera vraisemblablement attiré par une phrase du type : je cherche « Combien a-t-elle de billets ? » souvent spontanément reformulée sous la forme « Je cherche combien elle a de billets ».

Le déterminant interrogatif « Combien ... de » indique ce que l'on cherche : un déterminant numéral. Une reformulation plus appropriée, à faire exprimer aux élèves, est alors « Je cherche le nombre de billets de ... ». Cette reformulation attire l'attention sur la nature de ce qui est cherché, à savoir, dans l'énoncé ci-dessus, un nombre de billets et non une somme d'argent. On peut pour cela demander à l'élève d'anticiper une phrase réponse « en laissant un trou pour le nombre que l'on cherche », par exemple « La maman de Sophie (ou Elle) a ______ billets (dans son porte-monnaie) ». L'élève ayant reformulé la réponse ne perd alors plus sa cible de vue. Il faut remplir la case vide. Une relecture de l'énoncé avec cet objectif fixé facilite aussi le repérage des informations nécessaires à la résolution du problème.

Subsiste alors le problème du sens de l'écriture $5+5+5+5+5+5+5=35$, ou plus simplement de l'écriture $5+5+5+5+5+5+5$ dans le contexte donné. Il s'agit typiquement d'un problème de représentation ou plutôt d'articulation de représentations. L'élève doit comprendre que chaque 5 écrit dans le membre de gauche de l'égalité représente un billet de 5 €. Il suffit donc de dénombrer ces 5 et de conclure en complétant la phrase réponse.

> On saisit ici l'importance d'associer entre elles des représentations et de considérer les articulations de registres comme des objets explicites d'enseignement et d'apprentissage.

La stratégie ici suggérée est donc la suivante :

- repérer les difficultés lexicales de l'énoncé (s'il y en a) ;
- repérer les difficultés grammaticales de l'énoncé (s'il y en a) ;
- repérer la question ;
- reformuler la question afin de rédiger une phrase réponse ;
- rédiger une phrase réponse « à trou », phrase qui servira de guide pour l'activité de recherche ;
- relire l'énoncé à la recherche des informations pertinentes ;
- calculer, représenter, conclure en complétant la phrase réponse « à trou ».

Aussi, il est important d'éviter de donner *a priori* aux élèves les phrases réponses « à trou » comme le font de trop nombreux fichiers en cycle 2. En effet, l'activité langagière qui consiste à écrire par soi-même la phrase réponse « à trou » constitue un guide vers la recherche de la solution.

Reformuler pour mieux comprendre un énoncé et résoudre un problème

Soit l'énoncé suivant donné à des élèves de cycle 2 :

> Étienne a trois billes de moins que Lucie.
> Étienne a six billes.
> Combien de billes a Lucie ?

Un tel problème engendre un nombre important d'échecs encore en CE2, voire en CM1. Certains élèves, comme le dit Olivier Houdé [2] dans le Café pédagogique ne parviendraient pas à « inhiber l'automatisme implicite » (il y a le mot *moins* alors je soustrais), ce qui conduirait bon nombre d'entre eux à proposer une solution erronée obtenue par soustraction. Olivier Houdé constate, en fin d'article, que « [le cerveau] résiste de mieux en mieux – mais pas toujours ! – aux automatismes de pensée ». L'auteur ne précise cependant pas comment procéder pour permettre au cerveau de résister davantage et permettre à l'élève de manière plus sûre de trouver la solution du problème.

Un travail spécifique sur la langue peut permettre à davantage d'élèves de réussir.

L'énoncé ci-dessus est de fait une représentation en langue naturelle de la comparaison de deux collections de billes, celle d'Étienne et celle de Lucie. Tout est dit dans les deux premières phrases : « Étienne a trois billes de moins que Lucie. Étienne a six billes ». Cette représentation en langue naturelle de la situation exprime de manière explicite qu'*Étienne a six billes* et implicitement que *Lucie a neuf billes*. Le problème consiste à lever l'implicite portant sur le nombre de billes de Lucie, c'est à dire à représenter mathématiquement le nombre de billes de Lucie connaissant les deux informations « Étienne a trois billes de moins que Lucie. Étienne a six billes ». Il s'agit donc de convertir la représenta-

2. Olivier Houdé est directeur du Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Éducation de l'enfant (LaPsyDÉ)

tion en langue naturelle « Étienne a trois billes de moins que Lucie. Étienne a six billes. » en une représentation dans le système des écritures symboliques mathématiques, soit une égalité résolvante.

L'égalité résolvante experte est la suivante : $6+3=9$, égalité qui donne le nombre de billes de Lucie. Le membre de gauche « $6+3$ » représente la même situation que les deux phrases « Étienne a trois billes de moins que Lucie. Étienne a six billes. ». Ces représentations ne sont pas congruentes car à l'unité signifiante « moins » en langue naturelle correspond l'unité signifiante « + » dans le registre des écritures mathématiques. De plus, l'ordre des unités signifiantes est inversé (six arrive en fin d'énonciation en langue alors qu'il est en début d'énonciation dans l'écriture mathématique). Ce problème est donc difficile du fait de cette forte non congruence entre la représentation en langue et de la représentation fonctionnelle en mathématiques. Demander au cerveau d'être attentif, de ne pas se précipiter sur la première idée venue, n'est peut-être pas suffisant pour garantir la réussite. L'élaboration de stratégies de résolution s'impose donc.

Aussi proposons-nous un dispositif prenant appui sur la langue.

1. J'écris ce que je cherche :
   — *Je cherche le nombre de billes de Lucie.*
2. J'écris la phrase réponse (à trou) :
   — *Lucie a* ______ *billes.*
3. J'écris ce que je sais :
   — *Étienne a trois billes de moins que Lucie.*
   — *Étienne a six billes.*
4. Je cherche si dans l'énoncé une phrase commence par *Lucie a...* La réponse est négative. En revanche, une phrase se termine par *Lucie.*
5. Je reformule cette phrase, ce qui donne : *Lucie a trois billes de plus qu'Étienne.*
6. Je reformule alors ce que je sais :
   — *Lucie a trois billes de plus qu'Étienne.*
   — *Étienne a six billes.*

   J'obtiens une représentation de la situation congruente avec l'écriture mathématique qui me permet facilement de trouver la solution.
7. Je complète la phrase réponse : *Lucie a 9 billes.*

Ce qui vient d'être écrit peut sembler long, mais ce travail, réalisé de manière rituelle à l'oral et à l'écrit, semble conduire à une amélioration des résultats.

Quelques résultats

Nous avons proposé à des élèves de fin CP [3], deux énoncés non congruents, reproduits ci-dessous. Dans le premier énoncé, la comparaison est représentée par l'expression *de moins*, dans le deuxième, par l'expression *de plus*. Les deux énoncés ont été évalués du point de vue de leur réussite en français (reformulation juste : item F) et en mathématiques (calcul ou résultat juste : item M).

Premier énoncé

Macha a deux bonbons de moins que Léa. Macha a 5 bonbons. Combien de bonbons a Léa ?

1. Écris autrement : *Macha a 2 bonbons de moins que Léa.*
   Léa a ________________ que Macha.
2. Relis le problème et la phrase écrite, puis cherche la réponse.

Ma phrase réponse : ______________________

L'item F porte sur la compréhension de la phrase « Macha a 2 bonbons de moins que Léa. » par l'intermédiaire d'une réécriture en « Léa a 2 bonbons de plus que Macha. », phrase censée aider les élèves dans la résolution du problème (question 1).

3. Dans le cadre d'évaluations de compétences de fin CP, réalisées dans une vingtaine de classes (273 élèves) au mois de juin 2017.

Pour ce problème, on obtient les résultats indiqués dans le tableau croisé ci-dessous qui répartit les 273 élèves ayant répondu en quatre classes.

	F = 0	F = 1	
M = 0	115	24	139
M = 1	68	66	134
	183	90	273

Légende

M=0 : échec en maths. M=1 : réussite en maths.
F=0 : échec en français. F=1 : réussite en français.

Statistiquement, tout se passe comme si le score des élèves en maths était le fruit du hasard, environ 50 % de réussite (139 contre 134), les élèves ne faisant qu'additionner ou soustraire les deux nombres en jeu.

Le tableau ci-dessous indique le pourcentage d'échec ou de réussite en maths quand l'élève a échoué ou quand l'élève a réussi en français.

	Échec en français	Réussite en français
Échec en maths	63%	27%
Réussite en maths	37%	73%

Ce tableau est éloquent car il montre que les élèves réussissant à reformuler une donnée (réussite en français) réussissent à 73 % le problème de mathématiques, au contraire de ceux qui ne parviennent pas à reformuler et qui ne réussissent qu'à 37 %. Si ces résultats ne suffisent pas pour inférer l'existence d'une relation de cause à effet, entre la capacité à reformuler et la réussite en mathématiques, ils permettent cependant de formuler l'hypothèse que la réflexion suscitée par la reformulation constitue une aide pour la résolution du problème.

Deuxième énoncé

Billy a 4 cubes de plus que Sami. Billy a 6 cubes. Combien de cubes a Sami ?

1. Écris autrement : *Billy a 4 cubes de plus que Sami.*
   Sami a ____________________ que Billy.
2. Relis le problème et la phrase écrite, puis cherche la réponse.

Ma phrase réponse : ______________________________

L'item F porte sur la réécriture de la phrase « Billy a 4 cubes de plus que Sami. » en « Sami a 4 cubes de moins que Billy. », phrase censée aider les élèves dans la résolution du problème.

Pour ce problème, on obtient les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous qui répartit les 263 élèves ayant répondu en quatre classes selon leurs résultats conjoints en maths et en français.

	F = 0	F = 1	
M = 0	123	35	158
M = 1	34	71	105
	157	106	263

Il est ici possible d'affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 2,5 % que les résultats des élèves en maths ne sont pas le fruit du hasard, avec environ 40 % de réussite et 60 % d'échec (158 contre 105), mais s'orientent dans le sens de l'échec.

Le tableau ci-dessous reprend en pourcentages le tableau précédent, selon les mêmes règles que précédemment :

	Échec en français	Réussite en français
Échec en maths	78%	33%
Réussite en maths	22%	67%

Là encore, plus des deux tiers des élèves qui réussissent à reformuler la phrase résolvent correctement le problème, alors que ceux qui échouent dans la reformulation de la phrase ne réussissent qu'à 22 %.

On peut s'interroger sur les causes de la différence des résultats entre ces deux problèmes, qui traduisent la même situation de comparaison.

Celle-ci est peut-être liée à la transformation en « moins » d'un « plus », ou, plus vraisemblablement, en classe de CP, à la nature de l'opération attendue qui est une soustraction.

L'impossibilité de conclure à une relation de cause à effet pour ces deux résultats n'empêche cependant pas de se demander si un travail spécifique en langue ne permettrait pas aux élèves de mieux se représenter la situation décrite par l'énoncé et donc de mieux réussir en mathématiques.

Conclusion

La commission Villani-Torrossian ne développe pas explicitement l'importance d'un travail spécifique sur la langue française dans toutes les disciplines et plus spécifiquement en mathématiques, mais elle émet la recommandation suivante : « expliciter les liens entre langue française et les mathématiques dès le plus jeune âge »[4].

Il ne s'agit pas, à nos yeux, « d'expliciter des liens », ce qui relève d'une pédagogie expositive, mais bien d'analyser la langue française, et surtout de la faire fonctionner en situation de compréhension de textes, de production d'écrits, dans toutes les situations d'apprentissages mathématiques et plus particulièrement en résolution de problèmes.

Il semblerait en effet, qu'au vu des résultats précédents, un travail spécifique sur la langue en mathématiques, dès les premiers apprentissages, soient d'une grande importance pour la réussite des élèves.

Annie Camenisch est maître de conférences en sciences du langage à l'ÉSPÉ d'Alsace (Université de Strasbourg). Quant à Serge Petit, il est formateur honoraire en mathématiques à l'IUFM d'Alsace et à l'Université de Strasbourg.

4. 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. Rapport Villani-Torrossian, 12 février 2018, § 3.5, p. 41

Changement de regard sur le cercle

Caroline Bulf et Valentina Celi nous présentent un problème original portant sur la reproduction d'un cercle à l'aide d'un gabarit de demi-disque et d'un compas, problème conçu dans le but de favoriser un changement de regard sur cette figure géométrique, d'articuler certaines conceptions qui lui sont associées et de matérialiser ses éléments caractéristiques.

Caroline Bulf & Valentina Celi

À partir de différents ouvrages de l'école élémentaire, nos analyses sur les problèmes de reproduction de figures géométriques planes [1] nous ont conduites à repérer un bon nombre d'exercices mettant en jeu le compas et le cercle. Ces exercices ne semblent toutefois pas prendre en compte la dialectique qui pourrait se créer entre les différentes conceptions possibles de cette figure géométrique [2], ni les changements de regard possibles sur celle-ci [3] [4]. En outre, à l'égard du compas, l'articulation de ses différents usages n'est jamais suffisamment mise en valeur.

Ces constats nous ont alors encouragées à dresser les grandes lignes d'une progression visant le passage du « rond » au cercle et du gabarit de disque au compas, du cycle 1 au cycle 3 [5]. Inclus dans cette progression, nous nous focalisons ici sur un problème original — dit le *problème-clé* par la suite — que nous avons conçu dans le but de favoriser le passage du disque au cercle ainsi que la matérialisation du rayon, du diamètre et du centre d'un cercle. La mise à l'épreuve dans diverses classes de cycle 3 nous conduit à nous interroger sur la complexité de cet objet géométrique aussi bien pour l'élève que pour l'enseignant et c'est cette complexité que, dans cet article, nous souhaitons mettre au jour.

Au préalable : différentes conceptions du cercle en contexte scolaire

Un terme du langage courant, « rond », est souvent utilisé pour désigner un objet dont le bord est courbe, cette courbure étant constante. C'est d'ailleurs ainsi que, dans leurs jeux d'emboîtements, les enfants nomment cet objet aux bords arrondis qui demeure invariant par rotation.

> Dans le langage mathématique, contrairement aux termes attribués à d'autres figures géométriques élémentaires (triangle, carré, rectangle, ...), le terme « disque » désigne une surface alors que le terme « cercle » en désigne son contour, la ligne qui délimite cette surface. Ainsi, dans une conception ponctuelle de ces objets géométriques, les points qui sont à l'intérieur de la surface délimitée par le cercle, y compris son centre, n'appartiennent pas à ce dernier.

Outre le centre, le rayon et le diamètre sont les éléments caractéristiques du cercle et, selon le contexte, ces termes désignent soit un segment, soit une longueur. Comme Artigue & Robinet [2] l'ont bien mis en évidence, les différentes façons de définir le cercle renvoient à des conceptions différentes de celui-ci (ponctuelle ou globale, statique ou dynamique) :

« *Ces définitions sont toutes logiquement équivalentes et définissent donc le même objet géométrique. Mais elles correspondent à des façons différentes de percevoir le cercle, d'utiliser ses propriétés et elles mettent l'accent sur des éléments géométriques, des relations entre ces éléments, différents. C'est pourquoi nous leur associons des conceptions distinctes du cercle* ». [2]

La prise en compte des différentes conceptions du cercle fait écho à la nécessité du changement de regard sur les figures géométriques [3] [4] pour donner du sens aux apprentissages géométriques.

> Notre postulat de départ est en effet le suivant : dans la transition d'une géométrie physique vers une géométrie théorique [6], il est nécessaire de dépasser une vision première d'une figure en termes de surface (2D) pour y percevoir les différentes unités figurales de dimensions inférieures (lignes : 1D et points : 0D), qui la construisent à travers leurs mises en relation [3].

Pour le passage du disque au cercle, il s'agit alors du processus illustré en figure 1.

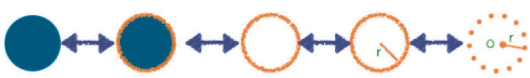


Figure 1. *Passage du disque au cercle*

Le regard des élèves sur l'objet disque ou cercle peut évoluer et passer d'une vision en terme de surface (2D) à une vision en terme de ligne (1D) comme contour d'une surface ou ligne de courbure constante ou encore comme une ligne à équidistance d'un point fixé, le centre, jusqu'à l'appréhension de points (0D) appartenant à cette ligne et situés à équidistance du centre.

> Il est aussi important de prendre en compte les liens entre les manières de voir les objets géométriques et d'agir sur ceux-ci : autrement dit, la façon qu'on a de voir les figures géométriques (en termes de surfaces, lignes, points) et les relations entre ces unités figurales dépendent des instruments mis à disposition et réciproquement.

Ce qui nous amène à penser que les différentes conceptions du cercle se forgent aussi selon les outils que l'on met dans les mains de l'élève. Par exemple, le recours à un gabarit de disque pour tracer un cercle mobilise une vision en termes de contour de surface ou encore de courbure constante, pour lesquelles le centre et le rayon sont absents tandis que le compas mobilise plutôt une vision dynamique d'une ligne autour d'un point fixe ou une vision comme un ensemble de points à égale distance d'un point donné. Nuançons toutefois notre propos : le recours à un instrument ne garantit pas une seule et unique façon de penser [1].

Nous défendons ici plus globalement l'idée que l'apprentissage de la géométrie peut être vu comme l'évolution et la transformation des manières d'agir, de penser (ou voir) et de parler d'un concept géométrique en situation de résolution de problème, ces trois dimensions étant constitutives de notre méthodologie d'analyse. Autrement dit, pour nous, apprendre en géométrie résulte d'une co-construction médiée par le discours et les activités relevant de la résolution d'un problème [8]. Cet article a aussi pour objectif d'étayer ce point de vue sur l'apprentissage.

1. Notre objectif ici n'est pas d'être exhaustives quant aux différentes manières de penser, d'agir et de parler du cercle ; nous renvoyons le lecteur à la publication [7] pour une analyse plus exhaustive en ces termes, toujours en lien avec le problème analysé dans cet article.

Dans les textes officiels des programmes scolaires

À la lecture des textes officiels des programmes scolaires pour l'école primaire, au cours de ces trente dernières années, nous avons identifié trois grands moments institutionnels.

Un premier moment où l'élève manipule une forme, le « rond », et qui semble être liée à l'usage de gabarits de disque permettant de tracer leur bord ; ici, le cercle est implicitement conçu comme un objet à courbure constante, invariant par rotation, admettant une infinité d'axes de symétrie.

Un deuxième moment où l'élève apprend à se servir du compas comme outil permettant de tracer des cercles et où le centre et le rayon sont progressivement introduits comme éléments nécessaires pour les construire ; le cercle est encore conçu comme un objet à courbure constante, invariant par rotation ou comme une ligne à égale distance d'un point donné.

Un troisième moment où le cercle apparaît dans sa conception ponctuelle et est ainsi introduit explicitement comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné et où les définitions de ses éléments caractéristiques se précisent (centre, rayon, diamètre). Aussi, cette étude montre que, outre les diverses conceptions, les manières de voir le cercle, d'en parler et d'agir sur celui-ci évoluent aussi dans ce continuum que nous venons de décrire.

Dans des ouvrages scolaires

Le cercle et le compas sont communément introduits dans les ouvrages pédagogiques de CE2. L'analyse de nombreux de ces ouvrages, jusqu'aux derniers changements de programmes, montre que le choix le plus fréquemment adopté par les auteurs porte à introduire le cercle comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné, les situations récurrentes étant les suivantes :

- des points étant déjà placés tous à égale distance d'un point donné, il faut en placer d'autres à la même distance ;
- un nuage de points étant donné, il faut identifier les points qui se situent à égale distance d'un point donné.

> C'est ainsi qu'un malentendu semble se produire : l'objectif affiché au départ porte souvent sur l'introduction du compas comme traceur de cercles alors que le problème proposé conduit à l'exploiter tout d'abord comme outil permettant de reporter et de comparer des longueurs.

C'est le cas dans l'extrait présenté en figure 2.

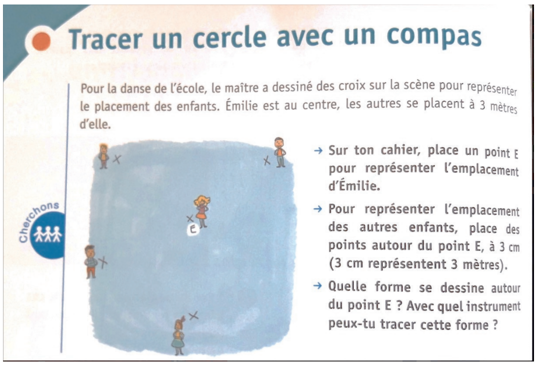


Figure 2. *Outils pour les maths, Magnard (2008, p. 112)*

Dans ces situations, les différents rôles du compas s'articulent alors de façon complexe : d'abord comme outil pour reporter ou comparer des longueurs pour ensuite servir comme outil pour tracer un cercle, comme si ce passage allait de soi. Sans compter les difficultés lors d'*actions instrumentées*, notamment dans leur *composante manipulatoire* (au sens de Petitfour [9]), les auteurs de bon nombre de manuels semblent négliger deux obstacles majeurs : voir une courbe comme étant constituée d'un ensemble infini de points et le fait qu'avec le compas le rayon ne soit pas matérialisé [10]. De surcroît, généralement, l'introduction des éléments caractéristiques du cercle se fait de façon ostensive.

L'étude d'ouvrages scolaires nous amène alors à conclure que les différentes manières de voir le cercle ne sont pas articulées de façon idoine avec les différentes manières d'agir sur ce dernier.

Un *problème-clé* : articulation entre disque et cercle, entre gabarit et compas

Ces analyses nous ont encouragées à concevoir un *problème-clé* qui mette simultanément en jeu un compas et un gabarit de demi-disque et qui ait donc pour ambition de créer les conditions qui favorisent le passage du disque au cercle ainsi que la matérialisation du rayon, du diamètre et du centre d'un cercle. Par la présence du gabarit, ce problème garde encore un lien avec la conception du cercle comme figure à courbure constante et invariante par rotation mais, par la présence du compas, il ouvre la voie vers la conception nouvelle du cercle défini par le centre et un rayon ; par le centre et un point ; par un diamètre.

Présentation et analyse du *problème-clé*

Dans une première phase, il s'agit de mettre à la disposition de chaque élève un gabarit de demi-disque opaque, un compas et une feuille de travail sur laquelle un cercle — dit *cercle-modèle* par la suite — est préalablement tracé (figure 3). Le gabarit fourni a les mêmes dimensions que le cercle tracé sur la feuille.

"Reproduis le cercle-modèle en une seule fois, en te servant uniquement du compas pour le tracer. Le gabarit de demi-disque fourni ne devra te servir que pour prendre ou ajouter des informations sur le cercle-modèle. Le gabarit ne doit être ni plié ni coupé"

Figure 3. *Le* problème-clé *: la consigne pour les élèves.*

Les valeurs retenues des variables didactiques favorisent *a priori* le changement de regard porté sur le cercle. Notamment, le recours à un demi-disque opaque et rigide cherche à mobiliser des manières d'agir, de penser et de parler du cercle en termes de surface (2D), contour de surface (1D/2D), courbure constante (1D) en lien avec des modes d'agir, de penser, de parler du diamètre en termes de bord droit (1D/2D), d'axe de symétrie (1D), d'intersection de lignes (1D et 0D). Le choix d'un gabarit de demi-disque est aussi important pour que le centre ne soit pas matérialisé directement [2]. Cela permet par ailleurs de mobiliser des conceptions liées à « la moitié » [3] : sur la figure-modèle, si l'on trace un diamètre à l'aide du bord droit du gabarit, on partage en deux la figure. Le gabarit sert en outre à la validation de la figure reproduite.

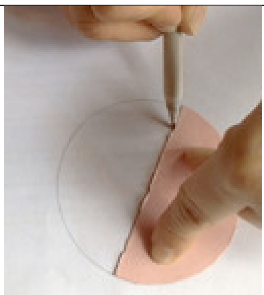
Les contraintes portées sur les instruments (utiliser le gabarit seulement sur la figure-modèle et le compas seulement pour la reproduction) cherchent à forcer l'usage du compas. En outre, le compas est porteur de différentes manières d'agir, de penser et de parler du cercle, du diamètre et du centre : ligne courbe fermée (1D), vision dynamique en rotation (1D voire 0D), ligne (1D) ou ensemble de points à égale distance (1D et 0D) ; le rayon est donné par l'intersection des lignes obtenues par le contour droit du gabarit de demi-disque, l'écartement du compas n'étant pas suffisant car le rayon est ainsi représenté par un espacement vide. Le cercle-modèle est suffisamment grand pour que les reproductions à l'œil soient difficilement validées.

Pour résoudre ce problème, on pourra, sur le cercle-modèle, tracer un diamètre avec le gabarit de demi-disque, puis, en le tournant suivant la trajectoire du bord courbe (par invariance du disque par rotation), on pourra en tracer un second qui permettra ainsi de mettre en évidence (figure 4) :

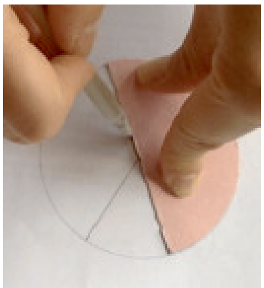
- le centre d'un cercle comme intersection de deux diamètres ;
- un rayon comme segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points ;
- le diamètre comme segment joignant deux points du cercle et passant par son centre ;

2. Cela aurait été le cas si nous avions choisi, par exemple, un quart de disque.
3. On voit ici un lien possible avec « les bandes » pour l'introduction de fractions simples [11].

- sur le cercle, deux points comme intersections de chaque diamètre avec le cercle : *in fine*, le cercle comme ensemble de points [4].

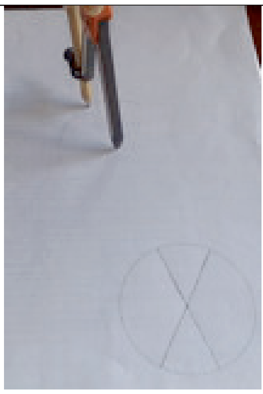


Positionner le gabarit dans le cercle-modèle et tracer un premier diamètre



Tourner le gabarit dans le cercle-modèle et tracer un second diamètre

Ouvrir le compas pour matérialiser le rayon et le centre



En gardant l'ouverture du compas, tracer un cercle (superposable au cercle-modèle)

Figure 4. *Description étape par étape de la résolution du* problème-clé.

Grâce à ce problème, les éléments caractéristiques du cercle vont ainsi se « matérialiser » : le centre apparaît comme intersection de segments (bords rectilignes du demi-disque) ; le rayon est tracé et permet de contrôler l'écartement du compas pour reproduire le cercle.

> Une fois que les élèves ont résolu individuellement la reproduction du cercle, la mise en commun peut mettre au jour la nécessité d'un vocabulaire spécifique pour désigner les nouveaux objets géométriques tracés (rayon, centre, diamètre), leurs définitions faisant ainsi l'objet d'une institutionnalisation. Le compas servira à la fois pour : reporter des longueurs (le rayon du cercle pour le tracer) ; tracer le cercle ; comparer des longueurs (pour vérifier les caractéristiques du diamètre).

Dans des classes

Nous avons expérimenté le *problème-clé* dans plusieurs classes de cycles 2 et 3. Nous retenons ici trois contextes particulièrement significatifs :

- la classe d'Alice (Rome, Italie) avec des élèves de 9 ans, d'un niveau équivalent à celui du CM1 en France ;
- la classe d'Émilie (Bordeaux, France), avec des élèves de CE2, où c'est l'une des chercheuses qui prend en charge la classe pour la séance ;
- la classe de Stella (Pau, France) avec des élèves de sixième.

Comme dans toute analyse comparative, nous avons pu identifier des différences mais aussi des éléments communs et cela malgré les différents passés et les diverses cultures caractérisant chacun des trois contextes : cela aussi bien dans l'activité des élèves que dans les conduites et les choix des enseignantes ou dans leurs interactions avec les élèves.

Du côté des élèves

Quel que soit le contexte, et en enfreignant parfois les consignes, de nombreux élèves ont tendance à résoudre le problème en positionnant à l'œil le compas sur le bord droit du gabarit du

4. La conception du cercle comme lieu géométrique de *tous* les points situés à une distance r (le rayon) d'un point donné O (le centre) empêche de faire le lien avec la trace graphique du rayon vu comme bord de surface ou encore celle du centre vu comme intersection de lignes (également bords de surface). Dans cette conception, il ne s'agit pas d'opérer une déconstruction dimensionnelle [3] mais bien une reconstruction dimensionnelle, du point vers la ligne : la vision qu'on a de la figure se situe en effet d'abord au niveau du point (0D) pour ensuite « remonter » vers la vision du cercle comme un ensemble de points représenté par une ligne continue (1D). À notre avis, ce passage est non trivial et la matérialité du rayon et du centre demeure essentielle pour penser cette transition.

demi-disque ou sur un premier tracé de diamètre obtenu en faisant le contour de ce bord droit sur le cercle-modèle (figure 5).

Figure 5

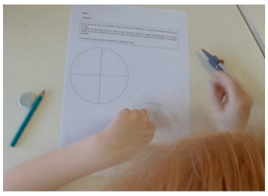


Figure 6

Des productions d'élèves

Presque la totalité de ceux qui réussissent, tout contexte confondu, tracent deux diamètres horizontaux et verticaux (figure 6). Pas nécessairement de façon consciente, tout se passe comme si les élèves convoquent le diamètre comme étant un axe de symétrie du cercle ; le point obtenu devient alors pour eux le repère permettant de positionner la pointe sèche du compas, puis l'écartement du compas obtenu assure que la courbure soit la même partout :

Kelya (élève de CE2, Bordeaux) : « *une marque pour me repérer (. . .) oui parce que là j'ai fait un morceau // après j'ai vu que là c'était exactement les mêmes /// là j'ai refait là parce que // et après // comme il était exactement pareil je l'ai retracé là* »

Paolo (élève de CM1, Rome) : « *Et puis nous devons voir si ces quatre formes sont égales // J'ai tracé la moitié du disque / et puis aussi de cet autre côté / et il y a ainsi quatre angles* »

Maxime (élève de 6^{e}, Pau) : « *Du coup on a coupé en quatre quarts maintenant* »

Dans les tracés de ces élèves, la prégnance des axes horizontal et vertical est forte. Comme Artigue & Robinet [2] le disaient déjà (page 19), « *le cercle y apparaît comme une figure géométrique ayant même dimension dans deux directions privilégiées : l'horizontale et la verticale. Il a une longueur et une largeur, voire une largeur et une hauteur et elles ont même mesure. Pour tracer cette longueur et cette largeur, l'enfant ne cherche pas, semble-t-il, à réaliser un maximum de longueur de cordes horizontales ou verticales, mais plutôt à partager le cercle en deux parties égales. Le milieu du cercle est justement le point de croisement de la longueur et de la largeur. De ce fait, longueur et largeur semblent être considérées comme des axes de symétrie plutôt que comme des diamètres ensemblistes.* »

Du côté des enseignantes

Tout au long de la séance, Alice et la chercheuse expérimentatrice (nous sommes à l'école élémentaire) restent proches du contexte de la manipulation et du registre graphique. Par exemple :

Alice (Rome) : « *comme ça et comme ça les autres ne voient pas ce que tu fais sur la feuille et donc comme ça et comme ça c'est quoi ?* »

E2 (Rome) : « *j'ai tracé la moitié du disque* [le gabarit est posé "verticalement" sur le modèle de façon à ce que son bord courbe coïncide avec une partie du cercle-modèle] *et puis aussi de cet autre côté* [le gabarit est posé "horizontalement"]. »

Mais Alice n'utilise jamais le mot diamètre ou « bord droit » alors que la chercheuse expérimentatrice, dans la classe d'Émilie, parle explicitement de « contour droit » :

Chercheuse (chez Émilie, Bordeaux) : « *Qu'est-ce que vous en pensez de son tracé ? (. . .) vous avez fait ça vous aussi ? (. . .) il a fait le contour droit / ça avait partagé en deux le cercle* ».

Seule Stella, en classe de 6^{e}, désigne rapidement par diamètre le tracé obtenu mais, dans l'usage du problème en question, son objectif est différent car pour elle il s'agit de réactiver chez les élèves des connaissances sur le cercle et le compas :

Stella (6^{e}, Pau) : « *oui on trace un segment qui a un nom / Noé // un rayon pour Noé /// un diamètre // pour Lisie //* ».

Aucune des enseignantes observées ne fera référence au diamètre en tant qu'axe de symétrie, connaissance pourtant disponible chez tous les élèves de ces trois contextes et qui, comme nous l'avons évoqué, est à l'origine de certaines procédures d'élèves (de façon consciente ou non et compte tenu du choix du gabarit).

Dans les classes de Stella et d'Alice, très rapidement, on déplace l'objet de discours vers le centre alors que la reconnaissance et le statut particulier de ce point ne seront reconnus que beaucoup plus tard dans la classe d'Émilie (par la chercheuse expérimentatrice). Tout au long de la séance, quelle que soit la classe, le « bord droit » du gabarit de demi-disque servira de point d'appui pour conduire les élèves vers des significations mathématiques, ce passage se déroulant de façon bien différente dans les trois contextes.

Dans le discours d'Alice, on reconnaît des allers-retours permanents rendant compte de manières différentes de concevoir le diamètre et d'en parler :

Alice (Rome) : *« de cette de cette ligne et de celle-ci elles se coupent, n'est-ce pas ? et si je fais comme ça ? et comme ça ? [elle fait semblant de tracer des diamètres sur le modèle] . . . elles se coupent ? elles se coupent toutes ? . . . et où se coupent-elles ?* [Le “bord droit” du gabarit permet de tracer des lignes qui se coupent en un point] »

Alice (Rome) : *« . . . si j'avais un gabarit assez grand je pourrais trouver la la / la moi . . . »*

Plusieurs élèves (Rome) : *« la moitié* [le gabarit permet de déterminer la “moitié” du disque] »

Alice (Rome) : *« si maintenant je trace d'ici* [elle trace un troisième diamètre] *fais-je toujours la moitié ? d'ici fais-je encore la moitié* [un autre diamètre] *encore la moitié* [encore un autre diamètre] / *toutes ces lignes d'après vous sont-elles égales ?* [ces lignes ont la même longueur] »

Ces fluctuations entre les différentes visions des objets en jeu traduit souvent une certaine instabilité dans les objectifs visés par Alice : ici, elle cherche à déplacer les objets de discours vers la relation entre diamètre et rayon mais les élèves restent sur la vision du centre du cercle comme point de repère, origine ; contrairement à ses intentions, sa tentative de se servir du compas conforte les élèves dans la vision du centre comme point fixe, repère. Dans la difficulté de conduire les élèves vers la vision du centre comme point à égale distance de tous les points qui constituent le cercle, Alice se sert alors d'une ficelle, qui « matérialise » pour elle le rayon. Tout se passe comme si, pour Alice, la seule façon de penser le cercle (vision en termes de ligne ou d'ensemble de points à égale distance) était celle qu'elle souhaite valider, alors que celle-ci ne correspond pas à celle qu'ils sont en train de construire dans cette situation.

Dans la classe de Stella, le cercle étant rapidement caractérisé par ses éléments (diamètre, centre, rayon), l'enseignante ne reviendra pas sur l'aspect matériel du gabarit (« bord droit » ou moitié de disque). En revanche, la désignation du diamètre oscille souvent entre segment ou longueur ou segment qui relie deux points du cercle passant par le centre. La trace écrite renverra pourtant à une définition en termes de lieu géométrique, ignorant les manières de voir et de parler du cercle qui ont pu être convoquées, voire confrontées, lors du déroulement effectif de la situation.

Dans la classe d'Émilie, les premiers échanges collectifs conduisent rapidement à reformuler le problème par *« où placer la pointe sèche sur la ligne tracée ? »*. C'est dans le langage qu'évolue la désignation de ce « repère » vers une interprétation en tant qu'intersection de lignes que l'on nommera « centre ». Consciente des différentes désignations possibles de tous ces éléments, la chercheuse expérimentatrice a à cœur de mettre en lien ou d'expliciter les différentes désignations possibles :

Chercheuse (Bordeaux) : *« Hein voilà ça c'est un diamètre // Un diamètre c'est donc le bord droit du demi-disque qui a un début et une fin dès lors qu'il rencontre le cercle et vous avez appelé ces* *intersections entre le bord du demi-disque et le cercle // vous les avez appelés vous avez reconnu que ça faisait des points ».*

La volonté d'expliciter et de mettre en lien toutes ces désignations laisse toutefois peu de place aux propres reformulations et tissages de la part des élèves.

> Aussi la mise à l'épreuve de notre *problème-clé*, dans ces différents contextes scolaires, révèle des mises en œuvre très différentes bien que les procédures des élèves observées soient finalement assez proches. Il convient de rappeler alors qu'effectivement la résolution par les élèves de ce problème ne garantit pas que ces derniers soient en train de construire ou aient construit la conception du cercle, visée par ce problème, caractérisée par son centre et son rayon ; il se joue ici des choses dans le langage bien au-delà de son aspect communicationnel ou subalterne à la situation.

En effet, comme évoqué au début de cet article, le langage est aussi considéré comme lieu de négociations et construction de signification [12], il est moteur et partie prenante de l'activité géométrique [8].

Conclusions

La conception de ce problème original naît de la volonté de mettre à disposition de l'enseignant et de l'élève une situation permettant de favoriser un changement de regard sur cet objet géométrique, d'articuler certaines conceptions qui lui sont associées et de matérialiser ses éléments caractéristiques.

La mise en œuvre du *problème-clé* dans trois contextes différents met néanmoins en évidence toute la complexité qui réside dans les notions implicitement en jeu. Quel que soit le contexte, les articulations entre les différentes manières de voir le cercle et ses éléments ainsi que d'en parler ne sont pas toujours cohérentes. Le rôle des instruments et les façons de parler des notions en jeu n'étant pas univoques, l'orchestration collective des échanges langagiers est complexe. En effet, soit ces multiples désignations sont assumées et ouvrent la voie à de nombreux malentendus, soit l'enseignant suit unilatéralement sa manière de concevoir les objets en question sans tenir compte des nombreuses voies possibles. Toutefois, ce problème nous paraît toujours fécond du point de vue de l'activité géométrique qu'il peut potentiellement susciter en raison des différentes manières d'agir, penser et parler le cercle qu'elle peut convoquer. Le point de vigilance sur lequel nous souhaitons revenir en conclusion concerne donc la négociation et la transformation des énoncés de savoir vers des formes stabilisées en fonction de l'activité effective des élèves ; nous en profitons pour souligner encore le rôle consubstantiel du langage dans le processus d'apprentissage.

Dans le *problème-clé* en question, le diamètre recouvre différents statuts, par exemple : bord droit du gabarit de demi-disque, repère désignant la moitié du disque ou du cercle, axe de symétrie, etc. Ces différentes façons de penser le diamètre entraînent à son tour différentes façons de penser le rayon (moitié d'un diamètre, distance d'un point du cercle au centre, écartement du compas, etc.) ou le centre (milieu du diamètre, repère pour poser le compas, intersection de diamètres, etc.) et réciproquement. Il ne s'agit pas néanmoins pour nous de dire qu'il faut expliciter toutes ces façons de penser possibles (ainsi que les différentes façons d'en parler ou d'agir) lors de la mise en œuvre de ce *problème-clé*, compte tenu des écueils évoqués précédemment.

> Nous préférons, en guise de conclusion, insister sur le fait qu'il nous paraît important que l'enseignant ait en tête que le cercle peut être caractérisé de façon complexe dans le contexte de ce problème mais aussi quelle que soit la situation convoquant cette figure géométrique.

Cette complexité, à la fois épistémologique et didactique, relève pour nous de façons de parler ou d'agir spécifiques [7]. Ces résultats enrichissent actuellement nos réflexions et nos travaux de recherche et nous semblent toucher du doigt des questions cruciales liées à la formation des enseignants ainsi qu'à la diffusion de ressources.

Références

[1] C. Bulf et V. Celi. « Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3 ». In : *Grand* ℕ nº 96 (2015). , pp. 5-33.

[2] M. Artigue et J. Robinet. « Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire ». In : *Recherche en didactique des mathématiques* nº 3.1 (1982), pp. 5-64.

[3] R. Duval. « Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements ». In : *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* nº 10 (2005). , pp. 5-53.

[4] R. Duval et M. Godin. « Les changements de regard nécessaires sur les figures ». In : *Grand* ℕ nº 76 (2005). , pp. 7-27.

[5] C. Bulf et V. Celi. « Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire — une articulation clé : gabarit-compas. » In : *Grand* ℕ nº 97 (2016), pp. 21-58.

[6] M.-J. Perrin-Glorian et M. Godin. *Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège.* . 2018.

[7] C. Bulf et V. Celi. *Conceptualisation en classe de géométrie : mise à l'épreuve d'une situation et d'un cadrage théorique en termes de circulation.* Actes de l'École d'été de didactique des mathématiques, Paris 20-26 août 2017 (CD Rom). À paraître. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[8] C. Bulf, A.-C. Mathé et J. Mithalal. « Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation ». In : *Spirale, revue de recherches en éducation* nº 54 (2014). , pp. 151-174.

[9] E. Petitfour. « Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition pour un dispositif de travail en dyade ». In : *Petit x* nº 103 (2017), pp. 5-31.

[10] Ermel. *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes.* Hatier, 2006.

[11] Ermel. *Apprentissages numériques et résolution de problèmes.* Hatier. 2005.

[12] M. Jaubert et M. Rebiere. « Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative ». In : *Plate-forme internet sur la littéracie : http ://forumlecture.ch* (2012). .

Caroline Bulf et Valentina Celi sont maîtres de conférences à l'ÉSPÉ d'Aquitaine (Université de Bordeaux). Elles font partie du laboratoire de recherche pluridisciplinaire, le Lab-E3D, Épistémologie et Didactique des Disciplines.
Du côté de la recherche, elles s'intéressent particulièrement à l'apprentissage et l'enseignement de la géométrie dans un contexte scolaire.
Du côté de l'enseignement, elles sont impliquées dans la formation des enseignants du premier degré mais aussi dans la formation de formateurs et dans la formation à la recherche.

caroline.bulf@u-bordeaux.fr
valentina.celi@u-bordeaux.fr

Des bâtons pour multiplier

Dans cet article, les auteures partagent une de leurs expériences autour de la fabrication de bâtons de Neper par des élèves dans le cadre d'une liaison CM2/6^e^, puis de l'usage fait en classe lorsqu'elles enseignaient toutes deux au collège Louise Weiss de Nozay (91).

Séverine Chassagne-Lambert & Valérie Larose

Les liaisons école-collège peuvent prendre des formes diverses et variées. Au collège de Nozay (91), elles avaient lieu sous forme de rencontres régulières au collège entre classes de 6e et de CM2. Une progression annuelle permettait de traiter de nombreux thèmes du programme, la manipulation étant systématiquement privilégiée : planches à clous, pliages, découpages… et bâtons de Neper ! En fin d'année, une sortie commune à Paris comportait une visite au Musée des arts et métiers : des bâtons de Neper y sont exposés et un atelier avec un animateur du musée permet d'en comprendre le fonctionnement (bâtons géants en bois manipulables).

Lors d'une de ces rencontres, après avoir présenté le matériel et la vidéo de Nathalie Daval qui explique très bien comment utiliser les bâtons de Neper, il ne restait plus qu'à :

- fabriquer son set de bâtons ;
- l'utiliser !

> Pour notre liaison, nous avions choisi de faire fabriquer par chaque élève un set de quatre bâtons de Neper.

Pour cela, nous leur fournissions les bâtons en bois brut… des pavés droits à section carrée : 10 cm de hauteur pour 1 cm de base issus de tasseaux découpés puis poncés au préalable (bref, un peu de bricolage en amont !). Chaque bâton ayant 4 faces rectangulaires, on peut « saisir » quatre tables par bâton, une par face. Deux options se présentent alors :

- nº 1 : écrire les tables directement sur les bâtons,
- nº 2 : écrire les tables sur un tableau fourni qui sera ensuite plié puis collé sur le bâton.

L'option nº 1 implique du soin : un même écart entre deux résultats de sorte que l'on puisse lire les produits au final, un stylo qui ne bave pas sur le bois et aucune erreur dans les tables, le correcteur ou la gomme n'étant pas très efficaces. Le résultat est plus proche du matériel utilisé par Neper et résistera mieux aux manipulations.

L'option nº 2 implique du soin au pliage puis au collage de la feuille sur le tasseau de bois. En revanche, en cas d'erreur dans les tables, on peut redistribuer un tableau vierge à compléter (voir la Figure 1).

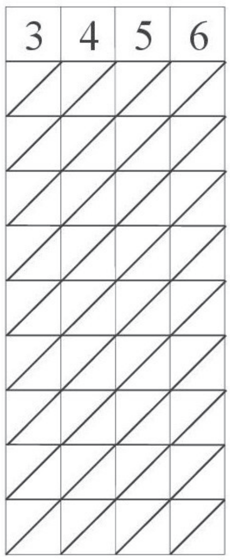


Figure 1. *Modèle de feuille à découper, compléter et coller*

Si le travail des tables à compléter peut être réalisé à la maison ou en classe, nous avons préféré accompagner les élèves et notamment montrer quelques propriétés permettant de retrouver certains résultats :

- la table des 6 est le double de la table des 3. Donc si on a 3×7, on a facilement 6×7 ;
- les résultats des tables de 2 ; 4 ; 6 et 8 sont tous pairs ;
- etc.

Il y a systématiquement deux cases pour chaque produit. Certains élèves s'interrogent lorsqu'ils n'ont qu'un chiffre à écrire : dans quelle case écrire le 8 de 4×2 ? Écrire 08 pour 0 dizaine et 8 unités permet à certains d'entre eux de mieux comprendre notre système d'écriture des nombres.

Une fois les tables remplies, il faut plier soigneusement la feuille puis la coller sur le bâton... une activité manuelle qui réserve des surprises !

Vient ensuite le temps des calculs...

On commence par des produits où l'un des facteurs ne comprend qu'un seul chiffre et bien sûr on exige au préalable un ordre de grandeur du résultat.

Un produit du type 453×6 permet de jongler avec les retenues et de revenir sur notre système de numération (voir la Figure 2) :

- on a 6×3 soit 18 unités soit 1 dizaine et 8 unités (le « je pose 8 et je retiens 1 »)
- puis $6 \times 5 + 1$ en attente soit 31 dizaines soit 1 dizaine et 3 centaines (« je pose 1 et je retiens 3 »)
- et enfin $6 \times 4 + 3$ soit 27 centaines.

Les élèves plébiscitent cette manière de faire, nous constatons un taux de réussite plus élevé que lors de la multiplication posée.

Les élèves se questionnent rapidement : comment effectuer des produits de facteurs ayant tous au moins deux chiffres ? Comment faire avec des décimaux ?

Quelques exemples :

- Effectuer le produit 48×26

  C'est l'occasion de réfléchir et de travailler la décomposition d'un entier en base 10 :

$$48 \times 26 = (40 + 8) \times 26 = 40 \times 26 + 8 \times 26$$

  Ainsi pour calculer 48×26, les élèves utiliseront les bâtons 4, 8, 2 et 6 pour calculer 8×26 et 4×26 ; ils déduiront 40×26 puis ajouteront le résultat des produits partiels : $40 \times 26 + 8 \times 26$. On pourra alors revenir sur la technique de la multiplication posée en faisant écrire systématiquement les produits partiels effectués et ainsi redonner du sens à la technique.

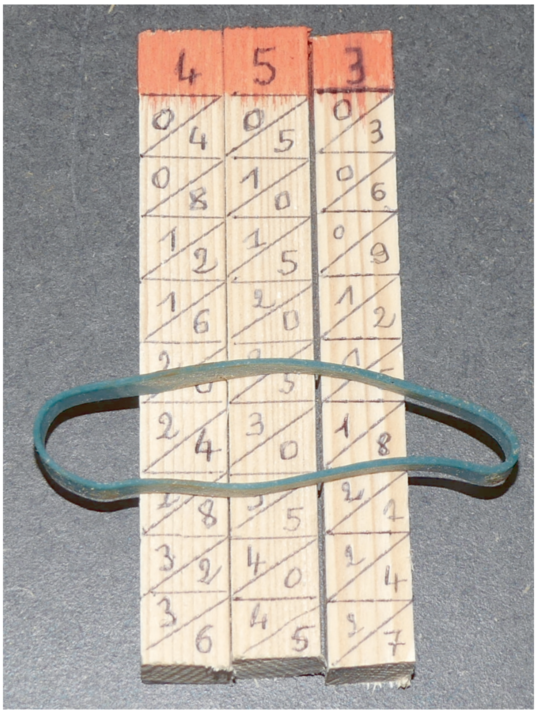


Figure 2. *Placement des bâtons des élèves*

Dans la même optique, il peut également être intéressant de leur montrer la présentation en tableau (ou multiplication *per gelosia*), celle-ci ayant plus de sens pour certains élèves.

- Effectuer le produit $48 \times 2{,}6$

$$48 \times 2{,}6 = 48 \times 26 \text{ dixièmes}$$

  On effectue le produit 48×26 puis mentalement la division par 10.

- Effectuer 5×776 c'est-à-dire un produit avec un facteur comprenant plusieurs fois le même chiffre. Soit la table des 7 apparaît sur deux bâtons du set de l'élève, soit il devra emprunter un bâton…

> C'est l'occasion de montrer les limites du matériel et de montrer l'intérêt de savoir poser ses multiplications et du coup de maîtriser ses tables !

On peut également demander à des binômes d'effectuer les produits, l'un des élèves avec les bâtons, l'autre en posant la multiplication. La calculatrice, qui permet une auto-évaluation, permet aussi de mettre tout le monde d'accord ! En cas d'erreur dans un produit posé, la consigne était de retrouver la (ou les) erreur(s) : erreur de tables, de retenue ?

> L'expérience a été très concluante : élèves motivés, ravis de montrer à leurs parents leur set de Neper et d'en expliquer le fonctionnement.

Les élèves en difficulté étaient en situation de réussite et ont pu se réapproprier la technique de la multiplication posée, pour laquelle la maîtrise des tables est indispensable. Chaque élève a conservé son set de bâtons dans sa trousse, certains les avaient encore en 5e !

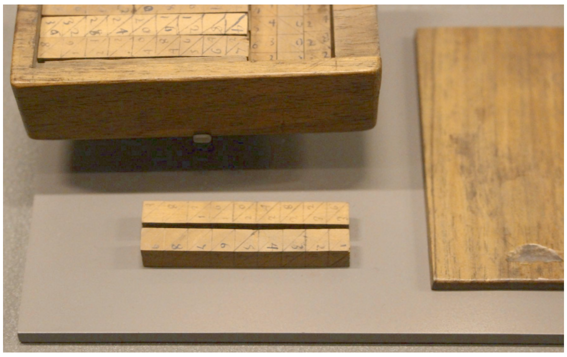


Figure 3. *Bâtons de Neper au Musée des arts et métiers.*

À l'heure des EPI, un parcours avec un ou une collègue d'histoire ne peut qu'enrichir le cours de mathématiques. **Une visite à Paris au Musée des arts et métiers est bien sûr un plus.** Le musée met aussi en ligne un document pédagogique intitulé « Du doigt à la machine : le calcul ». Boulier chinois, pascaline, machine à calculer de Bollée, bâtons de Neper et autres machines exposées au musée y sont illustrés avec un questionnaire que les élèves peuvent compléter durant leur visite ou de retour en classe. Pour tous ceux qui ne peuvent pas emmener leurs élèves à Paris, de nombreuses vidéos permettent d'observer le matériel et d'écouter une explication.

Que cet article soit l'occasion de saluer la mémoire de Françoise Coumes, professeure des écoles avec qui nous avons pu mener ces liaisons, trop tôt disparue.

Pour aller plus loin

[1] Alain Busser et Nathalie Duval. *Les instruments de calcul anciens : de l'abaque à jetons aux réglettes de Genaille.* MathemaTICE nº 51.

[2] Caroline Poisard. « Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer ». Cinq fiches et quatre modèles sont téléchargeables, la fiche 4 concerne les bâtons de Neper. La thèse est sur Culture*MATH* : . Université de d'Aix-Marseille, 2005.

[3] Valérie Larose. « Échanges entre CM et Sixièmes ». In : *Bulletin de l'APMEP* 468 (2007).

Séverine Chassagne-Lambert et Valérie Larose enseignent actuellement respectivement au collège/lycée de Sceaux (92) et au lycée de Vaison-la-Romaine (84).

Les débuts de la multiplication à l'école

Dans cet article où il est question de l'introduction de la multiplication dans la scolarité, Jean Toromanoff observe plusieurs pratiques et décrit des méthodes qui ont été pratiquées ou qui le sont encore. Il questionne leurs objectifs dans la construction du sens pour les élèves et la mémorisation à long terme.

Jean Toromanoff

Dans le cursus scolaire, la multiplication n'apparaît explicitement qu'au CE1, mais elle est, en fait, présente dès la maternelle : on en verra deux exemples. Bien entendu, les élèves n'en sont pas conscients ; elle n'est pas institutionnalisée !

Il y a plusieurs façons d'introduire la multiplication à l'école (dans ce qui suit, on n'en mentionnera que trois : les plus courantes), mais on le fait toujours en introduisant un « nouveau symbole », et ce, dès le début. Arrêtons-nous donc d'abord sur cette question plus générale : quelle est la place du symbole dans l'enseignement d'une opération (quelle qu'elle soit), indépendamment de tel ou tel choix pédagogique ?

Distinctions à faire quand on parle d'une opération

Les quatre aspects

Quand on parle d'opération, il y a toujours quatre points différents à bien distinguer.

1. Le **symbole** (on dit souvent aussi le « signe ») de l'opération.
   Ce point semble assez clair : c'est le $+$ pour l'addition, $-$ pour la soustraction, $\times$ pour la multiplication...
   En fait, c'est un peu plus compliqué que cela : les élèves croient que ces symboles, comme tous les symboles mathématiques, ne sont qu'une simple abréviation d'un mot « du français » : $+$ pour « plus », $-$ pour « moins », et $\times$ pour « fois » ; alors que ce n'est pas du tout ça. Quand on écrit 3×4, par exemple, c'est *déjà* 12, et non plus 3 à gauche, *fois* au milieu et 4 à droite ! Mais on ne va pas s'arrêter sur cette question ici [1].
2. Le **sens** de l'opération, comme disent les professeurs des écoles. C'est-à-dire : à quoi sert cette opération ? Quand l'utilise-t-on ? Pour résoudre quels problèmes ? Autrement dit, le sens de l'opération, c'est le lien entre le monde « réel » et l'opération, qui est, elle, une notion abstraite, mathématique, « savante » (voir la suite). On pourrait parler aussi de *modélisation* : quels sont les problèmes que cette opération permet de modéliser (et, finalement, de résoudre assez facilement) ?
3. La **technique** opératoire.
   On devrait dire : les techniques opératoires, car il y en a toujours plusieurs. Mais on croit souvent, en France, qu'il n'y en a qu'une : celle que l'on connaît ! Ces techniques ne portent que sur les nombres, et pas sur des objets réels,

1. Voir « Promenade dans les symboles de base des mathématiques », Jean Toromanoff, 2017, Éditions Universitaires Européennes.

ni même des grandeurs [2]. Une technique opératoire, c’est : *comment fait-on*, en pratique, en partant de deux valeurs précises, pour « trouver le résultat » de l’opération ?

4. L’aspect **théorique**, « savant », c’est-à-dire « purement mathématique ».
   Ceci comprend la (ou les) définition(s) qu’on peut en donner, et plus généralement les propriétés qu’elle vérifie (commutativité, associativité, existence ou non d’un élément neutre. . .), les relations qu’elle entretient avec d’autres concepts (et en particulier avec les autres opérations), etc.

Ordre classique de ces quatre aspects dans l’enseignement d’une opération à l’école

En général, quand on enseigne une opération, on commence par le *sens* (en tout cas une partie de ce sens). On donne des problèmes que cette opération permet de résoudre puis, très vite (trop vite, la plupart du temps), pour des raisons pratiques, on apporte le *symbole*, et enfin une *technique opératoire*. Technique qui finit (hélas) très souvent par être confondue avec l’opération elle-même, surtout si on impose « la » technique (experte. . . ou simplement habituelle !), à coup d’exercices nombreux et répétitifs. L’exemple type étant l’enseignement de la division euclidienne, qui se réduit trop souvent à l’enseignement de la technique classique, celle dite « de la potence ».

Quant à ce que j’ai appelé l’*aspect savant* (mathématique), surtout depuis l’abandon des « mathématiques modernes », il n’est le plus souvent plus vraiment abordé à l’école, ou très implicitement. Ceci finit par être très gênant, notamment pour la pratique du calcul mental et du calcul en ligne. Mais c’est une autre question. . .

La multiplication : un cas très particulier

Dans le cas de la multiplication, au contraire, on **commence toujours** en introduisant le symbole $\times$. Pourquoi ? Parce que c’est absolument nécessaire :

> la multiplication est par essence extrêmement abstraite, en lien avec une écriture formelle, encore plus que les autres concepts mathématiques abordés à l’école élémentaire.

Une illustration de cette affirmation : autant l’addition peut être « apprise » par plusieurs espèces d’animaux (plus exactement on peut proposer à ces animaux des problèmes de type additif qu’ils sauront résoudre), autant la multiplication semble être absolument hors de leur portée. Elle nécessite en effet un fort degré d’abstraction **et** une formalisation. La multiplication « n’existe pas » si elle n’est pas écrite, ou alors c’est qu’on en reste au simple stade d’**additions**. . . itérées (voir la partie Introduction par les additions itérées).

Si donc on ne se satisfait pas du simple fait que les élèves « sachent effectuer » des multiplications, sans rien y comprendre, mais au contraire si on veut qu’ils maîtrisent vraiment cette opération, il convient d’en soigner l’introduction, car il va falloir que les élèves en construisent le sens, leur sens, qui ne peut vraiment exister que dans leur tête.

Voyons maintenant les trois principales façons d’introduire la multiplication.

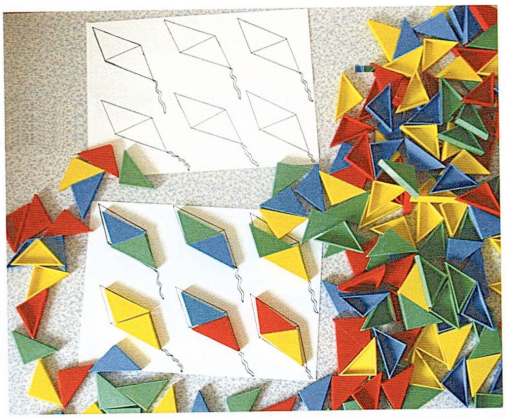
« Introduction » par le produit cartésien

Dès la maternelle, des activités très intéressantes de dénombrement peuvent être proposées aux élèves. En voici deux exemples.

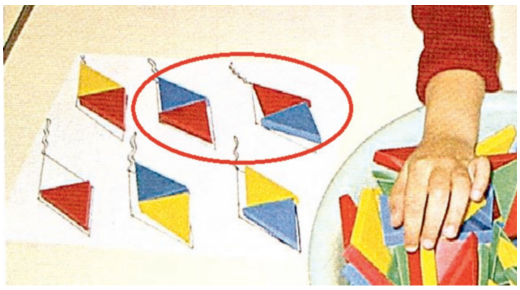
2. D’où le slogan : « Il ne faut jamais mettre les unités dans les calculs ! ». Slogan qui est exact, quoique, à mon avis, sans grand intérêt, si on parle bien de technique opératoire, mais totalement faux quand on parle d’opérations avec des grandeurs. . . Hélas, la confusion entre opération et technique opératoire est telle que beaucoup croient que c’est à proscrire aussi « quand on écrit l’opération en ligne », alors que c’est au contraire conseillé. Par exemple, pour le calcul de l’aire d’un rectangle de 6 cm sur 5 cm, écrire juste : « aire $= 6 \times 5 = 30$ » est bien moins porteur de sens qu’écrire « aire $= 6\,\text{cm} \times 5\,\text{cm} = 30\,\text{cm}^2$ », sens d’ailleurs distinct du cas où on aurait six surfaces d’aire $5\,\text{cm}^2$, qu’on écrirait cette fois « $6 \times 5\,\text{cm}^2 = 30\,\text{cm}^2$ » ! Mais, dans cet article, on se bornera au cas des produits de nombres, et non de grandeurs.

Les cerfs-volants

Voici une première activité, tirée du manuel « Découvrir les maths », GS, Hatier.



Il s'agit de trouver plusieurs « cerfs-volants » différents (par les couleurs), avec la difficile question : « Est-ce que *ces deux-là* (en haut au milieu de la photo) sont différents ? »



« Oui », diront certains élèves (et les mathématiciens avec eux).

« Non, diront d'autres, puisqu'ils sont de mêmes couleurs (bleu et rouge) » . . .

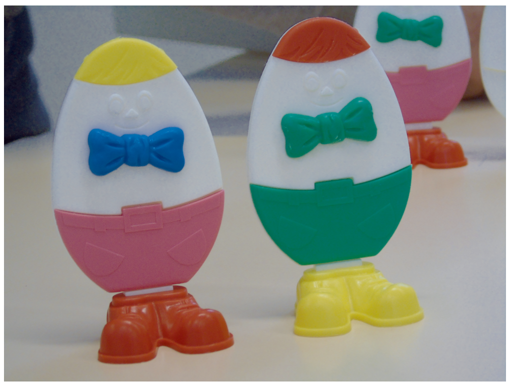
Puis on leur demande de trouver **tous** les cerfs-volants différents (au sens maintenant bien défini), quand on a trois couleurs au choix pour chaque triangle (« moitié » de cerf-volant). Résultat : neuf — et pas six seulement, car la « queue » du cerf-volant sert à bien montrer que le « bleu-rouge », par exemple, est différent du cerf-volant « rouge-bleu ». Variante : si on impose qu'ils soient bicolores, on en trouve six différents (et non trois, pour la même raison).

Les « Math'œufs »

Il s'agit de bonshommes en plastique blanc qu'on peut « habiller » avec des cheveux, des nœuds papillon, des pantalons et des chaussures, fabriqués par ASCO.

Ce matériel a été inventé à l'époque des « mathématiques modernes », quand on voulait introduire ainsi la multiplication — ce qui est heureusement passé de mode !

Actuellement, avec ce matériel, on fait surtout travailler la question du nombre cardinal, de l'équipotence. Mais parmi les nombreuses autres activités possibles, il y a cette question-problème : « Ces deux bonshommes-là sont-ils différents ? » (à peu près la même que celle posée avec les cerfs-volants, mais en plus compliqué, car il peut y avoir deux ou trois choses « pareilles »... et que les bonshommes soient malgré tout différents !)



Et aussi la recherche de **tous** les bonshommes différents (ici, il y a en a trente-six : voir le « portrait de famille »).

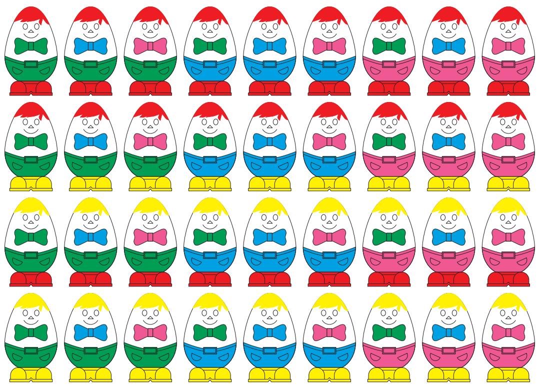


Figure 1. *Portrait de famille*

On voit bien que la multiplication est sous-jacente à ces deux activités (pour les cerfs-volants : 3×3, ou 3×2 ; pour les Math'œufs : $2 \times 3 \times 3 \times 2$), sans qu'elle soit nommée, ni formalisée, bien sûr.

Mais, au fait, quel rapport avec le « produit cartésien » ? Pour répondre à cette question, rappelons la définition du produit cartésien de deux ensembles.

Exemples et définitions

Si $E = \{e,\ r,\ t\}$ et $F = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, alors le produit cartésien de E par F est :

$$E \times F = \{(e,1),(e,2),(e,3),(e,4),(r,1),(r,2),(r,3),(r,4),(t,1),(t,2),(t,3),(t,4)\}.$$

De façon plus rigoureuse :

Définition 1

Soit A et B deux ensembles. On appelle **« produit cartésien » de A par B** l'ensemble de tous les couples (x, y), où x est élément de A, et y élément de B. On note le nouvel ensemble $A \times B$ qui se lit « *A croix B* ».

Dit ainsi, cela semble très abstrait, mais les élèves de l'école maternelle pouvaient le « comprendre sur des cas concrets », par exemple avec les trois formes « carré », « rond » et « triangle » et quatre couleurs possibles. Quand on cherche **toutes les combinaisons** possibles, on en trouve douze :

	bleu	vert	jaune	rouge
carré	■	■	■	■
rond	●	●	●	●
triangle	▲	▲	▲	▲

Ce qui correspond bien au produit cartésien des deux ensembles {carré, rond, triangle} et {bleu, vert, jaune, rouge}, à savoir :
{(carré, bleu), (carré, vert), (carré, jaune), (carré, rouge), (rond, bleu), (rond, vert), (rond, jaune), (rond, rouge), (triangle, bleu), (triangle, vert), (triangle, jaune), (triangle, rouge)} !

C'est ainsi que, à l'époque des mathématiques modernes, on pensait pouvoir introduire la multiplication. Un des problèmes étant que seuls les professeurs voyaient dans ces « tableaux à double entrée » un produit cartésien. Quant à y déceler la multiplication !

En effet, on « définissait » la multiplication ainsi :

Définition 2

Si n est le cardinal d'un ensemble A et p le cardinal de l'ensemble B, la multiplication de n par p est définie comme le cardinal de l'ensemble-produit $A \times B$.

Dans les deux exemples précédents, cela « donne » bien : $3 \times 4 = 12$! Ceci dit, d'un point de vue théorique, il fallait en plus montrer que cette définition est indépendante des ensembles choisis, utiliser les bijections, etc. Ce n'était vraiment pas simple.

Quel était le but de cette introduction de la multiplication ?

La raison principale résidait dans le fait qu'on pouvait ainsi « effectuer des multiplications » sans passer par l'addition (il suffisait de compter, comme pour l'addition, du reste). D'un point de vue théorique, c'est sans doute parfait, mais on voit bien que, dans la pratique, avec de jeunes enfants, c'est totalement déplacé, surtout si on veut le formaliser !

En revanche, et c'est ce que les « mathématiques modernes » auraient pu réussir, faire fréquenter le produit cartésien est très souhaitable, c'est cela qui était intéressant, mais il ne fallait pas chercher à l'expliciter de façon formelle, et encore moins *introduire* ainsi la multiplication...

Le véritable avantage de cette introduction était d'aborder la multiplication à partir d'une situation, bien sûr essentiellement multiplicative, mais qui n'est pas pour autant une situation de proportionnalité (cas sans doute trop complexe pour un début), alors que c'est très souvent dans des cas de proportionnalité qu'on introduit la multiplication, encore aujourd'hui.

Un type de problème multiplicatif à ne pas oublier *de proposer aux élèves, même jeunes*

Outre le fait que le produit cartésien a été employé dans les écoles pendant plusieurs années pour introduire la multiplication, et que cela peut être intéressant de le savoir, cette façon de considérer la multiplication a un véritable intérêt : faire rencontrer aux élèves un type de situation (donc quelque chose de relativement concret, sur quoi on peut proposer de vraies activités porteuses de sens) amenant à un type de problèmes multiplicatifs qu'aujourd'hui, en France, au contraire, on ne pense pas à aborder à l'école (ni même, souvent, au collège).

Or, il faut absolument que les élèves apprennent un jour que la multiplication permet de résoudre ce type de problèmes, finalement assez courants ! Souvent, ils ne les rencontrent *explicitement* qu'au lycée, essentiellement en calculs de probabilités (ce qui est à mon avis vraiment trop tardif). Au Québec par exemple, les choix ont été différents et les problèmes faisant appel au produit cartésien se rencontrent beaucoup plus tôt qu'en France.

Car non, il n'est pas du tout évident que ce qui sert à calculer la superficie d'une chambre, le nombre de personnes dans des voitures équitablement chargées, le nombre de places d'un amphithéâtre rectangulaire, voire le nombre de petits cubes dans un gros pavé ou encore le prix de 3 kg de viande (connaissant le prix au kilogramme) puisse servir *aussi* pour trouver le nombre de tous les menus (ou glaces à trois boules) possibles et imaginables !

Il faut proposer ce genre de problèmes. Ils ne sont pas « trop difficiles » à l'école, ni au collège *a fortiori* : c'est simplement un autre type de problème que ceux auxquels sont habitués les élèves. À l'école en France, cela restera bien sûr des problèmes de recherche et pas des problèmes d'application « à savoir résoudre directement ». Mais il faut les faire fréquenter aux élèves ; sinon, on limite la compréhension de la multiplication, qui n'est pas réduite aux deux ou trois types de problèmes classiques seulement.

Ceci dit, s'il faut que les élèves *rencontrent* des problèmes liés à de telles situations de produit cartésien avant la fin de l'école primaire puis les *reconnaissent* « directement » au collège, il est clair qu'il ne faut pas pour autant *introduire* ainsi la multiplication (au CE1) !

Introduction par dispositions rectangulaires

La définition

On commence d'abord « avec des dessins », bien entendu.

> Définition 3
>
> Si on place des objets sur chaque case d'un **quadrillage** de n lignes et p colonnes ou si on a n **rangées** contenant **chacune** p objets, le **nombre total** d'objets est $n \times p$.

Évidemment nous, les experts, pouvons voir le lien avec ce qui précède grâce au nombre de cases du tableau à double entrée. Mais ce n'est pas le cas pour les élèves !

Avantages et inconvénients de cette introduction

Il y a beaucoup d'avantages pour l'enseignant à introduire ainsi la multiplication : c'est très visuel, il y a des tas d'exemples concrets, on *voit* tout de suite que la multiplication est commutative, ça permet d'aller vite, etc. Mais ces avantages sont trop évidents, à mon avis, et cachent en fait de réelles difficultés à venir... pour les élèves !

Car, justement, cela donne l'impression à l'élève qu'il a compris, alors qu'il ne fait que « voir », que compter. Et là est le premier inconvénient de cette introduction : comme avec le produit cartésien, le produit est lié à un comptage, que les bons élèves, qui ont compris la numération, effectueront d'ailleurs plutôt par groupements de dix objets que par groupes de p objets, passant à côté de l'essentiel !

Un autre inconvénient est l'écueil du produit par zéro, qui ne peut pas avoir de sens : il faut bien au moins une ligne et une colonne ! Et c'est à mon avis l'une des raisons qui expliquent qu'on a encore tant d'élèves qui pensent que $0 \times t = t$! Car 0 ligne (ou 0 colonne) c'est quand-même **1** trait ; du coup, ils comptent les t *segments*... au lieu de « voir » qu'il n'y a « que »... 0 *case* !

Illustration : le « quadrillage » 0 sur 5, c'est :

— — — — —,

ce qui donne 5 *traits* (alors, $0 \times 5 = 5$?) mais en réalité 0 ***cases*** (donc $0 \times 5 = 0$, ouf !... mais pas évident du tout).

En revanche, il est vrai que cela peut expliquer que $1 \times t = t$ (il n'y a qu'une seule rangée de t objets, donc t objets au total). Encore que, justement, peut-on encore vraiment parler de quadrillage dans ce cas ? Au niveau de l'image mentale, cela peut poser problème aussi : pour avoir un « vrai » quadrillage, un « vrai » tableau, il faut au moins deux lignes et deux colonnes, non ?

Une dernière remarque : ce qu'on définit ainsi risque d'être compris plutôt comme « a *sur* b » (comme on dit une chambre de « 5 m *sur* 8 m ») que comme le produit de a par b. Et d'ailleurs, il s'agit bien, à la fin, d'une nouvelle grandeur, la **grandeur-produit** des deux grandeurs de départ, qui n'est donc plus la même grandeur que celle(s) de départ (par exemple, si on a deux longueurs au départ, le produit est une aire). Alors que, dans le cas de l'addition, on gardait bien toujours une seule et même grandeur avant et après l'opération.

Mais le principal inconvénient est justement que ça va trop vite, que ça paraît simple, alors qu'il faut y passer du temps, parce que c'est plus compliqué qu'il n'y paraît et que, comme toujours en mathématiques, c'est parce qu'il y a plusieurs choses différentes qui peuvent se modéliser par *la* multiplication que celle-ci est si intéressante...

Introduction par additions itérées

La définition

Celle-ci est explicite, mais, avec les élèves, on prendrait des valeurs « précises », bien sûr.

Définition 4

$n \times p = p + p + \cdots + p$ (p étant écrit n *fois*).

Attention : ce n'est pas « + » qui est écrit n fois : on ne fait pas n additions ! Ce qui entraîne d'ailleurs que cela n'a de sens, en toute rigueur, *que* si $n \geqslant 2$!

Comme dans les deux cas précédents, on commence par introduire un symbole, mais, cette fois, on n'introduit même pas une nouvelle opération ni même un sens, d'ailleurs ; juste une écriture, et même plutôt une abréviation ! Mais ce sera provisoire et, heureusement, on ne va pas non plus introduire la multiplication directement comme ça. On va d'abord proposer une ou deux activités de découverte, puis on donnera cette « abréviation », avant de faire découvrir, *par la suite*, qu'il s'agit de bien autre chose : une nouvelle opération !

Éléments d'une progression

Pour les élèves, pendant au moins trois semaines, le « $\times$ » n'est qu'une abréviation. Rappelons que la multiplication est une exception, puisque les symboles mathématiques ne sont absolument pas des abréviations, comme on l'a vu précédemment.

On leur parlera d'une « écriture multiplicative » qui permet d'écrire plus vite une somme dont les nombreux termes sont tous identiques, écriture bien plus pratique que l'écriture additive, mais qui représente, pour l'instant, exactement la même chose.

Il faudra à l'enseignant un peu d'imagination, ou de documentation, pour trouver des situations additives où, effectivement, et à peu près naturellement, on est amené à écrire plusieurs fois des choses du genre $7+7+7+7+7$ que, franchement, heureusement, on apprend à écrire 5×7 ! Le jeu de **Yam** est un très bon support, à condition d'en éliminer la partie « combinaisons » ; mais le problème consistant à chercher à construire, avec des cubes identiques, des tours de même hauteur, puis à demander combien on a utilisé de cubes pour faire ces tours, est un support adapté aussi [3] ; il y a également le « **jeu des enveloppes** » [4], etc.

Ce qu'il faut, c'est « dégoûter » les élèves des longues écritures additives, pénibles, au profit des écritures multiplicatives, tellement plus courtes !

Ce n'est qu'ensuite qu'on fera voir qu'il semble que $4 \times 7 = 7 \times 4$, que $3 \times 8 = 8 \times 3$, etc., et cela transformera ce qui n'était jusqu'alors qu'un outil pratique, une simple écriture raccourcie, en une nouvelle opération, avec sa définition, ses propriétés, ses techniques opératoires, etc. Et qui permettra surtout – comme toute opération – de résoudre des problèmes (d'abord « connus », mais qu'on résout plus vite avec la multiplication, puis beaucoup de nouveaux, qu'on n'aurait pas su résoudre auparavant).

Inconvénients et avantages de cette introduction

Le premier inconvénient, c'est pour l'enseignant : il lui faudra beaucoup d'attention quand il parlera et écrira, car, avec cette introduction, la multiplication n'est, *a priori*, pas commutative ! D'ailleurs, trois voitures avec cinq personnes, ce n'est pas « pareil » que cinq voitures avec trois personnes : les situations sont différentes, seul le *nombre* de personnes est le même.

Il ne faudrait pas qu'il dise parfois « six fois cinq » pour « $5+5+5+5+5+5$ » ; et d'autres fois « quatre fois trois » pour « $4+4+4$ » ! Et pas non plus « 5 multiplié [5] par 3 » pour « $5+5+5$ », puis ensuite dire « 3 multiplié par 4 » pour « $4+4+4$ ».

Mais c'est justement parce que l'on va finalement s'apercevoir, après tant d'efforts (pour le professeur) et d'activités diverses (pour l'élève), que « ça revient au même » (là, ce sont les élèves qui le disent, pas le professeur !), que l'on écrive $n \times p$ ou $p \times n$, que l'on va voir que la multiplication est vraiment intéressante en elle-même. Elle va prendre du sens, devenir une opération à part entière, et plus seulement juste cette abréviation pratique pour écrire toute une série d'additions.

Ceci dit, $0 \times n$, et même $1 \times n$, n'auront toujours pas de sens avec cette introduction. En revanche, $n \times 0 = 0$ devient évident ($n \times 0 = 0+0+\cdots+0$), de même que $n \times 1 = n$. Ceci restera dans les mémoires sans trop de difficulté, et, la commutativité aidant (même si, bien sûr, elle ne peut plus être *prouvée* dans ces cas-là : on *décide* qu'il en est ainsi), l'autre sens ($0 \times n = 0$, $1 \times n = n$) ne posera pas trop de difficultés de mémorisation non plus.

La seule chose importante, c'est que ce soit cohérent, que l'ordre entre n et p ne change jamais jusqu'à la « preuve » de la commutativité (preuve qui se fait d'ailleurs grâce aux quadrillages).

Et la suite de la progression ?

De toute façon, quelle que soit l'introduction choisie pour la multiplication, la suite de la progression sera à peu près identique : il faudra étendre le sens de la multiplication à d'autres types de

3. C'est le choix de l'ouvrage « Cap Maths » CE1 (page 7).
4. Jacques Colomb & Roland Charnay, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE1*. Hatier, Collection ERMEL, 2005.
5. La « guerre » que se livrent certains sur l'oralisation du signe « $\times$ » n'a pas lieu d'être. Personnellement, je préfère dire « n fois p » pour « $p+p+\cdots+p$ », car on a bien « n *fois* le nombre p », mais si on préfère dire « p *multiplié par* n », ça n'a aucune véritable importance.

problèmes multiplicatifs (et déjà au moins aux deux autres situations qui n'ont pas été choisies pour l'introduction)... progressivement, bien entendu !

À la fin du CE2, les élèves pourront conserver en tête la (ou les) définition(s) qu'ils veulent, et pas forcément « celle de la maîtresse » : cela n'aura plus vraiment d'importance. Il en est d'ailleurs toujours ainsi : le fait même de comprendre efface de la mémoire les premiers pas, les « échafaudages ». Car, ce qui est utile, c'est bien de savoir résoudre de plus en plus de problèmes multiplicatifs (avoir « construit le sens de la multiplication »), pas de se rappeler en détail comment on y est arrivé.

Jean Toromanoff est enseignant à l'ÉSPÉ d'Orléans.

jean.toromanoff@univ-orleans.fr

L'APMEP joue et gagne !

Le groupe JEUX de l'APMEP a, bien évidemment, créé bon nombre d'activités dans ses brochures sur le sujet de la multiplication.

Nicole Toussaint & Jean Fromentin

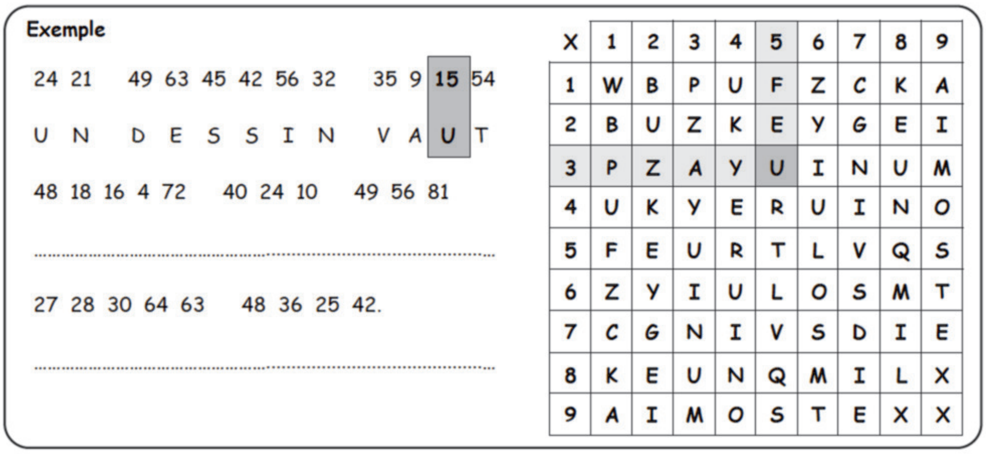
Nous avons choisi de présenter ici trois activités sur la multiplication, une par niveau (école primaire, collège, lycée), avec des compléments en ligne sur notre site, et nous listons à la fin de cet article tous les jeux qui traitent de la multiplication dans les productions du groupe JEUX depuis... 1978.

Une chance ! La multiplication n'a pas changé entretemps...

C'est volontairement que nous ne mettons pas de niveau sur les fiches d'activités : à chaque enseignant de les choisir selon les programmes en vigueur, selon sa classe, selon les élèves... comme au-dessus et au-dessous, et cela peut varier d'année en année.

Nous ne détaillerons pas ici les fiches de présentation des activités, pour lesquelles toutes les informations (objectifs, niveaux de difficulté, modalités...) sont données dans les brochures elles-mêmes.

À l'école primaire : MESSAGES CODÉS


Exemple

24 21 49 63 45 42 56 32 35 9 **15** 54

U N D E S S I N V A **U** T

48 18 16 4 72 40 24 10 49 56 81

....

27 28 30 64 63 48 36 25 42.

....

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	W	B	P	U	F	Z	C	K	A
2	B	U	Z	K	E	Y	G	E	I
3	P	Z	A	Y	U	I	N	U	M
4	U	K	Y	E	R	U	I	N	O
5	F	E	U	R	T	L	V	Q	S
6	Z	Y	I	U	L	O	S	M	T
7	C	G	N	I	V	S	D	I	E
8	K	E	U	N	Q	M	I	L	X
9	A	I	M	O	S	T	E	X	X

Figure 1. *Messages codés*

Ce message (voir la Figure 1) qu'on a commencé à décoder est issu de la brochure *Jeux École 1* : sur chaque ligne, il faut faire correspondre une lettre au nombre qui figure au-dessus, en utilisant les tables « à l'envers », autrement dit être capable de décomposer un résultat en produit de deux nombres. Ainsi, 15 est le produit de 3 par 5 (et bien sûr celui de 5 par 3). On cherche donc ces deux nombres dans la table donnée, et on lit « U » à l'intersection de la ligne et la colonne correspondantes. On écrit alors « U » sous le 15.

Les élèves sont très friands de cet exercice et, bien souvent, ils codent eux-mêmes des messages à destination de leurs camarades. On pourra trouver un autre exemple sur la même brochure.

Il y a beaucoup plus de messages codés que ceux-là dans la brochure *Jeux École 1*, mais il y en a aussi dans les brochures *Jeux 5* et *Jeux 6*, car au collège il n'est pas inutile de continuer…

Au collège : GRIMUKU

Rien de tel qu'un exemple pour décrire ce jeu, qui provient de la brochure *Jeux 10*, voir la Figure 2.

> Comme dans un jeu de mots fléchés, vous allez compléter ces grilles en plaçant un nombre à un chiffre par case vide de manière à ce que le nombre qui précède la flèche soit le résultat de la multiplication des nombres qui suivent. Par exemple : $20 \Rightarrow \ldots \times \ldots$ peut se compléter en $20 = 4 \times 5$ ou $20 = 5 \times 4$.
> Pour cette grille, utiliser uniquement les nombres 2, 3, 5 et 7.

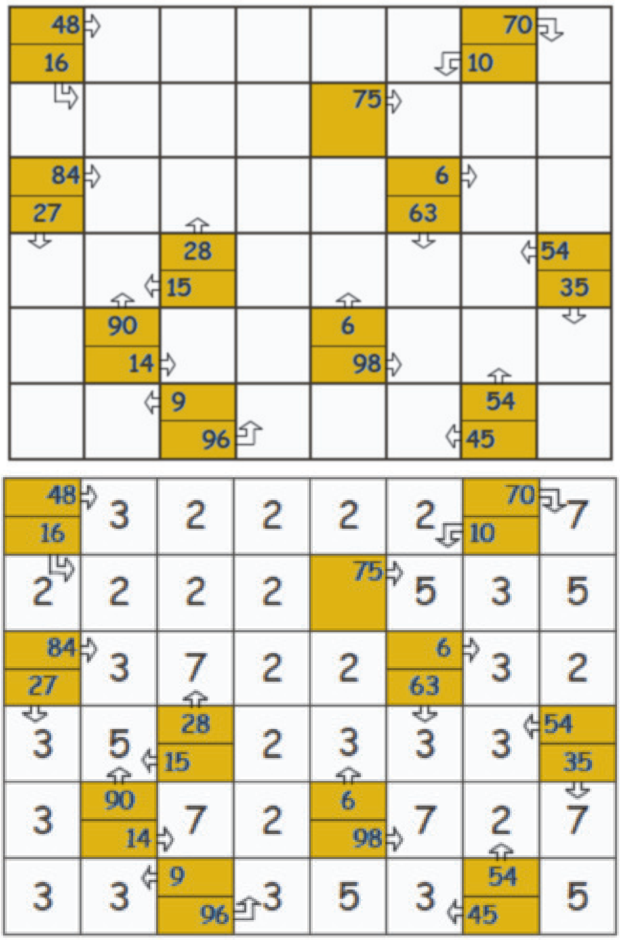


Figure 2. *Une grille de Grimuku et sa solution*

Il s'agit là encore de décomposer un nombre en produit de facteurs (pas forcément premiers d'ailleurs, même si ce n'est pas le cas dans l'exemple proposé ici), mais il y a parfois plusieurs possibilités et il faut donc croiser les renseignements.

Là encore, il existe dans la même brochure de nombreux autres tableaux, les premiers étant utilisables dès l'école primaire.

Au lycée : TÉTRATRI

Là encore, un exemple et sa solution permettent de comprendre très vite le principe (voir la Figure 3).

Trouve 4 triangles formés de quatre petits triangles dont le produit des expressions qui les composent est égal à $6x^3$.

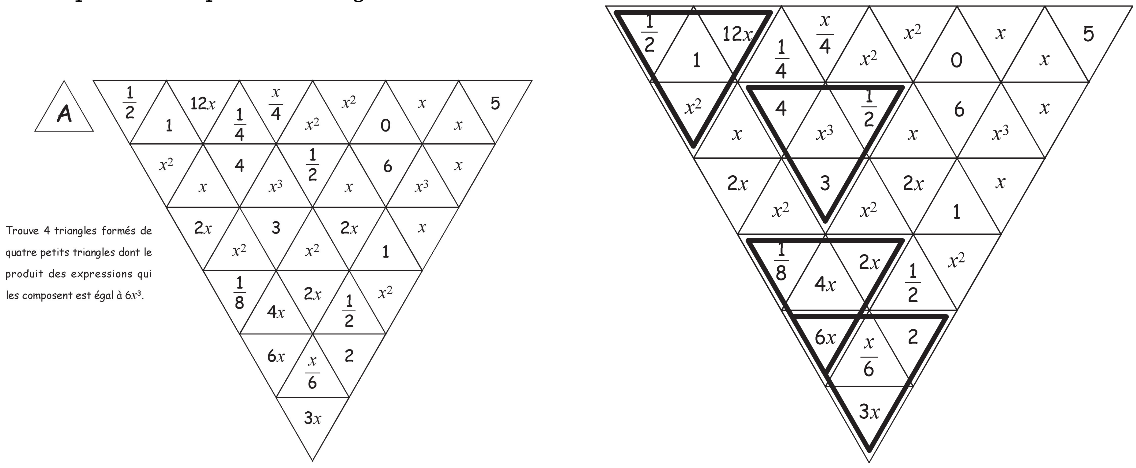


Figure 3. *Une grille de Tétratri et sa solution*

Comme chacun peut le voir, il s'agit cette fois de travailler sur les produits d'expressions algébriques. Cette fiche peut être utilisée dès la classe de troisième et, éventuellement, avec des applications numériques, comme nous le proposons dans la présentation du jeu.

D'autres jeux sur la multiplication dans les brochures de l'APMEP

Il arrive souvent que la multiplication ne soit pas la seule opération travaillée dans le jeu cité.

Jeux individuels

- Messages codés – Jeux École 1 (nº 187), Jeux 6 (nº 144)
- Neuf pour un – Jeux École 1, Jeux 7 (nº 169)
- Saute-grenouille – Jeux École 2 (nº 199)
- Produits pour carreaux – Jeux École 3 (nº 1014)
- Jeu des multiples – Jeux 6
- Un dé et 4 nombres – Jeux 6
- Labyrinthe des multiples – Jeux 7
- Sudomaths (dès l'école primaire) – Jeux 8 (nº 185)
- Éléphant ou poisson ? – Jeux 9 (nº 194)
- Grimuku – Jeux 10 (nº 1007)
- Tétratri – Jeux 10
- Tous ensemble – Jeux 10

Jeux de plateau

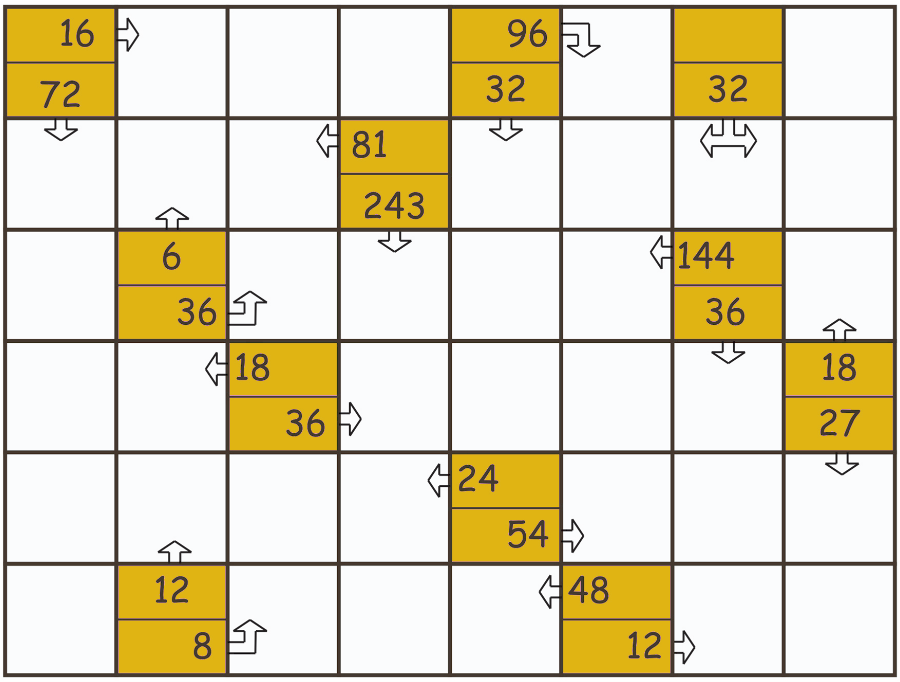
- Pythagore – Jeux École 1, Jeux 6
- Jeu des relatifs – Jeux 7
- Pique tout – Jeux École 3

Jeux avec toute la classe

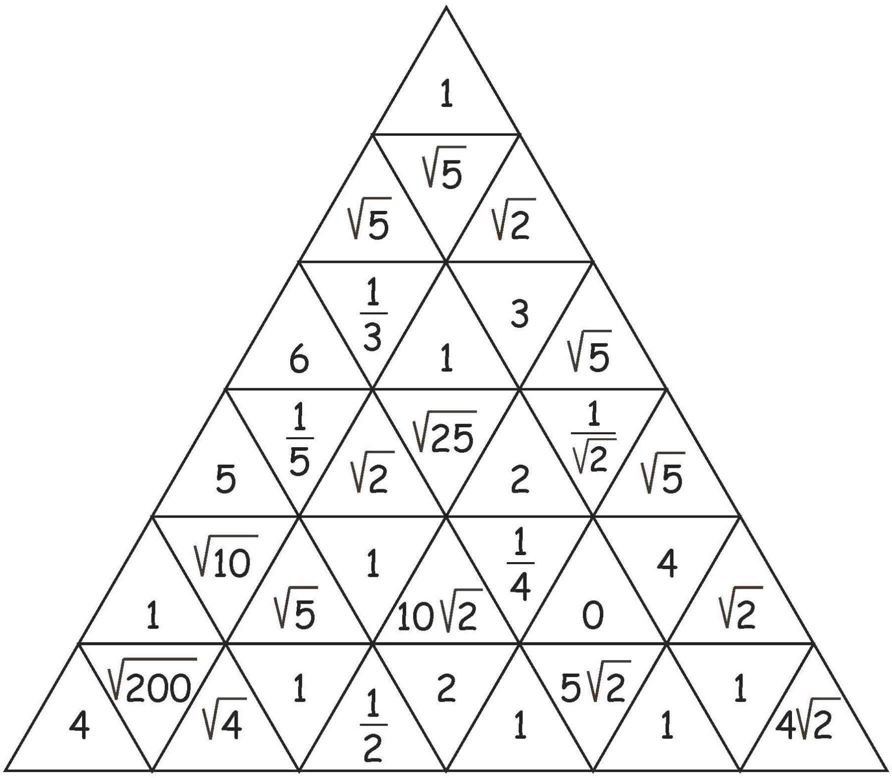
- Trio – Jeux École 1, Jeux 5 (nº 119), Jeux 6 (pour celui-ci, on pourra lire l'article paru dans le numéro 5 de la revue PLOT)
- Cartes en chaîne – Jeux École 2
- Mosacolla – Jeux 10
- Colorilude – Jeux École 3

Nicole Toussaint et Jean Fromentin sont enseignants de mathématiques à la retraite, toujours très actifs au sein de l'APMEP et du groupe JEUX.

Et maintenant à vous de jouer !



Grimuku : pour cette grille insérer uniquement les nombres 2, 3, 4, 6 et 9.



Le Tétratri : trouver quatre triangles formés de quatre cases triangulaires dont le produit des nombres qui les composent est égal à $\sqrt{50}$.

Décomposition des nombres en maternelle

Faire découvrir les nombres et leurs utilisations en cycle 1. . . Dans cet objectif, Laurence Le Corf nous expose son projet « Création d'un journal du nombre » en Grande Section.

Laurence Le Corf

Les instructions officielles

Les nouveaux programmes insistent particulièrement sur la stabilisation de la connaissance des petits nombres. Voici un extrait du BO nº 2 du 26 mars 2015 :

Stabiliser la connaissance des petits nombres

Au cycle 1, la construction des quantités jusqu'à dix est essentielle. Cela n'exclut pas le travail de comparaison sur de grandes collections. La stabilisation de la notion de quantité, par exemple trois, est la capacité à donner, montrer, évaluer ou prendre un, deux ou trois et à composer et décomposer deux et trois. Entre deux et quatre ans, stabiliser la connaissance des petits nombres (jusqu'à cinq) demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités (trois c'est deux et encore un ; un et encore deux ; quatre c'est deux et encore deux ; trois et encore un ; un et encore trois), la reconnaissance et l'observation des constellations du dé, la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu.

L'itération de l'unité (trois c'est deux et encore un) se construit progressivement, et pour chaque nombre. Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur des quantités jusqu'à dix.

Un peu plus loin, le BO donne les attendus en fin de grande section :

Étudier les nombres

- Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.
- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.

- Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.
- Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.

Je n'ai pas attendu la parution des programmes de 2015 pour travailler sur la décomposition des nombres, je le faisais déjà les années précédentes. Les nouveaux attendus de fin de maternelle m'ont juste confortée dans le fait de travailler cette notion en la ritualisant avec l'utilisation de supports pertinents.

Cette année, j'ai intégré dans ma circonscription un groupe expérimental sur la construction du nombre au cycle 1, mené par Pascal Percheron (IEN Saint-Brieuc-Est). Je travaille plus particulièrement la décomposition des nombres et la création d'un journal du nombre en m'inspirant de ce qui a été fait dans le cadre de la recherche ACE [1] (Arithmétique et Compréhension à l'École élémentaire) au cycle 2.

Mise en œuvre en classe

Séance 1 : manipulation individuelle avec les boîtes à décomposer

Lors d'un atelier dirigé, je propose à chaque enfant une *boîte à décomposer* bleue avec deux compartiments, une ardoise *Velleda* et un feutre.

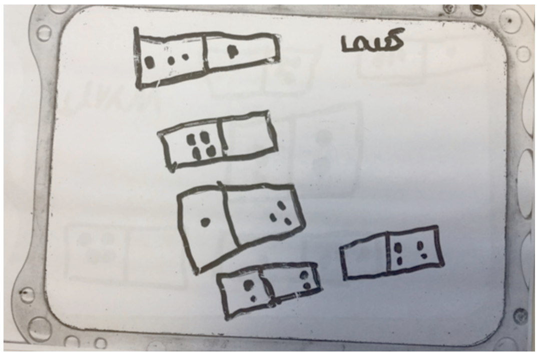
Il s'agit pour les élèves d'essayer, par exemple, de trouver toutes les façons de faire 5. Pour cela, ils placent les pions dans les compartiments et dessinent ensuite ce qu'ils ont trouvé. Ils travaillent individuellement.

Pour les premiers nombres, je ne leur dis pas le nombre de possibilités mais au delà de 5, je leur dis le nombre de boîtes à dessiner.

Je les aide lorsqu'ils me sollicitent et je garde une trace de leur recherche qu'ils retrouveront ensuite dans leur journal du nombre individuel.

Il est assez simple de différencier le travail : je peux faire quelques recherches avec un élève pour ensuite le laisser chercher seul, je peux demander à certains d'écrire sous les cases le nombre de pions, limiter le nombre de boîtes dessinées pour ne pas décourager les plus en difficultés.

Décompositions du nombre 5.



Décompositions du nombre 4.

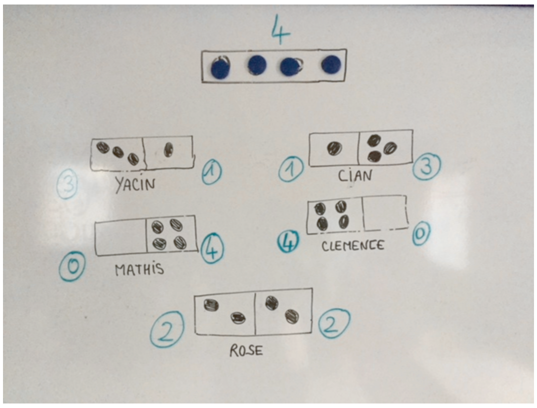
Par la suite, ce travail pourra être repris en atelier autonome au cours de l'année.

Séance 2 : élaboration collective d'une trace écrite

Tous les élèves de la classe sont désormais dans le coin regroupement face au tableau. Avec des aimants et les dessins des boîtes à décomposer, ils viennent déplacer les aimants pour montrer leurs différentes propositions que le groupe classe valide ou non.

1. Le but de la recherche ACE-ArithmEcole, menée conjointement par plusieurs équipes de recherche issues d'académies différentes, est d'améliorer les pratiques pédagogiques en apportant une aide concrète aux enseignants afin de mettre en œuvre une progression des apprentissages mathématiques sur le nombre au CP et au CE1. Vous pouvez consulter les documents sur le blog de l'ÉSPÉ de Bretagne.

La manipulation des aimants est importante car elle permet de ne pas avoir tout de suite une trace définitive : on peut recommencer, discuter, valider ou non.

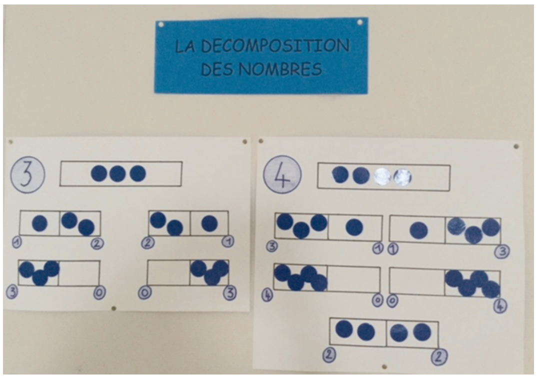


Décompositions du nombre 4.

Les élèves sont complètement partie prenante de leur apprentissage et surtout, les affichages de classe sont ainsi réalisés avec eux.

Depuis que je pratique ainsi, je trouve qu'ils réinvestissent plus facilement les affichages créés, notamment dans les diverse situations problèmes rencontrées.

Je garde une trace de cette séance en photographiant le tableau pour ensuite en faire une trace collective qui sera affichée sur le mur de la classe réservé à la connaissance des nombres. Cette fois, c'est moi qui fais la mise en page sur l'affiche car c'est le document référent (phase d'institutionnalisation). Il s'agit en fait de recopier au propre toutes les propositions trouvées collectivement sur le tableau.



Affichage dans la classe.

Séance 3 : travail individuel de réinvestissement, en atelier autonome

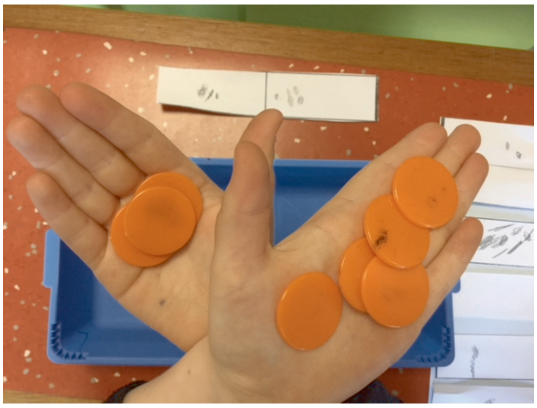
Sont mis à disposition des élèves : la *boîte à décomposer* bleue et des jetons si besoin (élément de différenciation : à ce stade, certains en ont encore besoin, d'autres pas), une feuille bleue format A5 et des papiers prédécoupés blancs (en fait deux rectangles comme les matrices de domino vierges).

Les élèves recherchent à nouveau toutes les façons de décomposer les nombres en utilisant ou non la boîte et en s'aidant si besoin de l'affichage collectif. Ils collent ensuite chaque décomposition sur la feuille bleue, feuille collée dans le journal du nombre dans un second temps.

Cette étape me permet d'observer les stratégies individuelles, de repérer les difficultés persistantes.

Production écrite d'un élève autour des décompositions du nombre 4.

Lors des séances, les élèves ont pour habitude de retourner la boîte bleue pour utiliser en acte la commutativité de l'addition (8 c'est « 3 et encore 5 » ou « 5 et encore 3 »). Une de mes élèves les plus fragiles m'a montré qu'elle trouvait les inverses en manipulant directement les pions dans ses mains qu'elle croise.

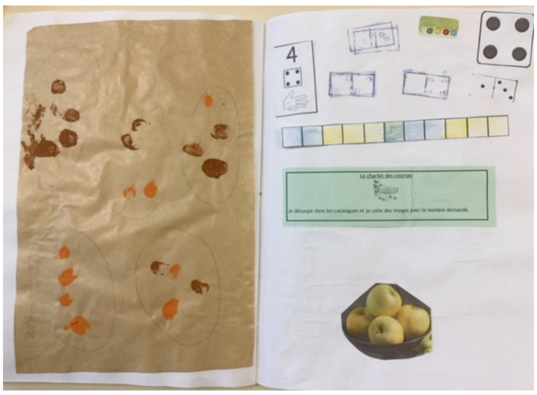


8 *c'est* « 3 *et encore* 5 » *ou* « 5 *et encore* 3 »*.*

Elle a montré aux autres sa stratégie lors d'un temps de bilan des activités.

Séances suivantes : création du journal du nombre

Afin d'avoir un support qui regroupe toutes nos activités autour de la décomposition du nombre, j'ai décidé de mettre en place un journal du nombre individuel.



Extrait du journal du nombre d'un élève.

Celui-ci retrace la démarche évoquée plus haut mais surtout permet aux élèves de se l'approprier bien au-delà des séances dirigées.

Chaque élève réalise son journal du nombre, qu'il complète et enrichit au fur et à mesure avec différentes façons de travailler la décomposition des nombres comme la peinture avec les doigts, les tampons, des collages d'objets. . .

Laurence Le Corf est enseignante en grande section de maternelle et directrice de l'école maternelle Curie à Saint Brieuc (22). Elle est également PEMF (Professeur des Écoles et Maître Formateur) au sein de l'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation (ÉSPÉ) de Bretagne, sur le site de Saint-Brieuc (22).

laurence.le-corf@espe-bretagne.fr

Des *Math & Manips* autour des grandeurs

Publié partiellement en 2011 dans la revue Losanges, *cet article, actualisé par les auteures pour* Au fil des maths, *présente des activités destinées à des élèves d'école primaire en Belgique (de 6 à 12 ans) pour favoriser l'apprentissage des grandeurs par des manipulations.*

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen

Le contexte de la recherche

Depuis sa création en 1992, le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, situé à Nivelles en Belgique) s'est attaché à identifier les difficultés d'apprentissage liées aux mathématiques et à développer des outils permettant aux enseignants de détecter ces difficultés et d'y remédier. Dans la majorité de ces ouvrages, la philosophie a consisté à dégager des fils conducteurs de la formation mathématique depuis l'enfance jusqu'à l'âge adulte. C'est dans ce même esprit que le CREM s'est engagé entre 2010 et 2014 dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves.

> Ces activités, appelées *Math & Manips*, sont destinées à améliorer l'apprentissage de certaines matières du cursus et ont été conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des manipulations.

Les élèves sont confrontés (par l'enseignant ou par le milieu) à des phénomènes qui interpellent, qui sont organisés en une suite d'épisodes pour lesquels le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité.

Une *Math & Manip* doit pousser les élèves à se poser des questions et, pour les plus âgés, les amener à entrer dans des démarches de modélisation. Elle doit donner du sens aux concepts qu'elle introduit et aux outils qu'elle nécessite et, par là même, rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

Dans l'esprit des travaux précédents du CREM, la recherche consacrée aux manipulations envisage la scolarité dans son ensemble, depuis le début de l'école maternelle (2 ans et demi) jusqu'à la fin de l'enseignement secondaire (18 ans). L'ensemble des *Math & Manips* a fait l'objet d'une publication détaillée à destination des enseignants ([1]) disponible sur le site du CREM.

Comparaison de grandeurs – Premier cycle (de 6 à 8 ans)

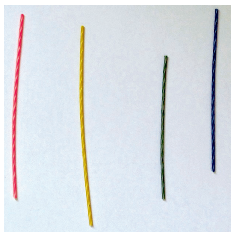
Avec les enfants de cet âge, nous travaillons les grandeurs (longueurs, masses, capacités et aires) avec pour objectif de dégager des méthodes efficaces de comparaison sans unité conventionnelle de référence. Les activités sont présentées autour d'un thème : un goûter pour le septième anniversaire de la mascotte de la classe. Au cours de la séquence d'apprentissage, les élèves sont amenés à choisir l'objet le plus long, le plus lourd, celui de plus grande capacité, ou celui de plus grande surface. Ces manipulations sont conçues pour ne nécessiter aucun recours aux mesures [2].

Une activité préliminaire est proposée afin de permettre à l'enseignant de s'assurer que le principe de conservation du volume est acquis par la plupart des élèves. Pour cela, chacun d'eux apporte un verre. L'enseignant verse dans chaque verre, devant tous les élèves, le contenu d'un petit carton de jus, puis leur demande si l'un d'eux a plus à boire que les autres. Si les enfants affirment qu'ils ont tous la même quantité à boire malgré la diversité des formes de leurs verres, les manipulations du *goûter d'anniversaire* peuvent commencer. Sinon, nous conseillons avant cette *Math & Manip* d'autres activités ciblant l'acquisition du principe de conservation du volume (voir par exemple [3]).

L'enseignant installe alors le contexte : les élèves vont fêter l'anniversaire de la mascotte de leur classe. Pour cela, ils vont être amenés à choisir les sept plus longues bougies pour mettre sur le gâteau, le moule pouvant contenir le plus de pâte, la boîte contenant le plus de bonbons, le gobelet ayant la plus grande contenance, la ficelle d'emballage la plus longue et le set de table recouvrant la plus grande surface.

Comparaison de longueurs de segments : les bougies

La classe est divisée en sept groupes et chacun d'eux reçoit un lot identique de bougies coupées à différentes longueurs. Les élèves doivent présenter à l'enseignant la bougie la plus longue de leur lot. Les sept bougies rassemblées, l'enseignant demande à un élève de vérifier qu'elles ont toutes la même longueur, puisqu'il s'agit de la bougie la plus longue de chacun des lots identiques. Ces bougies les plus longues peuvent être de couleurs différentes.



Cette activité très simple, qui se limite à la comparaison de segments rectilignes, prépare le terrain pour la comparaison de longueurs (les ficelles p. 44).

Comparaison de capacités : les moules à gâteau

Cette manipulation, menée par l'enseignant devant toute la classe, consiste à développer avec les élèves une méthode permettant de reconnaître le récipient de plus grande contenance.

Pour ce faire, l'enseignant présente trois moules différents. Notre choix s'est porté sur les moules illustrés. En les manipulant, les élèves observent leurs particularités, par exemple, un moule peut être entièrement placé à l'intérieur d'un autre, ce qui permet de déduire qu'il n'est pas celui de plus grande contenance et qu'on peut l'écarter.

La comparaison des deux autres moules, l'un plus haut et l'autre plus large, nécessite une technique plus élaborée. Suite à une discussion avec les élèves, l'enseignant remplit d'eau un premier moule puis transvase son contenu dans le second. Les élèves sont amenés à se rendre compte que, s'il n'est pas possible de verser toute la quantité d'eau du premier moule dans le second, cela signifie que le premier moule a une capacité supérieure au second. Par ailleurs si, ayant versé toute l'eau du premier moule dans le second, ce dernier n'est pas rempli, cela signifie que le second moule a une capacité supérieure au premier.

Cette technique de transvasement, proposée par l'enseignant et mise en œuvre par lui seul devant la classe, sera travaillée individuellement par les élèves lors de la comparaison de capacités (les gobelets p. 44).

Comparaison de masses : les boîtes à bonbons

La manipulation suivante amène les élèves à comparer des masses sans les mesurer. Elle s'effectue avec des petits groupes d'élèves, à tour de rôle. Pendant ce temps, ceux qui ne manipulent pas sont invités à réaliser des décorations pour garnir la table le jour de la fête.

L'enseignant présente aux élèves quatre boîtes identiques et opaques contenant les mêmes bonbons. Il explique qu'il a préparé ces boîtes pour différents groupes d'enfants, en comptant trois bonbons par enfant.

Parmi les quatre boîtes, l'une d'elles est destinée à ses élèves qui constituent le groupe d'enfants le plus nombreux. Mais l'enseignant a oublié de noter les destinataires de chaque boîte. La tâche des élèves consiste à retrouver, sans l'ouvrir, la boîte qui leur est attribuée. La première étape est de comprendre que, si la classe représente le groupe le plus nombreux, leur boîte est celle qui contient le plus grand nombre de bonbons, et est donc la plus lourde.

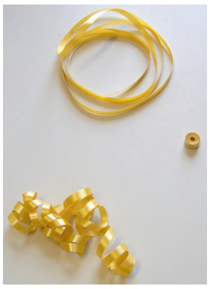
Les premières réactions consistent à soupeser les boîtes et à les secouer pour « entendre » si l'une d'elles contient un nombre significativement différent de bonbons. Les boîtes sont remplies de manière à ce que l'une de ces techniques (ou les deux) permette d'exclure une boîte par une expérience purement sensorielle. Pour comparer les trois boîtes restantes, il faut recourir à une technique plus précise. Nous proposons d'utiliser une balance à deux plateaux (balance de Roberval), qui permet des comparaisons des boîtes deux par deux. C'est donc la transitivité de l'ordre sur les grandeurs qui est utilisée implicitement par les élèves dans la plupart des cas pour déterminer la boîte la plus lourde. Si tous les groupes n'ont pas sélectionné la même boîte, la balance à plateaux est utilisée devant l'ensemble des élèves pour les mettre d'accord. Il s'ensuit une vérification : l'enseignant ouvre la boîte choisie unanimement et chaque enfant prend trois bonbons. Si le choix de la boîte est correct, il doit y en avoir pour tout le monde.

Comparaison de capacités : les gobelets

Parmi quatre gobelets, sélectionnés de sorte que le plus haut ne soit pas celui qui a la plus grande capacité, les élèves ont la consigne de choisir celui qui peut contenir le plus de grenadine. Comme lors des comparaisons précédentes, une première analyse de la situation permet d'écarter un gobelet de contenance visiblement plus petite que les autres. Ensuite, les élèves doivent réinvestir les apprentissages réalisés lors de la comparaison des moules à gâteaux, et procéder par transvasements d'eau. Les élèves comparent les récipients deux par deux et conservent, après chaque transvasement, le gobelet ayant la plus grande capacité. Ils devraient ici encore appliquer spontanément le principe de transitivité.

Comparaison de longueurs : les ficelles d'emballage

L'enseignant explique aux élèves qu'il souhaite emballer le gâteau d'anniversaire dans une boîte fermée à l'aide d'une ficelle d'emballage. Il présente un ensemble de ficelles : les unes sont enroulées, les autres torsadées et les dernières déroulées. Les longueurs à comparer ne se présentent plus d'emblée comme des segments rectilignes. Les ficelles proposées ont une longueur de plus d'un mètre cinquante afin d'éviter au maximum la tentation d'utiliser la règle pour les mesurer. La classe est partagée en plusieurs groupes pour travailler. L'enseignant remet à chacun d'eux un lot de ficelles différentes et leur demande de trouver la ficelle la plus longue. Pour les comparer, les élèves tendent les ficelles et les mettent bord à bord, pour se ramener à une situation semblable à celle des bougies.



Comparaison d'aires : set de table ou serviette ?

L'enseignant souhaite protéger les bureaux des élèves pour le goûter et donne le choix entre un set de table ou deux sortes de serviettes. Il présente aux élèves des lots identiques d'éléments et leur demande de déterminer celui qui recouvre la plus grande surface de leur table. Comme prévu pour les manipulations précédentes, un élément est, à première vue, bien plus petit que les autres et est écarté. Il s'agit d'une petite serviette.

Pour comparer les deux éléments restants, les élèves doivent penser à les superposer et ainsi se rendre compte que le set dépasse de la serviette et que c'est donc lui qui recouvre la plus grande surface.

La synthèse... et le goûter !

Après ces manipulations, une synthèse est nécessaire, comprenant à la fois l'ensemble des démarches effectuées par les élèves et des éléments plus théoriques. Elle se fait en deux temps : oralement lorsque les élèves expliquent ce qu'ils ont découvert au fil de la *Math & Manip* et ensuite par écrit. Les élèves pourraient dessiner eux-mêmes ce qu'ils viennent de découvrir. Cette dernière partie est laissée à l'initiative des enseignants étant donné que le matériel utilisé et les réflexions proposées par les élèves peuvent varier d'une classe à l'autre.

L'ensemble des activités se termine par la fête d'anniversaire.

Des étalons – Deuxième cycle (de 8 à 10 ans)

Cette *Math & Manip* propose de découvrir les étalons conventionnels de capacité en partant de comparaisons directes et indirectes avec des étalons familiers.

L'enjeu principal de cette suite d'activités est d'amener les élèves à prendre conscience de la nécessité de s'accorder sur un étalon.

Comparaison directe

La première phase de cette *Math & Manip* est de proposer aux élèves deux récipients et de leur demander d'identifier celui qui a la plus grande capacité.

Après une discussion pendant laquelle les élèves émettent leur avis (le plus grand car le plus large, le plus grand car le plus haut, impression que l'un est plus grand, etc.), l'enseignant leur demande de vérifier ce qu'ils affirment en transvasant par exemple le contenu de l'un dans l'autre. Le résultat de la manipulation (eau qui déborde, reste d'eau dans un des récipients, etc.) permet de déterminer quel récipient a la plus grande capacité (cf. paragraphe sur les moules à gâteau p. 43).

Comparaison indirecte

Pour poursuivre l'activité, l'enseignant divise la classe en deux groupes et raconte l'histoire suivante :

> *Vous êtes deux équipes d'archéologues. Avant de partir en expédition, vous faites vos malles ensemble et vous emportez exactement le même matériel de travail. Une équipe part sur un site de fouilles en Grèce, une autre en Égypte. Au cours des fouilles, les équipes se donnent des nouvelles. Il se fait qu'elles ont trouvé toutes les deux une amphore. Chaque groupe estime avoir découvert l'amphore de plus grande capacité. Malheureusement, ces amphores sont trop fragiles pour être transportées de sorte qu'il n'est pas possible de les comparer directement. Afin de déterminer l'amphore de plus grande capacité, vous pouvez utiliser le matériel de votre malle et échanger des informations écrites. Vous êtes également en contact avec un expert belge auquel vous devez envoyer un rapport mentionnant les résultats de la comparaison et leur justification.*

En sortant le matériel de la valisette, chaque groupe est confronté au choix d'un objet approprié à la mesure de la capacité de son amphore. Certains objets sont très petits (bouchon, cuillère, etc.), ce qui rend fastidieux le remplissage de l'amphore. D'autres sont plus grands (boîte de conserve, tasse, etc.), ce qui manque de précision mais permet néanmoins de mesurer par encadrement. De plus, des objets inadaptés à la mesure de capacité ont été placés, avec pour possible effet de focaliser l'attention des élèves sur la hauteur, la largeur, la longueur, ... de l'amphore. Notons que certains groupes pourraient se servir d'étalons variés, plus grands et plus petits (bol et pot à cure-dents, etc.) afin d'amener plus de précision.

Au moment de choisir l'étalon, plusieurs situations peuvent se présenter.

- Les deux équipes se mettent d'accord, à un moment donné, sur un étalon *via* un échange de messages. Pour celles-ci, l'activité est presque terminée. Il ne leur reste plus qu'à mesurer la capacité de leur amphore et à comparer leurs mesures pour établir l'amphore de capacité la plus grande.
- Les deux équipes ne s'accordent pas sur un étalon. Deux cas de figures sont alors possibles :
  - — les équipes ont utilisé des récipients différents comme étalon. Quand elles rendent leur rapport, l'expert le désapprouve, quels que soient les résultats, en raison de l'inadéquation de la démarche ;
  - — les équipes ont pris le même récipient comme étalon, par hasard. L'expert envoie alors un message annonçant par exemple : « Une troisième amphore a été découverte en France par une équipe disposant du même matériel que vous. L'équipe dit qu'elle a une capacité de 21 bols rouges [1]. Est-elle de plus grande capacité ? ».

Les équipes doivent, dans tous les cas, prendre conscience de la nécessité de s'accorder sur un récipient commun. Il reste aux élèves à procéder, une nouvelle fois si nécessaire, à la mesure de la capacité de leur amphore avec cet étalon. Les mesures ainsi obtenues sont finalement comparées et cela débouche sur la détermination de l'amphore de plus grande capacité.

Étalons conventionnels

Après avoir vécu la nécessité de choisir un étalon commun pour comparer les capacités de récipients, les élèves peuvent aller plus loin dans leur apprentissage. L'enseignant poursuit alors l'histoire avec le passage suivant :

> *Une autre amphore a été découverte en Turquie. Les archéologues turcs*

1. L'étalon utilisé par l'équipe d'archéologues en France doit être différent de celui utilisé par les deux équipes mais se trouver dans leur valisette. Le nombre mentionné doit être compatible avec les valeurs obtenues par les élèves pour les deux amphores.

> *ont mesuré la capacité de cette amphore avec leur propre matériel. L'amphore contient 33 verres. Classez les amphores de Turquie, de Grèce et d'Égypte selon leur capacité.*

Notons que le verre utilisé comme étalon par l'équipe de Turquie ne doit pas se trouver dans les valisettes et que les élèves ne peuvent donc pas imaginer sa taille. Ils doivent se rendre compte qu'il est difficile de trouver exactement les mêmes récipients d'un pays à l'autre. Une discussion s'engage avec le groupe classe autour des étalons familiers. La question d'un étalon commun universel devrait se poser et déboucher progressivement sur l'étalon de mesure de capacité actuel : le litre ou l'un de ses sous-multiples.

Lorsque le litre a été évoqué comme unité de référence, l'enseignant reforme les deux équipes des sites de Grèce et d'Égypte. Celles-ci regagnent leur espace d'expérimentation où elles retrouvent leur amphore remplie d'eau et un seau vide pour recueillir l'eau. L'enseignant distribue les récipients gradués avec les mêmes sous-unités à chaque groupe et reprend l'histoire.

> *Communiquant avec l'équipe de Turquie, vous apprenez que leur amphore a une capacité de* $3\,\mathrm{L}$ *et 750 mL. Mesurez la capacité de votre amphore à l'aide du récipient gradué et, ensuite, classez les trois amphores de celle qui a la plus grande capacité à celle qui a la plus petite capacité.*

L'enseignant doit choisir la capacité de l'amphore turque de telle sorte que la partie entière de sa mesure — en litres — coïncide avec celle d'au moins une des amphores de Grèce et d'Égypte. La partie décimale, quant à elle, doit être choisie en fonction des sous-unités apparaissant parfois implicitement dans les graduations des récipients utilisés.

Pour mesurer la capacité de leur amphore, les élèves doivent la vider à l'aide du récipient gradué distribué. Ils veillent à remplir à chaque fois le récipient gradué jusqu'à une de ses graduations afin de pouvoir additionner les mesures des quantités qu'ils retirent de l'amphore. Une autre solution est de verser, dans le seau vide, l'eau contenue dans l'amphore et de la remplir, à nouveau, avec l'eau recueillie en suivant le même principe. Dans les deux cas, il reste aux élèves à additionner toutes les mesures des volumes transvasés pour connaître la capacité de leur amphore.

Remarquons qu'il faut éviter que les élèves jettent l'eau contenue dans l'amphore car ils se trouveraient alors face à une difficulté supplémentaire. En effet, s'ils remplissent l'amphore litre après litre, il arrivera un moment où ils ne pourront plus verser l'entièreté de leur récipient gradué dans l'amphore et il y aura un reste dans le récipient gradué. Par exemple, s'il reste $650\,\mathrm{mL}$ dans le récipient gradué, les élèves doivent en déduire que 350 mL ont été versés dans l'amphore.

La séquence se termine par une activité de classement de différents récipients avec une indication de capacité exprimée en litres, centilitres ou millilitres (nous n'en avons pas trouvé avec une indication en décilitres). Il s'agit de regrouper les récipients par groupes de même capacité et de découvrir ainsi les liens entre les différentes unités.

Volumes – Troisième cycle (de 10 à 12 ans)

L'ensemble des manipulations destinées aux élèves de la fin du primaire a pour objectifs l'appropriation de la notion de volume, la découverte de la formule du volume d'un parallélépipède rectangle ainsi que la construction de liens entre quelques unités de volume.

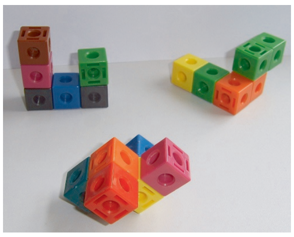
La mise au point d'une séquence d'apprentissage sur le volume du parallélépipède rectangle et les expériences menées en classe dans ce cadre nous ont fait comprendre à quel point la notion de volume était délicate à circonscrire avec les élèves et, dans un même temps, combien il était nécessaire de poser des bases solides pour la compréhension de ce concept. L'impossibilité d'une définition rigoureuse et complète, à ce stade de l'enseignement, nous a amenés à mettre en place une série d'expériences qui confrontent les préconceptions des élèves à la réalité de la situation et conduisent à la création d'images mentales diverses dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, la distinction entre les notions de volume d'un objet plein ou creux nous a semblé fondamentale. Les volumes d'objets creux sont comparés par remplissage, ceux des objets pleins de tailles, de formes et/ou de masses différentes sont comparés par immersion. Le compte rendu de cette réflexion préalable a fait l'objet d'une publication détaillée ([4]) et n'est pas présenté ici.

En ce qui concerne la découverte de la formule du volume d'un parallélépipède rectangle, nous avons délibérément choisi de travailler d'emblée sur des boîtes parallélépipédiques sans passer par des boîtes cubiques comme c'est le cas dans de nombreux manuels scolaires. En effet, il nous a semblé que le rôle de chacune des trois dimensions est plus perceptible dans le cas général.

Construction d'un solide en cubes

L'enseignant répartit les élèves en groupes et distribue à chacun d'eux six cubes emboîtables.

Il leur montre un solide de forme parallélépipédique qu'il a construit avec six de ces mêmes cubes puis il donne la consigne de construire un solide différent du sien en utilisant les six cubes. L'enseignant devra peut-être encourager la créativité des élèves pour obtenir des formes variées, comme celles présentées ci-dessous.



Cette première consigne permet d'attirer l'attention des élèves sur le mot « volume » lorsque l'enseignant demande ensuite de construire un solide de « volume » différent du sien en utilisant tous les cubes.

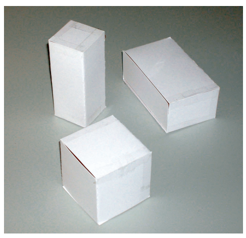
Les élèves cherchent à se conformer à la consigne et tentent, par tous les moyens, de construire un tel solide. Dès lors, il se peut que plusieurs d'entre eux construisent un solide différent de celui de l'enseignant tout en sachant pertinemment bien que le volume trouvé ne sera pas différent.

Cette seconde consigne vise à faire prendre conscience aux élèves que le volume d'un objet ne varie pas si on utilise le même nombre de cubes.

Il se peut qu'aux yeux de certains élèves, des solides construits semblent prendre plus de place que d'autres car leur rangement est moins aisé à cause de leur configuration. C'est le moment opportun pour dissocier la notion de volume de celle de rangement.

Comparaison du volume de boîtes parallélépipédiques

L'enseignant présente aux élèves trois boîtes de forme parallélépipédique de dimensions très différentes mais de volume assez proche, par exemple une boîte cubique, une boîte assez haute et une troisième assez large. L'enseignant demande de trouver la boîte la plus grande. La boîte « la plus grande », est-ce celle qui est la plus haute, la plus large, la plus longue ? Cette discussion fait surgir la nécessité de préciser la question : nous souhaitons trouver la boîte qui a le plus grand volume.



Les élèves cherchent alors un moyen de comparer les volumes des trois boîtes. Une manière de procéder consiste à remplir les différentes boîtes au moyen de cubes en bois de 2 cm d'arêtes.

Devant la classe, les trois boîtes sont alors remplies successivement. Le nombre de cubes que contient chaque boîte est noté au tableau ; on remarque que ce nombre est constant, quelle que soit la position de la boîte.

On se met d'accord sur le fait qu'on peut comparer le volume des boîtes en comparant le nombre de cubes qu'elles contiennent, ce nombre de cubes peut donc servir à mesurer le volume. La boîte contenant le plus grand nombre de cubes est identifiée comme étant la boîte de plus grand volume.

À partir de cette mise au point, on convient d'exprimer le volume des boîtes suivantes en nombre de cubes.

Construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle

Chaque groupe reçoit 38 cubes de 2 cm d'arête et quatre boîtes dont les dimensions sont :

- boîte 1 :
  longueur 6 cm, largeur 4 cm, hauteur 8 cm ;
- boîte 2 :
  longueur 12 cm, largeur 8 cm, hauteur 4 cm ;
- boîte 3 :
  longueur 14 cm, largeur 10 cm, hauteur 6 cm ;
- boîte 4 :
  longueur 16 cm, largeur 12 cm, hauteur 8 cm.

La consigne donnée est de trouver le nombre de cubes nécessaires pour remplir chaque boîte.

Le nombre de cubes à la disposition des élèves leur permet de remplir entièrement la première boîte et de remplir une base ainsi qu'une partie d'un second « étage » de la deuxième. Pour la troisième boîte, il est possible de remplir une base et de construire une hauteur. Quand à la quatrième boîte, il y a assez de cubes pour construire une longueur, une largeur et une hauteur.

Connaissant l'aire d'un rectangle, les élèves trouvent assez vite que le nombre de cubes nécessaires à remplir un étage correspond au nombre de cubes placés dans la longueur multiplié par le nombre de cubes mis dans la largeur. Ce nombre trouvé, ils le multiplient par le nombre d'étages qu'ils peuvent construire. Il est très important que les élèves notent, pour chaque boîte, la démarche qu'ils ont utilisée. Celle-ci sera expliquée lors de la mise en commun et, par la suite, lors de la synthèse construite avec eux.

Notons que, dans toute l'activité, le volume s'exprime en nombre de cubes. Nous souhaitons par là favoriser une image mentale associant le volume à un nombre de solides-étalons et pas à la multiplication de trois longueurs.

Calcul du volume d'un parallélépipède rectangle en cm³

Il s'agit à présent de suivre la même consigne que précédemment mais avec 50 cubes de 1 cm d'arête. Le remplissage systématique des boîtes est si fastidieux que les élèves y renoncent d'emblée. Ils cherchent soit par calculs, soit par remplissage partiel. Pour chaque boîte, ils ont suffisamment de cubes pour remplir une longueur, une largeur et une hauteur.

Il se peut que des élèves ne passent pas par l'utilisation des petits cubes mais se basent sur le fait que la longueur de l'arête d'un cube en bois est le double de celle d'un petit cube. De ce fait, ils peuvent être tentés de doubler le nombre de cubes en bois pour calculer le volume en petits cubes. C'est la manipulation qui permet de trouver et de comprendre que le rapport est 8 car il faut 8 petits cubes pour reconstituer un cube en bois.

L'intérêt de cette activité est de montrer que, pour une même boîte, on obtient un nombre de petits cubes différent du nombre de cubes en bois. Ces nombres sont des *mesures du volume* de la boîte. Ils diffèrent parce que l'on a utilisé des « cubes étalons » différents. Cette activité amène la nécessité du choix d'un étalon commun pour mesurer des volumes.

L'enseignant explique aux élèves que le volume du cube de 1 cm d'arête est souvent choisi comme unité de référence pour mesurer et calculer un volume. Cette unité de volume est appelée centimètre cube. Ce choix est conventionnel, tout comme le choix du mètre ou du litre pour mesurer respectivement les longueurs et les capacités.

L'enseignant propose aux élèves de réfléchir au calcul du volume de boîtes qu'ils ne peuvent pas manipuler, par exemple de déterminer le volume d'une autre boîte qui mesure 3 cm de large, 4 cm de long et 7 cm de haut.

Le but de cette question est de faire découvrir aux élèves que l'on peut faire l'économie du remplissage en effectuant un calcul. Les cubes conventionnels ayant une arête de 1 cm, on place autant de cubes sur une arête que sa mesure en centimètres. Cela nous amène au calcul suivant : dans cette boîte, on peut mettre $3 \times 4 \times 7$ cubes d'un centimètre d'arête ce qui correspond à un volume de 84 cm^3.

Une boîte particulière

Une nouvelle boîte est proposée aux élèves, sans préciser ses dimensions. Il s'agit d'un décimètre cube. Puisqu'il leur est possible de mesurer les dimensions de cette boîte, les élèves effectuent le calcul $10 \times 10 \times 10$ cm^3 qui font 1 000 cm^3. On met donc 1 000 petits cubes dans le cube de 1 décimètre d'arête.

L'enseignant rappelle aux élèves que la mesure de chaque arête, exprimée en centimètres, peut aussi être exprimée en décimètres. La boîte que les élèves ont devant eux a une longueur, une largeur et une hauteur égales à 1 dm, son volume est de un décimètre cube, tout comme le centimètre cube est le volume d'un cube mesurant un centimètre d'arête.

Le calcul du volume de cette boîte a fait découvrir aux élèves qu'il faut 1 000 cubes de 1 cm^3 pour remplir la boîte de 1 dm^3. Par conséquent, 1 dm^3 et 1 000 cm^3 sont des mesures d'un même volume.

Adéquation des unités

L'enseignant propose aux élèves de chercher le volume d'une boîte dont une dimension est donnée en décimètres et deux en centimètres. Il demande par exemple de chercher le volume d'une boîte ayant comme longueur 70 cm, comme largeur 3 dm et comme hauteur 40 cm.

Le choix des mesures données en centimètres s'est porté sur des multiples de 10 afin d'éviter les nombres décimaux dans un premier temps.

- La réponse 84 000 cm^3 est obtenue par les élèves qui ont converti toutes les dimensions en centimètres avant de calculer le volume en cm^3.
- La réponse 84 dm^3 est obtenue par les élèves qui ont effectué le même travail mais en dm^3.
- Les élèves qui proposent 8 400 cm^3 ont vraisemblablement multiplié les trois dimensions entre elles en omettant de les convertir en une unité commune.

Lorsque l'ensemble de la classe s'est accordé sur un volume égal à 84 000 cm^3 ou 84 dm^3, il reste à demander aux élèves comment expliquer que ces deux volumes sont égaux. Cela les renvoie à l'activité précédente dans laquelle ils ont découvert que le décimètre cube est 1 000 fois plus grand que le centimètre cube. Puisque 1 dm^3 équivaut à 1 000 cm^3, 84 dm^3 équivalent à 84 000 cm^3. Le nombre qui donne la mesure du volume en dm^3 est ici d'un ordre de grandeur plus facile à appréhender.

La recherche du volume de la boîte suivante légitime l'extension de la formule aux nombres décimaux. L'enseignant demande de calculer le volume d'une boîte ayant 55 cm de longueur, 3,4 dm de largeur et 21 cm de hauteur et d'exprimer la réponse en cm^3 et en dm^3.

Pour exprimer la réponse en cm^3, les élèves convertissent en cm la largeur donnée, effectuent le produit $55 \times 34 \times 21$ et obtiennent $39\,270\,cm^3$.

Pour exprimer la réponse en dm^3, deux possibilités se présentent. Soit les élèves se souviennent que $1\,dm^3$ équivaut à $1\,000\,cm^3$ et transforment $39\,270\,cm^3$ en $39{,}270\,dm^3$, soit ils transforment la longueur et la hauteur en dm et effectuent le produit $5{,}5 \times 3{,}4 \times 2{,}1$. Comme le résultat est le même, on pense que le dernier calcul est légitime même si cette multiplication des trois nombres ne peut plus s'appuyer sur la même démarche mentale de dénombrement de cubes.

Calculer un volume à partir de nombres décimaux amène les élèves à dépasser l'image mentale du volume qu'ils s'étaient construite à partir des manipulations.

Conclusion

Cet article a présenté trois *Math & Manips* conçues pour les élèves du primaire.

Dans la première, les enfants découvrent diverses méthodes de comparaison selon les grandeurs avec lesquelles ils travaillent et se forgent des intuitions relativement aux domaines de validité des techniques qu'ils possèdent déjà, ce qui crée l'espace nécessaire à la mise en place de nouvelles procédures, plus efficaces.

Au cours d'une activité de comparaison de récipients dans un contexte ludique, la deuxième activité amène les élèves à vivre la nécessité de s'accorder sur un étalon commun, conventionnel ou non, dès que la comparaison directe des capacités devient impossible.

Dans la troisième, les élèves mettent progressivement en place des procédures pour déterminer le nombre de cubes de référence nécessaires au remplissage de boîtes parallélépipédiques. Tout en dégageant la formule de calcul du volume d'un parallélépipède rectangle par des manipulations qui lui donnent du sens, ils sont confrontés à la nécessité de s'accorder sur un étalon, et construisent les liens entre certaines unités de volume.

Les différents conflits rencontrés au cours de ces séquences d'apprentissage incitent les élèves à questionner leurs conceptions préalables, à identifier les cas où l'impression visuelle suffit et à mettre en œuvre des méthodes efficaces dans les autres cas.

Pour terminer, soulignons que, en ce qui concerne l'école primaire, l'objectif n'est pas tant l'introduction de manipulations dans les classes, car celles-ci y ont généralement leur place, mais bien la mise en évidence, pour l'enseignant, des savoirs mathématiques impliqués et des conditions nécessaires à leur mobilisation.

Références

[1] CREM. Math & Manips*, des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques*. Sous la dir. de Marie-France Guissard et Valérie Henry. Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2017.

[2] Nicolas Rouche. *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Bruxelles : Didier-Hatier, 1992.

[3] CREM. *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*. Sous la dir. de Nicolas Rouche. Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002.

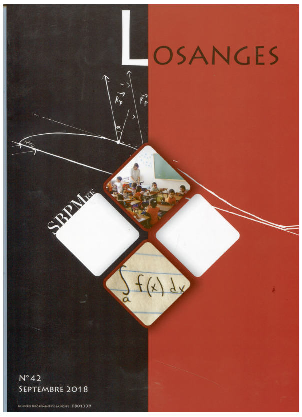
[4] Marie-France Guissard et al. « Construction de la notion de volume ». In : *Grand* ℕ nº 96 (2015), pp. 35-44.

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen ont fait partie d'un groupe de chercheurs au CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) à Nivelles, en Belgique.

Contact : info@crem.be.

Matériaux pour une documentation

Losanges
Revue de la SBPMef
Les mathématiques et le réel
sous la direction d'Évelyne Barbin, Dominique Bénard et Guillaume Moussard, 2018
Mathématiques élémentaires pour l'école
Alain Mercier et Serge Quilio, Presses universitaires de Rennes, 2018



Losanges est la cousine belge d'*Au fil des maths* ! Comme notre revue préférée, elle est la publication principale de l'association des professeurs de mathématiques d'expression française, (la SBPMef : **S**ociété **B**elge des **P**rofesseurs de **M**athématiques d'**e**xpression **f**rançaise). Comme *Au fil des maths* elle s'adresse aux enseignants de tous les niveaux de classe, elle est aussi le fruit de la fusion de remarquables publications qui l'ont précédée (*Maths Jeunes* et *Maths Junior*), et enfin elle bénéficie d'une élégante maquette en LaTeX, d'un comité de rédaction dynamique. . .

Cette petite introduction pourrait laisser croire que *Losanges* a copié *Au fil des maths*, il n'en est rien car s'il y a bien cousinage, *Losanges* est la cousine aînée : cette publication trimestrielle vient de faire paraître son quarante-quatrième numéro. La qualité de cette revue l'a fait figurer en bon rang parmi les publications de référence qui ont inspiré les concepteurs d'*Au fil des maths*.

Que trouve-t-on dans *Losanges* ?

Chaque numéro de soixante-douze pages est construit suivant quatre rubriques :

- « Réflexions » : articles de didactique, éléments d'histoire des mathématiques, approfondissement de notions, présentation et compte-rendus de séquences ;
- « Technologies » : articles théoriques sur l'algorithmique, la programmation et proposition de diverses activités sur logiciels ;
- « Jeux et concours » : jeux mathématiques, exercices de rallye, problèmes pour chercher ;
- « Regards sur » : recensions de sites et de publications.

Afin de permettre au lecteur d'*Au fil des maths* de se faire une idée plus précise, parcourons le contenu du numéro 42 de septembre 2018.

La partie « Réflexions » compte quatre articles :

- *Les divers sens des opérations* (Françoise Lucas) : article de didactique concernant prioritairement l'école élémentaire ;
- *Graphique mon beau graphique, dis-moi ?* (Benoît Jadin, Camille Krooonen, Juliette Petitjean) : article sur les pièges et les vertus des différents modes de représentation de séries statistiques (camemberts 2D et 3D, diagrammes en bâtons. . .) ;
- *Des figures en évolution : les tapis rectangulaires* (Marie-France Guissard et Isabelle Wettendorff) : présentation et comparaison de deux séquences de niveau collège sur le thème des rectangles bordés (problèmes de décompte de cases dans des tableaux) ;
- *L'histoire au service de l'enseignement : le cas de la moyenne arithmétique* (Jean-Jacques Droesbeke et Catherine Vermandele) : comme l'indique le titre. . .

La rubrique « Technologies » présente deux articles consacrés l'un à la stéganographie, l'autre à l'utilisation du tableur pour construire des tables de simulation d'emprunts.

Dans *Losanges* les articles sont plutôt longs, fouillés, largement documentés d'un point de vue mathématique et d'un point de vue didactique. Si parfois certains termes ou certaines notations peuvent dérouter le lecteur français, l'obstacle est aisément surmontable. Il sera, en revanche, quelquefois difficile de tester certaines séquences dans les classes françaises du fait de différences notables dans les programmes, notamment en géométrie, ou de l'utilisation de logiciels peu connus en France, tels que « Apprenti Geomètre » ou « Ruby » (programmation). *Losanges* est une source inépuisable d'idées d'activités, et en particulier de situations-problèmes. Il appartient ensuite au non Belge de procéder aux adaptations de vocabulaire, de notations et de logiciel pour mettre en œuvre les idées récoltées.

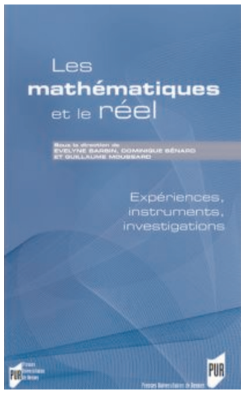
Où trouver *Losanges* ?

Dans sa boîte aux lettres tous les trois mois, en adhérant à la SBPMef, ou en ligne sur le site, toujours à condition d'être adhérent. Pour les non adhérents, une visite à cette page permet d'accéder aux sommaires des quarante-trois numéros et à la première page de chaque article.

Pour les adhérents de l'APMEP résidant en métropole, l'adhésion à la SBPMef est proposée à 50 €.

Pol Le Gall

Les mathématiques et le réel
Expériences, instruments, investigations.



sous la direction de Barbin Evelyne, Bénard Dominique et Moussard Guillaume.

ISBN 2-7535-6531-7, 248 pages, 20 €.

Quels rôles joue l'expérience dans les investigations et dans les pratiques mathématiques ? Quel rapport au « réel », voire au sensible, se trouve ainsi construit ? Issu des travaux de la Commission Inter IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques », cet ouvrage présente et analyse des exemples tirés de l'histoire, susceptibles d'être utilisés dans l'enseignement des mathématiques, mais aussi en interdisciplinarité avec la physique, la technologie, l'histoire, la philosophie. . .

La première partie de l'ouvrage concerne les instruments pour mesurer des grandeurs et pour tracer les figures. Par exemple, la balance, rencontrée chez Archimède, Léonard de Vinci, Simon Stevin, a conduit les mathématiciens à mieux comprendre, penser et écrire la proportionnalité, notion qui joue un grand rôle dans l'enseignement des mathématiques. La dioptre de Héron et les divers graphomètres permettent de mesurer des distances inaccessibles et de travailler la géométrie ; les instruments de dessin comme le pantographe ou simplement la méthode des « petits carreaux » reposent sur la similitude...

La deuxième partie aborde des machines inventées pour les calculs arithmétiques : des abaques à jetons utilisés jusqu'au XVIIe siècle aux arithmomètres encore utilisés au début du XXe siècle, sans oublier bien sûr les machines de Leibniz et de Pascal. Sont évoqués aussi l'échiquier de Lucas pour la recherche des nombres premiers ou les tables « métrologiques » pour les conversions entre diverses unités de mesure.

Ces deux parties montrent bien le statut des instruments comme connaissance matérialisée et le lien qu'ils entretiennent d'emblée avec l'invention créatrice. Leurs chapitres proposent un éventail riche et varié de situations historiques et pédagogiques.

Quant à la troisième partie, elle porte sur les passages et les conflits rencontrés, aussi bien dans l'histoire que dans l'enseignement, entre le « réel », toujours inaccessible, et une réalité construite avec les mathématiques. Ces conflits peuvent servir de levier pour approcher en classe certains aspects épistémologiques et mettre en œuvre une démarche d'investigation. Par exemple, l'observation de l'ombre formée par un bâton planté dans le sol conduit à des interprétations différentes dans deux modèles cosmologiques distincts (en Chine et dans la Grèce antique) ; la controverse récente sur le lien entre le cancer du poumon et le fait être fumeur est éclairée par l'histoire des études statistiques sur la question.

On trouvera le sommaire et des résumés de chaque chapitre sur Publimath.

Anne Michel-Pajus

Mathématiques élémentaires pour l'école

Alain Mercier et Serge Quilio, Presses universitaires de Rennes

ISBN 978-2-7535-7400-75, 246 pages, 24 €

L'ouvrage *Mathématiques élémentaires pour l'école* s'adresse à la fois aux enseignants, aux formateurs et aux étudiants. Son objectif est d'interroger les liens entre savoirs de référence, épistémologie, didactique et situations de classe. Ce qui est scruté dans ce livre est tout entier contenu dans le rapport entre enseignement et construction des concepts par l'élève, en particulier dans le domaine de la construction du nombre et celui de l'usage des symboles dans l'activité écrite des pratiques numériques.

Les auteurs cherchent à répondre à deux questions centrales : « Qu'est-ce que c'est que faire des mathématiques dans les premières années d'enseignement (cycles 1 et 2) ? » et « Quelles sont les activités que l'école doit être en mesure de proposer pour que l'élève apprenne et comprenne ? ».

Alain Mercier et Serge Quilio ont pris le temps d'analyser leurs propres travaux et expérimentations, au sein des LéA[1] notamment. Ils structurent leurs résultats en trois parties. Les deux premières, États des lieux et État des connaissances tissent une chronologie des orientations choisies en France pour l'enseignement des mathématiques avec les fondements théoriques qui peuvent les justifier. La forme échappe heureusement à celle d'un compte-rendu. La rédaction reste alerte, les auteurs confrontent leurs propres recherches à celles d'autres chercheurs permettant de connaître leurs prises de position et les courants de pensées actuels. La troisième partie de l'ouvrage contient des propositions d'enseignement qui sont aussi des pistes de travail pour les cycles suivants. Les formes d'activités (dont le travail sur fichier) sont conçues de sorte que la fréquentation du nombre à l'école soit différente de celle que l'enfant va rencontrer dans la sphère familiale ou sociale, la construction du nombre étant un enjeu de l'enseignement des mathématiques au cycle 1.

Cette somme de questionnements et de pistes est riche, précieuse tant la réussite des élèves en mathématiques est difficile à appréhender complètement par les évaluations. L'ouvrage replace la pratique enseignante comme préalable indispensable à des démarches réflexives sur les connaissances, compétences et attitudes que les élèves doivent acquérir en venant à l'école, notamment la posture de chercheur en herbe…

Agnès Gateau

*

* *

Pourquoi adhérer ?

Adhérer à l'APMEP, c'est :

- recevoir par voie postale le trimestriel *Au fil des maths*, revue professionnelle destinée à tous les enseignants de mathématiques, de la maternelle à l'université ;
- avoir accès à la revue numérique *Au fil des maths*, indispensable pendant de la revue « papier », qui propose des articles inédits, des compléments à certains articles et des ressources vidéo ;
- être tenu·e informé·e de l'actualité mathématique au niveaux national et régional (manifestations, publications, activités de l'association, etc.) par le BGV, lettre d'information bimestrielle ;
- avoir accès aux brochures éditées par l'association à un tarif préférentiel, notamment aux brochures *Jeux école* ou *Jeux écollège*. L'ensemble des ressources éditées par l'APMEP est disponible dans la boutique en ligne ▶.

Adhérer à l'APMEP, c'est aussi montrer son attachement à un enseignement des mathématiques de qualité, pour tous les élèves. Pour connaître les positions défendues par l'association, c'est ici ▶.
Si vous avez l'envie de vous investir dans l'association aux côtés d'autres collègues motivés, la Commission « Premier degré » est faite pour vous ! Tous les détails (sans engagement) en écrivant à sa responsable, Agnès Gateau : agnesgateau@gmail.com.
Vous pouvez adhérer en ligne pour l'année 2021 ici ▶.

1. Lieux d'Éducation Associés.

Sommaire du numéro spécial

Ressources didactiques et activités spécial « Premier degré »

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr