

# LES MATHS : L'Ω ?

Organe officiel de la Régionale de CAEN de l'APMEP : Numéro 13 - Juin 2012  
Rédacteur : Eric Trotoux

## Le mot de la Présidente

Notre journée de la régionale 2012 a eu lieu le 14 mars au lycée Allende d'Hérouville St Clair et a réuni une trentaine de participants. Le matin, les deux ateliers ont été axés sur les nouveautés des programmes de terminales et l'après-midi la conférence a porté sur le mathématicien Léonard Euler. En effet, deux événements inhabituels se sont déroulés autour de cette journée : la semaine nationale des mathématiques et la présence à Caen de l'exposition « Euler », exposition très didactique conçue par le

collège d'Yverdon en Suisse qui a successivement été installée au lycée Allende puis aux lycées Fresnel et Malherbe de Caen. Lors de notre assemblée générale, nous avons évoqué la candidature d'un titulaire et d'un suppléant pour le comité national et le remplacement de Richard Choulet, rédacteur de notre journal depuis cinq ans. Notre comité régional a un réel besoin de « forces vives », n'hésitez pas à nous contacter (adresses en fin de journal).

## Les nouvelles.

Le séminaire national APMEP (12 et 13 mai 2012) avait pour thème la communication interne et externe de notre association. Le samedi matin, Patrice Bride, rédacteur en chef des Cahiers Pédagogiques (<http://www.cahiers-pedagogiques.com>) puis François Jarraud du Café Pédagogique (<http://www.cafepedagogique.net>) ont présenté la façon dont avait évolué la communication, au cours des dix dernières années, dans leurs structures respectives. L'après-midi, des ateliers ont permis d'aborder différents points : l'évolution des publications (Faut-il passer du papier au numérique partiellement ? en totalité ?) et celle

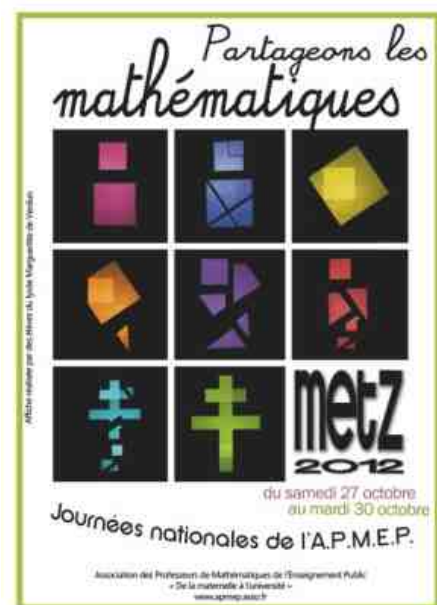
du site web APMEP (Faut-il ajouter une partie gestion des adhérents et un module d'achat en ligne et pour cela embaucher un informaticien professionnel ? Comment financer ce poste ponctuellement ou de manière pérenne (par du mécénat ou une mise à disposition ?), le rôle et la place des commissions nationales et les interactions entre les régionales et le national. Cette réflexion a débouché le dimanche sur un texte de synthèse qui sera soumis aux membres du Comité National qui se réunit le 23 juin prochain. Un nouveau groupe de travail sur la refonte du site web de l'APMEP a été mis en place.

## Journées Nationales de Metz 2012 « Partageons les mathématiques »

Le site des journées : <http://www.jnmetz2012.fr/>

La Régionale Lorraine vous accueillera à METZ du 27 au 30 octobre 2012 pour des journées conviviales et studieuses :

- Cédric Villani, médaillé Fields, en conférence d'ouverture.
- Xavier Viennot, accompagné de son violon, en conférence de clôture.
- Huit autres conférences (dont une spécifique 1er degré).
- Une centaine d'ateliers, animés par des collègues, pour présenter et partager leurs expériences.
- Des débats d'actualité, des réunions de commissions.
- Des temps d'échanges et de rencontres informelles.
- Comme l'an passé, une journée plus particulièrement dédiée au « premier degré » (le lundi 29).
- Des expositions.
- Les stands des éditeurs pour enrichir vos ressources.
- En soirée, des spectacles et un banquet.
- Et pour les enfants des congressistes, une « colo » (en journée).
- La découverte d'une ville dynamique et riche en patrimoine.



Nous reprenons ci-dessous l'article écrit dans la revue de l'IREM de Basse-Normandie et paru en avril 2012, à la mémoire de Guy JUGE. Ce texte a été écrit par Pierre Ageron, directeur de l'IREM de 2007 à 2012, qui a rappelé les vingt-six ans d'action de Guy au sein de l'IREM. Gilbert Lecler et Eric Trotoux ont contribué à ce qui évoque son rayonnement à l'IUFM et dans notre association régionale APMEP de Caen.

## *In memoriam* Guy Juge

« *La vraie générosité envers l'avenir consiste à tout donner au présent.* »

Albert Camus

Notre collègue Guy Juge est décédé le 28 novembre 2011. Très attaché à notre association régionale APMEP et à l'IREM de Basse-Normandie, dont il fut un des animateurs les plus actifs pendant vingt-six ans, il a initié à l'informatique des générations de professeurs de mathématiques. En hommage à sa profonde gentillesse, mais aussi à sa passion et sa compétence professionnelle, nous avons souhaité évoquer quelques étapes de sa vie et quelques aspects de son travail.

Le choix des deux citations illustre des traits de Guy qui nous ont marqués.



« *Je suis certain que les Romains, s'ils avaient eu Internet, auraient été les premiers à l'adopter.* »

Intervention au Sénat de Dieter Otten, Université d'Osnabrück, extrait de "Les parlements dans la société de l'information" (1999)

### **L'homme, le père, le passionné**

Guy Juge est né à Paris le 27 novembre 1945. À l'âge d'un an, il perdit son père, des suites de ses blessures de guerre et fut élevé par sa seule mère. Il obtint son baccalauréat en 1963 et étudia à la Faculté des sciences de Paris. Admis au CAPES de mathématiques en 1969, il effectua des stages dans trois établissements de la région parisienne avant d'être, à la rentrée 1970, nommé au CES de Villejuif. En tant que soutien de famille, il fut exempté du service militaire. En février 1975, il épousa Anne-Marie, professeur d'histoire et géographie, avec laquelle il eut trois enfants : Marie-Claire en 1976, Marie-Cécile en 1977 et François en 1979. Grand mélomane, il chanta un temps à la maîtrise de Radio France. C'est en 1978 qu'il fit le choix de quitter Paris pour la Normandie. Il habita d'abord à Trouville, puis construisit la maison familiale, pratiquement de ses mains, sur un versant de colline à Saint-Aubin-Lébizay, une minuscule commune du Pays d'Auge fusionnée quelques années plus tôt à celles de Beaufour et de Druval. Son premier poste en Normandie fut une terminale C au lycée Albert Sorel de Honfleur. Il y enseigna jusqu'en 1995, avant d'être muté au lycée Augustin Fresnel de Caen, puis, en 2002 et jusqu'à sa retraite en 2009, au lycée Salvador Allende d'Hérouville Saint-Clair. Parallèlement, il fut formateur associé à l'IUFM de Basse-

Normandie depuis 1991 jusqu'à son départ en retraite. Sa principale activité y fut axée sur le développement de l'informatique à visée pédagogique pour les professeurs de lycée et de collège en formation initiale ou continue. Ainsi, il travailla avec François Goblot auprès des « PLC1 » et avec Gilbert Lecler auprès des « PLC2 ». Avec Gilbert, ils formèrent plusieurs générations de stagiaires, suivis individuellement, grâce aux visites dans leurs classes. Ils prirent aussi part à l'encadrement de la confection et de la maintenance de leurs mémoires professionnels. Enfin, les dernières années il participa à la préparation au CAPES externe de mathématiques. Il envisagea un temps de passer l'agrégation, mais y renonça pour se consacrer à ses passions : les ordinateurs, mais aussi la musique classique, les voyages en famille dans sa caravane, et... sa tondeuse à gazon !

Il rejoignit l'équipe des animateurs de l'IREM de Basse-Normandie à l'automne 1985. Avec Gilbert Lecler, il y créa le groupe Micrologiciels, qui fut renforcé plus tard par l'arrivée – notamment de Bernard Genetay, puis d'Éric Trotoux – le groupe ayant été rebaptisé Mathématiques et outil informatique. Dès le début, l'activité centrale du groupe fut l'animation de stages consacrés tant à la prise en main du matériel micro-informatique (ordinateur, im-

primante, table traçante...) qu'à son utilisation comme outil pédagogique en cours de mathématiques. À l'époque, les moyens accordés à la formation continue étaient encore importants : un stage pouvait représenter douze séances

de quatre heures ! Mais les professeurs, loin d'être tous convaincus par l'intérêt de l'informatique, ne s'y bousculaient pas.



Guy et Gilbert Lecler (de face), Didier Bessot et Jean Pierre Le Goff (face à Guy)

En amont de ce travail de formation, Guy et ses collègues menèrent d'abord un travail de recherche autour de l'utilisation des logiciels dans l'enseignement de la géométrie. Ils travaillèrent en lien avec la commission inter-IREM Logiciels et pédagogie, devenue plus tard Mathématiques et informatique, participant notamment à l'élaboration du logiciel Euclide Plus, dont la version PC émane du groupe de Caen. En 1992, ils présentèrent Pytha-Cabri, banque de figures géométriques correspondant aux exercices du célèbre manuel Pythagore (niveau Cinquième) et réalisée avec le logiciel Cabri-Géomètre. En 1993, ils rassemblèrent dans une brochure seize Exemples d'utilisations pédagogiques de l'ordinateur au lycée en cours de mathématiques autour de notions diverses : géométrie analytique, isobarycentre, produit scalaire, etc. Dans les années 1990 apparut une autre direction de travail : le calcul formel. Dès 1990,

Parallèlement, le groupe continua son activité de formation continue dans le cadre du Plan académique de formation. Mais les moyens avaient été réduits tandis que le besoin de formation en informatique augmentait : il s'avéra impossible de satisfaire toutes les demandes et chaque stage organisé aurait pu être dédoublé. À cette époque, le travail portait principalement sur le logiciel de calcul formel MAPLE, comme en témoigne une brochure éditée en 1997. À partir de 1996, il s'étendit à la calculatrice TI 92, par une expérimentation en liaison avec le ministère de l'Éducation nationale et avec Texas Ins-

Guy, participant à Toulouse à une université d'été inter-IREM sur le thème Informatique et enseignement de la géométrie, présenta le nouveau logiciel de calcul formel Derive, plus adapté à l'enseignement que ses prédécesseurs. Son expérience sur le sujet lui valut de faire partie du groupe d'experts créé en 1992 par le ministère de l'Éducation nationale sur les apports du calcul formel à l'enseignement des mathématiques. C'est alors que la commission inter-IREM lui confia à la tête du groupe caennais, l'organisation d'une université d'été sur le thème Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. Elle se déroula à l'IUFM de Caen du lundi 29 août au vendredi 2 septembre 1994, et ses actes, d'une grande richesse, furent publiés par les soins de Guy et ses collègues caennais dès janvier 1995.

truments, société pour laquelle Guy travailla longtemps. Guy s'intéressait beaucoup aux calculatrices, qu'il aimait aussi piéger et appelait volontiers des « amplificateurs à bêtises ». Guy anima aussi, avec les autres membres du groupe, des stages sur LaTeX, sur les logiciels de statistique, sur de multiples sujets liés à l'informatique pédagogique. Internet entra dans les préoccupations du groupe à partir de 1998 : son utilisation pour l'enseignement des mathématiques, bien sûr, mais aussi, service considérable rendu à l'ensemble de l'IREM, la création et la gestion du site web de l'IREM de Basse-Normandie. Guy avait



en effet une vive conscience de l'IREM comme un collectif auquel chacun peut apporter quelque chose. Dans les deux dernières années de sa vie, il développa un système d'inscription en ligne pour le colloque d'histoire et épistémologie des mathématiques organisé à Caen en 2010, il entreprit la refonte totale du site de l'IREM selon l'architecture SPIP (Pour l'Informatique Partagée) et organisa des séances de formation à l'intention des animateurs de l'IREM. En étroite symbiose avec l'IREM, Guy s'est aussi beaucoup investi dans la vie de l'association régionale des professeurs de Mathématiques de l'académie de Caen, en animant tous les ans, au cours des journées régionales, des ateliers de formation sur le thème de l'informatique dans le cours de mathématiques. Et comme d'autres collègues

irémiens, il a aussi dirigé des ateliers aux congrès nationaux de l'APMEP, auxquels il participait très régulièrement accompagné de son épouse Anne-Marie. Tout particulièrement, lorsque le congrès eut lieu à Caen en 2005, il fut l'un des piliers de l'organisation de cette manifestation : C'est Guy qui a repris, à partir du travail initié par un collègue d'Orléans, la gestion par l'internet (Php-Mysql) des inscriptions (700 à 800 participants sur quatre jours) et de la présentation du congrès, en améliorant (travail conséquent de programmation Php) les fonctionnalités des pages web du site des journées nationales de l'APMEP. Travail et savoir-faire qu'il a ensuite généreusement transmis aux collègues de Clermont-Ferrand qui organisaient le congrès de 2006.



Pendant les journées nationales de l'APMEP à Caen en 2005

Tous ceux qui ont travaillé à ses côtés ont gardé le souvenir d'un homme généreux et dévoué, d'une fiabilité à toute épreuve doublée de beaucoup d'humilité, d'une grande patience et d'une gentillesse non moins remarquables.



Guy sur le stand Texas-Instruments et à la soirée de la Baronnie au cours des journées 2005

## Bibliographie.

- ▷ **Guy Juge et Georges Mounier**, « L'atelier DERIVE », in : Actes de l'université d'été Informatique et enseignement de la géométrie, IREM de Toulouse, 1990
- ▷ **Bernard Genetay, Guy Juge, Gilbert Lecler et François Péan**, *Pytha-Cabri*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1992
- ▷ **Bernard Genetay, Guy Juge, Gilbert Lecler, Danièle Lecoq et François Péan**, *Exemples d'utilisations pédagogiques de l'ordinateur au lycée en cours de mathématiques*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1993
- ▷ M.E.N. - Commission inter IREM Math. & Info. - coordination **Guy Juge** - Actes de l'université d'été *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1994
- ▷ **Bernard Genetay, Guy Juge, Gilbert Lecler et Éric Trotoux**, *Quelques thèmes mathématiques du lycée présentés avec le logiciel MAPLE*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1997
- ▷ **Guy Juge et Jean-Baptiste Lagrange**, « Calcul formel de l'ordinateur à la calculatrice - Etude d'une situation d'enseignement avec la TI92 en classe de Première S », in : *Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques : quelles perspectives pour l'enseignement des mathématiques ?*, IREM de Rennes, 1997
- ▷ **Michèle Artigue, Badr Defouad, Michèle Dupérier, Guy Juge et Jean-Baptiste Lagrange**, *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*, cahier DIDIREM spécial n°4, IREM de Paris 7, 1998
- ▷ **Guy Juge et Jean-Baptiste Lagrange**, « Présentation et analyse d'activités proposées aux élèves de 1ère S dans le cadre de l'expérimentation DITEN sur les calculatrices formelles et géométriques », in : *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*, Actes du colloque francophone européen de La Grande-Motte, IREM de Montpellier, 1999
- ▷ **Guy Juge et Éric Trotoux**, « Présentation de quelques thèmes de mathématiques des programmes de lycée en utilisant la TI-92 pour présenter des imagiciels » in : *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*, Actes du colloque francophone européen de La Grande-Motte, IREM de Montpellier, 1999
- ▷ **Guy Juge** et un collectif d'auteurs, piloté par **A. Hirlimann**, M.E.N. Enseignement des mathématiques et calcul formel, *Derive, un outil à intégrer* Direction des Lycées et collèges, Innovations pédagogiques et technologies nouvelles, Sous-direction de la formation continue des enseignements du second degré et des innovations (199p.) 1996
- ▷ De très nombreuses brochures de « prise en main », destinées à l'utilisation fructueuse en cours, des calculatrices Texas Instruments. (Documents qui furent très largement diffusés dans les établissements scolaires par la société Texas-Instruments et sont encore téléchargeables sur son site.)

Guy et Anne-Marie ont lutté, ensemble, contre la même maladie. Bien qu'atteinte plus tard, Anne-Marie est partie la première, au cœur de l'été 2011. Guy, qui supportait stoïquement les lourds traitements depuis des années, n'aura guère tardé à la rejoindre. Mais il lui fallait d'abord organiser pour Anne-Marie une belle cérémonie religieuse, renouvelée à la rentrée pour ceux qui n'avaient pu s'y joindre. Une autre chose lui importait : montrer sa fidélité à l'IREM de Basse-Normandie, en nous rejoignant à Cahagnes au week-end de rentrée en octobre 2011, puis, une dernière fois, dans nos locaux, le 18 novembre 2011 – nous avons su ce jour là qu'il venait nous dire adieu. Le 28 novembre, le lendemain de son anniversaire, il est décédé au CHU de Caen, entouré de l'amour de ses enfants. Le jour de ses obsèques, l'église de Brucourt, à côté du monastère des Annonciades auquel il s'était beaucoup dévoué, était beaucoup, beaucoup trop petite pour accueillir tous ceux qui avaient apprécié ses profondes qualités.



Anne-Marie et Guy au banquet des Journées de Caen (2005)

Merci à Marie-Claire Juge-Ribaud pour les précisions biographiques qu'elle nous a fournies.

Pierre Ageron, Eric Trotoux, Gilbert Lecler.

\*\*\*\*\*

## Notre coin publicitaire

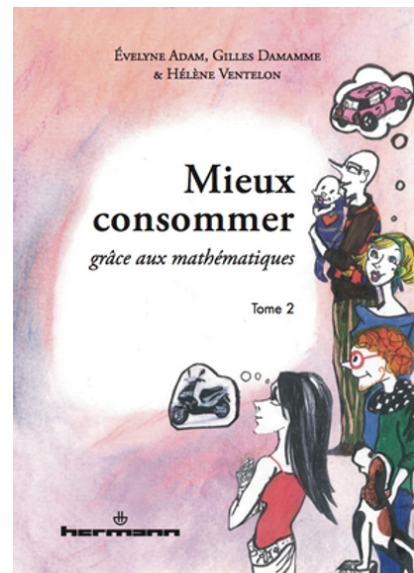
### MIEUX CONSOMMER GRÂCE AUX MATHÉMATIQUES

par Éveline Adam, Gilles Damamme et Hélène Ventelon – Éditions Hermann

Depuis une dizaine d'années le groupe, « Maths et consommation », de l'IREM de Basse-Normandie travaille sur des problèmes de mathématiques liés à la consommation.

Sa motivation initiale a tout d'abord été de donner du sens aux mathématiques que nous enseignons, de motiver un certain public d'élèves habituellement rebuté par les mathématiques, et aussi de rendre les élèves plus autonomes et plus responsables face à notre société de consommation.

Conçu de manière à rester accessible au public le plus large possible l'ouvrage : « Mieux consommer grâce aux mathématiques » en résulte. Le premier tome<sup>1</sup> est paru en septembre 2010 aux éditions Hermann. Le deuxième tome<sup>2</sup> vient de paraître fin avril 2012. Deux niveaux distincts sont abordés : le tome 1 est centré sur des exercices de niveau collège, le tome 2 sur des exercices de niveau lycée, même si quelques exercices peuvent être abordés dès le collège et quelques autres à l'université ; Disposer des outils du lycée permet d'aborder deux thèmes nouveaux : les crédits (en particulier les crédits renouvelables) et les jeux. Nous abordons aussi les pourcentages, les garanties, les courses, etc. Dans le prolongement du tome 1, développer l'autonomie des citoyens face aux pièges de notre société de consommation nous a semblé un objectif primordial.



### OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2011

Brochure n° 196 – n° ISBN : 978-2-912846-70-9

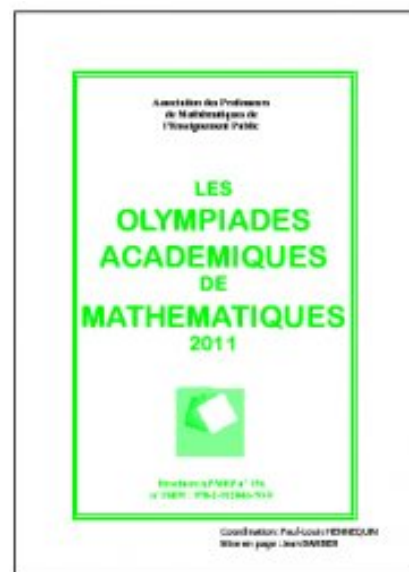
Cette brochure téléchargeable gratuitement contient les 162 exercices proposés aux élèves de première (S et autres séries...) tous corrigés, utilisables en classe et pas seulement de première.

Pour la onzième année consécutive, l'APMEP met à votre disposition les annales des Olympiades académiques de mathématiques.

Cette année, vous trouverez 162 exercices proposés en 2011 et tous corrigés, utilisable en classe, et pas seulement de première. Quelques adaptations vous permettront de l'utiliser dans d'autres classes. Ces exercices font appel, non seulement à des connaissances mathématiques, mais aussi à des capacités de recherche, d'initiative et de persévérance.

N'hésitez pas à télécharger cette mine qui permettra à vos élèves (et à vous-mêmes) d'explorer des domaines mathématiques nombreux et variés

Un tableau synthétique placé en début de brochure vous permettra de repérer les différents domaines mathématiques abordés. Vous pourrez accéder aux articles en cliquant sur le nom de l'académie. Par exemple pour accéder au premier exercice de Paris, il suffit de cliquer sur Paris 1. A la fin de chaque exercice, un cadre "retour au sommaire" vous permettra de revenir au sommaire.



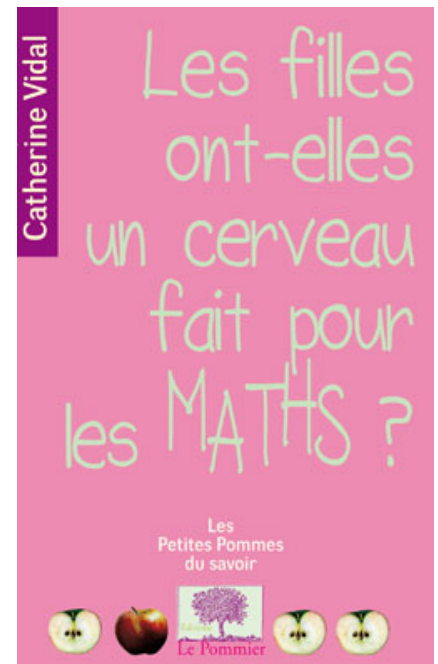
1. Il a été présenté dans le numéro 21 de MathémaTICE (<http://revue.sesamath.net/spip.php?article302>)  
2. présenté sur MathémaTICE (<http://revue.sesamath.net/spip.php?article401>)



## LES FILLES ONT-ELLES UN CERVEAU FAIT POUR LES MATHS ?

par Catherine Vidal, Paru en 2012 aux Editions Le Pommier

Les idées reçues sur l'infériorité des filles en maths et en sciences sont toujours bien vivaces. Médias et magazines continuent de nous abreuver de vieux clichés qui prétendent que les femmes sont naturellement bavardes et incapables de lire une carte routière, alors que les hommes sont nés bons en maths et compétitifs. Or les recherches en neurobiologie n'en finissent pas de révéler les extraordinaires capacités de plasticité du cerveau qui se façonne en fonction de l'apprentissage et de l'expérience vécue. L'argument biologique souvent invoqué pour justifier une prétendue supériorité des hommes en maths et en sciences n'est plus tenable. À tous les âges de la vie, la plasticité du cerveau permet d'acquérir de nouveaux talents, de changer de centre d'intérêt, et même de devenir bon en maths ! Une Petite Pomme qui éclaire la question par la confrontation des faits scientifiques et des prises de positions partisans. Catherine Vidal est neurobiologiste, directrice de Recherche à l'Institut Pasteur et membre du Comité scientifique « Science et Citoyen » du CNRS.



## LA SYMÉTRIE OU LES MATHS AU CLAIR DE LUNE

par Marcus du Sautoy, Éditions Héloïse d'Ormesson, 2012

« La science avance grâce aux questions auxquelles nous ne sommes pas en mesure de répondre. »

Qu'y a-t-il de commun entre un flocon de neige, une mosaïque et un rayon de miel ? Leur symétrie, source constante de fascination pour les mathématiciens depuis des millénaires. Car au-delà de ce que l'oeil perçoit, au-delà des illusions d'optique et des mirages, des nombres invisibles unissent tous ces curieux objets symétriques. Avec l'humour pour sésame, Marcus du Sautoy nous entraîne dans la prodigieuse histoire de ce pan des mathématiques. Il nous raconte les impasses et découvertes fulgurantes de ces chercheurs -les Escher, Gauss, Cauchy, acariâtres parfois, excentriques souvent, autistes même, qui se sont battus pour trouver les clés de ces équations. Voyage insolite au coeur du langage intrigant de la symétrie, cet essai déchiffre une science qui tente de percer les secrets de la nature, la beauté et la complexité du monde. Né en 1965, Marcus du Sautoy enseigne les mathématiques à l'université d'Oxford et intervient, entre autres, au Collège de France. Il anime une émission sur la BBC 4 et écrit pour le Times, le Daily Telegraph et le Guardian. Ce génial professeur a pour passions le piano, le trombone et son équipe locale de football. Il est l'auteur de La Symphonie des nombres premiers (2005).



\*\*\*\*\*

# Solution de l'exercice du numéro 12 intitulé Origami et mathématiques

par Didier Trotoux (IUT de Caen)

On part d'un carré de papier dont on marque le milieu du côté supérieur en amenant un côté vertical sur l'autre (Fig. 1).

On rabat ensuite le coin inférieur droit sur ce milieu (Fig. 2). On obtient alors la figure suivante (Fig. 3).

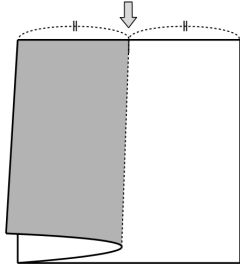


Fig. 1

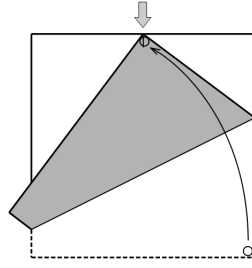


Fig. 2

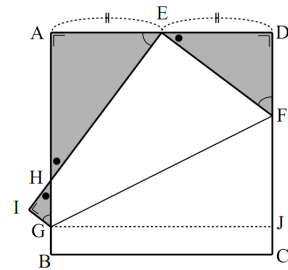
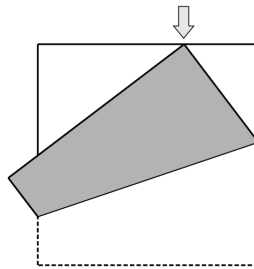


Fig. 3

- a) Montrer que le triangle  $FDE$  est un triangle pythagoricien 3 : 4 : 5, de même que les triangles  $EAH$  et  $GIH$ . Ce résultat est connu sous le nom de 1<sup>er</sup> théorème de Haga<sup>3</sup> et le pli réalisé est appelé, pli du 1<sup>er</sup> théorème de Haga.
- b) Généraliser au cas où l'on amène le coin inférieur droit sur un point  $E$  distinct du milieu de  $[AD]$ .



Réponse à la question a) :

Considérons un carré de coté 1.

Notons  $DF = a$ . Par conséquent,  $FC = 1 - a$  et d'après le procédé de pliage,  $FE = FC$  d'où l'on tire  $FE = 1 - a$ .

D'autre part,  $E$  étant le milieu de  $[A, D]$ ,  $DE = \frac{1}{2}$ .

L'application du théorème de Pythagore au triangle  $DEF$  donne  $(1 - a)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ .

Cette relation permet d'obtenir  $a = \frac{3}{8}$ . D'où  $DF = \frac{3}{8}$  et  $FE = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ .

Les côtés du triangle  $FDE$  sont dans les rapports :

$$FD : DE : EF = \frac{3}{8} : \frac{1}{2} : \frac{5}{8} = 3 : 4 : 5$$

Le triangle  $FDE$  se révèle donc être un *triangle pythagoricien*.

Le procédé de pliage qui a amené  $FC$  sur  $FE$  et  $CB$  sur  $EI$ , amène l'angle droit  $\widehat{C}$  sur l'angle  $\widehat{HEF}$  qui est donc un angle droit. Les angles adjacents à l'angle  $\widehat{HEF}$  sont donc complémentaires et par conséquent, les triangles  $FDE$  et  $EAH$  sont semblables. Le triangle  $EAH$  est un triangle pythagoricien.

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AE}{AH} \text{ soit } \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{AH} \text{ d'où } AH = \frac{2}{3}.$$

3. Pr. Kazuo Haga, professeur de Biologie à l'université de Tsukuba (Japon).



Le point  $H$  est donc situé au *tiers* du côté  $BA$ . Il reste à calculer  $EH$ .

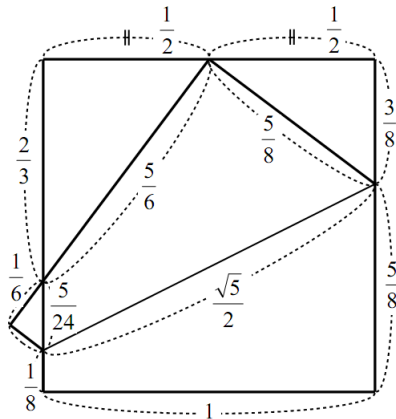
$$\frac{EH}{EA} = \frac{FE}{FD} \text{ soit } \frac{EH}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{8}} \text{ d'où } EH = \frac{5}{6}.$$

Le point  $H$  est donc situé au *sixième* du côté  $IE$ .

Il reste à étudier le triangle  $GHI$ . Les angles  $\widehat{GHI}$  et  $\widehat{EHA}$  sont égaux donc les triangles  $GHI$  et  $EHA$  sont semblables. Le triangle  $GHI$  est donc pythagoricien.

$$\frac{GI}{HI} = \frac{EA}{HA} \text{ soit } \frac{GI}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} \text{ d'où } GI = \frac{1}{8}.$$

On obtient finalement  $GH = \frac{5}{24}$  et  $FG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . On peut faire apparaître ces valeurs sur la figure suivante.

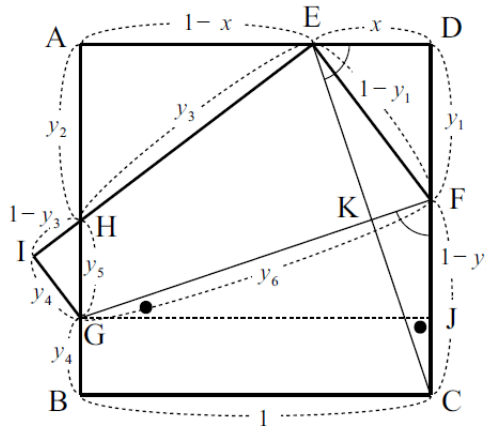


Nous pouvons énoncer le *premier théorème de Haga* :

Si l'on plie un carré de manière à faire coïncider le sommet inférieur droit avec le milieu du côté supérieur, chaque côté du carré est découpé dans un rapport fixe (cf Fig. 3) :

1. le côté droit est découpé en  $F$  dans le rapport 3 : 5
2. le côté gauche est découpé en  $H$  dans le rapport 1 : 2
3. le côté gauche est découpé en  $G$  dans le rapport 1 : 7
4. le côté inférieur est découpé en  $H$  dans le rapport 1 : 5

Réponse à la question b) :



Notons  $ED = x$  et  $DF = y_1$ . On a  $EF = FC = 1 - y_1$  et en procédant comme précédemment, on obtient successivement :

$$x^2 + y_1^2 = 1 - y_1^2 \text{ d'où } y_1 = DF = \frac{1 - x^2}{2} \text{ et } EF = 1 - y_1 = \frac{1 + x^2}{2}.$$

Notons  $AH = y_2$  et  $EH = y_3$ . Les triangles  $FDE$  et  $EAH$  étant semblables, il vient :

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AE}{AH} \text{ soit } \frac{\frac{1-x^2}{2}}{x} = \frac{1-x}{y_2} \text{ d'où } y_2 = AH = \frac{2x}{1+x}.$$

$$\frac{EH}{EA} = \frac{FE}{FD} \text{ soit } \frac{y_3}{1-x} = \frac{\frac{1+x^2}{2}}{\frac{1-x^2}{2}} \text{ d'où } y_3 = EH = \frac{1+x^2}{1+x}.$$

Nous avons  $IH = 1 - y_3 = 1 - \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{x(1-x)}{1+x}$ .

Notons enfin,  $GI = y_4$  et  $GH = y_5$ . Les triangles  $GIH$  et  $EAH$  étant semblables, il vient :

$$\frac{GI}{HI} = \frac{EA}{HA} \text{ soit } \frac{y_4}{\frac{x(1-x)}{1+x}} = \frac{1-x}{\frac{2x}{1+x}} \text{ d'où } y_4 = GI = \frac{(1-x)^2}{2}.$$

D'autre part  $AH + HG + GB = 1$  soit  $y_2 + y_5 + y_4 = 1$ , ce qui permet d'obtenir :

$$y_5 = GH = 1 - y_2 - y_4 = 1 - \frac{2x}{1+x} - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{(1-x)(1+x^2)}{2(1+x)}.$$

Enfin, comme  $FJ = 1 - y_1 - y_4 = \frac{1+x^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} = x$ , les triangles  $EDC$  et  $FJG$  sont isométriques. On en déduit que  $y_6 = \sqrt{1+x^2}$ .

Comme on le voit, à l'aide de cette procédure de pli qui n'utilise qu'un seul pli, on peut obtenir facilement des partages des côtés du carré dans des rapports rationnels 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5, 1 : 6, 1 : 7 et 1 : 8 en n'utilisant que les valeurs  $x = \frac{1}{4}$ ,  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = \frac{3}{4}$ .

Une autre autre façon de plier le carré en utilisant le milieu du côté supérieur  $E$ , est la suivante : on marque comme précédemment le milieu du côté supérieur en amenant un côté vertical sur l'autre (Fig. 1) et ensuite on fait un pli reliant ce milieu au coin inférieur droit. Le coin supérieur droit est alors transformé en un point  $F$  et supposons que le segment  $[EF]$  soit prolongé vers le bord gauche du carré en un point  $G$  (Fig. 4).

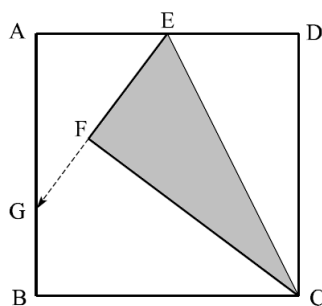


Fig. 4

a) Préciser la position du point  $G$  sur le segment  $[BA]$ .

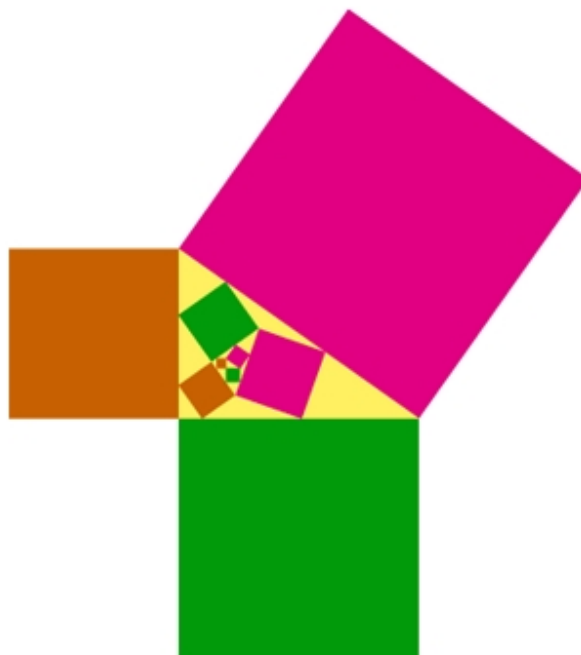
Ce résultat est connu sous le nom de 2<sup>ème</sup> théorème de Haga et le pli réalisé est appelé, pli du 2<sup>ème</sup> théorème de Haga.

b) Préciser la position du point  $F$  en calculant sa distance aux côtés du carré.

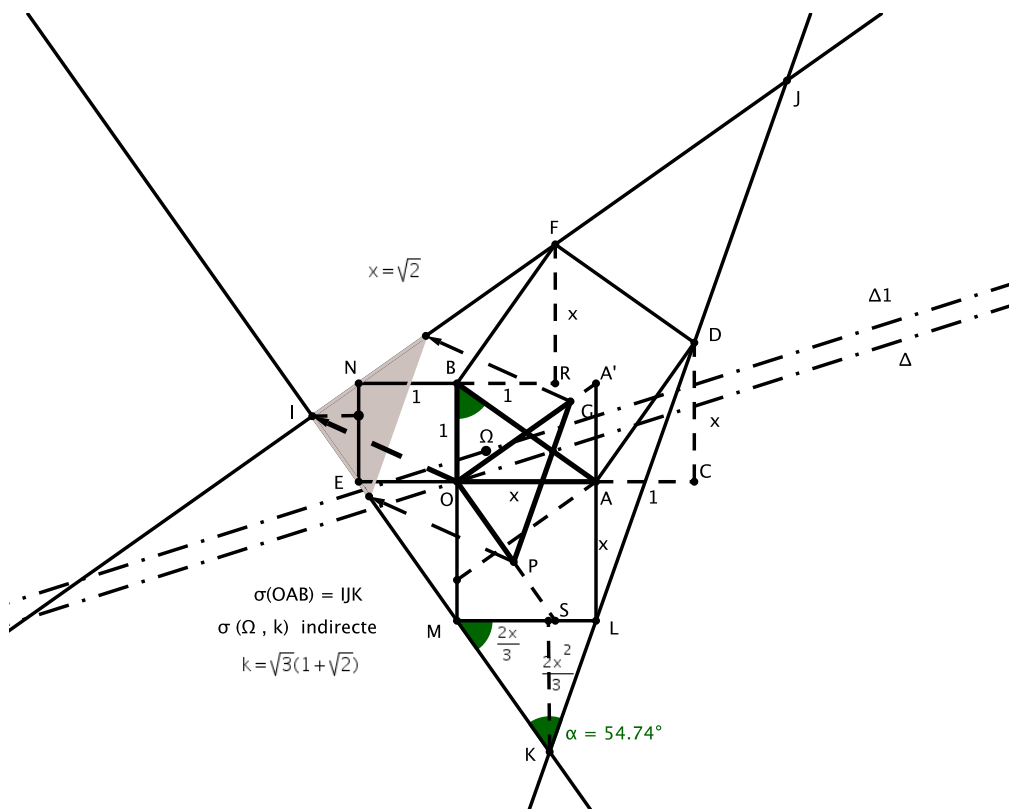
À suivre ...

Un exercice du bulletin vert 495, rubrique "exercices de-ci de-là" avec une solution proposée par Eric Trotoux. Une autre solution de M. Sarrouy est présentée sur le site national de l'APMEP.

Étudier (rapports de longueurs, rapports d'aires...) de cette figure dans laquelle les angles qui semblent droits, le sont vraiment.



Nous partons d'un triangle  $OAB$  rectangle en  $O$ , sur les côtés duquel nous construisons les carrés extérieurs  $OALM$ ,  $OENB$  et  $ABFD$ . Le plan étant orienté, nous choisissons  $OAB$  direct,  $OB = 1$ ,  $OA = x$ ,  $x \geq 1$  et on note  $A'$  le quatrième sommet du rectangle  $BOAA'$ . Nous utiliserons le repère  $(O, \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}, \vec{OB})$ .



La lecture des pentes des droites  $(DL)$ ,  $(NF)$  et  $(EM)$  est immédiate en remarquant que :

- dans la rotation de centre le milieu de  $[BD]$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$   $BOA$  a pour image  $ADC$  où  $(AC)$  et  $(DC)$  sont respectivement parallèles à  $(OA)$  et  $(OB)$ . Cela donne alors  $\frac{y_D - y_L}{x_D - x_L} = 2x$ .
- dans la rotation de centre le milieu de  $[BD]$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$   $BAA'$  a pour image  $FBR$ , où  $(BR)$  et  $(RF)$  sontnt respectivement parallèles à  $(OA)$  et  $(OB)$ . Cela donne alors (avec  $NB = BR = 1$ )  $\frac{y_F - y_N}{x_F - x_N} = \frac{x}{2}$ .
- $EOM$  est le symétrique (Axe  $(OL)$  de  $BOA$  d'où  $\frac{y_E - y_M}{x_E - x_M} = \frac{-x}{1} = -x$ .

On en déduit le triangle  $IJK$  défini par les droites  $(DL)$ ,  $(NF)$  et  $(EM)$  a un angle droit en  $I$  (angle dont les côtés s'appuient sur le plus petit des trois carrés) ssi  $\frac{x}{2}(-x) = -1$  ce qui compte tenu de  $x \geq 1$ , équivaut

à  $x = \sqrt{2}$ . En conservant dorénavant cette valeur de  $x$  nous obtenons les coordonnées de  $I$   $(-1 - \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3})$  et de  $K$   $(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2} - \frac{4}{3})$ . Comme celles de  $L$  sont  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , il s'ensuit que  $KL^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2$ . On en déduit

que  $KL=ML=\sqrt{2}$ . Cela implique  $\widehat{KML} = \widehat{MKL}$ . Or  $\widehat{KML} = \widehat{MEO} = \widehat{OBA}$ . De cela, il découle que les triangles rectangles  $BOA$  et  $KIJ$  sont semblables dans une similitude indirecte  $\sigma$  dont nous déterminons le rapport en évaluant  $IK : IK^2 = (1 + \sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2 = 9 + 6\sqrt{2}$  d'où  $IK = \sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$ . Dès lors en itérant la similtude  $\sigma^{-1}$  sur  $KIJ$ , nous réalisons la figure proposée dans laquelle les angles qui semblent être droits le sont vraiment. Au passage, on constate que les aires des carrés construits dans les triangles rectangles, sont toujours proportionnelles à  $(1,2,3)$  avec un rapport de réduction de  $\frac{1}{3(3 + 2\sqrt{2})}$  à chaque étape de construction. Le triangle rectangle  $OAB$  a des côtés de longueur  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ .

Nous pouvons préciser davantage la similitude  $\sigma$  dont le rapport  $k$  vaut  $\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$ . Celle-ci peut se définir comme la composée des applications suivantes :

$$\sigma = \mathbf{h}(I, k) \circ \mathbf{t}_{(\overrightarrow{OI})} \circ \mathbf{r}(O, \theta) \circ \mathbf{s}_{(OA)}$$
 où  $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$  et  $\mathbf{s}_{(OA)}$  est la symétrie axiale d'axe  $(OA)$ .

Cela se simplifie en  $\sigma = \mathbf{h}(I, k) \circ \mathbf{t}_{(\overrightarrow{OI})} \circ \mathbf{s}_{\Delta}$  où  $\Delta$  est la bissectrice intérieure de  $\widehat{AOA'}$ .  $\Delta$  est dirigée par  $\vec{u} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}, 1)$  (s'obtient sans calcul grâce au théorème du "pied de la bissectrice intérieure").

Cherchons maintenant la décomposition canonique (qui commute) de  $\sigma$ . Il nous faut trouver son unique point fixe  $\Omega$  ( $k \neq 1$ ). Nous aurons alors  $\sigma = \mathbf{h}(\Omega, k) \circ \mathbf{s}_{\Delta_1} = \mathbf{s}_{\Delta_1} \circ \mathbf{h}(\Omega, k)$  où  $\Delta_1$  est définie par  $(\Omega, \vec{u})$ .

Ayant  $\vec{u} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}, 1)$ , le vecteur  $\vec{v} = (-1, \sqrt{2} + \sqrt{3})$  est un vecteur directement orthogonal à  $\vec{u}$ . Nous savons que  $\sigma(O) = I$ , donc par un calcul classique  $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{1-k} \frac{\overrightarrow{OI} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} + \frac{1}{1+k} \frac{\overrightarrow{OI} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$ . Nous en déduisons après calculs (rappel  $\overrightarrow{OI} = (-1 - \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3})$ ) que  $\overrightarrow{O\Omega} = (\frac{11\sqrt{2}-12}{12}, \frac{8-3\sqrt{2}}{12})$ . Cette question peut aussi s'aborder en décrivant  $\sigma$  sous forme complexe :  $z' = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + i)\bar{z} + \frac{2i}{3} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

La connaissance du point  $\Omega$  dans  $(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}, \overrightarrow{OB})$  permet de faire la construction de la figure donnée grâce aux itérées sur  $IJK$  et  $AOB$  de l'homothétie  $\mathbf{h}(\Omega, \frac{1}{k^2})$  car  $\sigma^{-2} = \mathbf{h}(\Omega, \frac{1}{k^2})$  et  $OAB = \sigma^{-1}(IJK)$ .

\*\*\*\*\*

## Les adresses utiles

La Présidente : annie.memin@ac-caen.fr

La Trésorière : ch.faisant@wanadoo.fr

Les Secrétaires : nadine.lucas@laposte.net, delevall@wanadoo.fr

Le site national avec notre petit coin local : [www.apmep.asso.fr](http://www.apmep.asso.fr) ;

[www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique58](http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique58)