LES MATHS : L'Ω ?

Organe officiel de la Régionale de CAEN de l'APMEP : **Numéro 8 - Septembre 2009**
Rédacteur en Chef : Richard Choulet

Éditorial. Comme vous avez pu le lire dans le BGV d'avril, mais ce n'était pas un poisson : exit l'épreuve expérimentale. Au moins cela nous aura permis de nous retrouver pour travailler ensemble si ce n'était pas déjà le cas. Par ailleurs souhaitons que les collègues continuent à aller manipuler en salle spécialisée avec les élèves pour intégrer les outils informatiques dans leur approche mathématique. D'autre part rien ne dit que d'ici quelques trimestres, il n'y ait pas de nouveaux changements. À suivre donc et en attendant, bon départ à tous vers de nouvelles aventures !

****

Le congrès des professeurs belges de mathématique à Nivelles

Deux présidents au sommet : le nouveau président de l'APMEP Éric Barbazo (à gauche) et l'ancien Michel Fréchet (qui, le rappelle-t-il lui-même, n'a rien à voir avec Maurice). Vour noterez que la ligne directrice est assurée par le même port de bras mais qu'on observe quelques divergences au niveau oculaire.

Plus sérieusement j'ai assisté, notamment, à une conférence sur le nombre d'or -classique pour les maths mais plaisante à écouter-, participé à un atelier de François Drouin dit Le Lorrain sur des jeux mathématiques -j'ai pris des notes pour fifille-, et à un atelier de l'Ibère Francisco Bellot-Rosado où j'ai été tout le temps conscient cette année.

Je ne parlerai pas ici des bonnes bières belges dont la Jean de Nivelles et de la spécialité locale la tarte al djote ; pour l'an prochain il est question de Liège peut-être de Bastogne $\cdots$.

Nos journées nationales *présentées par Chantal Faisant*

Les Journées Nationales de l'APMEP battront leur plein du samedi 24 Octobre 13h au mardi 27 Octobre 13h à Rouen (et Mont-Saint-Aignan).

Sous le titre « Explorer les Mathématiques, les Mathématiques pour explorer », vous attendent conférences (par exemple : La science, les lumières et les ombres, le cas des maths financières par J.P. Kahane), des conférences-débats (Enseigner en gardant le moral par A. Valabrègue), des ateliers multiples et variés, dont certains animés par des membres de notre Régionale, et bien d'autres activités d'où la convivialité n'est jamais absente.

Les renseignements pratiques sont à trouver sur le site de l'APMEP ou sur le site spécifique des Journées : http ://ctug48.univ-fcomte.fr/APMEP2009/.

L'inscription en ligne est possible. Jusqu'au 19-09, le tarif de l'inscription est réduit. Comme chaque année, la Régionale de Basse-Normandie rembourse à ses adhérents le montant de la dite-inscription. Alors, prêts pour l'exploration ?

****

La Fête de la Science *par Chantal Faisant*

La fête de la Science édition 2009 se déroulera du 16 au 22 Novembre.

Comme l'an passé, la Régionale APMEP apportera son concours au Laboratoire N. Oresme de l'Université de Caen pour le stand « Mathématique ». Le temps fort sera le week-end du 21-22 Novembre au Parc Expo à Caen. Le vendredi 20, un accueil des classes est prévu (avec inscription préalable).

Après les « bandes de Moebius, polyèdres, fractales, anamorphoses ··· », si appréciés en 2008, nos collègues universitaires ont déjà planché sur de nouveaux thèmes : pavages (dans le plan et dans l'espace), coniques (peut-être à relier à l'astronomie), probas (utilisation d'une planche de Galton), origamis ···

Toutes les idées sur ces thèmes ou tout autre sujet seront les bienvenues. Toute aide pratique pour les préparatifs (découpage, collage, etc) ou pour la tenue des stands sera appréciée ! Venir, même en « badaud » découvrir la Fête de la Science, est un plaisir fortement recommandé !

Pour plus d'infos, pour proposer aide ou idée, contacter Didier Trotoux ou Emmanuelle Féaux de Lacroix (Labo Oresme).

****

En troisième : NOS PREMIERS PAS EN PROBABILITÉS *par Nadine Lucas et Brigitte Hatanian.*

Depuis déjà un bon nombre d'années en collège, nous abordons les statistiques de la 6ème à la 3ème : d'abord par des tableaux et des graphiques (lecture et réalisation), puis par des calculs de moyennes simples et pondérées, d'effectifs et de fréquences cumulés croissants et décroissants, de médiane outil plus délicat mais globalement nous avions l'impression sur ce long terme de faire passer assez facilement ces notions mathématiques apparemment simples et « sécurisantes ».

Avec l'apparition dans les programmes de 3ème pour l'année 2008-2009 du mot « probabilités », une certaine panique s'est instaurée. Avant de nous lancer dans nos classes plus ou moins tard dans l'année, nous avons consulté les sites abordant ce sujet, participé à des stages de formation, les programmes restant vagues mais les documents d'accompagnement étant riches et variés.

Après une petite enquête et une approche fréquentiste sur des exemples, des manipulations faites en classe prolongées à la maison et les résultats mis en commun (tableur), nous avons constaté que les élèves arrivaient naturellement, avec leur vocabulaire, à expliciter les notions de variable aléatoire, d'événement, de probabilité (expression « deux chances sur six », puis sous forme de fraction), d'événement contraire.

Dans un deuxième temps des exercices ont permis de mettre en pratique le vocabulaire adapté et de prolonger aux expériences à deux épreuves (réalisation d'arbres simples proposés par les élèves).

Enfin, une réflexion a été abordée avec des problèmes un peu plus variés sur le lien entre fréquence et probabilité. Nous sommes restées assez simples dans les applications pour notre première année, en général les élèves ont participé activement aux recherches, manifestant intérêt et curiosité pour ce nouveau domaine. L'expérimentation et la simulation requièrent beaucoup de temps et c'est ce qui a été le plus difficile à gérer.

IMPORTANT : Après midi de la Régionale le 30 septembre

Notre régionale organise une conférence-débat, le mercredi 30 septembre à partir de 14h30 dans l'amphithéâtre du lycée Malherbe dont le sujet est « Quelques éclairages sur le nouveau programme de seconde :

* liens avec les programmes de collège

* Comment introduire une démarche algorithmique dans l'activité mathématique ? »

Dans une première partie, deux collègues de l'APMEP, Mmes Nadine Lucas et Brigitte Hatanian, interviendront pour préciser quels sont les contenus des programmes du collège et dans quel esprit ils sont présentés aux élèves.

Un exposé traitera ensuite de l'introduction d'une démarche algorithmique dans l'enseignement (méthodes, outils, $\cdots$) grâce à nos collègues François Heuzé et ElHassan Fadili du lycée Allende.

Il est prévu alors de laisser place aux débats, discussions, insultes, horions $\cdots$ jusqu'à 17h.

****

Une solution de l'exercice *par François Couchot*

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler l'énoncé : **On considère la suite : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ..., n, n, ..., n, ... où figurent une fois 1, deux fois 2, ..., ène fois n, ... Déterminez une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que le k-ième terme de la suite soit en fait la partie entière de $f(k)$.**

On sait que : $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$. Si $x\in\mathbb{R}$, on note $[x]$ sa partie entière. Il faut donc trouver une fonction f telle que $[f(k)]=n$ pour tout entier k qui vérifie la double inégalité :

$$\binom{n}{2}+1\leqslant k\leqslant\binom{n+1}{2}.$$

(Remarquons que cette double inégalité a aussi un sens lorsque $k=n=1$ car $\binom{1}{2}=0$, puisque c'est le nombre de parties à 2 éléments dans un ensemble à 1 élément.)

Cette double inégalité peut s'écrire :

$$\frac{n(n-1)}{2}+1\leqslant k\leqslant\frac{n(n+1)}{2}.$$

En multipliant par 2 on obtient :

$$n(n-1)+2\leqslant 2k\leqslant n(n+1),$$

puis en développant :

$$n^2-n+2\leqslant 2k\leqslant n^2+n\ ;$$

ensuite, puisque (n^2-n) et (n^2+n) sont les débuts respectifs des développements de $(n-\frac{1}{2})^2$ et $(n+\frac{1}{2})^2$, on a :

$$(n-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\leqslant 2k\leqslant(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4},$$

d'où la double inégalité stricte :

$$(n-\frac{1}{2})^2<2k<(n+\frac{1}{2})^2.$$

Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante, on en déduit que :

$$(n-\frac{1}{2})<\sqrt{2k}<(n+\frac{1}{2})\ ;$$

en ajoutant $\frac{1}{2}$ à chacun des membres de cette dernière double inégalité, on obtient :

$$n<\sqrt{2k}+\frac{1}{2}<n+1.$$

Donc, $[\sqrt{2k}+\frac{1}{2}]=n$ si $\binom{n}{2}+1\leqslant k\leqslant\binom{n+1}{2}$. Par conséquent, la fonction f définie par $\boxed{f(x)=\sqrt{2x}+\frac{1}{2}}$ est une solution du problème.

Généralisation *par Éric Trotoux*

Une première réponse par sommation

Notons $u_{k\geqslant 1}$ la suite donnée et précisons la recherche d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $[f(k)] = u_k$. Une observation de la suite à réaliser donne quelques idées :

	x_1		x_2			x_3				x_4	
k	$\boxed{1}$	2	$\boxed{3}$	4	5	$\boxed{6}$	7	8	9	$\boxed{10}$	11
u_k	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5
$v_k = u_{k+1} - u_k$	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0

Introduisons la suite $x_{k\geqslant 0}$ définie pour $k \in \mathbb{N}$ par $x_k = \binom{k+1}{2} = \dfrac{k(k+1)}{2}$ dont les termes donnent pour $k \geqslant 1$ le rang du kième « 1 » de la suite v_k. La suite $x_{k\geqslant 0}$ est strictement croissante et $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Donc pour tout réel $x > 1$, il existe un unique entier $k \geqslant 1$ tel que $x_k < x \leqslant x_{k+1}$. En notant $k = \varphi(x)$ l'entier k ainsi défini, nous savons définir une fonction f par $f(x) = 1$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = \varphi(x) + 1$ sinon. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $[f(x)] = f(x)$ et vérifie $f(k) = u_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ puisque $f(x_k) = k$, et f constante sur $]x_{k-1}\ ;\ x_k]$, comme le tableau permet de le confirmer. On peut donner une formule unique pour cette fonction étagée. On appelle T la partie de $\mathbb{R}$ constituée des nombres triangulaires $T = \left\{\binom{n+1}{2}/n \in \mathbb{N}\right\}$ et 1_T sa fonction caractéristique. On a alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=[x]-1} 1_T(k)$$

Cette fonction est discontinue à droite aux points $\{x_k/k \in \mathbb{N}^*\}$.

Une fonction affine par intervalles

Nous allons considérer, en reprenant la suite $x_{k\geqslant 0}$ précédente, la ligne « brisée » qui joint les points A_k de coordonnées $(x_{k-1}+1\ ;\ k)$ pour $k \geqslant 1$ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$. Nous lui adjoignons sur $]-\infty\ ;\ 1[$ la demi droite ouverte d'équation $y = 1$. L'ensemble est le graphe d'une fonction r continue sur $\mathbb{R}$ non dérivable aux points $\{x_{k-1} + 1/k \in \mathbb{N}^*\}$. Précisons les formules définissant r sur $[1\ ;\ +\infty[$. Pour $k \geqslant 1$ posons $I_k = [x_{k-1}+1\ ;\ x_k+1]$. On a alors

$$\forall k \geqslant 1 \quad \forall t \in I_k \quad r(t) = k + \frac{t - x_{k-1} - 1}{x_k - x_{k-1}}$$

r satisfait à : $[r(t)] = k$ pour tout $t \in [x_{k-1} + 1\ ;\ x_k + 1[$ et $r(x_k + 1) = k + 1$. Ainsi si p est un entier de $[x_{k-1} + 1\ ;\ x_k]$, nous avons $[r(p)] = k$ et cet intervalle contient $x_k - x_{k-1}$ entiers, c'est-à-dire k. La fonction r n'est pas dérivable aux points $\{x_k + 1/k \in \mathbb{N}^*\}$.

Du côté des fonctions au moins dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Une première approche consiste à déterminer une fonction dérivable strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, telle que pour tout entier $k \geqslant 1$, on ait $f(1 + x_{k-1}) = k$. Rappelons que $x_{k-1} = \dfrac{k(k-1)}{2}$. Une telle fonction définit une bijection de $[1\ ;\ +\infty[$ sur $[f(1)\ ;\ +\infty[$. Donc si f^{-1} désigne la bijection réciproque, elle vérifie

$$\forall k \geqslant 1 \quad f^{-1}(k) = 1 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} + 1$$

Nous pouvons expliciter une telle fonction f en résolvant l'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + 1$ d'inconnue $x \in [1\ ;\ +\infty[$ où le paramètre y varie dans $[1\ ;\ +\infty[$. On obtient $\Delta = 8y - 7$ (strictement positif) puis la solution (dans

$[1\ ;\ +\infty[)$ $x = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{8y-7}\right)$. Ayant $y = f^{-1}(x)$, nous trouvons $x = f(y)$ avec $f(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{2y - \frac{7}{4}}$. Cette fonction est telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$x \in [x_{k-1}+1\ ;\ x_k+1[\quad \Rightarrow \quad k \leqslant f(x) < k+1$$

Nous avons donc $[f(x)] = k$ sur l'intervalle $[x_{k-1}+1\ ;\ x_k+1[$ et $f(1+x_k) = k+1$.
En conclusion la fonction $f \quad x \mapsto \frac{1}{2} + \sqrt{2x - \frac{7}{4}}$ définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ répond à la contrainte de l'exercice (en bleu sur la figure). Cette fonction est dérivable et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Extension vers d'autres fonctions solutions

Soit l la restriction de $x \mapsto f(x+1)$ à $[1\ ;\ +\infty[$ où f est la solution qui précède. Cette fonction l vérifie $l(x_k) = k+1$ pour tout $k \geqslant 1$. Ce n'est pas une solution de notre problème. Mais si nous considérons une fonction $h \quad \mathcal{C}^\infty$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ telle que $f(x) \leqslant h(x) < l(x)$ sur cet intervalle, nous obtenons une nouvelle solution :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p \in [\![1+x_{k-1}\ ;\ x_k]\!] \Rightarrow k \leqslant f(p) \leqslant h(p) < l(p) \leq k+1$$

D'où $[h(p)] = k$ pour tout les k entiers p de $[\![1+x_{k-1}\ ;\ x_k]\!]$. h est bien solution. Précisons l :

$$l(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{2(x+1) - \frac{7}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2x + \frac{1}{4}}$$

Exemples

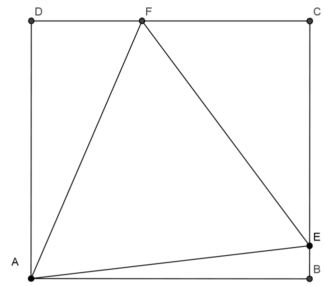
A) Soit $a \in \left[-\frac{7}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right[$. Alors la fonction $h_a : \quad x \mapsto \frac{1}{2} + \sqrt{2x+a}$ satisfait à la condition précédente. Les cas $a = -1$ et $a = 0$ nous fournissent des formules simples :
$h_{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{2x-1}$ et $h_0(x) = k(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{2x}$ (en vert sur la figure page 6).

B) Toutes les fonctions h telles que $h(x) = f(x) + e(x) \times (l(x) - f(x))$ où $x \mapsto e(x)$ prend ses valeurs dans $[0\ ;\ 1[$, conviennent. A partir des formules donnant f et l, les choix suivants nous conduisent à de nouvelles fonctions « élémentaires » vérifiant les contraintes :
$e(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ où $\lambda > 0$ donne une fonction qui tend asymptotiquement vers l
$e(x) = \frac{1}{2}$ nous donne la formule $s(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - 48x - 7}}\right)$
$e(x) = \frac{1+\cos(\omega x + \phi)}{c}$ où $c > 2$ produit des solutions oscillantes, éventuellement non monotones sur $[1 \quad +\infty[$ avec un choix adapté de ω. Avec $\omega = 8$, $\phi = 0$ et $c = 4$, il nous vient la formule $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{2x - \frac{7}{4}} + \frac{\cos^2(4x)}{\sqrt{2x+\frac{1}{4}} + \sqrt{2x - \frac{7}{4}}}$ (en rouge sur la figure page 6).

****

Nouvel exercice *proposé par Didier Trotoux*

Le triangle équilatéral AEF est inscrit dans le rectangle ABCD. Montrez que la somme des aires des triangles AFD et AEB est égale à l'aire du triangle ECF (figure en haut de la page 6).



****

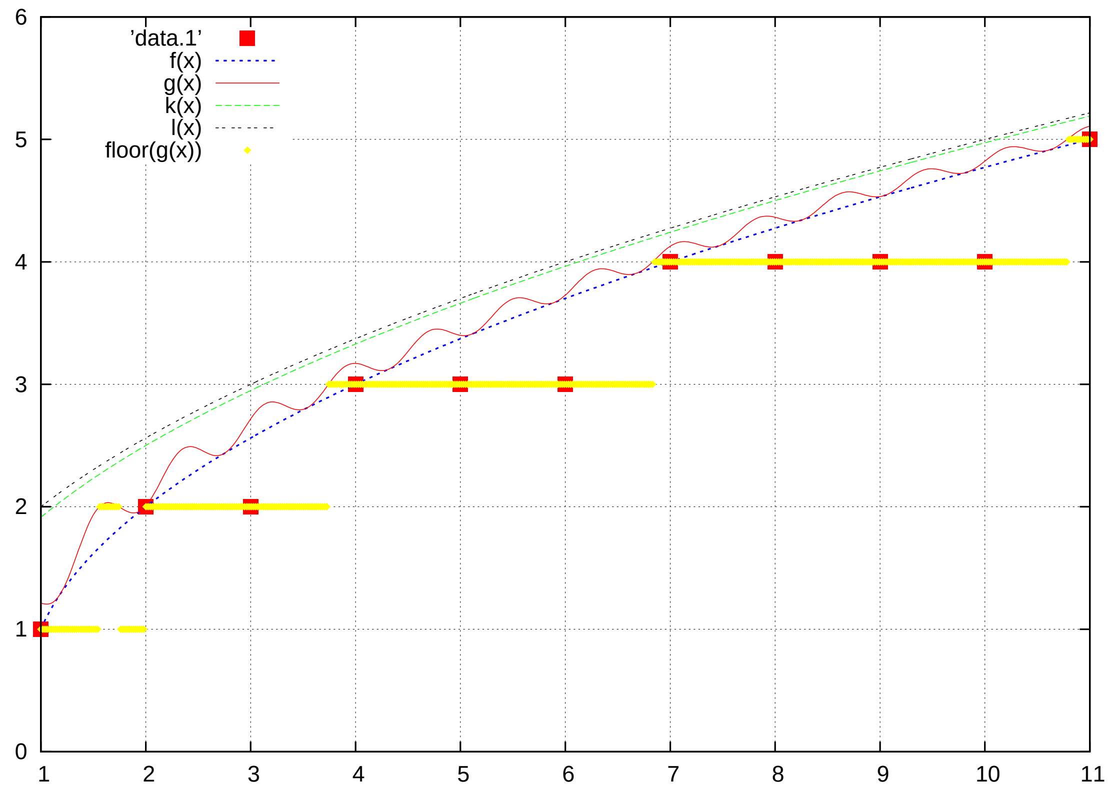


Illustration des exemples donnés dans les suggestions proposées par Éric Trotoux

****

Les adresses utiles

Le président : didier.trotoux@ac-caen.fr
La trésorière : ch.faisant@wanadoo.fr
La secrétaire : annie.memin@ac-caen.fr
Le scribe : richard.choulet@orange.fr
Le site national avec notre petit coin local : www.apmep.asso.fr