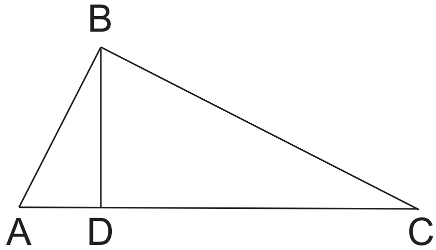
Pythagore *via* PAPPUS

Henry Plane

La relation de Pythagore a déjà suscité plusieurs articles dans PLOT[1]. Il paraît nécessaire aujourd'hui d'apporter quelques compléments.

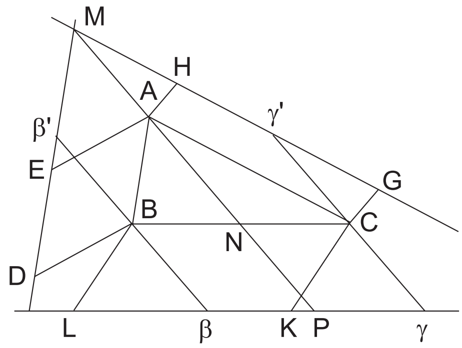
En ce qui concerne la démonstration par les aires de triangles semblables, elle n'était pas cachée. C'est ainsi qu'on a pu lire :

- I - Dans « *Nouveaux éléments de géométrie* » (1667) de A. ARNAULD. Livre XV, proposition 31 :
  « *Si on construit sur l'hypothénuse*[2] *& sur les deux côtés d'un angle droit des figures semblables quelconques, celle construite sur l'hypothénuse sera égale aux deux qui seront construites sur les costés* »
- II - Dans « *les élémens de géométrie ou de la mesure de l'étendue* » (1685) de B. LAMY. Livre IV, théorème 18 :
  « Autre démonstration de Euclide I, 47 (théorème de Pythagore) Corollaire.
  Dans les triangles, quelque figure que ce soit, faite sur l'hypothénuse, est égale aux figures semblables & posées de même manière sur les deux autres côtés. »
- III- Dans « *Géométrie élémentaire* » de feu Sauveur revue par LE BLOND[3] (1743)
  « Dans un triangle rectangle ABC, le quarré de l'hypoténuse AC est égal aux quarrés des deux autres cotés AB et AC.
  Tirez de l'angle droit B sur l'hypoténuse AC, la perpendiculaire BD, le triangle ABC sera divisé en deux autres triangles ABD, BDC, semblables entre eux et semblables au grand triangle : les cotés AB et BC sont les hypoténuses de ces triangles. Donc le grand triangle est aux deux petits comme le quarré de l'hypoténuse AC est aux quarrés de AB et de BC ; mais le grand triangle est égal aux deux autres : donc le quarré de l'hypoténuse est égal au quarré de deux autres côtés. »



La démonstration qui suit fut, un moment, attribuée à Jean-Baptiste CLAIRAUT, mais MONTUCCLA a écrit que c'est OZANAM qui l'a retrouvée chez Pappus.

I- Soit un triangle ABC. Construire sur [BC] un parallélogramme dont l'aire soit la somme de celles des deux parallélogrammes quelconques construits l'un sur [AB], l'autre sur [BC].



Soient ABDE et ACGH les deux parallélogrammes. Les droites (DE) et (GH) se coupent en M.

Sur la droite (MA) qui coupe (BC) en N, prenons P tel que $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MA}$.

Tout parallélogramme BCKL tel que (KL) passe par P est solution.

En effet, si la parallèle à (AM) menée par B coupe (KL) en β, et (DE) en β' et si la parallèle à (AM)

[1] Voir l'article : « *Pourquoi m'a-t-on caché ça ?* » paru dans PLOT 7

[2] L'orthographe du mot a évolué au cours des âges.

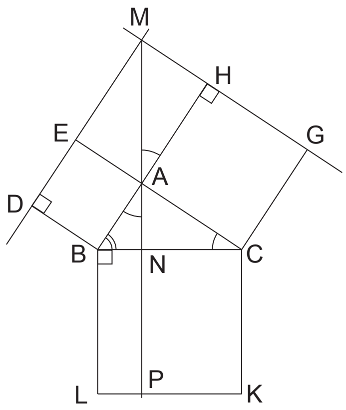
[3] LE BLOND fut maître de mathématiques des enfants de Louis XV.

menée par C coupe (KL) en γ et (GH) en γ', on a (EUCLIDE, livre VI

ou ARNAUD, livre X car il y a des « bandes »…)

$$\begin{aligned}(BCKL) &= (BC\gamma\beta) = (BNP\beta) + (NC\gamma P)\\ &= (MAB\beta') + (MAC\gamma')\\ &= (EABD) + (HACG).\end{aligned}$$

II. L'angle BAC est droit, les parallélogrammes EABD et HACG sont des carrés.



Le triangle MAH est rectangle, AH = AC et MH = AE = AB, il est donc égal au triangle BAC.

$\widehat{HAM} = \widehat{ACB}$

donc (MA) est orthogonale à (BC).

AM = BC donc NP = BC, BCKL est un carré dont l'aire est la somme des aires des carrés construits sur AB et BC.

Rappel : la notation (BCKL) désigne l'aire du quadrilatère BCKL.

L'APMEP diffuse la brochure « Pythagore et Thalès » éditée par ACL-Ed. du Kangourou sous le numéro 654.

Etre ou ne pas être

Sur le cahier de cours était écrit :

Un losange est un quadrilatère qui a ses quatre côtés égaux.

Maxime a récité :

Un quadrilatère est un losange qui a ses quatre côtés égaux

Les autres lui on expliqué sa faute.
Alexandre alors n'a pas été content.
Lui, il avait mis dans le bon ordre.
Il avait écrit :

Un losange est un quadrilatère s'il a ses quatre côtés égaux.

Et la prof qui dit qu'il aurait dû mettre :

Un quadrilatère est un losange s'il a ses quatre côtés égaux.

Elle sait vraiment pas ce qu'elle veut la prof de maths !