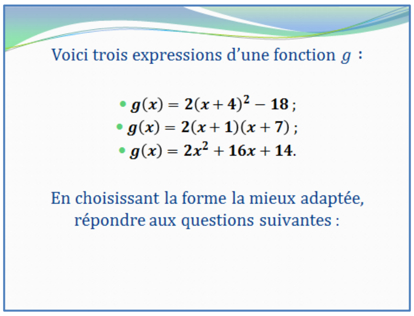
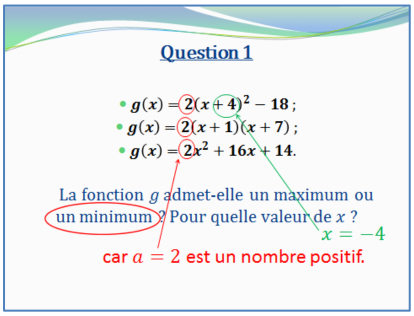
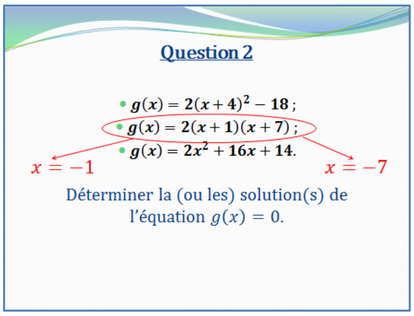
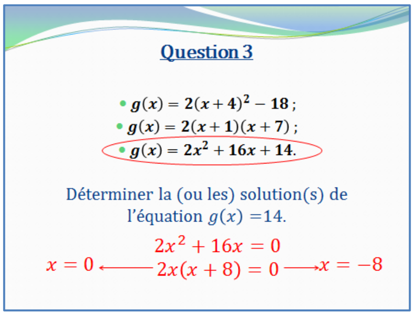
Second degré − Série 1 − Correction

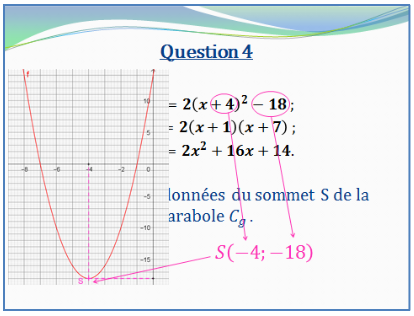
CONSIGNE Connaissant la forme développée, canonique et factorisée de l'expression algébrique d'une fonction, il s'agit de répondre à des questions en utilisant la forme la mieux adaptée. Pour les quatre dernières questions, il faut compléter l'égalité proposée.

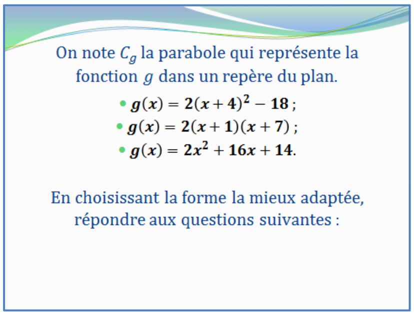


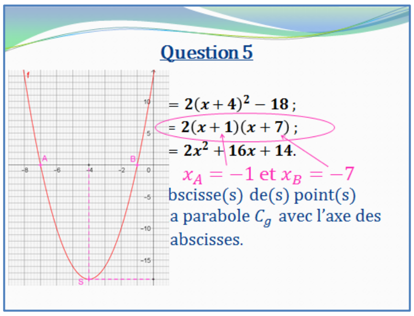


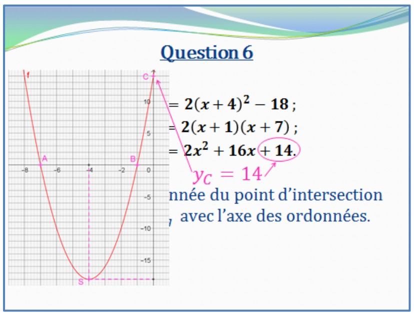


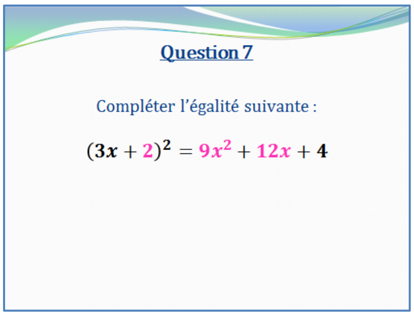


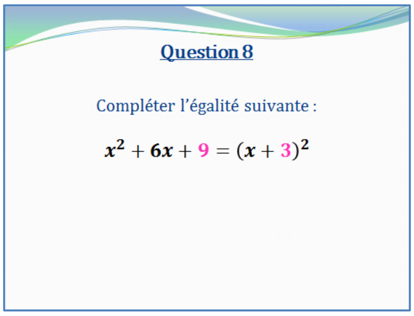


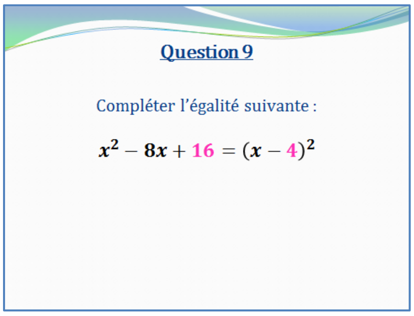


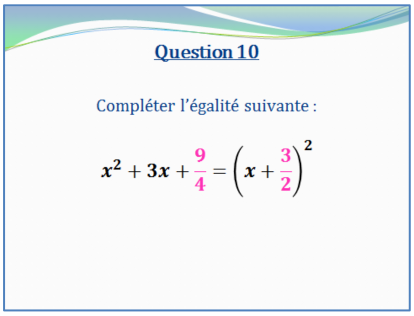












Second degré − Série 2 − Correction

CONSIGNE Répondre à diverses questions en utilisant les propriétés des différentes expressions algébriques d'une fonction polynôme de degré 2.

Dans les trois questions suivantes :

Répondre par VRAI ou FAUX

Question 1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -x^2 + x + 6$

est d'abord décroissante, puis croissante.

FAUX car $a = -1$

Question 2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 3x^2 + 5x + 8$

admet un minimum.

VRAI car $a = 3$

Question 3

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -2(x-2)^2 + 3$

admet le tableau de variations suivant.

FAUX car $a = -2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	3	↗

Dans les quatre questions suivantes :

Les fonctions du second degré sont données sous forme canonique

$a(x-\alpha)^2 + \beta$

Question 4

Déterminer les valeurs de a, α et β :

$f(x) = 3(x-1)^2 + 1$

$a = 3$

$\alpha = 1$

$\beta = 1$

Question 5

Déterminer les valeurs de a, α et β :

$g(x) = -2(x+4)^2 - 7$

$a = -2$

$\alpha = -4$

$\beta = -7$

Question 6

Déterminer les valeurs de a, α et β :

$h(x) = 3 - (x+1)^2$

$a = -1$

$\alpha = -1$

$\beta = 3$

Question 7

Déterminer les valeurs de a, α et β :

$k(x) = x^2 - 4 = (x-0)^2 - 4$

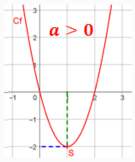
$a = 1$

$\alpha = 0$

$\beta = -4$

Question 8

Cette parabole représente une fonction f.
Quelle est sa forme canonique ?



1) $f(x) = -2(x-1)^2 + 2$

2) $\boxed{f(x) = 2(x-1)^2 - 2}$

3) $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$

4) $f(x) = -2(x-1)^2 - 2$

Question 9

Choisir la bonne réponse

L'équation $2x^2 - 8x = 0$ a :

- pour solutions les réels 0 et -4 ;
- une unique solution, le réel 4 ;
- **deux solutions, les réels 0 et 4 ;**
- une infinité de solutions.

$2x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$

Question 10

Choisir la bonne réponse

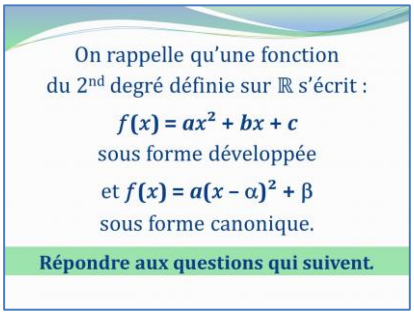
L'équation $(x-5)^2 = 16$ a :

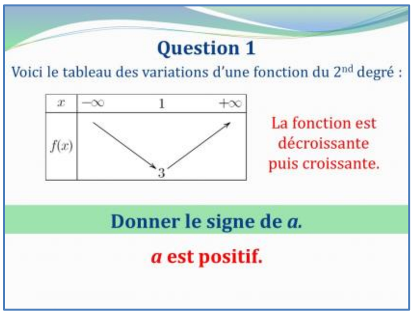
- **deux solutions, les réels 1 et 9 ;**
- deux solutions, les réels -4 et 4 ;
- une seule solution, le réel 9.

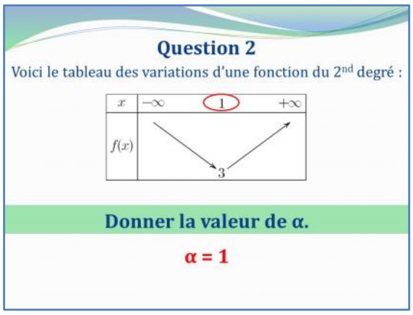
$(x-5)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x-1) = 0$

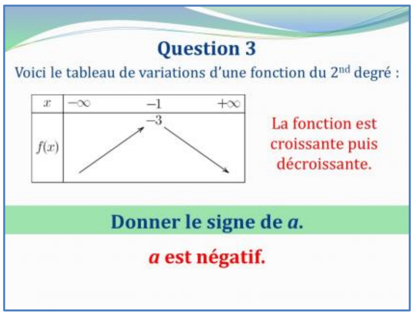
Second degré − Série 3 − Correction

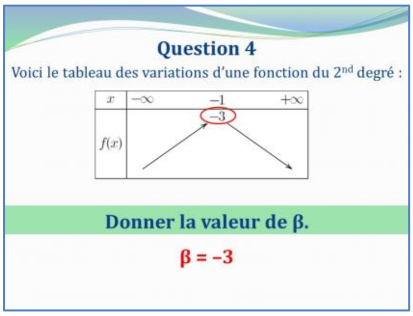
CONSIGNE Utiliser le tableau de variation d'une fonction polynôme de degré 2 f, pour déterminer différentes propriétés de f (signe de a , valeur de α ; valeur d'une image)

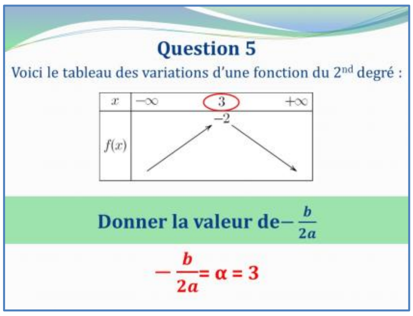


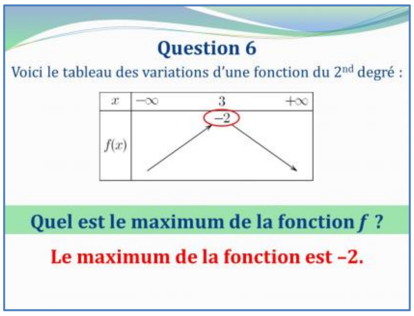


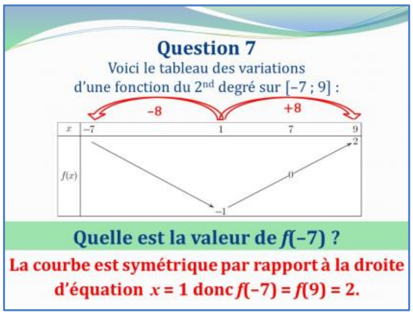


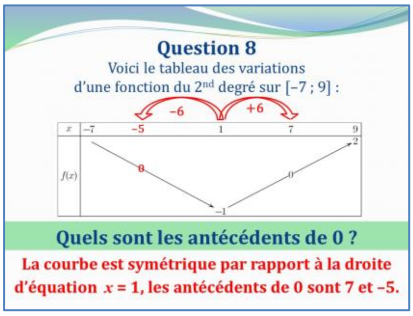


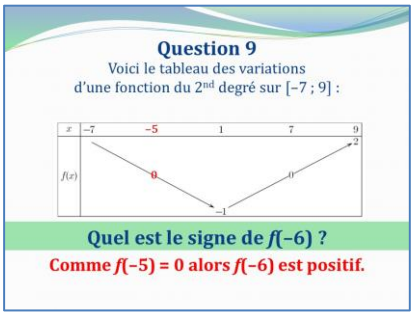


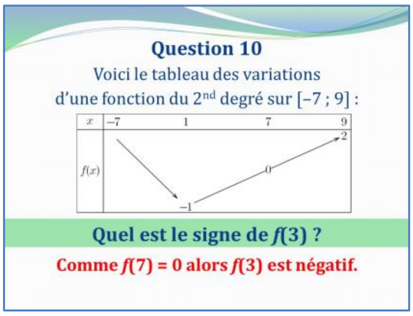






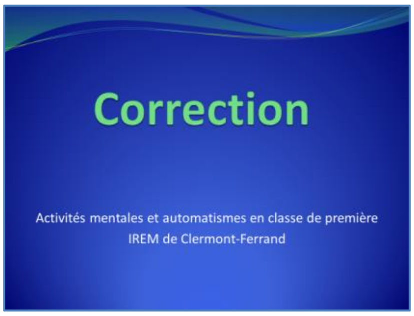


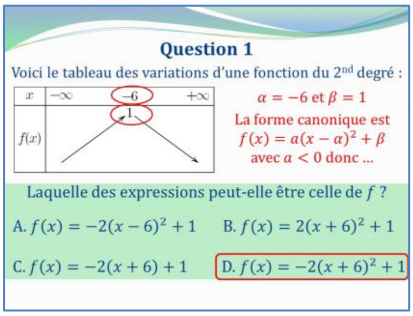


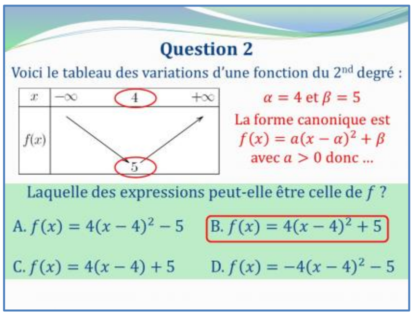


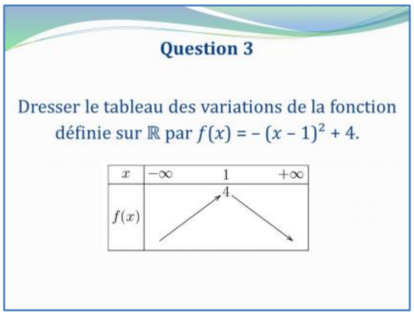
Second degré − Série 4 − Correction

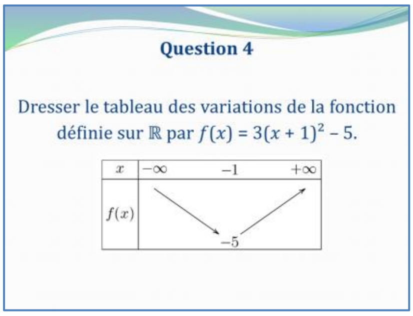
CONSIGNE Associer une expression algébrique de $f(x)$ à un tableau de variations de f et réciproquement.

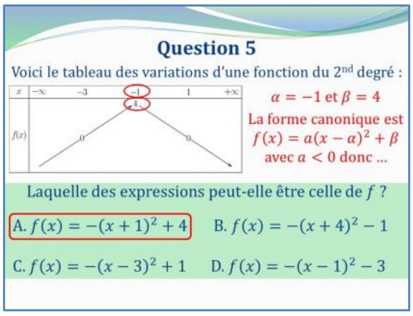


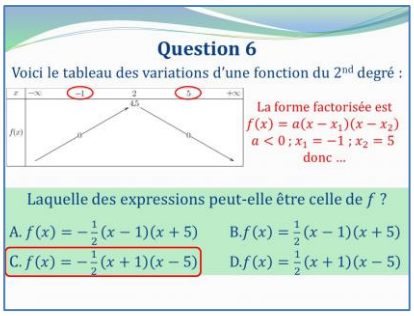


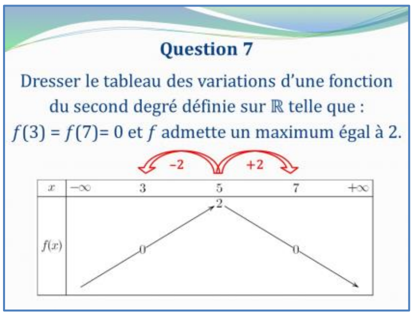


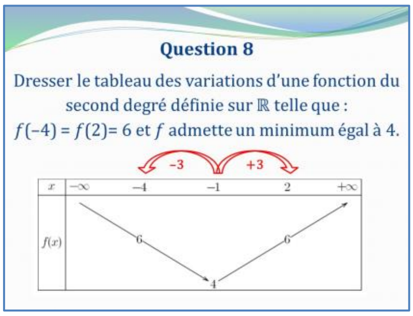


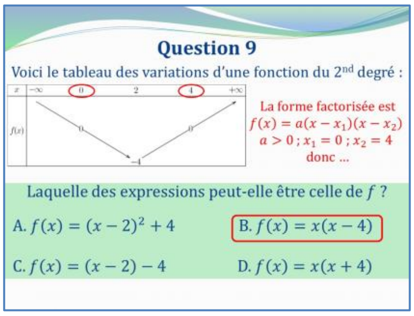


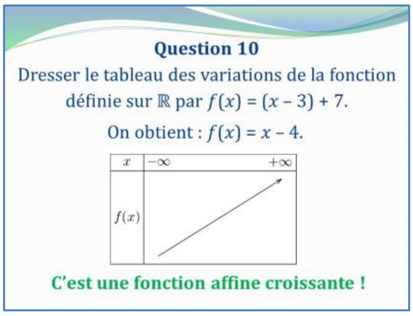












Second degré − Série 5 − Correction

CONSIGNE Résoudre des équations simples du second degré sans utiliser le discriminant.

Résoudre dans $\mathbb{R}$,
les équations suivantes :

Question 1

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5}$

ou $x = -\sqrt{5}$

Question 2

$x^2 + 3x = 0$

$x(x + 3) = 0$

$x = 0$ ou $x = -3$

Question 3

$x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -3$

Pas de solution dans $\mathbb{R}$

Question 4

$(x + 5)^2 = 0$

$x + 5 = 0$

$x = -5$

Question 5

$7x^2 - 3x = 0$

$x(7x - 3) = 0$

$x = 5$ ou $x = \frac{3}{7}$

Question 6

$(x + 1)^2 - 4 = 0$

$(x + 1)^2 = 4$

$x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$

$x = 1$ ou $x = -3$

Question 7

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

Question 8

$(x + 5)^2 + 4 = 0$

$(x + 5)^2 = -4$

Pas de solution dans $\mathbb{R}$

Question 9

$-2x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Question 10

$(2x + 1)^2 - 5 = 0$

$(2x + 1)^2 = 5$

$2x + 1 = \sqrt{5}$ ou $2x + 1 = -\sqrt{5}$

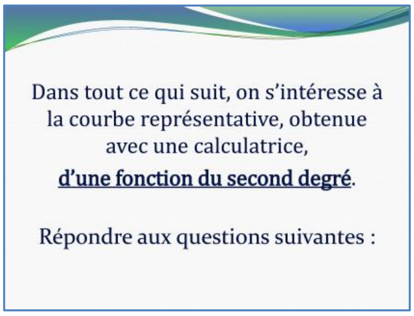
$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ou $x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$

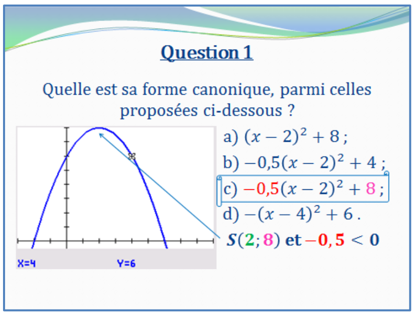
Fin

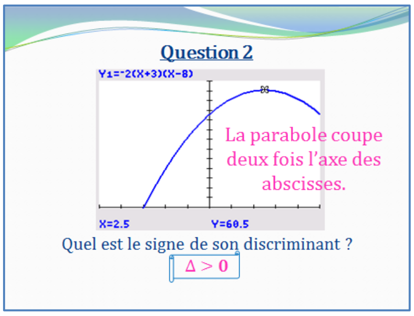
Activités mentales et automatismes en classe de première
IREM de Clermont-Ferrand

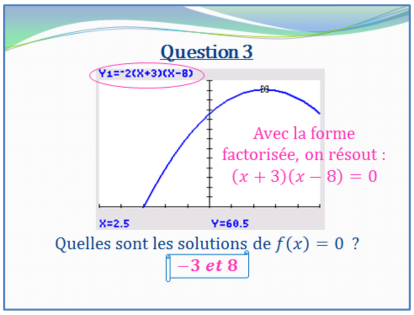
Second degré − Série 6 − Correction

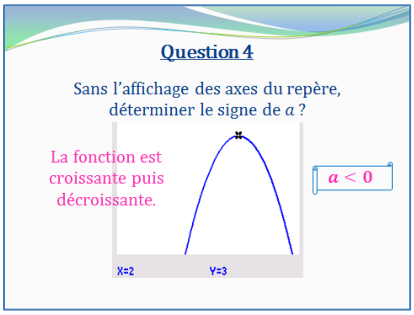
CONSIGNE Utiliser l'écran graphique d'une calculatrice pour répondre à diverses questions.

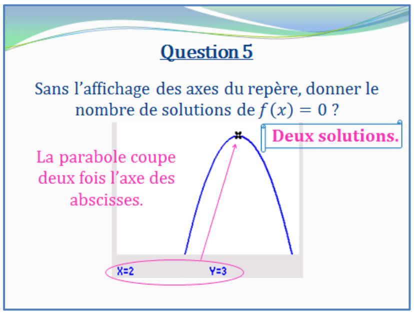


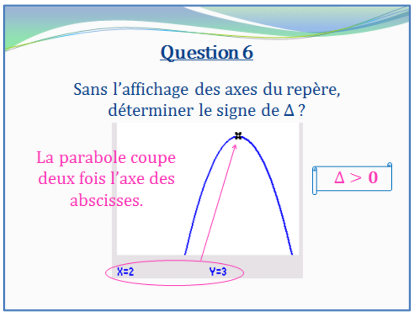


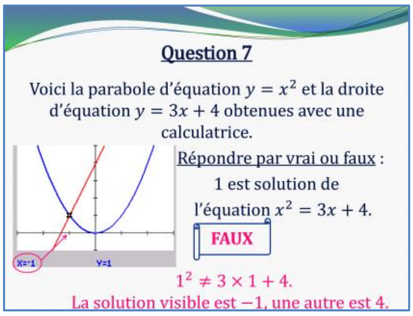


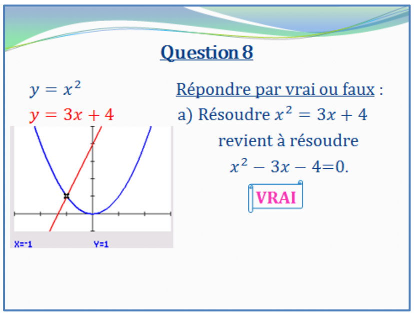


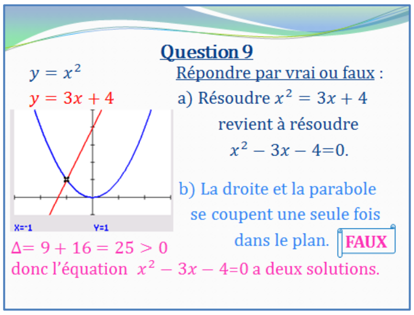


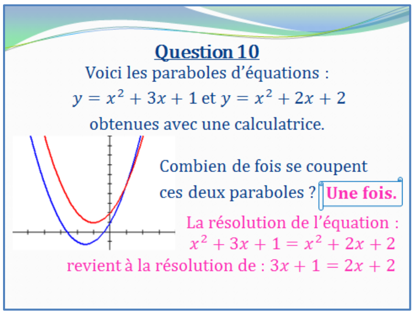












Second degré − Série 7 − Correction

CONSIGNE Résoudre des inéquations simples du second degré sans utiliser le discriminant.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

Question 1

$(x-3)(x+4) \geq 0$

$(x-3)(x+4)$ est un polynôme de degré 2 qui a 2 racines -4 et 3 et $a > 0$.

S = $]-\infty ; -4] \cup [3 ; +\infty[$

Question 2

$-2x(x+1) > 0$

$-2x(x+1)$ est un polynôme de degré 2 qui a 2 racines -1 et 0 et $a < 0$.

S = $]-1 ; 0[$

Question 3

$x^2 + 2 \geq 0$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 2 > 0$.

S = $\mathbb{R}$

Question 4

$(x-3)^2 \leq 0$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(x-3)^2 \geq 0$ et $(x-3)^2$ s'annule en 3.

S = $\{3\}$

Question 5

$5x^2 - 4x < 0$

équivaut à $x(5x-4) < 0$

$x(5x-4)$ est un polynôme de degré 2 qui a 2 racines 0 et $\frac{4}{5}$ et $a > 0$.

S = $]0 ; \frac{4}{5}[$

Question 6

$4 - x^2 < 0$

équivaut à $(2-x)(2+x) > 0$

$(2-x)(2+x)$ est un polynôme de degré 2 qui a 2 racines -2 et 2 et $a < 0$.

S $=]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$

Question 7

$x^2 - 2x + 1 > 0$

équivaut à $(x-1)^2 > 0$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2$ s'annule en 1.

S $=]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

Question 8

$-(x+2)^2 - 3 > 0$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-(x+2)^2 \leq 0$ donc $-(x+2)^2 - 3 < 0$.

S $= \emptyset$

Question 9

$x^2 \leq 9$

équivaut à $x^2 - 9 \leq 0$

donc à $(x-3)(x+3) \leq 0$

$(x-3)(x+3)$ est un polynôme de degré 2 qui a 2 racines -3 et 3 et $a > 0$.

S= $[-3 ; 3]$

Question 10

$(x+1)^2 - 25 \geq 0$

équivaut à $(x+1-5)(x+1+5) \geq 0$

donc à $(x-4)(x+6) \geq 0$

$(x-4)(x+6)$ est un polynôme de degré 2 qui a 2 racines -6 et 4 et $a > 0$.

S= $]-\infty ; -6] \cup [4 ; +\infty[$

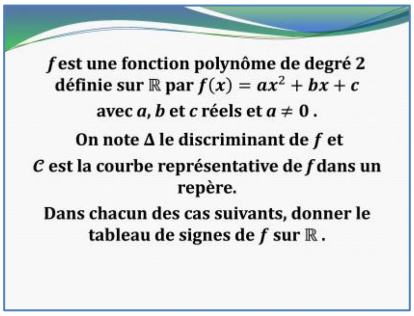
Fin

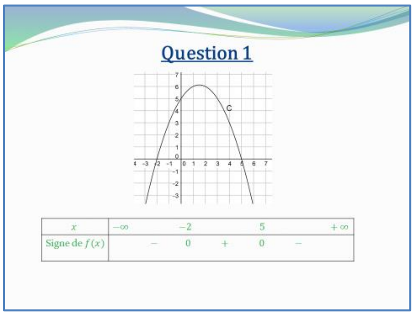
Activités mentales et automatismes en classe de première

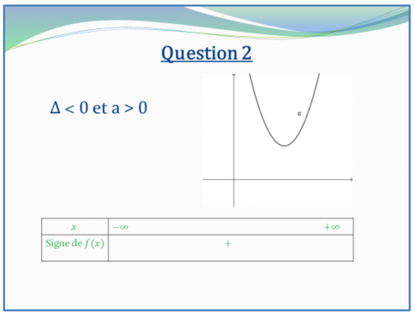
IREM de Clermont-Ferrand

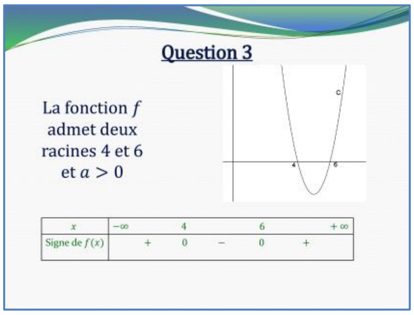
Second degré – Série 8 – Correction

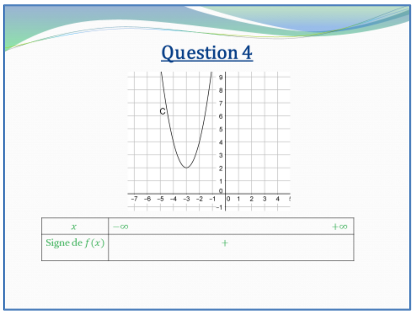
CONSIGNE Connaissant certaines propriétés d'une fonction polynôme f de degré 2 (courbe représentative, racines et signe de a, signe de Δ et de a), il s'agit de déterminer le tableau de signes de $f(x)$.

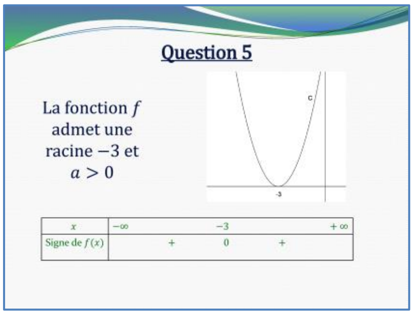


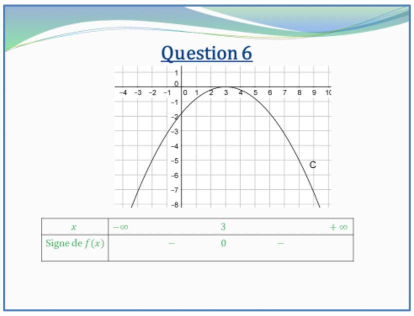


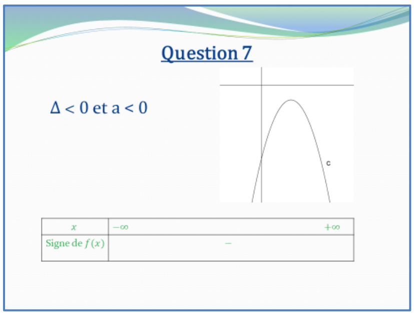


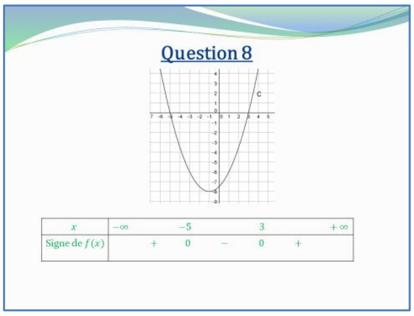


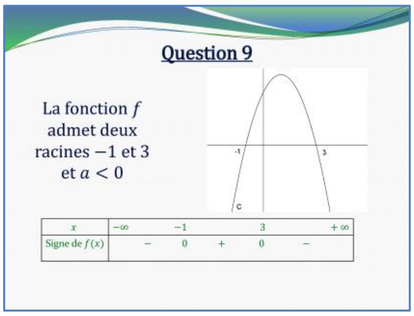


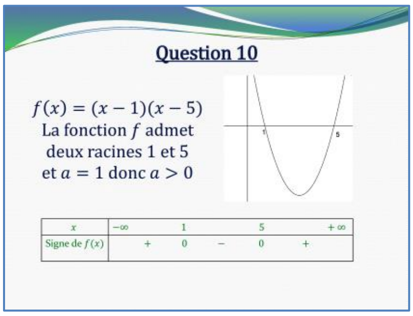












Second degré − Série 9 − Correction

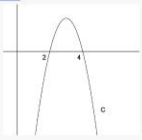
CONSIGNE Connaissant une expression algébrique simple d'une fonction polynôme f de degré 2, il s'agit de déterminer le tableau de signes de $f(x)$.

f est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par une expression algébrique.

Dans chacun des cas suivants, donner le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Question 1

$f(x) = -2(x-4)(x-2)$
La fonction f admet deux racines 2 et 4
et $a = -2$ donc $a < 0$.



x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

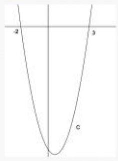
Question 2

$f(x) = 5(x-4)^2$
La fonction f admet une racine 4 et $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

Question 3

$f(x) = 3(x+2)(x-3)$
La fonction f admet deux racines -2 et 3
et $a = 3$ donc $a > 0$.



x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

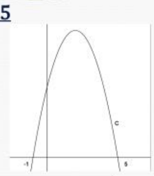
Question 4

$f(x) = -3x^2 - 2$
$f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	

Question 5

$f(x) = (x+1)(5-x)$
La fonction f admet deux racines -1 et 5
et $a = -1$ donc $a < 0$.



x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Question 6

$f(x) = -2(x+3)^2$
La fonction f admet une racine -3
$f(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$-$	

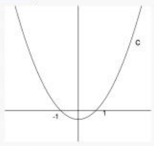
Question 7

$f(x)=x^2-2x+1$
$f(x) = (x-1)^2$
La fonction f admet une racine 1
et $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

Question 8

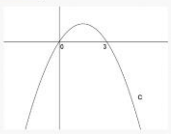
$f(x) = x^2 - 1$
$f(x)=(x-1)(x+1)$
La fonction f admet deux racines -1 et 1
et $a = 1$ donc $a > 0$.



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Question 9

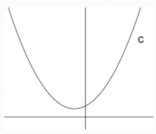
$f(x) = -x^2 + 3x$
$f(x) = x(-x+3)$
La fonction f admet deux racines 0 et 3
et $a = -1$ donc $a < 0$.



x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Question 10

$f(x) = x^2 + x + 1$
$\Delta = -3$
et a=1 donc a>0



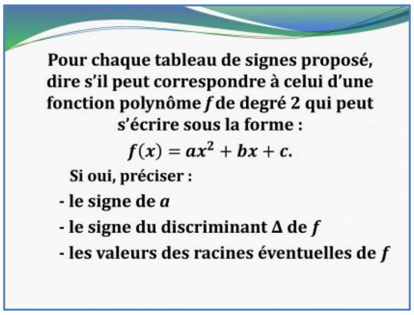
x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	

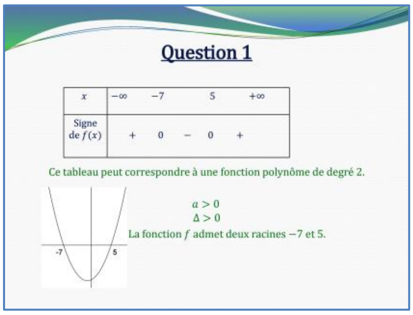
Fin

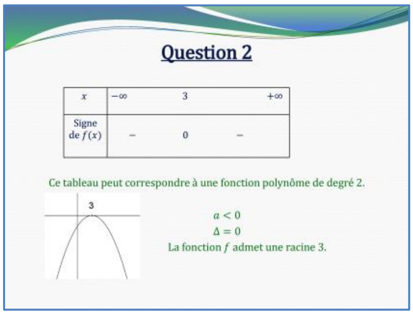
Activités mentales et automatismes en classe de première
IREM de Clermont-Ferrand

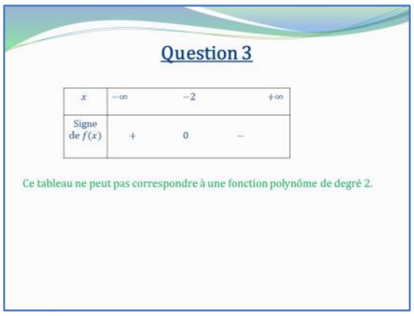
Second degré − Série 10 − Correction

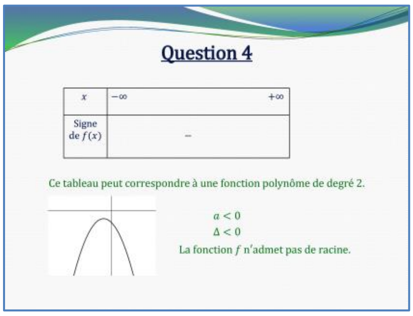
CONSIGNE En utilisant le tableau de signes d'une fonction polynôme du second degré f, déterminer le signe de a, de Δ et les racines éventuelles de f.

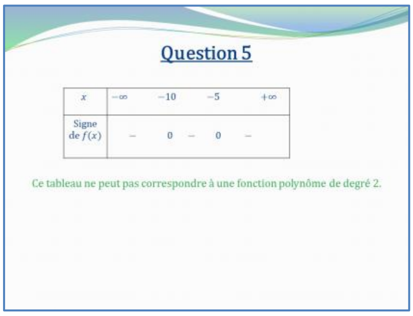


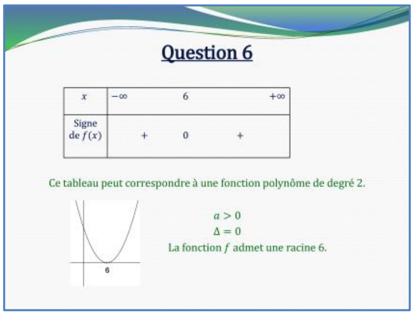


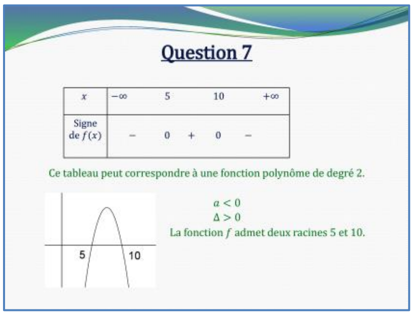


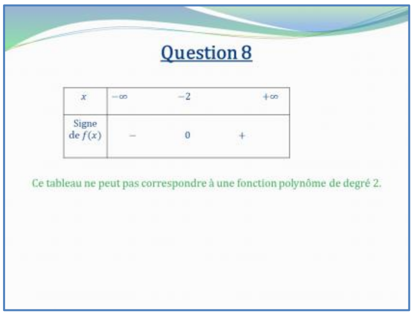


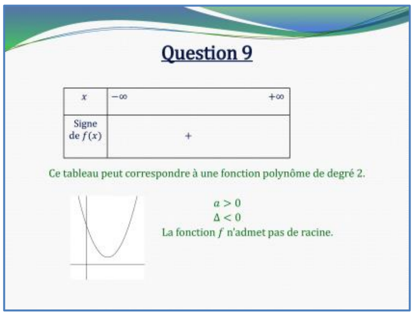


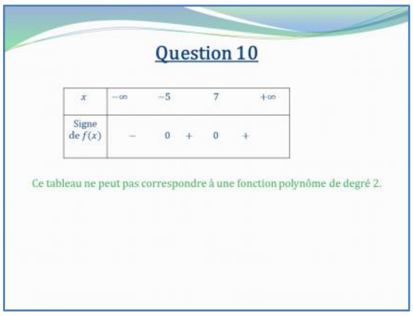












Second degré − Série 11 − Correction

CONSIGNE Connaissant l'expression d'une fonction polynôme du second degré admettant deux racines, déterminer S et P, somme et produit des racines. Dans une deuxième partie, déduire de S et P ou des propriétés des coefficients a, b, c des propriétés des racines.

Dans chaque cas, f est une fonction polynôme du second degré qui admet deux racines et s'écrit pour tout x de $\mathbb{R}$, sous la forme
$f(x) = ax^2 + bx + c$.
On note S et P respectivement la somme et le produit des racines.

Question 1

f est définie pour tout x de $\mathbb{R}$, par :
$f(x) = x^2 - 5x + 2$
$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 2$
$\mathrm{S} = \frac{-b}{a}$ donc $\mathrm{S} = 5$
$\mathrm{P} = \frac{c}{a}$ donc $\mathrm{P} = 2$

Question 2

f est définie pour tout x de $\mathbb{R}$, par :
$f(x) = 2x^2 + 5x - 3$
$a = 2 \quad b = 5 \quad c = -3$
$\mathrm{S} = \frac{-b}{a}$ donc $\mathrm{S} = -\frac{5}{2}$
$\mathrm{P} = \frac{c}{a}$ donc $\mathrm{P} = -\frac{3}{2}$

Question 3

f est définie pour tout x de $\mathbb{R}$, par :
$f(x) = -3x^2 - 2x + 5$
$a = -3 \quad b = -2 \quad c = 5$
$\mathrm{S} = \frac{-b}{a}$ donc $\mathrm{S} = -\frac{2}{3}$
$\mathrm{P} = \frac{c}{a}$ donc $\mathrm{P} = -\frac{5}{3}$

Question 4

$f(x) = x^2 + 5x - 6$
$f(1) = 1 + 5 - 6$ donc $f(1) = 0$
1 est bien racine de f.
$a = 1$ et $c = -6$ donc P=-6
la seconde racine est -6.

Question 5

$f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
$f(-1) = 3 - 4 + 1$ donc $f(-1) = 0$
-1 est bien racine de f.
$a = 3$ et $c = 1$ donc $\mathrm{P} = \frac{1}{3}$
la seconde racine est $-\frac{1}{3}$.

Question 6

$f(x) = -3x^2 + 4x + 4$
$f(2) = -12 + 8 + 4$ donc $f(2) = 0$
2 est bien racine de f.
$a = -3$ et $c = 4$ donc $\mathrm{P} = -\frac{4}{3}$
la seconde racine est $-\frac{2}{3}$.

Question 7

On donne $\mathrm{S} = -5$ et $\mathrm{P} = 2$
$\mathrm{P} = 2$
$\mathrm{P} > 0$ donc les racines de f sont de même signe.
$\mathrm{S} = -5$
donc $\mathrm{S} < 0$ donc les racines de f sont négatives.

Question 8

On donne $\mathrm{S} = 3$ et $\mathrm{P} = -2$
$\mathrm{P} < 0$ donc les racines de f sont de signes contraires.
Il y a donc une racine positive et une négative.

Question 9

Si b $= 0$ alors f a deux racines opposées.
Si b $= 0$ alors $-\frac{b}{a} = 0$
la somme des racines de f vaut 0
c'est VRAI.

Question 10

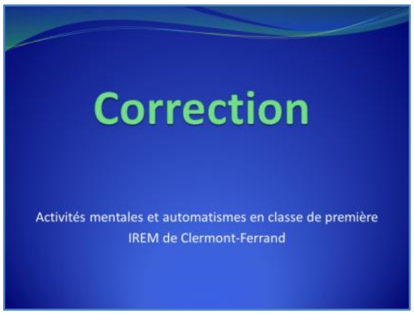
Si $a = c$ alors f a deux racines inverses l'une de l'autre.
Si $a = c$ alors $\frac{c}{a} = 1$
le produit des racines est égal à 1
c'est VRAI.

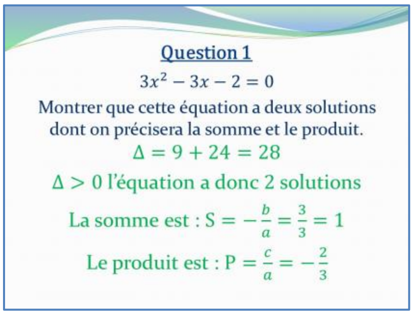
Fin

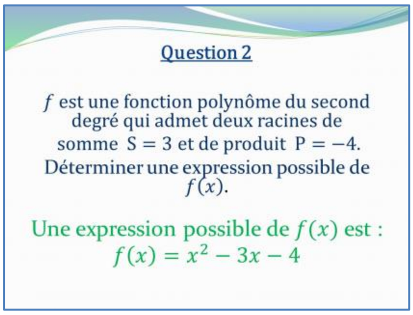
Activités mentales et automatismes en classe de première
IREM de Clermont-Ferrand

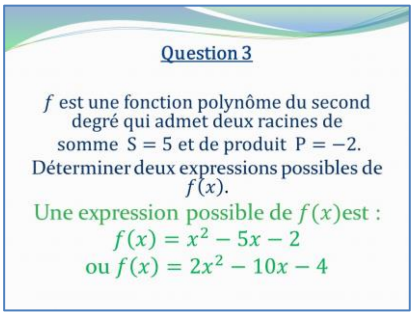
Second degré − Série 12 − Correction

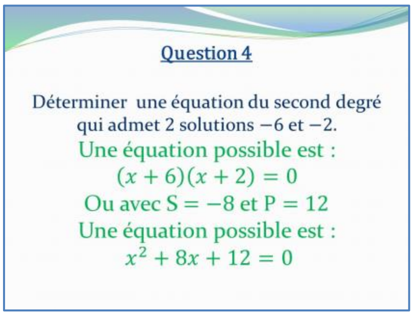
CONSIGNE Connaissant S et P somme et produit des racines d'une fonction polynôme degré 2 f,, déterminer l'expression de $f(x)$ ou l'équation $f(x) = 0$ (approfondissement).

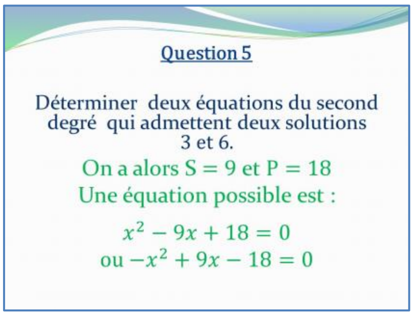


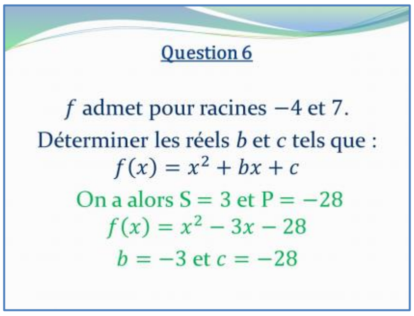


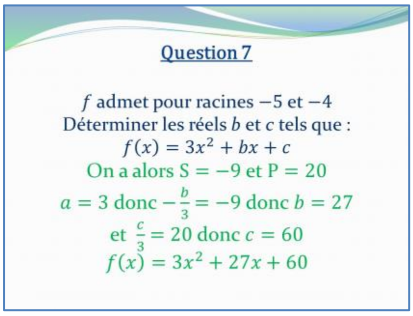


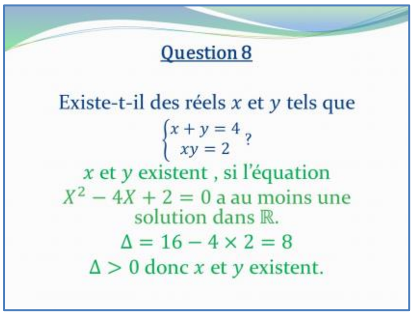


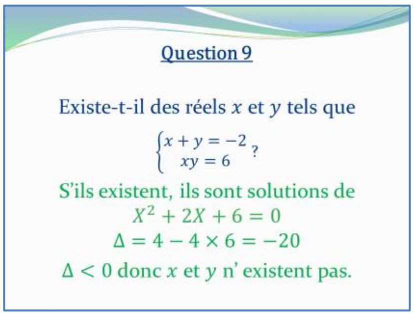


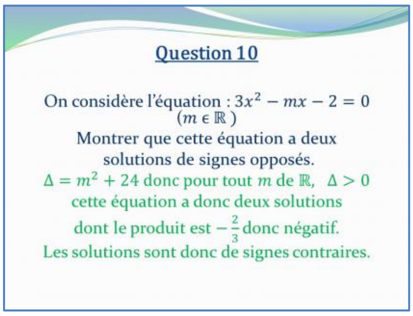












Second degré − Série 13 − Correction

CONSIGNE Travailler avec des algorithmes en rapport avec le second degré.

Correction

Activités mentales et automatismes en classe de première
IREM de Clermont-Ferrand

Question 1

$Y \longleftarrow X+2$
$Y \longleftarrow Y^2-6$

Lorsque X désigne un réel,
quelle fonction définit cet algorithme ?

$x \longmapsto (x+2)^2-6$

Question 2

$Y \longleftarrow X-1$
$Y \longleftarrow Y^2-1$

$Y \longleftarrow X^2-2X$

Oui

Lorsque X désigne un réel,
ces deux algorithmes définissent-ils
la même fonction ?

$(x-1)^2-1 = x^2-2x+1-1 = x^2-2x$

Question 3

$Y \longleftarrow X-4$
$Y \longleftarrow -3Y^2+8$

Y désignant un réel,
donner un algorithme définissant
la fonction d'expression :

$-3(x-4)^2+8$

Question 4

Compléter cet algorithme afin qu'il détermine
si f a deux racines ou non :
(D désigne un nombre réel)

D $\longleftarrow b^2-4ac$
Si D > 0 faire
Afficher « Deux racines distinctes »
Sinon
Afficher « Une ou aucune racine »
Fin Si

Question 5

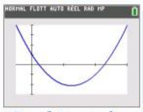
A quoi correspond la valeur de m ?

$X \longleftarrow -b \div (2a)$
m$\longleftarrow f(X)$

m est le maximum ou le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Question 6

Voici la courbe représentative de la fonction f
définie par $f(x) = 2x^2-5x+1$:



Pour i allant de 0 à 4 faire :
$X \longleftarrow i$
$Y \longleftarrow 2X^2-5X+1$
Fin Pour

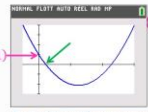
Que fait cet algorithme ?

Il calcule $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$.

Question 7

Voici la courbe représentative de la fonction f
définie par $f(x) = 2x^2-5x+1$:

(0 ; 1)



$X \longleftarrow 0$
$Y \longleftarrow 1$
Tant que $Y > 0$ faire
$X \longleftarrow X+0,01$
$Y \longleftarrow 2X^2-5X+1$
Fin Tant que

Cet algorithme permet-il de déterminer une
valeur approchée à 0,01 près d'une racine de f ?

OUI

Question 8

Voici la courbe représentative de la fonction f
définie par $f(x) = 2x^2-5x+1$:

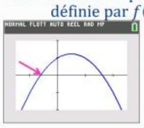
$X \longleftarrow 2$
$Y \longleftarrow -1$
Tant que $Y < 0$ faire
$X \longleftarrow X+0,01$
$Y \longleftarrow 2X^2-5X+1$
Fin Tant que

Que représente X à la fin de cet algorithme ?

Il s'agit d'une valeur approchée de la racine de $f(x)$ la plus grande.

Question 9

Voici la courbe représentative de la fonction f
définie par $f(x) = -x^2+x+1$:



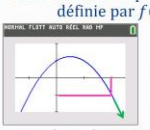
$X \longleftarrow -1$
$Y \longleftarrow 0$
Tant que $Y < 0$ faire
$X \longleftarrow X+0,01$
$Y \longleftarrow -X^2+X+1$
Fin Tant que

Que contient X à la fin de l'algorithme ?

X contient -1 car
« on ne rentre pas dans la boucle ».

Question 10

Voici la courbe représentative de la fonction f
définie par $f(x) = -x^2+x+1$:



$X \longleftarrow 2$
$Y \longleftarrow -1$
Tant que $Y < 0$ faire
$X \longleftarrow X+0,01$
$Y \longleftarrow -X^2+X+1$
Fin Tant que

Cet algorithme permet-il de déterminer une
valeur approchée de la racine positive de f ?

NON, cet algorithme ne « s'arrête » pas.

Fin

Activités mentales et automatismes en classe de première
IREM de Clermont-Ferrand

Second degré − Série 14 − Correction

CONSIGNE Travailler avec des programmes écrits en Python en rapport avec le second degré.