Brevet de technicien supérieur Nouvelle-Calédonie session décembre 2002 - Informatique de gestion

Exercice 1 **5 points**

Dans un ensemble E muni d'une structure d'algèbre de Boole, on considère l'expression

$$\mathrm{A} = ab\overline{c} + \overline{a\ b}c + \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b\ c} + \overline{a\ b\ c}.$$

1. **a.** Représenter A dans un tableau de Karnaugh.
   En déduire une simplification de A.

   b. Retrouver par le calcul le résultat précédent.

2. On considère l'opérateur « implication », noté $\longrightarrow$, défini par : $(x \longrightarrow y) = \overline{x} + y$.

   a. Calculer : $(x \longrightarrow 0)$.

   b. Démontrer que : $x + y = ((x \longrightarrow 0) \longrightarrow y)$,
   puis que : $\overline{x}\ \overline{y} = (((x \longrightarrow 0) \longrightarrow y) \longrightarrow 0)$.

   c. Déduire des questions précédentes une écriture de A à l'aide des variables $a,\ b,\ c$ de la constante 0 et du seul opérateur « implication» [les opérateurs +, ., complémentation, sont exclus].

Exercice 2 **8 points**

Partie A

On considère la fonction f de variable réelle x définie sur l'intervalle $[3~;~30]$ par :

$$f(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}+6}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses ; 0,05 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \left(-\dfrac{x}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}+6}$.
2. Justifier le signe de la dérivée de f sur l'intervalle $[3~;~30]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 24.
4. Tracer la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère donné.

Partie B

Avant la commercialisation d'un nouveau système d'alarme, la société SECUPRO réalise une enquête auprès des entreprises de la région Rhône-Alpes afin de déterminer le nombre d'acheteurs potentiels du logiciel en fonction de son prix de vente. Les résultats de cette enquête sont donnés dans le tableau suivant :

x_i : prix en centaine d'euros	3	6	9	12	15	18
y_i : nombre d'acheteurs potentiels	200	100	50	20	10	5

L'allure du nuage de points de la série $\left(x_i~;~y_i\right)$ conduit à poser $z_i = \ln y_i$.

1. Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant, en arrondissant les valeurs de z_i au millième le plus proche :

x_i	3	6	9	12	15	18
$z_i = \ln y_i$						

2. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série.
Un ajustement affine est-il justifié ?
3. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $z = ax + b$, a sera arrondi au centième le plus proche et b arrondi à l'entier le plus proche.
4. Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, une expression de y en fonction de x. Utiliser cette expression pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels du logiciel si le prix de vente est de 1 000 euros.

Partie C
Le prix de revient d'un système d'alarme est de 300 euros.

On suppose dans cette partie, qu'une estimation du nombre d'acheteurs potentiels est $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}+6}$, où x est le prix de vente exprimé en centaine d'euros.

1. Justifier que la fonction f étudiée dans la partie A, donne une estimation du bénéfice réalisé par la société SECUPRO en fonction du prix de vente unitaire proposé pour le système d'alarme.
2. À quel prix la société doit-elle proposer le système d'alarme pour que ce bénéfice soit maximum ? Quel est alors ce bénéfice à 100 euros près ?

Exercice 3 **7 points**
Une usine fabrique en grande série des pièces susceptibles de présenter deux défauts notés a et b.
Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants :
5 % des pièces présentent le défaut a,
4 % des pièces présentent le défaut b,
1 % des pièces présentent les deux défauts.
On prélève au hasard une pièce dans la production.
On note A l'évènement « la pièce présente le défaut a », B l'évènement : « la pièce présente le défaut b ».

Partie A

1. **a.** Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
   b. Calculer la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.
2. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement C : « La pièce prélevée présente au moins un défaut ».
   b. Soit D l'évènement : « La pièce prélevée ne présente aucun défaut ». Montrer que la probabilité de l'évènement D est $0,92$.

Partie B
On prélève au hasard un lot de 100 pièces dans la production. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 100 pièces, associe le nombre de pièces du lot ne présentant aucun défaut.

Dans cette partie, on donnera les valeurs décimales arrondies à 10^{-3} *près des probabilités demandées.*

1. **a.** Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité d'avoir exactement une pièce présentant au moins un défaut dans un lot.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de paramètres $m = 92$ et d'écart type $\sigma = 2,71$.

   On note Y la variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 92 et $2,71$.

   a. Justifier le choix des paramètres m et σ.

   b. Calculer la probabilité pour qu'un lot de 100 pièces contienne au plus 86 pièces sans défaut, c'est-à-dire $P(Y \leqslant 86,5)$.

   c. Calculer la probabilité pour qu'un lot de 100 pièces contienne au moins 90 % de pièces sans défaut, c'est-à-dire $P(Y > 89,5)$.