La construction des notions d'ordre et de treillis

B. Monjardet

SOMMAIRE

QUELQUES RÉFÉRENCES

P. Cegieleski 1987, Historique de la théorie élémentaire des ensembles in *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure APMEP 65, 161-210.

L. Corry 2004 *Modern Algebra and the rise of mathematical structures*, Birhäuser.

H. Mehrtens 1979, *Die Entstehung der Verbandstheorie*, Hildesheim: Gerstenberg Verlag.
Review par J.W Dauben dans *Order* 1986, 3, 89-102.

&…..INTERNET

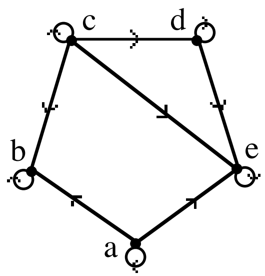
La NOTION MATHÉMATIQUE D'ORDRE

$$\{\text{ordres}\} \subset \{\text{relation binaires}\}$$

Relation binaire R sur X = ensemble de couples de X

EXEMPLE $X = \{a,b,c,d,e\}$,

$$R = \{(a,b),\ (a,e),\ (c,b),\ (c,d),\ (c,e),\ (d,e),\ (a,a),\ (b,b),\ (c,c),\ (d,d),\ (e,e)\}$$



	a	b	c	d	e
a	X	X			X
b		X			
c		X	X	X	X
d				X	X
e					X

	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

trois représentations de la même relation binaire

ORDRE et ORDRE STRICT

La relation R est un **ordre** si elle est
réflexive : pour tout $x \in X$, xRx
antisymétrique : pour tous $x, y, \in X$, xRy et $yRx \Rightarrow x = y$
transitive : pour tous $x, y, z \in X$, xRy et $yRz \Rightarrow xRz$

La relation R est un **ordre strict** si elle est
irréflexive : pour tout $x \in X$, $xR^c x$
transitive : pour tous $x, y, z \in X$, xRy et $yRz \Rightarrow xRz$
($\Rightarrow$ *asymétrique* : pour tous $x, y \in X$, $xRy \Rightarrow yR^c x$)

NOTATIONS USUELLES

ORDRE : $\leq$ ORDRE STRICT : $<$

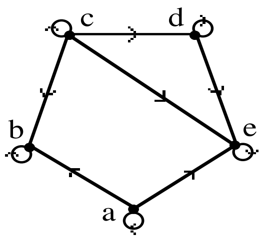
$x<y$ si $x\leq y$ et $x\neq y$ $x\leq y$ si $x<y$ et $x=y$

La RELATION de *COUVERTURE* d'un ORDRE et son "*DIAGRAMME*"

x est couvert par y si il n'existe pas d'élément "entre" x et y

($x \prec y$ si $x < y$ and $x \leq z < y$ impliquent $x = z$)

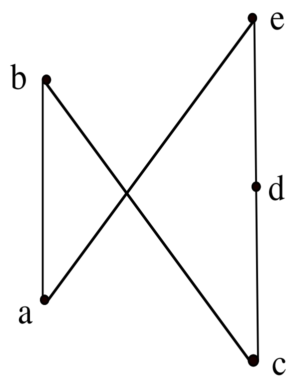
Un diagramme d'un ordre représente sa relation de couverture



	a	b	c	d	e
a	X	X			X
b		X			
c		X	X	X	X
d				X	X
e					X

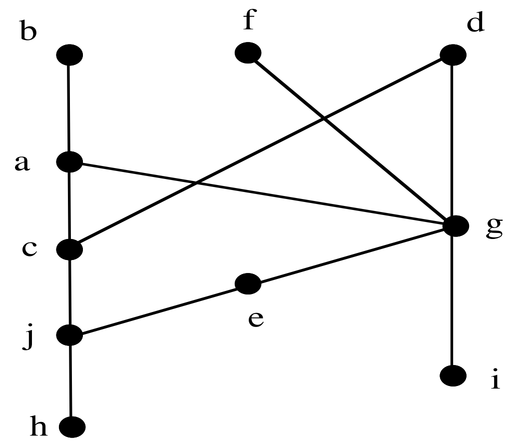
	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

Cette relation est un ordre dont la figure ci-dessous est un diagramme



DEUX DIAGRAMMES d'ORDRES

ORDRE TOTAL (CHAÎNE)



ORDRE D'INTERVALLE

PRÉHISTOIRES…

ORDONNER c'est d'abord COMPARER

ACTIVITÉS de COMPARAISON

PLUS/MOINS….. fort, grand, rapide, lourd, habile……
dans les premiers récits : Mythologies, Bible, Homère, Mahâbhârata…

en MATHÉMATIQUES
- nombres (30.000 av J.C., numération écrite 3.600 av J.C.)
- grandeurs

apparition des symboles
$<, >$ 1631 Thomas Hariott (1560-1621) dans *Artis analyticae praxis*
$\geq, \leq$ 1655 John Wallis (1606-1703) dans *Tract on conic sections*, 1734 Pierre Bouguer (1698-1758)

Bertrand RUSSELL 1903 The Principles of Mathematics, Cambridge,University Press, Part IV. Order

"**Qu'est ce qu'un ordre?** Ceci est une question difficile et sur laquelle, autant que je sache, rien du tout n'a été écrit. Tous les auteurs que j'ai rencontrés se contentent d'exhiber la genèse d'un ordre ; et puisque la plupart d'entre eux donnent seulement une des six méthodes énumérées dans le chapitre XXIV, il est facile pour eux de confondre la genèse d'un ordre avec sa nature".

"…nous avons une relation ***asymétrique*** et transitive P, et une collection de termes, deux desquels sont tels que que soit xPy soit yPx (*connexité*). Quand ces conditions sont satisfaites nos termes forment nécessairement une ***série simple***" **(= ensemble strictement totalement ordonné)**

On the Logic of Number

By Charles S. PEIRCE. **1881** *American Journal of Mathematics*, 4(1), 85-95.

"Soit r un terme de relation tel qu'une chose peut être dite une r d'une autre, et l'autre une r'd de la première.Si dans un certain système d'objets, tout ce qui est un r d'un r d'une chose est lui même un r de cette chose, alors r est dite être une relation ***transitive****** dans ce système. ….Alors q peut être appelé une relation fondamentale de quantité (= **ordre**) ; ses propriétés étant
- premièrement, qu'elle est transitive ;
- deuxièmement, que chaque chose dans le système est q d'elle même (= réflexivité
-et troisièmement que rien n'est à la fois q et q'd d'une chose sauf elle même.
(= antisymétrie)

Les objets d'un système ayant une relation fondamentale de quantité sont appelés des quantités, et le système est appelé un ***système de quantités***" **(= ensemble ordonné).**

*définition due à de Morgan 1856, mais notion qu'on trouve déjà dans Leibniz et sous la forme du syllogisme Barbara dans Aristote.
Cf. aussi Schröder 1877 avec l'ordre de « subsumption » entre concepts, Peirce 1880 avec l'ordre entre extensions -< appelé "copule".

The Continuum as a Type of Order: An Exposition of the Modern Theory by Edward V. HUNTINGTON **1905** *Annals of Mathematics*, 6(4),151-184

GENERAL PROPERTIES OF SIMPLY ORDERED CLASSES OR SERIES

12. If a class, K, and a relation $<$ (called the relation of order), satisfy the conditions expressed in postulates 0, 1–3, below, then the system $(K, <)$ is called a *simply ordered class*, or a *series*.‡ The notation $a < b$ (or $b > a$, which means the same thing), may be read : "a precedes b" (or "b follows a"). The class K is said to be *arranged*, or *set in order*, by the relation $<$, and the relation $<$ is called a *serial relation* within the class K.

POSTULATE 0. *The class K is not an empty class, nor a class containing merely a single element.*

This postulate is intended to exclude obviously trivial cases, and will be assumed without further mention throughout the paper.

POSTULATE 1. *If a and b are distinct elements of K, then either $a < b$ or $b < a$.*

This postulate has been called by Russell the postulate of *connexity*.§

POSTULATE 2. *If $a < b$, then a and b are distinct.*

Any relation $<$ which has this property is said to be *non-reflexive* throughout the class.

POSTULATE 3. *If $a < b$ and $b < c$, then $a < c$.*

Any relation $<$ which has this property is said to be *transitive* throughout the class.

Grundzüge der Mengenlehre 1914

(Bases de la théorie des ensembles)

par Felix Hausdorff (1868-1942)

Chapitre 6 section 1

Teilweise geordnete Mengen

(Ensemble partiellement ordonné)

(A,<, >, ||), avec pour tout a différent de b

- soit $a < b$, soit $a > b$, soit $a \| b$
- < transitive
- || symétrique

(donc < est un ordre strict et $a > b \Leftrightarrow b < a$)

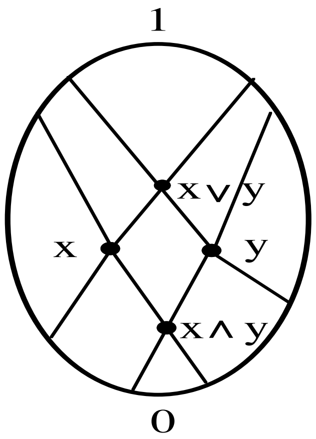
La NOTION MATHÉMATIQUE de TREILLIS

{Treillis} ⊂ {ordres} ⊂ {relation binaires}

Un TREILLIS (T, ≤) est un ensemble ordonné tel que deux éléments quelconques x et y de T ont
- un infimum (= borne inférieure) noté $x \wedge y$

ET

- un supremum (= borne supérieure) noté $x \vee y$



EXEMPLES : ($\mathcal{N}$,≤) ($\mathcal{R}$,≤)

- L'ensemble P(E) de toutes les parties d'un ensemble E ordonné par la relation d'inclusion ⊆ entre parties:

$A \wedge B = A \cap B$ $A \vee B = A \cup B$

La DÉFINITION ALGÉBRIQUE d'un TREILLIS

Un TREILLIS $(T,\wedge,\vee)$ est un ensemble muni de deux opérations binaires

$$T^2 \to T \qquad\qquad T^2 \to T$$
$$(x,y) \to x\wedge y \qquad\qquad (x,y) \to x\vee y$$

appellées INF et SUP et telles que

$x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$	$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$	(associativité)
$x\wedge y = y\wedge x$	$x\vee y = y\vee x$	(commutativité)
$x\wedge x = x$	$x\vee x = x$	(idempotence)
$x\wedge(y\vee x) = x$	$x\vee(y\wedge x) = x$	(absorption)

$$(T, \leq) \qquad \leftrightarrow \qquad (T,\wedge,\vee)$$

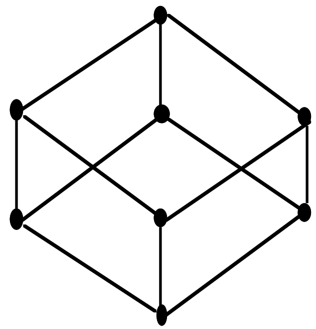
$$x \leq y \Leftrightarrow x\wedge y = x \qquad\qquad x\wedge y = \inf(x,y)$$
$$\Leftrightarrow x\vee y = y \qquad\qquad x\vee y = \sup(x,y)$$

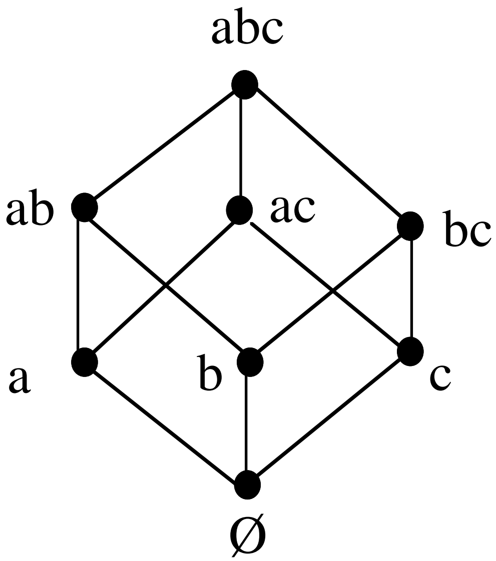
EXEMPLE (N, divisibilité) est un treillis avec

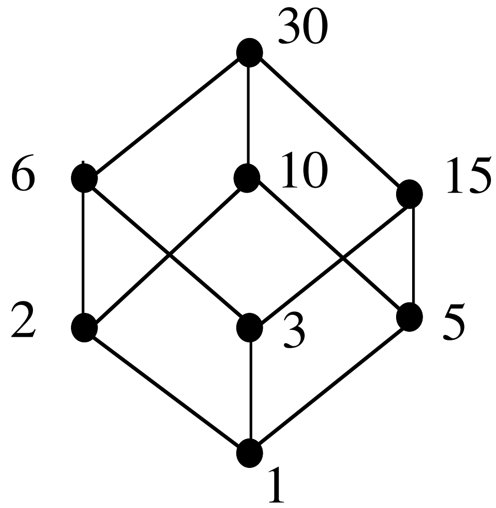
$$x\wedge y = \text{ppcm}(x,y) \qquad\qquad x\vee y = \text{pgcd}(x,y)$$

ce treillis est **distributif** : $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ $\qquad$ $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$

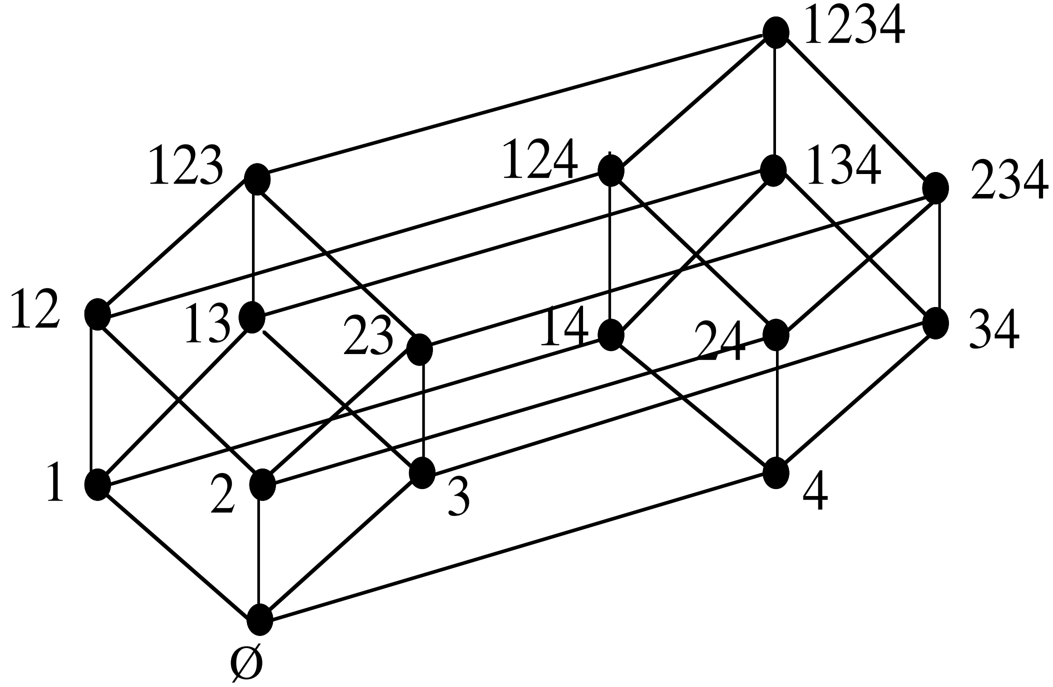
DIAGRAMMES de TREILLIS

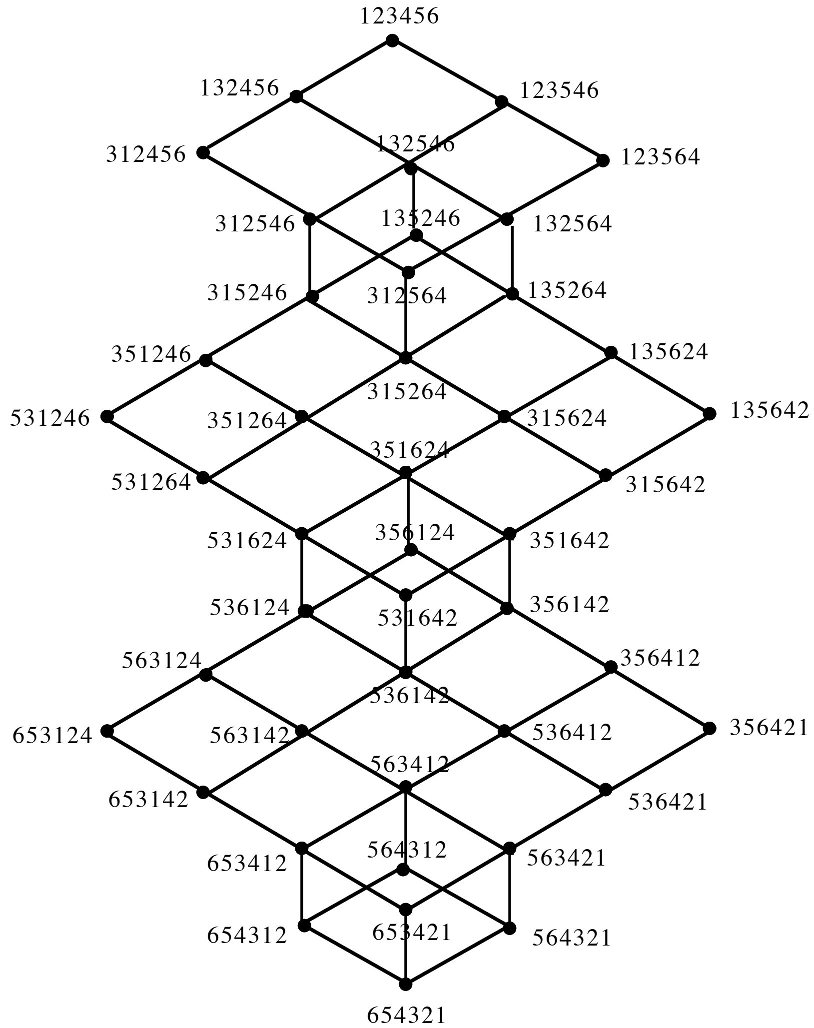






TREILLIS BOOLÉENS


1234
123
124
134
234
12
13
23
14
24
34
1
2
3
4
Ø



TREILLIS DISTRIBUTIF

George BOOLE et L'ALGÈBRE de la LOGIQUE

Modélisation mathématique des lois de la pensée au moyen d'un calcul algébrique
***The mathematical analysis of logic, being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. 1847**

Proposition I.
All the operations of Language, as an instrument of reasoning, may be conducted by a system of signs composed of the following elements, viz:
1st. Literal symbols, as x, y, &c., representing things as subject of our conceptions.
2nd. Signs of operations, as +, −, _, standing for those operations of the mind by which the conceptions of things are combined or resolved so as to form new conceptions involving the same elements.
3rd. The sign of identity, =.
And these symbols of Logic are in their use subject to definite laws, partly agreeing with and partly differing from the laws of the corresponding symbols in the science of Algebra.

PRÉDÉCESSEURS, SUCCESSEURS

LEIBNIZ,…..

De MORGAN A. 1847 ***Formal logic: or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable***. 1847,Taylor and Walton, London.

BOOLE G. 1847 ***Mathematical Analysis of Logic,*** Barclay and Macmillan, London.

BOOLE G. 1854. ***An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities***.Walton and Maberley, London.

De MORGAN A. 1858 **On the Syllogism**, No. III., Transactions of the Cambridge Philosophical Society 10: 173-230.

JEVONS W.S. 1863 **Pure Logic, or the science of quality apart from quantity**, Macmillan and Co., London.

PEIRCE C.S. 1867 **On an Improvement in Boole's Calculus of Logic,** *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* 7, 250-61.

GRASSMANN R. 1872, **Die Formenlehre der Mathematik** , Stettin.

SCHRÖDER E. 1877 **Der Operationskreis des Logikkalküls**, Leipzig: B.G. Teubner.

PEIRCE C.S. 1880 **On the Algebra of Logic**, *American Journal of Mathematics*, 3, 15-57.

PEIRCE C.S. 1885 **On the Algebra of Logic: A contribution to the philosophy of notation**, *American Journal of Mathematics* 7(3)197-202.

SCHRÖDER E. 1890-1895 ***Vorlesungen über die Algebra der Logik*** (*Lectures sur l'algèbre de la logique*), 3 vol, Teubner verlag, Leipzig.

HUNTINGTON E. V; 1904 **Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic**, *Transactions of the American Mathematical Society,* 5(3) 288- 309.

SCHEFFER H.M. 1913 **A set of five independent postulates for boolean algebras, with application to logical constants**. *Transactions of the American Mathematical Society* 14, 481-488.

I TROIS OPÉRATIONS et leurs PROPRIÉTÉS

Boole: calcul des classes (ensembles) ; opérations d'*addition* (= union disjointe) et de *produit* (intersection)

L'opération d'addition est remplacée par l'opération d'union par De Morgan, puis par Jevons, Schröder, Peirce, Huntington….etc

I*a*. *$a \oplus b$ is in the class whenever a and b are in the class.*

I*b*. *$a \odot b$ is in the class whenever a and b are in the class.*

II*a*. *There is an element $\wedge$ such that $a \oplus \wedge = a$ for every element a.*

II*b*. *There is an element $\vee$ such that $a \odot \vee = a$ for every element a.*

III*a*. *$a \oplus b = b \oplus a$ whenever a, b, $a \oplus b$, and $b \oplus a$ are in the class.*

III*b*. *$a \odot b = b \odot a$ whenever a, b, $a \odot b$, and $b \odot a$ are in the class.*

IV*a*. *$a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c)$ whenever a, b, c, $a \oplus b$, $a \oplus c$, $b \odot c$, $a \oplus (b \odot c)$, and $(a \oplus b) \odot (a \oplus c)$ are in the class.*

IV*b*. *$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ whenever a, b, c, $a \odot b$, $a \odot c$, $b \oplus c$, $a \odot (b \oplus c)$ and $(a \odot b) \oplus (a \odot c)$ are in the class.*

V. *If the elements $\wedge$ and $\vee$ in postulates* **II***a and* **II***b exist and are unique, then for every element a there is an element $\bar{a}$ such that $a \oplus \bar{a} = \vee$ and $a \odot \bar{a} = \wedge$.*

VI. *There are at least two elements, x and y, in the class such that $x \neq y$.*

II Une RELATION d'ORDRE

Peirce 1880 *On the Algebra of Logic*

Définitions des opérations + et × à partir d'une relation d'ordre -< ("copule")

If a -< x and b -< x,
then a + b-< x ;
and conversely,
if a+b -< x,
then a < x and b -< x .

If x -< a and x -< b, (2)
then x < a × b;
and conversely,
if x -< a × b, (3)
then x-<a and x -< b.

Dérivations des propriétés des opérations; par exemple

D. (a + b) + c = a + (b + c) a × (b × c) = (a × b) × c (Boole, Jevons). (7)

These are cases of the associative principle

E. (a+b) × c = (a × c) + (b × c) (a × b) + c = (a+c) × (b+c) (8)

These are cases of the distributive principle. They are easily proved by (4) and (2), but the proof is too tedious to give.

Correction en 1885(p.190) My friend, Professor Schröder, detected the mistake and showed that the distributive formulas (a + y) z -< xz + yz (x+z)(y+z) -< xy+z could not be deduced from syllogistic principles (il faut en plus la complémentation unique).

Huntington 1904 *Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic*

§ 1. The First Set of Postulates.

"[For this postulate-set] we take as the fundamental concepts a class K with two [binary K-] rules of combination $\oplus$ and $\odot$; and as the fundamental propositions the following ten postulates:

I*a*. $a \oplus b$ is in the class whenever a and b are in the class.

I*b*. $a \odot b$ is in the class whenever a and b are in the class.

II*a*. There is an element† z such that $a \oplus z = a$ for every element a.

II*b*. There is an element† u such that $a \odot u = a$ for every element a.

III*a*. $a \oplus b = b \oplus a$ whenever a, b, $a \oplus b$, and $b \oplus a$ are in the class.

III*b*. $a \odot b = b \odot a$ whenever a, b, $a \odot b$, and $b \odot a$ are in the class.

IV*a*. $a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c)$ whenever $a, b, c, a \oplus b, a \oplus c,$ $b \odot c, a \oplus (b \odot c)$, and $(a \oplus b) \odot (a \oplus c)$ are in the class.

IV*b*. $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ whenever $a, b, c, a \odot b, a \odot c,$ $b \oplus c, a \odot (b \oplus c)$, and $(a \odot b) \oplus (a \odot c)$ are in the class.

V. If the elements z and u in postulates II*a* and II*b* exist and are unique, then for every element a there is an element $\bar{a}$ such that $a \oplus \bar{a} = u$ and $a \odot \bar{a} = z$.

VI. There are at least two elements, x and y, in the class such that $x \neq y$."‡

§ 2. The Second Set of Postulates.

In § 2 we take as the fundamental concepts a class, K, with a dyadic relation, $\olessthan$; and as the fundamental propositions, the following ten postulates. (Note that $a \olessthan b$ and $b \ogreaterthan a$ mean the same thing.)

1. *$a \olessthan a$ whenever a belongs to the class.*
2. *If $a \olessthan b$ and also $a \ogreaterthan b$, then $a = b$.*
3. *If $a \olessthan b$ and $b \olessthan c$, then $a \olessthan c$.*
4. *There is an element $\wedge$ such that $\wedge \olessthan a$ for every element $a \neq \wedge$.*
5. *There is an element $\vee$ such that $\vee \ogreaterthan a$ for every element $a \neq \vee$.*
6. *If $a \neq b$, and neither $a \olessthan b$ nor $a \ogreaterthan b$, there is an element s such that*

   1°) *$s \ogreaterthan a$;* 2°) *$s \ogreaterthan b$;* *and*

   3°) *if y, $\neq s$, is such that $y \ogreaterthan a$ and $y \ogreaterthan b$, then $y \ogreaterthan s$.*
7. *If $a \neq b$, and neither $a \olessthan b$ nor $a \ogreaterthan b$, there is an element p such that*

   1°) *$p \olessthan a$;* 2°) *$p \olessthan b$;* *and*

   3°) *if x, $\neq p$, is such that $x \olessthan a$ and $x \olessthan b$, then $x \olessthan p$.*
8. *If the elements $\wedge$ and $\vee$ in 4 and 5 exist and are unique, then for every element a there is an element $\bar{a}$ such that*

   1°) *if $x \olessthan a$ and $x \olessthan \bar{a}$, then $x = \wedge$;* *and*

   2°) *if $y \ogreaterthan a$ and $y \ogreaterthan \bar{a}$, then $y = \vee$.*
9. *If postulates 1, 4, 5, and 8 hold, and if $a \olessthan \bar{b}$ is false, then there is an element $x \neq \wedge$ such that $x \olessthan a$ and $x \olessthan b$.*

La preuve de la distrbutivite lorsqu'on part du système ordinal est due à Peirce en 1880:. (footnote page 301_302.)

* This demonstration is borrowed, almost verbatim, from a letter of Mr. C. S. PEIRCE's, dated December 24, 1903. Mr. PEIRCE uses the symbol $\prec$ where I have used $\otimes$, and in a slightly different sense; so that he is enabled to state that the principle here called postulate 9 "follows from the definition of $\overline{P_i \prec C_i}$ on page 18" of his article of 1880. The demonstration was originally worked out for that article (American Journal of Mathematics, vol. 3 (1880), p. 33), but is now published for the first time (compare *ibid.*, vol. 7, p. 190, footnote, 1885 [wrongly cited as 1884 in SCHRÖDER's bibliography], and SCHRÖDER, *loc. cit.*, p. 291).

Under the date February 14, 1904, Mr. PEIRCE writes as follows:

"Dear Mr. HUNTINGTON: Should you decide to print the proof of the distributive principle (and this would not only relieve me from a long procrastinated duty, but would have a certain value for exact logic, as removing the eclipse under which the method of developing the subject followed in my paper in vol. 3 of the American Journal of Mathematics has been obscured) I should feel that it was incumbent upon me, in decency, to explain its having been so long withheld. The truth is that the paper aforesaid was written during leisure hours gained to me by

---

my being shut up with a severe influenza. In writing it, I omitted the proof, as there said, becouse it was 'too tedious' and because it seemed to me very obvious. Nevertheless, when Dr. SCHRÖDER questioned its possibility, I found myself unable to reproduce it, and so concluded that it was to be added to the list of blunders, due to the grippe, with which that paper abounds, —a conclusion that was strengthened when SCHRÖDER thought he demonstrated the indemonstrability of the law of distributiveness. (I must confess that I never carefully examined his proof, having my table loaded with logical books for the perusal of which life was not long enough.) It was not until many years afterwards that, looking over my papers of 1880 for a different purpose, I stumbled upon this proof written out in full for the press, though it was eventually cut out, and, at first, I was inclined to think that it employed the principle that *all* existence is individual, which my method, in the paper in question, did not permit me to employ at that stage. I venture to opine that it fully vindicates my characterization of it as 'tedious.' But this is how I have a new apology to make to exact logicians."

Richard DEDEKIND et LES "DUALGRUPPE"

1897 Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsammen Teiler

Festschrift Hoch. Braunschweig, In Gesammelte Werke, Bd. 1. pp. 103-148..

1900 Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Mathematische Annalen*, 53, 371-403.

Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe.

Von

R. Dedekind in Braunschweig.

In der vierten Auflage von Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie (die im Folgenden mit D. citirt werden soll) habe ich gelegentlich (in den Anmerkungen auf S. 499, 510, 556) die Dualgruppe erwähnt, die aus drei beliebigen Moduln durch fortgesetzte Bildung der gemeinsamen grössten Theiler und kleinsten Vielfachen erzeugt wird und im Allgemeinen aus 28 verschiedenen Moduln besteht. Da die Gesetze dieser Gruppe sich auf ganz andere Gebiete übertragen lassen und oft eine nützliche Hülfe gewähren, so sollen dieselben im Folgenden dargestellt werden; daran schliessen sich verschiedene Untersuchungen über allgemeinere Dualgruppen.*)

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften der Dualgruppen.

Bezeichnet man (wie in D. § 169) mit $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ den grössten gemeinsamen Theiler (oder die Summe), mit $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ das kleinste gemeinsame Vielfache (oder den Durchschnitt) der beiden *Moduln* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so gilt für jede einzelne dieser beiden Operationen $\pm$ zunächst das *commutative und associative* Gesetz

(1) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}-\mathfrak{b}=\mathfrak{b}-\mathfrak{a},$

(2) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}), \quad (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})-\mathfrak{c}=\mathfrak{a}-(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$

mit den bekannten Folgerungen, die sich auf eine beliebige endliche Anzahl von Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \cdots$ beziehen (D. § 2).

Die beiden Operationen $\pm$ sind ferner durch die beiden Gesetze

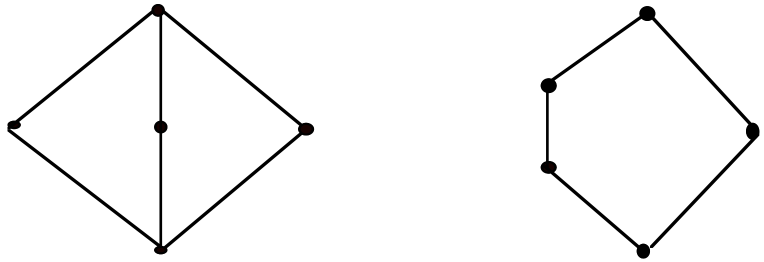
(3) $\mathfrak{a}+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})=\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\mathfrak{a}$

*) Vergl. § 4 meines Aufsatzes Ueber Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Theiler in der Festschrift unserer Technischen Hochschule für die Naturforscher-Versammlung 1897.

(4) $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}-\mathfrak{a}=\mathfrak{a};$

Travaux sur les nombres algébriques et leurs factorisations (notions de module, d'idéal)

1897 dualgruppe = treillis
idealgruppe = treillis distributif (équivalence des 2 distributivités)
modulgruppe = treillis modulaire



Schröder 1890

a < b si a+b = a ou a-b = b

1900 "Dans la quatrième édition de Leçons sur la théorie des nombres de Dirichlet, j'ai eu l'occasion de mentionner le "dualgruppe" qui est obtenu à partir de trois modules quelconques par la formation du "pgcd" et du "ppcm" et qui consiste en général de 28 éléments différents. Etant donné que les lois de ce groupe peuvent être utilisées dans d'autre domaines et qu'elles fournissent souvent une aide tout à fait utile, elles seront présentées ci-dessous. Par la suite, viendront différentes études de "dualgruppe" plus généraux."

Tabelle der grössten gemeinsamen Theiler (+) und der
von 28 Moduln, welche durch drei

	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
$\mathfrak{d}''''$		$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$
$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$		$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{c}''$		$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{a}''$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{d}''''$
$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{d}'$		$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$		$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}''$
$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{d}'$		$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}''$
$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{d}_1$		$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$		$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{c}'$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$		$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{b}'''$
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_3$		$\mathfrak{a}'''$
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$	
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$_2$
$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{b}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_1$
$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_3$
$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{c}_1$
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_3$
$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{b}_3$
$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_4$
$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{d}_4$
—	$\mathfrak{d}''''$	$\mathfrak{a}'''$	$\mathfrak{b}'''$	$\mathfrak{c}'''$	$\mathfrak{a}''$	$\mathfrak{b}''$	$\mathfrak{c}''$	$\mathfrak{d}'$	$\mathfrak{a}'$	$\mathfrak{b}'$	$\mathfrak{c}'$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$

TREILLIS: la RENAISSANCE

(T. SKOLEM, 1913, **Om Konstitutionen av den identiske Kalkuls grupper**, Congrès scandinave de mathématiques)

K. MENGER

1928 **Bemerkungen zu Grundlagenfragen. IV. Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen**, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 37, 1928, 309-325.

F. KLEIN-BARMEN

1929 **Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik**,. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 38 / 1929, 35-40.

1931 **Zur Theorie der abstrakten Verknupfungen**, *Mathematische Annalen*,105, 1931, 308-323.

1932 **Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknupfungen**, *Mathematische Annalen*,106, 1932, 114-130.

1933 **Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknupfungen**, *Mathematische Zeitschrift*, 37, 1933, 39-60

1935 **Beiträge zur Theorie der Verbände**, *Mathematische Zeitschrift*, 39,1935, 227-239.

M. H. STONE

1934 **Boolean Algebras and Their Application to Topology**, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 20,197-202.

1936 **The Theory of Representation for Boolean Algebras,** *Transactions of the American Mathematical Society*,40 (1), 37-111.

G. BIRKHOFF,

1933 **On the combination of subalgebras**, *Proc. Cambridge Philos. Soc* . 29 (1933) 441-464.

1934 **Applications of lattice algebra**, *Proc. Cambridge Philos. Soc* . 30 (1934),115-122.

On the lattice theory of ideals, *Bulletin of the Americal Mathematical Society*, 40 (1934), 613-619.

1935 **On the structure of abstract algebras**, *Proc. Cambridge Philos. Soc* . 31 (1935),433-454.

1936 **On the combination of topologies**, *Fundamena Mathematicae*. 26, 156-166

G. BIRKHOFF et J. von NEUMANN

1936 **The logic of quantum mechanics,** *Annals of Mathematics* 37 (4), 406-437, 37, 823-843.

A.G. KUROSH

1935 **Durchschnittsdarstellungen mit irreduziblen Komponenten in Ringen und in sogenannten Dualgruppen,** Mat. Sbornik 42, 613–616.

O. ÖRE

1935-36 **On the foundations of abstract algebras**, *Annals of Mathematics* 36, 406-437, 37, 265-292. .

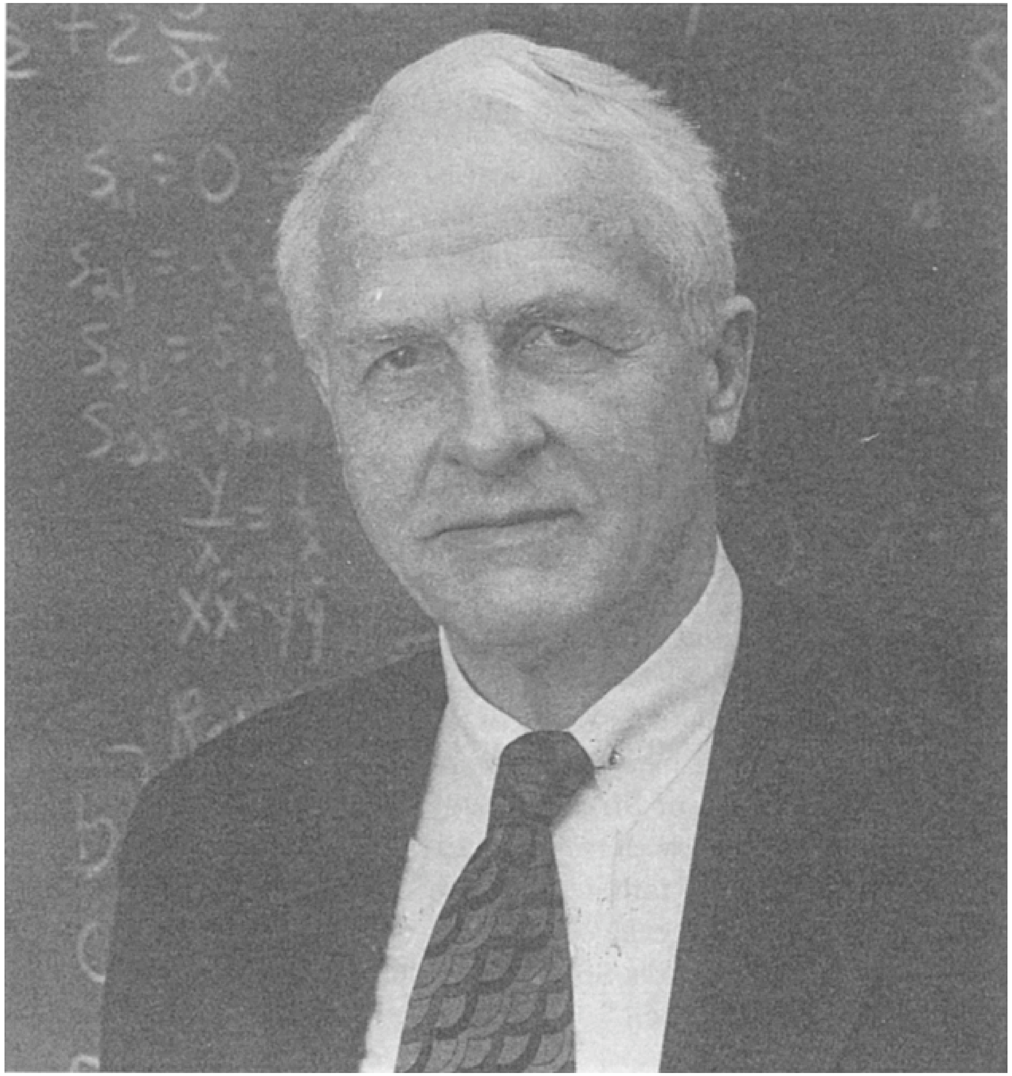
V. GLIVENKO

1936 **Géométrie Des Systèmes De Choses Normées**, *American Journal of Mathematics*, 58(.4) 799-828

T. SKOLEM

1936 **Über gewisse "Verbande" oder "lattices"**, *Avhandlinger utgitt av det Norske Videnskaps-Akademie i Oslo*,1 (Mat.naturw. Klasse, 7)1-16.

Garett Birkhoff 1913-1996



Le "SYMPOSIUM on LATTICE THEORY" 1938

Lattices and their applications
Garrett Birkhoff
On the application of structure theory to groups
Oystein Ore
The representation of Boolean algebras
M. H. Stone
The applicability of lattice theory to group theory
Reinhold Baer
Non-Euclidean geometry of joining and intersecting
Karl Menger
The application of lattice theory to integration
H. M. MacNeille

Les PREMIERS LIVRES

1938 V. GLIVENKO, **Théorie générale des structures**, Hermann, Paris.
1940 G. BIRKHOF, **Lattice Theory**, American Mathematical Society, Providence

TREILLIS la RENAISSANCE, POURQUOI ?

GLIVENKO 1938:

"Les recherches récentes ont mis en lumière un fait remarquable, à savoir que, dans diverses branches de Mathématiques, on rencontre les mêmes relations simples et fondamentales entre les objets dont on s'y occupe. On les rencontre, par exemple, dans la Théorie des ensembles, dans la Théorie des groupes, dans la Théorie des nombres, dans la Géométrie projective, dans la Topologie, dans la Théorie des probabilités, dans la Logique mathématique, dans la Mécanique quantique, etc. Il s'agit de la relation du tout et de sa partie, ou d'autres relations possédant les mêmes propriétés formelles que celle-ci. Nous savons maintenant que ce sont précisément ces relations qui forment la base des propriétés les plus élémentaires et les plus profondes des disciplines ci-dessus mentionnées. Et certaines différences, de prime d'abord presque insensibles dans la réalisation de ces relations, donnent naissance aux spécificités plus claires de diverses disciplines."

(Dedekind: Dualgruppe ; Menger : Systeme von Dingen ; Birkhoff : lattice ; Öre : structure)

Poincaré, Sciences et Méthodes, 1908

"La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Il convient que ces choses différentes soient semblables, qu'elles puissent se couler dans le même moule"

THÉORIES des TREILLIS, des ENSEMBLES ORDONNÉS

DÉVELOPPEMENTS

Algebra Universalis 1970

Birkhäuser Basel

Order 1984

A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications

Springer Netherlands

Classes d'ordres et de treillis

ORDRES

TOTAUX,
FORTS,
QUASI-FORTS,
D'INTERVALLES,
A SEUILS,
PLANAIRES,
de DIMENSION 2,
BIPARTIS,
SÉRIES-PARALLÈLES,
QUASI-SÉRIES-PARALLÈLES,
SEMI-MODULAIRES (inférieurement, supérieurement),
RANGÉS,
de SPERNER,
etc, etc.

TREILLIS

BORNÉS (inférieurement, supérieurement), ,
DÉMANTELABLES,
RANGÉS,
ATOMISTIQUES (COATOMISTIQUES)
GÉOMÉTRIQUES,
MODULAIRES,
ORTHOMODULAIRES,
DISTRIBUTIFS,
SEMI-DISTRIBUTIFS (inférieurement, supérieurement),
LOCALEMENT DISTRIBUTIFS**,**
COMPLÉMENTÉS,
ORTHOCOMPLÉMENTÉS,
PSEUDOCOMPLÉMENTÉS,
BROUWERIENS,
de STONE,
de POST,
BOOLÉENS,
etc, etc.

chacune a quelquechose pour plaire..., mais

LIVRES THÉORIE des TREILLIS

C. Abott (1970), *Trends in lattice theory*, Van Nostrand Reinhold Company, NewYork.

M. Aigner (1979), *Combinatorial theory*, Springer-Verlag, Berlin.

M. Barbut, B. Monjardet (1970), *Ordre et Classification, Algèbre et Combinatoire*, tomes I et II, Hachette, Paris.

G. Birkhoff (1940, 1948, 1967), *Lattice Theory* (3 eds.), Amer. Math.Soc.,Providence.

R. Balbes et Ph. Dwinger (1974), *Distributive lattices,*University Missouri Press, Columbia, Missouri.

Ben Silver (ed. 1985, 1989) *Ordered sets and lattices*, AMS Transl., AMS, Providence.

T.S. Blyth et M.F. Janowitz (1972), *Residuation theory*, Pergamon Press, Oxford.

K.P. Bogart, R. Freese et J. Kung (eds; 1990) *The Dilworth theorems Selected papers of Robert P. Dilworth* Birkhäuser, Boston, 192-201).

G. Boole (1854), *An investigation of the laws of thought*,

M. Carvallo (1966), *Monographie des treillis et algèbre de Boole*, Gauthier-Villars, Paris.

H. Crapo, G.C. Rota (1970), *On the foundations of combinatorial theory II: combinatorial geometries*, MIT Press, Cambridge, Mass.

P. Crawley et R.P. Dilworth (1973), *Algebraic theory of lattices*, MIT Press, Cambridge, Mass.

B.A. Davey, H.A. Priestley (1990), *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press, Cambridge (U.K.).

T. Donellan (1968), *Lattice theory*, Pergamon Press, Oxford.

M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot (1953), *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques et des treillis géomètriques*, Gauthier-Villars, Paris.

R. Faure, E. Heurgon (1971), *Structures ordonnées et algèbre de Boole*, Gauthier-Villars, Paris.

R. Freese, K. Jezek and J.B. Nation (1995), *Free lattices*, American Mathematical Society, Providence.

B. Ganter et R. Wille (1991), *Formale begriffanalyse*, Birkhauser Verlag.

H. Gericke (1963), *Theorie der Verbande*, BI Mannheim. (1966), *Lattice theory*, Frederic Ungar Publ., New York.

V. Glivenko, (1938), *Théorie générale des structures* Hermann, Paris (Exposés d'analyse générale IX)**.**

G. Grätzer (1978), *Lattice theory. First concepts and distributive lattices*, W.H. Freeman and co, San Francisco.

G. Grätzer (1978), *General lattice theory*, Springer-Verlag, Berlin.

G. Grätzer (1998), *General lattice theory*, Springer-Verlag, Berlin, (New appendices with B.A. Davey, R. FreeseB. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H.A. Priestley, H. Rose, E.T. Schmidt, S.E.Schmidt, F. Wehrung, R. Wille).

P. Halmos (1963), *Lectures on Boolean algebras*, Van Nostrand.

H. Hermes (1967, 1973), *Einführung in die verbandestheorie*, Springer-Verlag, Berlin (BI Mannheim).
G. Kalmbach (1983), *Orthomodular lattices*, Academic Press, London.
J. Kuntzmann (1965), *Algèbre de Boole*, Dunod, Paris.F. Maeda (1958), *Kontinuierliche Geometrien*, Springer-Verlag,Berlin.
F. Maeda et S. Maeda (1970), *Theory of symmetric lattices*, Springer-Verlag,Berlin.
S. Maeda (1980), *Lattice theory and quantum logic* (en japonnais) Makishoten, Tokio.
H. Mehrtens (1979), *Die entstehung der verbandestheorie*, Gerstenberg Verlag, Hildesheim.
J. Morgado (1962), *Introducao a teoria des reculados,* Recife.
Neggers, J.; Kim, H. S., (1998) Basic Posets, World Scientific Publishing Co Pte Ltd ISBN: 9810235895, 188 pages
S. Reeg et W. Weis (1990), *Properties of finite lattices*, Darmstadt.
G.C. Rota et J.S. Oliveira (eds. 1987), *Selected papers on algebra and topology by Garett Birkhoff*,Birkhauser Verlag, Boston/Basel/Stuttgart.
D.E. Rutherford, *Introduction to lattice theory*, Oliver and Boyd, Edinburgh.
V. N. Salii (1988), *Lattices with unique complements*, American Mathematical Society, Providence, R.I.
B.S.W. Schröder (2002) *Ordered sets. An introduction*, Bikhäuser, Boston
.R. Sikorski (1964 2d edition), *Boolean algebras*, Academic Press, New York.
L.A. Skornjakov (1961, 1964), *Treillis modulaires complémentés et anneaux réguliers* (en russe), Moscow,.*Complemented modular lattices and regular rings*, Oliver and Boyd, Edinburgh
L.A. Skornjakov (1973, 1977), *Elemente die verbandestheorie*, Akademie Verlag, Berlin. *Elements of lattice theory*, Hindustan Pub. Corporation Printing Press, Dehli.
M. Stern (1991), *Semimodular lattices*,Teubner, Leipzig.
M.Stern (1999), Semimodular lattices, *Encyclopedia of mathematics,* Cambridge University Press.
M. Suzuki (1956), *Structure of a group and structure of the lattice of subgroups*, Springer-Verlag,Berlin.
G. Szasz (1959, 1962, 1963, 1971) *Introduction à la théorie des treillis,*(hongrois) ; *Einführung in die verbandestheorie*, BG Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig ; *Introduction to lattice theory,* Academic Press, London ; ***Introduction à la théorie des treillis,*** Dunod, Paris.
A. Vladimirov (1969, 1978), *Boolean algebra* (en russe) *; Boolesche algebren*, Akademie Verlag, Berlin.
J. von Neumann (1960), *Continuous geometries*, Princeton University Press.

LIVRES THÉORIE des ENSEMBLES ORDONNÉS

P.C. Fishburn 1985, *Interval orders and interval graphs. A study of partially ordered sets*, Wiley, New York.

W.T. Trotter 1992, *Combinatorics and partially orderd sets : dimension theory*, The Jonh Hopkins University Press, Baltimore.

M. Pirlot, Ph. Vincke 1997, *Semiorders. Properties, Representations, Applications*, Kluwer, Dordrecht

Bourbaki, N. 1956, *Eléments de mathématique*. Livre 1, *Théorie des ensembles*. Chapitre 3, *Ensembles ordonnés* ; Cardinaux, nombres entiers, Paris, Hermann, (Actualités scientifiques et industrielles. 1243)

B.S.W. Schröder 2002, *Ordered sets. An introduction*, Bikhäuser, Boston.

E.Harzheim 2005, *Ordered sets*, Series Advances in Mathematics, 7, Springer , New-York

N. Caspard, B. Leclerc et B. Monjardet 2007, *Ensembles ordonnés finis: concepts, résultats, usages*, Springer-Verlag.

QUELQUES USAGES

Mathématiques (fermetures)
Statistique d'ordres, comparaisons par paires
Analyse et fouille des données, Classification, Sériation (phylogénie..)
Informatique: tris, hiérarchie de types, base de données,…
Intelligence artificielle : représentation et acquisition des connaissances, analyse implicative (treillis de Galois de concepts) analyse implicative…
Morphologie mathématique (traitement d'images)
Réseaux sociaux, hiérarchies..
Recherche opérationelle
Modélisation et agrégation des préférences et choix
Ordonnancements
……

ORDRES D'INTERVALLES APPARITIONS, DISPARITIONS, RÉAPPARITIONS

L'histoire commence à Cambridge...

1914, Bertrand Russel et Norbert Wiener :
comment obtenir la notion d'instant de temps (ou de point sur une droite) à partir de la notion de période de temps (ou d'intervalle sur une droite) ?

(P.C. Fishburn and B. Monjardet, 1992, Norbert Wiener on the theory of measurement, 1914, 1915, 1921, *J. Math. Psychology*, **36**)

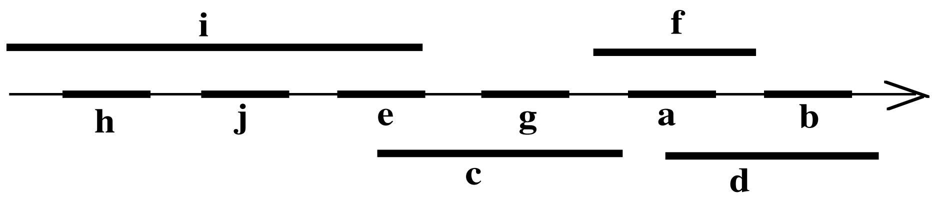
ordre d’intervalles, graphe d’intervalles, hypergraphe d’intervalles

théorie de la probabilité subjective (Halphen 1955),
génétique (Benzer 1959, Lekkerker et Boland 1962)
théorie de l'estimation statistique (Wine et Freund 1957)
théorie de l'extrapolation (Fine 1970),
psychophysique et théorie de la discrimination (Goodman 1951, Galanter 1956),

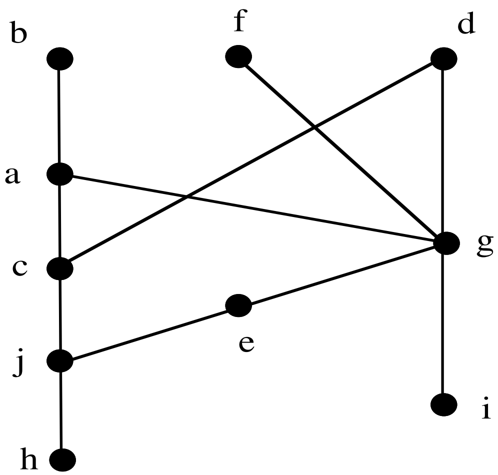
théorie de l'utilité (Luce 1956, Fishburn 1970),
théorie de la consistance probabiliste (Luce 1958)
décision multicritère (Roy, Jacquet-Lagrèze 1974),
sériation (Kendall, 1969)
ordonnancement (Radermacher 1978, Papadimitriou 1979)
classification (hiérarchies, pyramides, 1950-1980)
stockage de l'information (Eswaran 1975)
codages de relations (Bouchet, 1971)
combinatoire (Hajos 1957, Sharp, 1971, Rogers 1976)
topologie (espaces de proximité ordonnables)
logique temporelle
etc. sans oublier
littérature policière (Berge)

ORDRES D'INTERVALLES

FAMILLE D'INTERVALLES



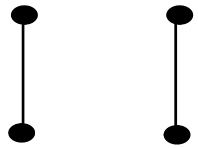
$$\boxed{I = [s,t] < J = [u,v] \text{ si } t < u}$$



Un ordre d'intervalles est un ordre *représentable* par l'ordre d'une famille d'intervalles

QUELQUES CARACTÉRISATIONS

ordre strict sans



irréflexivité + *tableau en escalier*

	h	i	j	e	c	g	f	d	a	b
h			1	1	1	1	1	1	1	1
j				1	1	1	1	1	1	1
i						1	1	1	1	1
e						1	1	1	1	1
g							1	1	1	1
c								1	1	1
a										1
f										
d										
b										

CARACTÉRISATION NUMÉRIQUE
(MODÈLE LINÉAIRE LATENT)

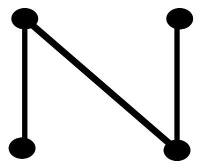
Une relation R est un ordre d'intervalles s'il existe deux fonctions numériques

$$u: X \to \mathcal{R}^+ \text{ et } s : X \to \mathcal{R}^+ \text{ telles que}$$

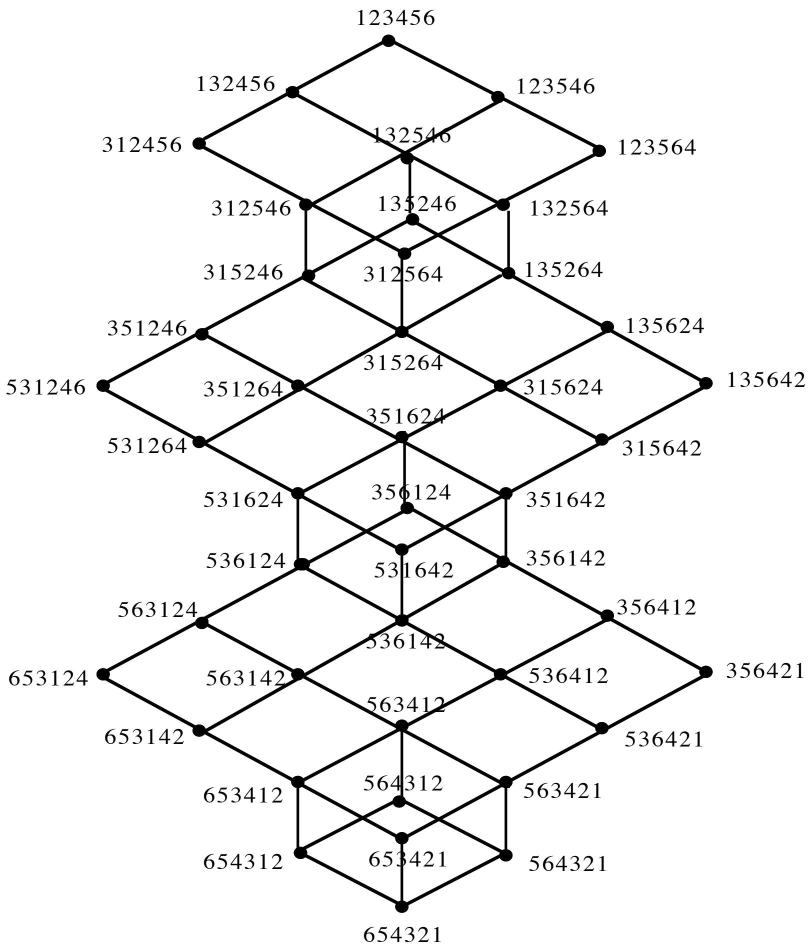
$$\mathbf{[x\ R\ y] \Leftrightarrow [u(x) + s(x) < u(y)]}$$

L'objet y est préféré à l'objet x seulement si son "utilité" dépasse celle de x augmentée d'un "seuil". Mais l'indifférence n'est plus transitive.

N.B. L'ordre réflexif correspondant n'a pas ces caractérisations



L’EFFET CONDORCET et les TREILLIS DISTRIBUTIFS



45/720