

L'équation du troisième degré

H. Languereau, 15 novembre 2017

IREM de Franche-Comté

15 novembre 2017



L'équation $ax = b$ d'inconnue réelle x et de coefficients a et b réels, admet :

- l'unique solution $\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$;
- aucune solution si $a = 0$ et $b \neq 0$;
- une infinité de solutions si $a = b = 0$.



institut de recherche en éducation des mathématiques
Université de Sherbrooke

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue réelle x et de coefficients a, b, c a pour solutions réelles :

- $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$;
- $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- aucune solution réelle si $\Delta < 0$.



Remarques :

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$;

- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.



INSTITUT DE RECHERCHE EN ÉDUCATION DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE QUÉBEC

Résolution de l'équation du second degré par Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi (780-850) fait une étude systématique des équations du second degré : « un carré égal à des racines » ; « un carré égal à des nombres » ; « un carré égal à des racines plus des nombres » ; « un carré plus des racines égal à un nombre » ; « un carré plus des nombre égaux à des racines »



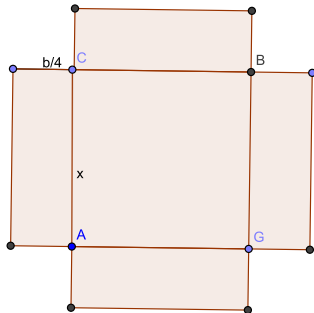
Dans son traité, Al-Khwarizmi propose des exemples de résolution.
Par exemple : un carré plus dix racines sont égaux à 39 dirhams.



Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; il vient, dans ce problème cinq, que tu multiplies par lui-même ; on a vingt-cinq ; tu l'ajoute à trente-neuf, on aura soixante-quatre ; tu prends la racine, qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois qui est la racine du carré que tu veux, et le carré est neuf.



institut de recherche en éducation et génie mathématique
Université de Sherbrooke



institut de recherche en éducation des mathématiques
Université de Sherbrooke

Soit AB un carré d'aire x^2 . Sur chacun des quatre côtés, on construit un rectangle d'aire $\frac{b}{4}x$; il s'agit des rectangles H, K, I, C dont la somme est bx .

On a ainsi l'aire du carré plus la somme des aires des rectangles égaux à c . L'aire de chacun de ces quatre carrés est $(\frac{b}{4})^2$. On a ainsi formé un carré dont l'aire est $x^2 + bx + 4(\frac{b}{4})^2 = c + 4(\frac{b}{4})^2$.

Ainsi $(x + \frac{b}{2})^2 = c + 4(\frac{b}{4})^2$ soit $x = \sqrt{c + 4(\frac{b}{4})^2} - \frac{b}{2}$. La construction géométrique est en fait une démonstration; seule la solution positive de l'équation a du sens.



PROPOSITION II.

Soit proposé $Ac + BAq$ estre egal à ZpA ; je dis par hypobibasme divisant tant la puissance que degrez parôdiques par le moindre degré A , $Aq + BA$ estre egal à Zp .

En notations modernes $A^3 + BA^2 = Z^2A \Leftrightarrow A^2 + BA = Z^2$.



institut de recherche en éducation des mathématiques
Université de la Nouvelle-Géorgie

En 1545, Cardan (1501-1576) résout l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Nous réécrivons son raisonnement en termes modernes. Résoudre $x^3 + q = px$ revient à résoudre $x^3 + px - q = 0$.

L'équation $x^3 + px + q = 0$ d'inconnue x est équivalente au système de deux équations à trois inconnues x, u, v

$$\begin{cases} x = u + v \\ 0 = u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q \end{cases}$$



institut de recherche en informatique et mathématiques
Université de Montréal

Cardan utilise cette remarque et choisit judicieusement u et v , à savoir tels que $3uv + p = 0$.

Il doit alors résoudre :

$$\begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases}$$



On connaît alors $u^3 + v^3$ et $u^3 v^3$.

Il ne reste à Cardan que résoudre l'équation du second degré dont u^3 et v^3 sont solutions puis extraire les racines cubiques.

Si $4p^3 + 27q^2 > 0$ Cardan a une solution réelle. Si non, il n'a pas de solution.

Effectuons les calculs que Cardan aurait pu faire s'il avait eu nos notations.



Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che'llor prodotto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.



Quand le cube et les choses
Se trouvent égaux au nombre
Trouves-en deux autres qui diffèrent de celui ci.
Ensuite comme il est habituel
Que leur produit soit égal
Au cube du tiers de la chose.
Puis dans le résultat général,
De leurs racines cubiques bien soustraites,
Tu obtiendras ta chose principale.



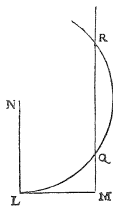
Raffaele Bombelli(1526-1572) applique les résultats de Cardan à l'équation $x^3 = 15x + 4$. La formule de Cardan donne $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ soit une absurdité alors que 4 est une solution évidente.

Bombelli cherche ce que pourrait être une racine cubique de $2 + \sqrt{-121}$. En langage moderne, il cherche à résoudre l'équation $(a + ib)^3 = 2 + 11i$. Il trouve que $2 + i$ est solution en introduisant "piu", "meno", "piu di meno" et "meno di meno" avec des règles de multiplication.



Bombelli écrit « R.c.2 p. di m. 11 »

Comme nous l'avons déjà vu, l'absence de notation algébrique commode est un handicap. C'est René Descartes (1596-1650) qui introduit les notations que nous utilisons encore.



Enfin si i'ay

$$z^2 \propto a z - b b:$$

ie fais NL esgale à $\frac{1}{2} a$, & LM esgale à b côme deuât, puis, au lieu de ioindre les points M & N , ie tire MQR parallele a LN , & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la coupe aux points Q & R , la ligne cherchée z est MQ oubiè MR , car en ce cas elle s'ex-

prime en deux façons, a sçauoir $z \propto \frac{1}{2} a \mp \sqrt{\frac{1}{4} a a - b b}$, & $z \propto \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a a - b b}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N , passe par le point L , ne coupe ny ne touche la ligne droite MQR , il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du probleme proposé est impossible.



L'idée que tout polynôme de degré n ait exactement n racines est énoncé dès 1629. C'est D'Alembert (1717-1783) qui en tente la première démonstration et c'est Gauss (1777-1855) qui effectue cette première démonstration sans erreur.



institut de recherche en informatique et mathématiques
Université de Montréal

Evariste Galois (1811-1832) démontre que l'équation de degré cinq



n'est pas résoluble par radicaux.



INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE QUÉBEC À MONTRÉAL

Résoudre l'équation $x^3 = 15x + 4$ en remarquant que 4 est une solution évidente.



institut de recherche en éducation des mathématiques
Université de la Côte d'Ivoire

L'équation à une inconnue de degré trois est un problème résolu.
Les solutions des équations diophantiennes de degré 3 sont encore
actuellement l'objet de recherche.

Par exemple, on ne sait pas si l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ a des
solutions entières ou si elle n'en a pas.



institut de recherche en informatique et mathématiques
UNIVERSITÉ DE QUÉBEC

Merci de votre attention

Des questions ?



C'est l'heure du goûter !



INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE QUÉBEC À MONTRÉAL