∽ Brevet de technicien supérieur ∾
juin 2012 - Corrigé groupement B1 Métropole.

Exercice 1 **12 points**

A.

1. $a(x) = 1$ et $b(x) = 2$, d'où $-\frac{b(x)}{a(x)} = -2$ qui a pour primitive $G(x) = -2x$ et donc la solution y_{HOM} est égale à Ce^{-2x} (avec $C \in \mathbb{R}$)
2. On a $g'(x) = -5e^{-2x} + (-5x) \times (-2)e^{x} = (10x-5)e^{-2x}$; en remplaçant y et y' par $g(x)$ et $g'(x)$ respectivement dans (E), on obtient :
$y' + 2y = g'(x) + 2g(x) = (10x-5)e^{-2x} + 2(-5x)e^{-2x} = (10x-5-10x)e^{-2x} = -5e^{-2x}$, donc g est bien une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. Les solutions de (E) sont : $y = f(x) = y_{HOM} + g(x) = Ce^{-2x} - 5xe^{-2x} = (C-5x)e^{-2x}$ $(C \in \mathbb{R})$.
4. La condition initiale s'écrit $(C - 5 \times 0)e^{-2\times 0} = 1$, donc $C = 1$ et la solution recherchée est $y = f(x) = (1-5x)e^{-2x}$.

B

1. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x)e^{-2x} = 0$.et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, car cette limite est équivalente à la limite de référence $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{x} = +\infty$ qui vaut 0 ; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   b. La courbe C admet un asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

Réponse A	**Réponse B**	Réponse C
$y = 1-5x$	$\boldsymbol{y = 0}$	$x = 0$

2. **a.** On sait que $e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$, on en déduit que le DL de e^{-2x} à l'ordre 2 au voisinage de 0 est : $e^{-2x} = 1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = 1-2x+2x^2+x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
   b. Il suffit de développer en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 2 :
   $f(x) = (1-5x)(1-2x+2x^2+x^2\varepsilon(x)) = 1-5x-2x+10x^2+2x^2+x^2\varepsilon(x) = 1-7x+12x^2+x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
   c. Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est : $y = 1 - 7\,x$.
   d. La position de la tangente au-dessus de la courbe est due au fait que $12x^2$ est positif au voisinage de 0.

C. *Calcul intégral*

1. **a.** On pose $\begin{cases} u' = e^{-2x} & u = -0,5e^{-2x} \\ v = 1-5x & v' = -5 \end{cases}$. On a alors :
   $I = \left[-0,5(1-5x)e^{-2x}\right]_1^2 - \int_1^2 2,5e^{-2x}\,\mathrm{d}\,x = \left[-0,5(1-5x)e^{-2x}\right]_1^2 + \left[1,25e^{-2x}\right]_1^2$

$= -0,5(1-10)e^{-4} + 0,5(1-5)e^{-2} + 1,25e^{-4} - 1,25e^{-2}$
$= 4,5e^{-4} - 2e^{-2} + 1,25e^{-4} - 1,25e^{-2} = 5,75e^{-4} - 3,25e^{-2}$,

Si l'on écrit sous forme de fractions les nombres décimaux,on obtient bien le résultat demandé.

b. À la calculatrice, on obtient : I = – 0,33 (à 10^{-2} près)

c. f est négative dans l'intervalle [1 ; 2].

d. I correspond à l'aire (comptée négativement) du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives $(x = 1)$ et $(x = 2)$, exprimée en unités d'aire.

Exercice 2

A.

1. $p(350 \leqslant X \leqslant 370) = p\left(\frac{350-360}{18} \leqslant T \leqslant \frac{370-360}{18}\right)$
$= p(-0,56 \leqslant T \leqslant 0,56) = 2\pi(0,56) - 1 = 2 \times 0,7123 - 1 = 0,42$ (à 10^{-2} près)
2. $p(90 \leqslant Y \leqslant 110) = p\left(\frac{90-100}{5} \leqslant T \leqslant \frac{110-100}{5}\right)$
$= p(-2 \leqslant T \leqslant 2) = 2\pi(2) - 1 = 2 \times 0,9772 - 1 = 0,85$ (à 10^{-2} près)
3. Puisque X et Y sont indépendantes, la probabilité demandée est le produit des deux probabilités citées :
$$p(360 \leqslant X \leqslant 370) \times p(90 \leqslant Y \leqslant 110) = 0,42 \times 0,95 = 0,40 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près.)}$$

B.

1. L'expérience peut être considérée comme la répétition de 5 expériences identiques (les bottes de paille sont équivalentes) et indépendantes (prélèvement considéré avec remise) ; la probabilité de succès lors d'un tirage étant de 0,4, Z suit une loi binomiale B(5 ; 0,4).
2. $p(Z = 5) = \binom{5}{5} 0,4^5 \times 0,6^0 = 0,4^5 = 0,01$ (à 10^{-2} près).
3. $p(Z \geqslant 4) = p(Z = 4) + p(Z = 5) = 0,01 + 5 \times 0,4^4 \times 0,6^1 = 0,01 + 0,08 = 0,09$.

C.

1. On prend pour p la valeur $f_e = \frac{37}{50} = 0,74$ observée dans l'échantillon.
2. L'écart-type de F est théoriquement égal à $\sqrt{\frac{0,74(1-0,74)}{50}} = 0,062$.
On cherche t tel que : $p(-t \leqslant T \leqslant t) = 0,95$, ce qui revient à $2\pi(t) - 1 = 0,95$, ou $\pi(t) = 0,975$.
La valeur de t est trouvée dans la table de la loi normale : $t = 1,96$.
En l'exprimant avec F : $p\left(-1,96 \leqslant \frac{F-0,74}{0,062} \leqslant 1,96\right) = 0,95$
$$p\,(0,74 - 1,96 \times 0,062 \leqslant F \leqslant 0,74 + 1,96 \times 0,062) = 0,95$$
$$p\,(0,68 \leqslant F \leqslant 0,80) = 0,95$$

On a du tenir compte de la consigne d'arrondir à 10^{-2} près, l'intervalle de confiance trouvé est l'intervalle $[\,0,68\ ;\ 0,80]$