

---

# Olympiades 4<sup>e</sup>

## ■ Exercice 1. Nombres associés

---

Des nombres dont la somme et le produit donnent le même résultat sont dits associés. Par exemple, 1 ; 5 et  $\frac{3}{2}$  sont associés car  $1 + 5 + \frac{3}{2} = 1 \times 5 \times \frac{3}{2}$ .

**Q1 :** Cas particulier de deux nombres identiques :

- (a) Vérifier que les deux nombres 0 et 0 sont associés.
- (b) Trouver un autre exemple de deux nombres entiers identiques qui sont associés.

**Q2 :** Vérifier que  $\frac{5}{4}$  et 5 sont associés.

**Q3 :** Vérifier que les deux nombres décimaux 1,4 et 3,5 sont associés.

**Q4 :** Trouver le nombre associé à 3.

**Q5 :** Peut-il exister un nombre qui soit associé à 1 ?

**Q6 :** Soit  $x$  un nombre différent de 1. Exprimer en fonction de  $x$  le nombre  $y$  associé à  $x$ .

**Q7 :** Vérifier que les trois nombres entiers 1, 2 et 3 sont associés.

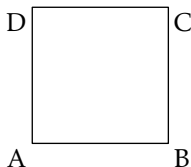
**Q8 :** Donner un exemple de quatre nombres associés, tous non nuls.

## ■ Exercice 2. Arbre de Pythagore

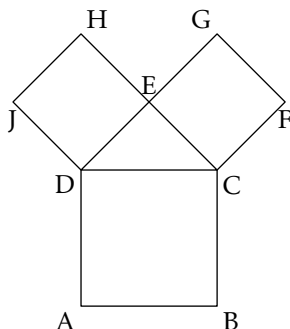
- On considère un carré  $ABCD$ .
- À l'extérieur de ce carré, on construit le triangle  $CDE$ , isocèle et rectangle en  $E$ . À l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés  $CFGE$  et  $DEHJ$ .
- On réalise deux constructions analogues à partir des carrés  $CFGE$  et  $DEHJ$ , sans chevauchement.

Voici ci-dessous les trois premières étapes de la construction.

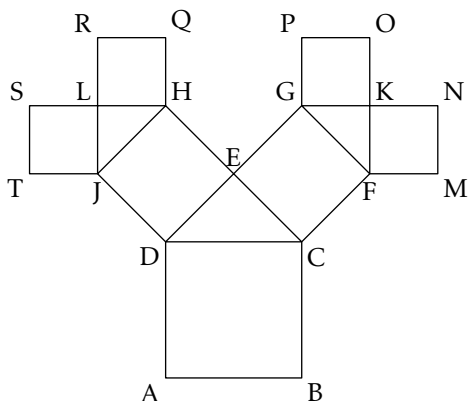
**Un carré : figure à l'ordre 0**



**Un carré : figure à l'ordre 1**



**Un carré : figure à l'ordre 2**



- Q1 :** (a) Montrer que l'aire du carré  $ABCD$  est la somme des aires des carrés  $CFGE$  et  $DEHJ$ .  
 (b) Montrer que le côté du carré  $ABCD$  est le double de celui du carré  $FMNK$ .
- Q2 :** (a) Montrer que les points  $B, C, G$  et  $P$  sont alignés.  
 (b) Montrer que les points  $N, K, G, H, L$  et  $S$  sont alignés.
- Q3 :** Le côté du carré  $ABCD$  mesure 1 m.  
 (a) Quelle est la hauteur de la figure à l'ordre 2 ? Quelle est sa largeur ?  
 (b) On veut réaliser une fresque murale en poursuivant le processus de construction décrit ci-dessus.  
 Combien cette fresque contiendra-t-elle de carrés si elle orne un mur de largeur 5 m ?

### ■ Exercice 3. Le cycle des unités

Soit  $n$  un entier naturel non nul, les puissances de 2 s'écrivent ainsi :

$$2^1 = 2 \quad 2^2 = 2 \times 2 \quad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \quad 2^n = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ facteurs égaux à } 2}$$

Dans cet exercice, les nombres sont représentés dans le système décimal. Le tableau ci-dessous donne la liste des premières puissances successives de 2 :

Exposant $n$	$2^n$	Chiffre des unités de $2^n$
1	$2^1 = 2$	2
2	$2^2 = 4$	4
3	$2^3 = 8$	8
4	$2^4 = 16$	6
5	$2^5 = 32$	2
6	$2^6 = 64$	4
7	$2^7 = 128$	...
8	...	...
9	...	...
10	...	...

- Q1 :** (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.  
 (b) Que constate-t-on sur les chiffres des unités des puissances successives de 2 ?
- Q2 :** (a) Quels sont les chiffres des unités des puissances successives de 3 ?  
 (b) Quels sont les chiffres des unités des puissances successives de 6 ?  
 (c) Quels sont les chiffres des unités des puissances de 16 ? de 123456789 ?
- Q3 :** La division euclidienne de 47 par 4 a pour quotient 11 et pour reste 3. Par conséquent, le chiffre des unités de  $2^{47} = 2^{4 \times 11 + 3}$  est le même que celui de  $2^3$  c'est-à-dire 8.

Déterminer le chiffre des unités de  $2^{1515}$  puis de  $2^{1789}$ .

Q4: (a) Quel est le chiffre des unités de la somme

$$S = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023} + 2^{2024} ?$$

(b) Quel est le chiffre des unités de la somme

$$T = 9 + 81 + 729 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024} ?$$

### ■ Exercice 4. Pyramides bicolores

Camille possède un grand nombre de petits cubes blancs et gris. Ils sont assemblés pour construire des tours pyramidales pleines en alternant les couleurs, comme sur les dessins ci-dessous.

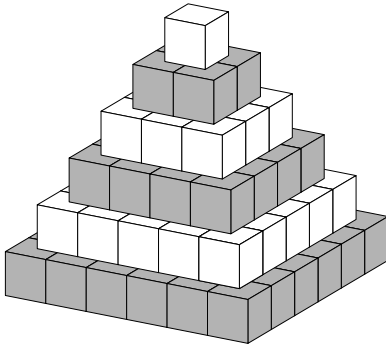


Figure 1

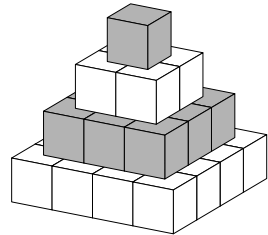


Figure 2

Les règles de construction sont fixées comme suit :

- chaque étage est carré et rempli de cubes de la même couleur ;
- deux étages successifs sont de couleurs différentes ;
- d'un étage au suivant, le nombre de cubes sur le côté du carré diminue de 1 ;
- l'étage du bas et l'étage du haut sont de couleurs différentes ;
- l'étage du haut ne comporte qu'un seul cube.

Q1 : Combien de cubes gris et combien de cubes blancs ont été utilisés pour chacune des figures ci-dessus ?

Q2 : Combien de cubes au total sont utilisés pour construire une pyramide de dix étages ?

Q3 : Est-il possible de construire une pyramide de ce type en utilisant 818 cubes (on suppose que Camille possède suffisamment de cubes de chaque sorte) ?

Q4 : Poursuivant ses efforts, Camille a construit une pyramide comptant 2 300 cubes blancs. Combien de cubes gris ont été utilisés ?