	Titre	Catégories	Origine	Domaine
1	Jeu de massacre	3 4	RV	Combinaisons de cinq nombres naturels donnés dont la somme est 32
2	Jeux d'araignées (I)	3 4	UD	Géométrie, intersections de segments Dénombrement systématique
3	Les jetons de Valérie	3 4 5	SI	Appariements des nombres de 1 à 6 sur trois jetons
4	Modèles réduits	3 4 5	RZ	Opérations dans N (système de relations)
5	Carrés sur des clous	3 4 5	LU	Trouver tous les carrés constructibles sur un réseau
6	Monsieur Charles	4 5	SI	Combinaisons
7	Jeux d'araignées (II)	5 6	UD	Géométrie, intersections de segments Dénombrement systématique
8	Les horloges	5 6	FC	Horloges qui retardent ou avancent
9	Un champ d'aire double	5 6 7	GTGP	Transformer un polygone concave en un rectangle d'aire double avec 5 points du pourtour fixes
10	Tout à moins de 3 euros	6 7 8	GTCP	Numération
11	Les bracelets décorés	6 7 8	GTAL	Opérations arithmétiques avec des entiers naturels Système d'équations
12	Comparaison de figures	6 7 8	GTGP	Confronter les aires de figures sur quadrillage Mesure
13	Qui a cassé la vitre ?	6 7 8 9 10	PR	Logique Mensonges et vérités
14	Le grillon sauteur	7 8 9 10	GTNU	Déterminer le terme initial d'une suite de 7 termes rationnels. Progression, pré algèbre
15	Roues dentées	7 8 9 10	LU	Déterminer le ppcm de 6, 10 et 14 dans un contexte de roues dentées
16	Dodécaèdre	8 9 10	SR	Géométrie dans l'espace disposition des faces d'un dodécaèdre
17	Voiles triangulaires	9 10	PR	Construire les deux triangles équivalents mais non isométriques avec deux côtés de mesures 4 et 2
18	Nombres particuliers	9 10	SI	Numération, arithmétique Nombres décimaux
19	Les pots de chocolat	9 10	GTFO	Comparer le niveau de liquide dans deux vases cylindriques connaissant la vitesse de remplissage de chacun

1. JEU DE MASSACRE (Cat. 3, 4)

Dans ce jeu d'adresse, il s'agit de faire tomber l'une ou l'autre des quatre boîtes qui sont posées sur une planche en lançant une balle.

Quand une boîte tombe, on obtient le nombre de points qui est écrit sur la boîte et on remet la boîte sur la planche. Si aucune boîte ne tombe, on n'obtient pas de points.

On gagne un bel ours en peluche si on arrive à obtenir exactement 32 points, pas plus, pas moins, après avoir lancé 5 fois la balle.

Quelles sont les boîtes qu'il faut faire tomber pour gagner l'ours en lançant cinq fois la balle ?

Indiquez toutes les possibilités : quelles boîtes doivent tomber et combien de fois chacune.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les additions de cinq termes formées de nombres choisis parmi 0, 1, 5, 10, 20 et dont la somme est 32.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'à chaque lancer, on peut obtenir 5, 10, 1, 20 ou encore 0 point.
- Comprendre que la balle est lancée cinq fois et que le nombre de points obtenus est la somme de cinq termes pris parmi les nombres précédents, un même nombre pouvant être répété plusieurs fois.

Stratégies possibles :

- Simuler le jeu en choisissant la boîte abattue ou l'absence de boîte abattue à chaque lancer, calculer le nombre de points obtenus et le comparer à 32. Recommencer.
- Faire des essais en additionnant cinq nombres parmi 0, 1, 5, 10, 20 avec répétition possible et comparer la somme à 32. Recommencer.
- Comprendre que pour obtenir 32 points, il faut nécessairement faire tomber 2 fois la boîte portant le nombre 1 et que donc il faut faire 30 en 3 lancers avec les autres nombres. Procéder par essais ou engager une recherche systématique :

  avec présence du nombre 20 : obtenir les deux possibilités 20 + 10 + 0 et 20 + 5 + 5

  sans le nombre 20 : Obtenir la seule possibilité 10 + 10 + 10
- Conclure qu'il y a trois possibilités : 20 + 10 + 1 + 1 + 0 ; 20 + 5 + 5 + 1 + 1 et 10 + 10 + 10 + 1 + 1

Attribution des points

4 Réponse correcte : les trois solutions sous forme de sommes (20 + 10 + 1 + 1 + 0 ; 20 + 5 + 5 + 1 + 1 et 10 + 10 + 10 + 1 + 1), ou de liste (une fois la boîte 20, une fois la boîte 10 deux fois la boîte 1) sans autre proposition erronée

3 Réponse correcte avec une seule autre proposition erronée
ou 2 solutions sans la solution avec un lancer manqué (0 point) et sans autre proposition erronée

2 Deux solutions correctes avec une seule proposition erronée

1 Une solution correcte sans autre proposition erronée
ou deux ou trois solutions correctes avec plusieurs propositions erronées
ou début de recherche prouvant la compréhension du problème (sommes différentes de 32)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Riva del Garda

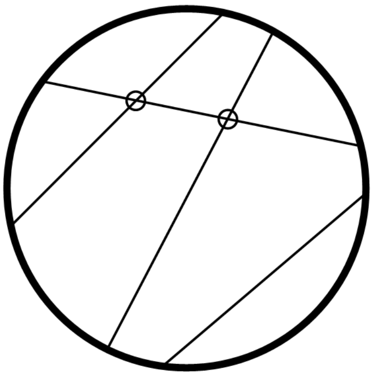
2. JEUX D'ARAIGNÉES (I) (Cat. 3, 4)

Trois sympathiques araignées Arach, Tipsy et Philomène ont trouvé des cerceaux dans un vieux grenier et font un concours de fils.

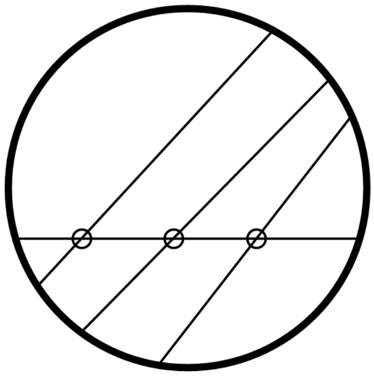
Chacune doit tirer quatre fils, bien tendus, entre les bords de son cerceau. La gagnante sera celle qui obtiendra le plus de croisements de ses quatre fils.

Voici les cerceaux d'Arach et de Tipsy avec les quatre fils et les croisements (notés par des petits cercles) :

Arach a seulement 2 croisements :

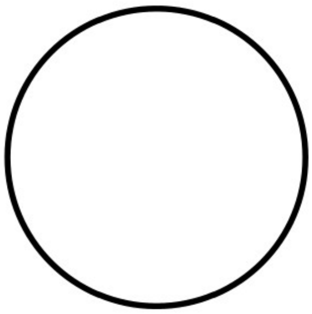


Tipsy en a 3 :



Philomène dit qu'elle pourra obtenir plus de croisements en disposant mieux ses quatre fils.

Cerceau de Philomène :



Quel est le plus grand nombre de croisements que pourra obtenir Philomène avec ses quatre fils ?

Dessinez dans le cerceau de Philomène les quatre fils qu'elle pourra tendre pour avoir le plus grand nombre possible de croisements.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

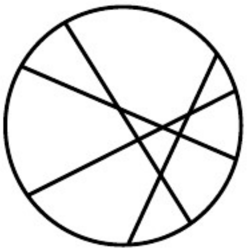
Trouver le nombre maximum d'intersections de quatre cordes d'un cercle

Analyse de la tâche

- Comprendre que les fils sont des segments de droite.
- Comprendre que le nombre des croisements dépend de la disposition des fils
- Procéder par essais inorganisés : tracer quatre fils et dénombrer les croisements. Il faut vérifier qu'il n'y a pas plus de deux fils sur un point d'intersection, ce qui ferait que ce croisement serait compté pour un seul au lieu de plusieurs.

Ou, procéder par essais plus ou moins organisés : tracer un fil puis un deuxième fil (qui peut déterminer 0 ou 1 croisement) puis un troisième fil qui peut croiser les deux premiers et déterminer 3 croisements, anticiper la position du quatrième de façon à obtenir le plus de croisements possibles avec les trois premiers.

- Compter les 6 croisements



Attribution des points

4 Réponse correcte (6 croisements) avec dessin des quatre fils (traits s'approchant plus ou moins de segments de droite) qui mettent clairement en évidence les six croisements (on admet évidemment les croisements qui se situent sur le cerceau)

3 Réponse correcte avec dessin précis montrant 6 croisements mais le nombre de croisements n'est pas indiqué
ou réponse correcte avec dessin imprécis
ou réponse avec plus de 4 fils mais nombre maximal de croisements bien visibles (5 fils : 10 croisement, 6 fils : 15 croisements, …)

2 Réponse « 5 croisements » avec dessin précis
ou réponse avec plus de 4 fils mais réponse avec un ou deux oublis (5 fils : 8 ou 9 croisement, 6 fils : 13 ou 14 croisements, …)

1 Réponse correcte (6 croisements) sans dessin
ou dessin avec 5 croisements mais le nombre de croisements n'est pas indiqué
ou réponse avec 4 croisements due au fait que trois fils ont un même point d'intersection
ou dessin avec plus de quatre fils et de trois à cinq oublis dans le nombre de croisements
ou dessin avec 4 croisements

0 Incompréhension du problème
ou réponse « 5 croisements » sans dessin

Niveaux : 3, 4

Origine : Udine

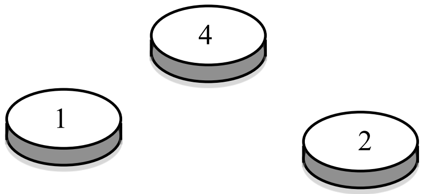
3. LES JETONS DE VALÉRIE (Cat. 3, 4, 5)

Valérie a trois jetons.

Sur chaque jeton, sont imprimés deux nombres, un sur une face, un sur l'autre.

Valérie observe que sur ses trois jetons figurent tous les nombres de 1 à 6.

Elle lance ses trois jetons une première fois et elle voit apparaître le 1, le 4 et le 2, comme sur cette figure :



Elle lance encore ses trois jetons une deuxième fois et elle voit apparaître le 6, le 2 et le 3.

Enfin elle lance ses trois jetons une troisième fois et elle voit apparaître le 1, le 6 et le 2.

Pour chaque jeton, dites quels sont les nombres imprimés sur les deux faces ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Les nombres de 1 à 6 sont écrits sur les faces de 3 jetons; déterminer les associations de ces nombres sur chaque jeton à partir de trois lancers (où apparaît chaque fois un nombre par jeton)

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a six faces de jetons ayant chacune un des nombres de 1 à 6.
- Comprendre que les lancers des jetons donnent la possibilité d'exclure de la face cachée des différents jetons, les nombres qui sont visibles lors de ce lancer.
- Se rendre compte, selon la figure du premier lancer, que le jeton avec le nombre 1 aura sur sa face cachée : ou 3, ou 5 ou 6 et que ces possibilités sont les mêmes pour le jeton avec le 4 et le jeton avec le 2.
- Comprendre, selon le deuxième lancer, que le jeton avec le nombre 2 doit obligatoirement avoir 5 sur sa face opposée et que le jeton avec le nombre 4 ne peut avoir que le 6 ou le 3 sur sa face opposée, de même pour le jeton avec le nombre 1.
- Déduire du troisième lancer que le jeton avec le nombre 1 ne peut pas avoir 6 sur sa face opposée et que c'est obligatoirement le 3.
- Conclure que le jeton avec le nombre 4 sur une face aura 6 sur sa face opposée.

Ou, pour chaque jeton, écrire toutes les associations possibles et écarter celles qui ne répondent pas aux conditions.

Ou, arriver aux associations correctes par essais successifs, sans pouvoir être certain que la solution est unique.

Ou, observer que le 2 apparaît lors de chacun des trois lancers et que le 5 est celui qui n'apparaît jamais et en déduire que le 2 et le 5 sont sur les faces opposées du même jeton. Déduire du deuxième et troisième lancer que le 6 ne peut pas être opposé, ni au 3, ni au 1 et donc qu'il est opposé au 4 et conclure que le 3 est opposé au 1.

Ou, construire des modèles des jetons en carton, écrire 1, 2 et 4 sur une face de chacun et procéder par essais pour les faces opposées.

Attribution des points

4 Réponse correcte (1-3, 4-6, 2-5) avec présence des déductions effectuées clairement précisées ou avec les essais et vérifications effectués

3 Réponse correcte obtenue par essais, (par exemple : accompagnée de la phrase type « nous avons fait des essais ») sans autre explication, mais avec vérification de la compatibilité avec les indications de l'énoncé

2 Réponse correcte sans référence à des essais et sans aucune vérification
ou raisonnement correct qui conduit à l'association 2-5 mais sans conclusion pour les autres

1 Début de raisonnement correct (on indique par exemple les nombres qui peuvent être sous les jetons du premier lancer)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena, reprise du problème *Les jetons de Françoise* 15 II 09

4. MODÈLES RÉDUITS (Cat. 3, 4, 5)

Un magasin de jouets vend des modèles réduits de camions, de voitures et de bicyclettes.

Les camions coûtent tous le même prix.

Les voitures coûtent toutes le même prix.

Les bicyclettes coûtent toutes le même prix.

- Alex a payé 19 euros pour deux camions et une voiture.
- Bernard a payé 17 euros pour un camion et deux voitures.
- Carla a payé 13 euros pour deux bicyclettes et une voiture.
- Dora s'achète un camion, une bicyclette et une voiture.

Combien Dora paye-t-elle ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les prix unitaires de 3 objets et le prix d'achat d'un lot, connaissant les prix de trois combinaisons de ces objets (2c + m = 19 ; c + 2m = 17 ; 2b + m = 13)

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème (données par les prix de 3 combinaisons d'objets) et le fait qu'il faut chercher les prix unitaires des objets.
- Procéder par essais au hasard ou par essais organisés en respectant les contraintes de l'énoncé (vérification que les prix unitaires trouvés vérifient les 3 contraintes).

  Les essais peuvent être orientés par le bon sens (prix de la bicyclette < prix de la voiture < prix du camion) et par quelques déductions simples, par exemple :

  comme 2 bicyclettes et 1 voiture coûtent 13 €, 1 bicyclette coûte moins de 6 € ;

  comme 2 camions et 1 voiture coûtent 6 € de plus que 2 bicyclettes et 1 voiture, 1 camion coûte 3 € de plus qu'une bicyclette.
- En déduire que Dora paiera 16 € : 7 € (camion) + 5 € (voiture) + 4 € (bicyclette)

Attribution des points

4 Réponse correcte (Dora va payer 16 €), avec une trace exhaustive des calculs réalisés (liste des essais par exemple)

3 Réponse correcte avec une trace incomplète des calculs effectués (certains d'entre eux n'étant pas mentionnés)
ou les trois prix unitaires sont trouvés (7 € le camion + 5 € la voiture + 4 € la bicyclette) avec une trace exhaustive des calculs réalisés mais le prix total (16 €) n'est pas calculé

2 Réponse correcte sans trace des calculs mais avec vérification que les prix unitaires trouvés vérifient les contraintes de l'énoncé
ou réponse correcte pour les 3 prix unitaires, avec présence au moins partielle des calculs effectués, sans calcul du prix total payé par Dora et avec une trace incomplète des calculs effectués
ou procédure correcte mais résultat erroné dû à une erreur de calcul

1 Début de recherche appropriée : essais de nombres vérifiant les contraintes du problème, mais n'aboutissant pas à trouver les 3 prix unitaires.

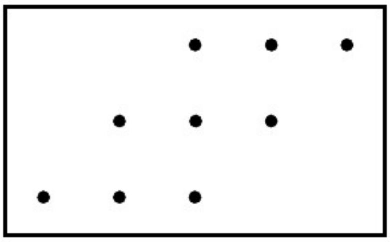
0 Incompréhension du problème, par exemple : calculs ne correspondant pas aux contraintes du problème.

Niveaux : 3, 4, 5

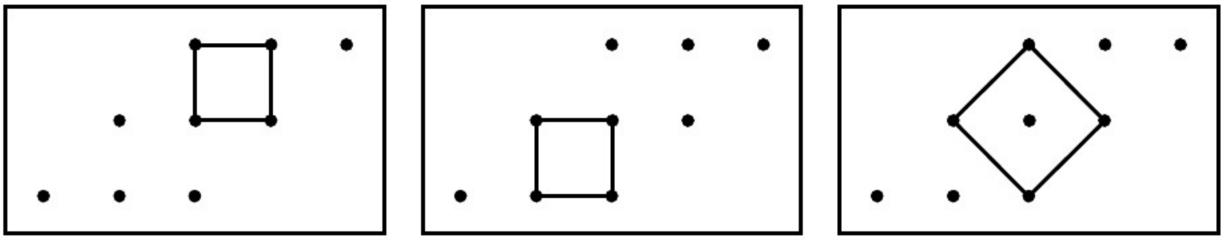
Origine : Rozzano

5. CARRÉS SUR DES CLOUS (Cat. 3, 4, 5)

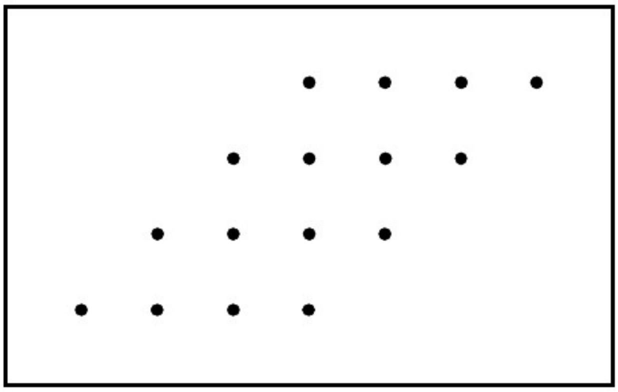
Sur une planche, Claude a planté 9 clous disposés ainsi :



Il tend des élastiques entre certains de ces clous pour former des carrés et il constate qu'il ne peut former que trois carrés.



Sur une autre planche, Claude a planté 16 clous disposés ainsi :



Combien de carrés Claude peut-il former au maximum sur sa nouvelle planche ?

Indiquez clairement tous les carrés que vous avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Identifier et dénombrer des carrés dont les sommets se situent sur une partie d'une planche à clous.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème : les figures doivent être des carrés dont les sommets sont des clous du support. La difficulté qui consiste à envisager des carrés en position non standard est en partie aplanie par l'exemple donné.
- Procéder par construction effective de carrés de façon aléatoire. Le risque est alors de ne pas parvenir à l'exhaustivité ou de produire des doublons.

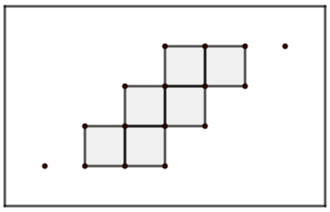
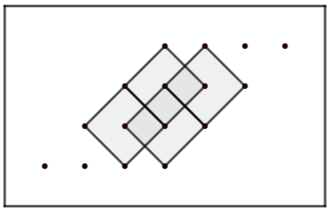
Ou, procéder par construction effective de carrés de façon organisée, par exemple selon la longueur des côtés (carrés de côté 1, de côté 2, de côté oblique) ou en partant d'un point donné, puis d'un autre …

Ou, dénombrement des carrés sans tous les construire effectivement, mais en les décrivant de façon claire. Cette démarche peut conduire à des oublis.

Une recherche organisée conduit à trouver :

6 carrés de côté 1 (2 par bandes de points de largeur 1)

4 carrés de côtés obliques (diagonales de carrés)

Attribution des points

4 Réponse correcte (10 carrés) avec inventaire clair : description de toutes les possibilités : dessin de tous les carrés ou liste exhaustive clairement décrite, sans autre figure

3 Réponse correcte (10 carrés) avec inventaire peu clair : dessin imprécis ou liste insuffisamment décrite, sans autre figure

ou 8 ou 9 carrés (par exemple oubli de 2 carrés à côté oblique) avec inventaire clair : dessin de tous les carrés trouvés ou liste clairement décrite, sans autre figure

ou réponse correcte (10 carrés) avec inventaire clair de toutes les possibilités mais avec présence d'une seule figure erronée

ou dessin de tous les carrés ou liste exhaustive claire, sans autre figure, mais oubli de la réponse « 10 »

2 6 ou 7 carrés dont au moins un à côté oblique, sans autre figure

ou les 10 carrés mais avec présence de deux figures erronées au maximum

1 4 ou 5 carrés, sans autre figure

ou de 6 à 9 carrés mais avec présence de plus de deux figures erronées

0 Incompréhension du problème

ou moins de 4 carrés avec ou sans figure erronée

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Luxembourg

6. MONSIEUR CHARLES (Cat. 4, 5)

Dans l'armoire de Monsieur Charles, il y a :

- 4 chapeaux : un rouge, un vert, un jaune et un bleu ;
- 4 pantalons : un rouge, un vert, un jaune et un bleu ;
- 4 vestes : une rouge, une verte, une jaune et une bleue.

Chaque jour, Monsieur Charles porte un chapeau et un pantalon de la même couleur, mais une veste d'une couleur différente.

Aujourd'hui, 1er mars, Monsieur Charles sort de sa maison avec un chapeau et un pantalon rouges et une veste verte. Demain, il fera un choix différent, et ainsi de suite pour les jours suivants.

Quel est le premier jour après le 1er mars où Monsieur Charles devra s'habiller de la même manière que l'un des jours précédents ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de triplets formés avec 3 objets (chacun pouvant être de 4 couleurs différentes), de telle façon que deux objets soient de même couleur et le troisième d'une couleur différente.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes de la situation : les différentes manières de s'habiller dépendent du choix de deux couleurs sur quatre, et de l'attribution de ces 2 couleurs (une couleur pour le chapeau et le pantalon, l'autre pour la veste)
- Déterminer une stratégie qui permette de produire des triplets respectant les contraintes (sans organisation préalable), puis suivie ou non d'une organisation des triplets trouvés pour éliminer les doublons et trouver les manquants. Puis dénombrement des triplets obtenus. (Cette stratégie, sans organisation au départ risque de produire des doublons et, surtout, de faire oublier des possibilités.)

Ou, choisir par exemple, rouge pour le chapeau et le pantalon, et une des 3 autres couleurs pour la veste, ce qui conduit aux triplets RRV, RRG, RRB. De même, pour chacune des trois autres couleurs possibles pour le chapeau et le pantalon, il y a trois possibilités différentes pour la veste. En déduire qu'il y a un total de douze possibilités.

- Conclure que le 13 mars est la première journée où Monsieur Charles sera obligé de s'habiller de la même manière qu'un des jours précédents.

Attribution des points

4 Réponse correcte (13 mars), avec une explication claire (par exemple, une liste et/ou un calcul des 12 possibilités différentes)

3 Réponse correcte, mais avec des explications peu claires ou incomplètes, par exemple, les possibilités ne sont pas données en détail ou le calcul n'est pas expliqué

2 Procédure correcte conduisant aux 12 triplets possibles, mais réponse "13 mars" absente
ou réponse "12 mars" avec la découverte des 12 possibilités
ou réponse "13 mars" sans explication

1 Description de 6 à 11 possibilités différentes avec ou sans indication du jour correspondant
ou réponse incorrecte due à des doublons dans les possibilités recensées
ou réponse 13 mars avec 12 possibilités qui ne sont pas toutes différentes
ou réponse 25 mars si la même couleur pour chapeau et pantalon, n'est pas prise en compte (4 séries de 6 combinaisons)
ou réponse « 17 mars » si les élèves ne tiennent pas compte de la même couleur du chapeau et du pantalon

0 Production de moins de six possibilités différentes
ou incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine : Siena

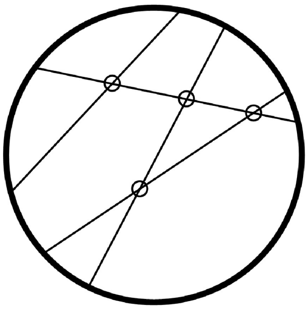
7. JEUX D'ARAIGNÉES (II) (Cat. 5, 6)

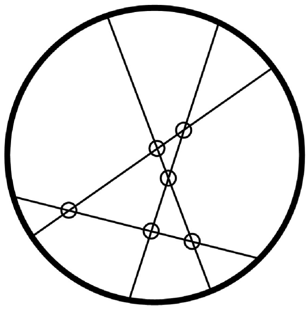
Deux sympathiques araignées Arach et Tipsy ont trouvé des cerceaux dans un vieux grenier et font un concours de fils.

Chacune doit tirer quatre fils, en ligne droite, entre les bords de son cerceau. La gagnante sera celle qui obtiendra le plus de croisements de ses quatre fils.

Voici les cerceaux d'Arach et de Tipsy avec les quatre fils et les croisements (notés par des petits cercles) :

Arach n'a que 4 croisements : Tipsy, la gagnante, a obtenu 6 croisements :

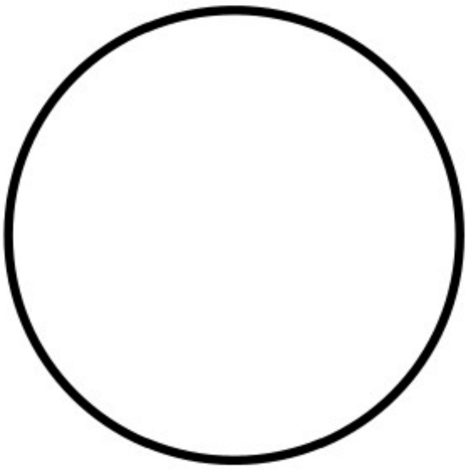




Le lendemain, nos deux araignées, qui avaient trouvé le jeu si intéressant, recommencent sur des cerceaux plus grands, elles décident cette fois-ci de tendre chacune six fils.

Quel est le plus grand nombre de croisements qu'elles pourront obtenir avec six fils ?

Dessinez les six fils sur le cerceau ci-dessous pour avoir le plus grand nombre possible de croisements et dites comment vous les avez trouvés.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

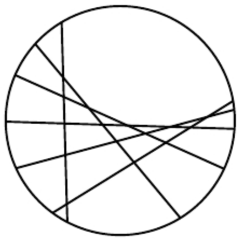
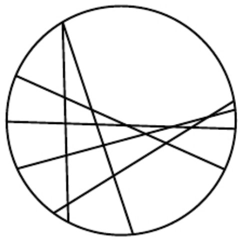
Trouver le nombre maximum d'intersections de six cordes d'un cercle

Analyse de la tâche

- Comprendre que les fils sont des segments de droite.
- Comprendre que le nombre des croisements dépend de la disposition des fils

- Vérifier tout d'abord que les quatre fils de Tipsy ont 6 intersections et se convaincre qu'il s'agit du maximum afin de poursuivre la recherche avec cinq et six fils.
- Pour trouver le nombre maximum de croisements de 6 fils, le dessin est plus délicat. Il faut faire en sorte que chaque fil ajouté « croise » tous les précédents. Il faut aussi vérifier que plus de deux fils n'aient un même point d'intersection, ce qui ferait que ce croisement serait compté pour un seul au lieu de plusieurs.
- Une procédure consiste à dessiner un premier fil, puis un deuxième, avec un croisement, puis un troisième « croisant les deux premiers avec 1 + 2 = 3 croisements, puis un quatrième croisant les trois précédents avec 1 + 2 + 3 = 6 croisements et ainsi de suite : pour le cinquième 1 + 2 + 3 + 4 = 10 croisements et finalement pour le sixième
  1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 croisements.

Ou, procéder de manière non systématique, sans pouvoir s'assurer que le nombre de croisements est maximum.

Attribution des points

4 Réponse correcte (15 croisements ou la somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15) avec dessin précis et description qui fait clairement apparaître que les six fils coupent chacun des cinq autres (ou explication sur la position de la règle qui détermine les croisements ou mentions des essais permettant de trouver une disposition optimale des six fils …)

3 Réponse correcte (15 croisements) avec dessin précis sans explications ou seulement la somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
ou 14 croisements avec dessin précis et explications

2 13 croisements avec dessin précis
ou 15 croisements, sans dessin

1 11 à 12 croisements avec dessin précis

0 Incompréhension du problème ou moins de 11 croisements

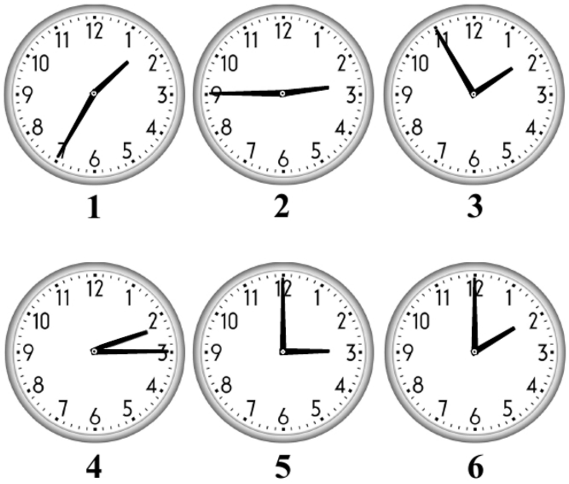
Niveaux : 5, 6

Origine : Udine

8. LES HORLOGES (Cat. 5, 6)

Dans l'atelier de l'horloger de Transalpie, il y a ces six horloges.

L'une de celles-ci indique l'heure exacte. Une autre avance de 20 minutes, une autre retarde de 20 minutes, les trois autres sont arrêtées.



Quelle horloge indique l'heure exacte ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver, parmi les images de 6 horloges, dont l'une est à l'heure, l'une avance de 20 minutes, l'une retarde de 20 minutes et les trois autres sont arrêtées, celle qui est à l'heure.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour répondre à la question il faut lire les heures des six horloges : 1:35, 1:55, 2:00, 2:15, 2:45, 3:00.
- Choisir une horloge, faire l'hypothèse que c'est elle qui est à l'heure et vérifier si les conditions données pour les autres sont respectées. Si ce choix n'est pas juste, recommencer avec une autre horloge.

Ou, procéder par essais en choisissant trois horloges et vérifier si les écarts entre les trois sont respectés.

Ou, comprendre que si une horloge retarde de 20 minutes et un autre avance de 20 minutes, l'écart entre les deux sera de 40 minutes et que celle qui indique l'heure exacte sera comprise entre les deux. Chercher donc les deux horloges dont les heures diffèrent de 40 minutes. On peut soit effectuer les calculs (1 h 35 min + 40 min = 1 h 75 correspondant à 2 h 15 min), soit en se déplaçant dans le temps, en avant ou en arrière sur chaque horloge. Trouver ainsi qu'il s'agit des horloges indiquant 1:35 et 2:15 et que celle de l'heure exacte est celle qui indique 1:55 (horloge n°3, 20 minutes en plus de 1:35 et 20 minutes en moins de 2:15)

Ou, chercher de manière systématique les couples de deux horloges qui diffèrent de 20 minutes en écartant toutes celles qui n'ont pas cette différence. On écarte ainsi les horloges indiquant 2:00, 2:45, 3,00. Les trois autres sont celles à prendre en considération, celle donnant l'heure exacte se situe entre les deux autres dans l'ordre croissant des temps.

Attribution des points

4 Réponse correcte (l'horloge n°3) avec la description de la procédure suivie (les calculs, les indications sur la figure des aiguilles déplacées, les explications par des mots …)

3 Réponse correcte avec explications incomplètes (par exemple on ne mentionne que l'écart entre l'horloge qui indique 20 minutes de plus que l'heure exacte)

2 Réponse correcte : le numéro de l'horloge à l'heure sans aucune explication de la démarche suivie

1 Calculs qui montrent la recherche d'écarts de 20 ou 40 minutes sans être arrivé à trouver les horloges impliquées
ou au moins une hypothèse sur une horloge choisie comme "à l'heure juste" et la vérification que les autres conditions ne sont pas respectées

0 Incompréhension du problème.

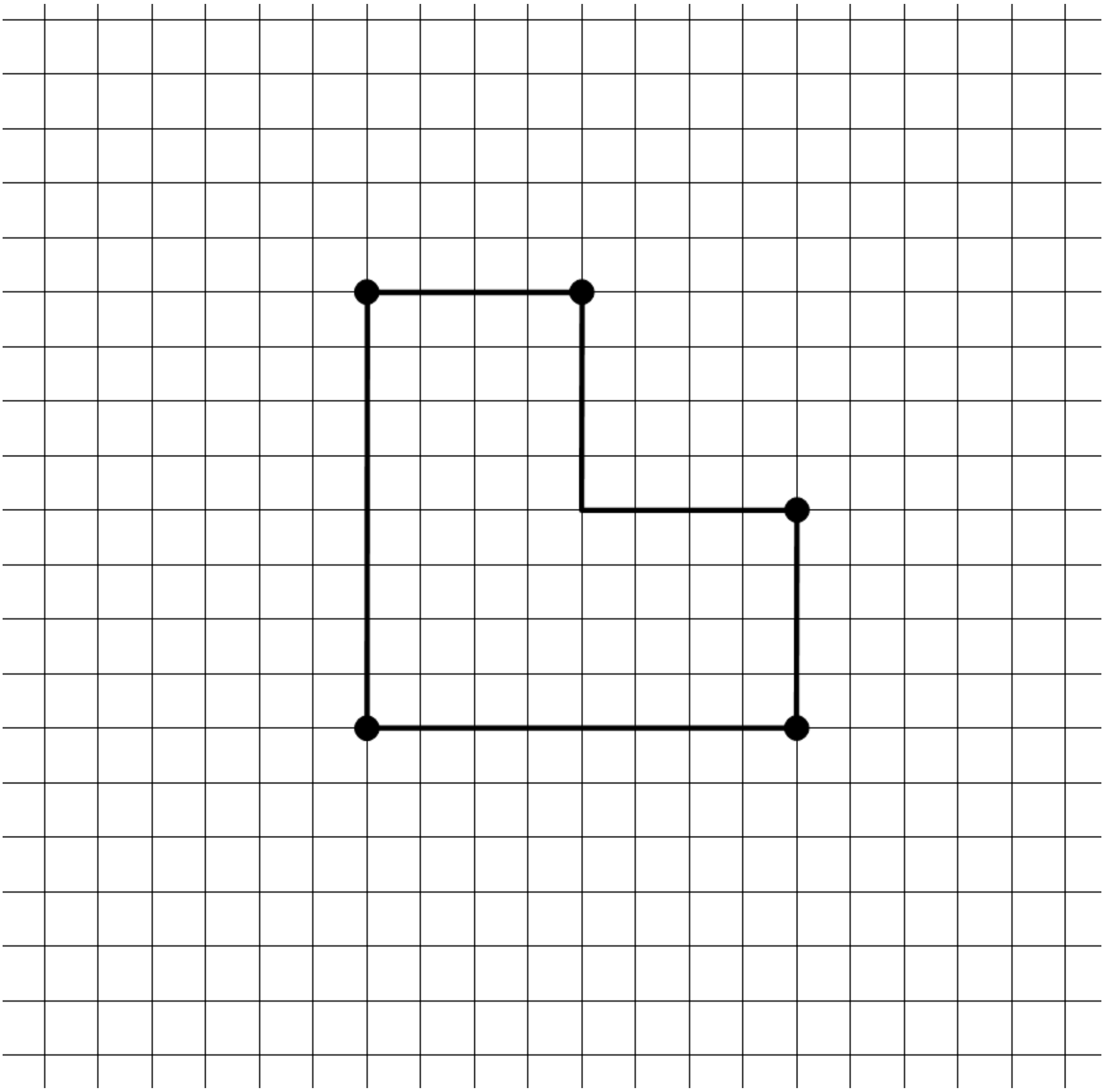
Niveaux : 5, 6

Origine : Franche-Comté (Variante de 04.F.04 3, 4, 5 Chez l'horloger)

9. UN CHAMP D’AIRE DOUBLE (Cat. 5, 6, 7)

Dans sa prairie, à l’intérieur de laquelle sont plantés cinq arbres, un agriculteur a réalisé un enclos provisoire pour que ses bêtes puissent paître.

(Le dessin représente le contour de l’enclos et les cinq arbres, qui sont indiqués par les points.)



L’herbe se faisant rare, l’éleveur décide de doubler l’aire de l’enclos.

Il veut que son nouvel enclos soit un rectangle et il veut que les cinq arbres soient aussi sur la clôture du nouvel enclos.

Dessinez tous les enclos en forme de rectangle que l’agriculteur pourrait construire.

Montrez, pour chaque enclos que vous avez dessiné, que l’aire a été doublée.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Transformer un polygone concave (composé d'un rectangle et d'un carré ou représentant les ¾ d'un carré) sur le contour duquel sont placés cinq points en un rectangle d'aire double de façon à ce que les cinq points soient encore sur le contour du rectangle dans leur position d'origine.

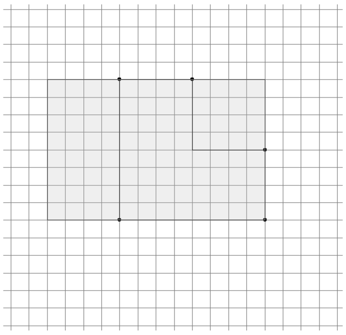
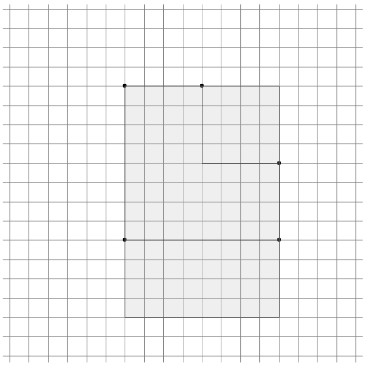
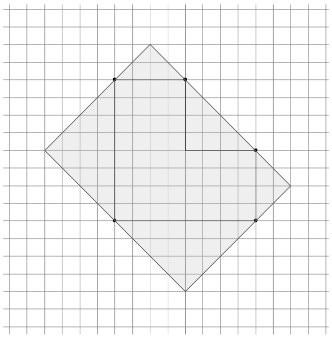
Analyse de la tâche

- Comprendre que l'aire du nouveau champ, doit être le double de celle de l'ancien champ.
- Faire le choix d'une unité de mesure, le plus simple étant de prendre pour unité un carreau du quadrillage et déterminer l'aire de l'ancien champ : 48 et celle du nouveau : 96 (en carreaux).

  On peut aussi observer que la figure d'origine est composée de trois carrés de 4 × 4 et que le nouvel enclos devra être composé de six carrés de 4 × 4, ce qui permet d'obtenir facilement les deux premières solutions (pour la troisième il faudra décomposer ce carré en triangles dont l'aire vaut ½ ou ¼ du carré.)
- Comprendre la contrainte de position des 5 arbres : ils restent là où ils sont et ils doivent être aussi sur la nouvelle clôture. Comme il y a 5 arbres, ils ne peuvent pas tous être sur les sommets du rectangle (comme ils étaient sur les sommets de la figure d'origine) mais donc sur des côtés du rectangle.
- Essayer de dessiner le nouveau champ en tenant compte des trois contraintes : il doit être rectangulaire et les points doivent être sur les côtés ou être des sommets du rectangle.

Deux cas se présentent :

- Les côtés du rectangle suivent les lignes du quadrillage. Utiliser alors la contrainte sur l'aire, 96, pour déterminer les dimensions du rectangle (8 et 12 s'imposent rapidement comme diviseurs de 96 et 8 comme une des dimensions de la figure d'origine)
- Les côtés du rectangle ne suivent pas les lignes du quadrillage. Procéder par essais pour tracer le seul rectangle qui satisfait la contrainte sur la position des points. Déterminer son aire et la comparer à l'aire de l'ancien champ. Ou la comparer à celle de la figure précédente par décomposition
- Conclure qu'il y a trois possibilités :

Attribution des points

4 Réponse correcte avec dessin précis des trois rectangles possibles et vérification du doublement de l'aire, sans aucune figure erronée

3 Dessin précis des trois rectangles possibles sans vérification du doublement de l'aire
ou dessin précis de deux rectangles corrects avec vérification du doublement de l'aire et sans aucune figure erronée
ou dessin précis des trois rectangles corrects avec ou sans vérification du doublement de l'aire et avec présence d'une figure erronée (soit la figure n'est pas un rectangle, soit la position de tous les arbres sur le contour n'est pas respectée)

2 Dessin précis d'un seul rectangle correct avec ou sans vérification du doublement de l'aire et sans aucune figure erronée
ou dessin précis de 2 rectangles corrects avec ou sans vérification du doublement de l'aire et avec présence d'une figure erronée

1 Dessin précis d'un seul rectangle correct avec ou sans vérification du doublement de l'aire et avec présence d'une figure erronée

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : GTGP (Groupe Géométrie plane) et Udine

10. TOUT À MOINS DE 3 EUROS (Cat. 6, 7, 8)

Joséphine vend ses anciens jouets au marché de l'occasion. Pour écrire le prix de chaque jouet, elle utilise des cartes avec les chiffres de 0 à 9 et une carte avec une virgule.

Chaque prix est inférieur à 3 euros et s'écrit avec des chiffres tous différents.

Son amie Christine achète un jouet à 0,31 euros et Alexandra un jouet à 1,03 euros.

« Quelle coïncidence, dit Joséphine, vous avez acheté deux jouets pour lesquels j'ai utilisé les trois mêmes cartes, mais en les disposant dans un ordre différent, la différence de prix est de 72 centimes ! ».

Indiquez toutes les paires de prix possibles, de moins de 3 euros, dont la différence est de 72 centimes et qui utilisent trois chiffres différents.

Montrez comment vous avez les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans un contexte de prix inférieurs à 3 euros, trouver toutes les paires de nombres décimaux (avec unités, dixièmes et centièmes) formés de trois mêmes chiffres, tous différents les uns des autres, et telles que la différence entre les deux nombres est 72 centièmes

Analyse de la tâche

- Comprendre que tous les prix sont écrits avec des nombres décimaux formés de trois chiffres tous différents les uns des autres, ayant pour chiffre des unités un chiffre allant de 0 à 2, tandis que pour les dixièmes et les centièmes tous les chiffres de 0 à 9 peuvent être utilisés.
- Comprendre qu'il faut chercher des paires de nombres décimaux écrits avec trois mêmes chiffres, différents les uns des autres mais disposés de manière différente et telles que la différence entre les deux nombres est 72 centièmes.
- Vérifier, sur l'exemple que la différence entre 1,03 et 0,31 est bien de 72 centimes et que les trois chiffres sont distincts.
- Trouver d'autres paires en procédant par essais, qui peuvent s'organiser au cours de la recherche.
  Dans le cas où le chiffre des unités est le même dans les deux prix, la recherche se limite à la partie décimale, composée de deux chiffres choisis dont la différence est 8 (7 + 1 de « retenue ») et que, par conséquent, ces deux chiffres peuvent être 1 et 9 ou 0 et 8, ce qui conduit aux quatre paires de prix : 1,08 et 1,80 ; 2,18 et 2,80 ; 0,19 et 0,91 ; 2,19 et 2,91, 0,18 et 0,80 comme 1,19 et 1,91 sont à écarter car elles n'utilisent pas trois chiffres différents
  Dans le cas où le chiffre des unités est modifié par l'addition de 0,72 ou 1 – 0,28, il augmente de 1 d'un prix à l'autre il n'y a alors que deux possibilités à examiner pour les unités des deux prix : 0 et 1 puis 1 et 2. L'exemple donné 0,31 et 1,03 donne une première solution qui correspond au triplet de chiffres (0 ; 1 ; 3), avec le triplet de chiffres (1 ; 2 ; 4) on obtient encore les deux prix 1,42 et 2,14.
- Conclure qu'il y a six paires de prix répondant aux trois conditions, inférieurs à 3, différence de 0,72, chiffres distincts.

Attribution des points

4 Réponse correcte (les six paires 0,19 et 0,91; 2,19 et 2,91; 1,08 et 1,80; 2,08 et 2,80; 0,31 et 1,03 1,42 et 2,14) avec description des essais et mentionnant qu'il n'y a pas d'autres paires de prix (on admet que la paire 0,31 et 1,03 de l'exemple ne soit pas répétée.)

3 Réponse correcte (les six paires) mais avec une description peu claire de la procédure suivie et/ou ne précisant pas qu'il n'y a pas d'autres paires
cinq paires correctes trouvées (ou quatre en excluant la paire de l'exemple), avec une description des essais
ou les six paires correctes et les deux paires 0,08 et 0,80 1,19 et 1,91 avec chiffres non distincts

2 Quatre paires correctes (ou trois en excluant la paire de l'exemple), avec une description des essais
ou quatre ou cinq paires nouvelles avec une ou deux paires incorrectes ne respectant pas une seule des trois conditions (écart différent de 0,72, prix supérieur à 3 €, chiffres non tous différents).

1 Seulement une ou deux paires trouvées, autre que celle donnée dans l'énoncé
ou trois paires nouvelles avec une ou deux paires incorrectes (écart différent de 0,72, prix supérieur à 3 €, chiffres non tous différents).

0 Incompréhension du problème (contrainte sur les chiffres ou la différence non pris en compte)

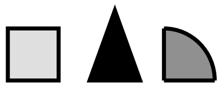
Niveaux : 6, 7, 8

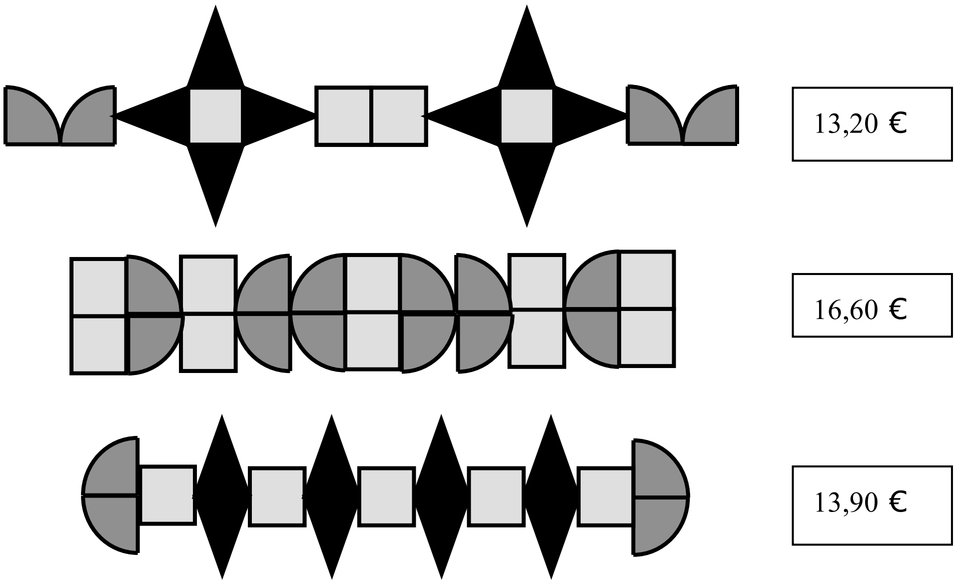
Origine : GTNU (d'après *Anniversaires et bougies*16.F.14)

11. LES BRACELETS DÉCORÉS (Cat. 6, 7, 8)

Madame Clélia crée des bracelets dans des bandes de cuir qu'elle décore avec des pièces colorées particulières.

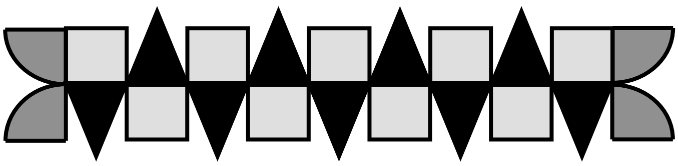
La figure ci-dessous montre le dessin des décorations des trois bracelets qu'elle a créés hier, et pour lesquels elle a utilisé seulement des pièces comme celles-ci :





Les pièces ont des prix différents selon qu'elles ont la forme d'un carré, d'un triangle ou d'un quart de disque. Le prix de chaque décoration est indiqué à côté du dessin.

Aujourd'hui, Clélia a fabriqué un autre bracelet en utilisant les trois types de pièces. Voici le dessin du bracelet qu'elle a réalisé :



Quel est le prix de la décoration du bracelet que Clélia a réalisé aujourd'hui ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Connaissant le prix de trois compositions différentes réalisées à l'aide de trois types d'objets ayant des prix différents l'un de l'autre, déterminer le prix d'une quatrième composition contenant les trois mêmes types d'objets.

Analyse de la tâche

- Comprendre que tous les bracelets sont réalisés avec trois types de pièces : carré, triangle et quart de disque, et donc que les losanges qu'on voit sur le troisième bracelet sont composés chacun de deux triangles isocèles accolés par leur base.
- Comprendre que chaque type de pièce a un prix différent en fonction de la forme et que le prix indiqué à côté de chaque bracelet correspond au prix total des pièces utilisées.
- Observer que le premier et le troisième bracelet comportent les trois types de pièces alors que le deuxième ne comporte pas de pièce triangulaire.
- Comprendre que pour déterminer le prix du quatrième bracelet il faut connaitre celui de chaque type de pièce.
- Déterminer pour chaque bracelet le nombre de pièces de chaque type qui a été utilisé :

- premier bracelet : 4 quarts de cercle, 4 carrés, 8 triangles ;
- deuxième bracelet : 12 quarts de cercle, 10 carrés ;
- troisième bracelet : 4 quarts de cercle, 5 carrés, 8 triangles

- Constater que le troisième bracelet se distingue du premier uniquement par la présence d’une pièce carrée supplémentaire.
- En déduire que la différence de prix entre les deux bracelets correspond au prix d’une pièce carré : 0,70 euro (13,90 − 13,20).
- Déterminer ensuite le prix d’un quart de disque à partir du prix du deuxième bracelet qui n’est composé que de carrés et quarts de disque : 0 ,80 euro ([16,60 – 0,70 x 10] : 12).
- Déterminer enfin le prix d’une pièce triangulaire à partir du prix du premier ou du troisième bracelet. Par exemple à partir des informations maintenant connues sur le premier bracelet, on trouve 0,90 euro ([13,20 – 0,80 x 4 – 0,70 x 4] : 8).
- Calculer enfin le prix du quatrième bracelet : 17,60 euro (0,80 x 4 – 0,70 x 9 + 0,90 x 9).

Ou Procéder par essais pour déterminer le prix de chaque type de pièce, par exemple à partir du deuxième bracelet qui n’est fait que de carrés et de quarts de disque, en nombres voisins (10 carrés et 12 quarts de disque). En faisant l’hypothèse que les deux types de pièces ont le même prix, on obtient 0,75 euro (16,60 : 22). A partir de là, ajuster les valeurs. Pour les valeurs qui conviennent pour le deuxième bracelet, vérifier qu’elles conviennent pour les premier et troisième bracelets. Finir par trouver que pour 0,70 euro pour la pièce carrée et 0,80 euro pour le quart de disque, on obtient le même prix pour la pièce triangulaire (0,90 euro) pour les premier et troisième bracelets.

- Calculer le prix du quatrième bracelet : 17,60 euro.

Attribution des points

4 Réponse correcte (17,60 euro) avec des explications claires et complètes (inventaire des pièces de chaque bracelet ou comparaison directe entre le premier et le troisième bracelet, description des étapes avec le détail des calculs des valeurs des différentes pièces, essais organisés avec présence des vérifications effectuées)

3 Réponse correcte avec des explications partielles (par exemple absence de quelques étapes ou dans le cas d’une procédure par essais absence de vérifications)
ou procédure correcte bien expliquée mais avec une erreur dans le comptage des pièces ou dans l'exécution d'une opération avec les nombres décimaux

2 Réponse correcte sans explication
ou procédure correcte avec plus d'une erreur dans le comptage des pièces et/ou l'exécution des opérations avec les nombres décimaux
ou détermination correcte du nombre de pièces de chaque type dans les trois premiers bracelets et début de procédure correcte des calculs mais sans arriver à la conclusion

1 Début de raisonnement correct (par exemple, détermination exacte du nombre de pièces de chaque type dans les trois premiers bracelets)

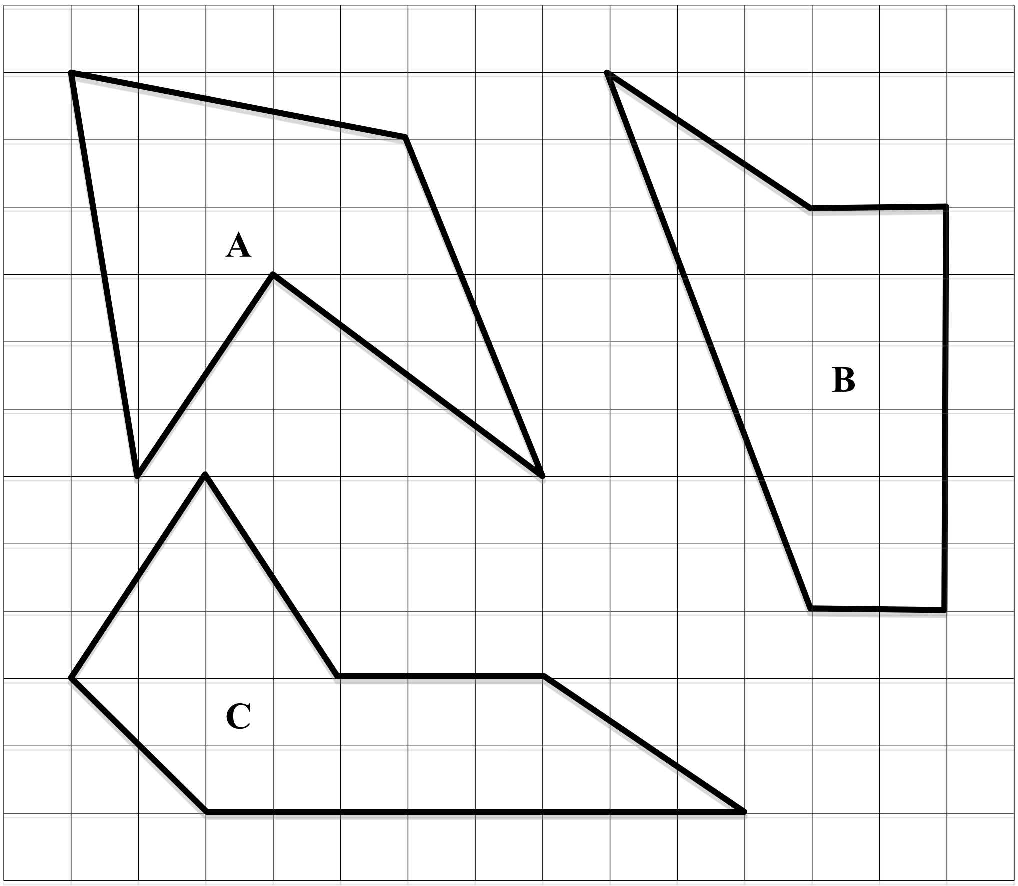
0 Incompréhension du problème (par exemple décompte du nombre de pièces dans chaque bracelet, sans prendre en compte qu’il y a différents types de pièces, attribution de valeurs arbitraires aux pièces sans vérification …)

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : GTAL (Groupe Algèbre, d’après *Pièces magnétiques*, 24.I.13)

12. COMPARAISON DE FIGURES (Cat. 6, 7, 8)

Patricia et Brigitte observent ces trois polygones et se demandent s'ils ont tous la même aire.



Dites si les aires de ces trois polygones sont les mêmes ou sont différentes.

Montrez comment vous êtes arrivés à vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de trois polygones (de 5 à 6 côtés) dont tous les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage.

Analyse de la tâche

- Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer chacune des trois aires, avec une unité commune.
- Constater que les trois figures ne sont ni des rectangles, ni des triangles pour lesquels on dispose de formules, que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune et qu'il faudra décomposer les figures en carreaux entiers ou parties de carreaux ou en figures de base : rectangles, triangles ou demi-rectangles.
- Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre et d'un groupe d'élèves à un autre, en particulier :
    - comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,
    - décomposition de la figure en rectangles et triangles qui peuvent reconstituer un rectangle par déplacements,
    - perception du triangle rectangle comme demi-rectangle,
    - les triangles non rectangles sans angle obtus sont décomposés en deux triangles rectangles,
    - calcul de l'aire du rectangle circonscrit à la figure totale suivi de la soustraction des aires des rectangles et/ou triangles complémentaires,
    - appel à la formule de l'aire du triangle.
- Trouver l'aire des trois figures, en carreaux, par exemple :

Pour A : un rectangle de 6 × 7 dont on retire quatre triangles de 5 × 1, de 6 × 1, de 6 × 3 de 5 × 2 et un rectangle de 2 × 1: 42 – 2,5 –3 – 9 – 5 – 2 = 20,5.

Pour B : un rectangle de 6 × 2 et un triangle de 6 × 3 : 12 + 9 = 21 ou compensations de carreaux pour le triangle

Pour C : décomposition en un rectangle et trois triangles. 6 + 2 + 10 + 3 = 21

- Conclure que les trois aires ne sont pas égales : 20,5 ; 21 et 21 (en carrés du quadrillage).

Ou, calcul des aires à partir de mesures prises, en cm ou mm, sur les polygones qui composent les figures. (Cette procédure exige des mesures prises au mm près, les calculs précis de chaque aire et la prise en compte rigoureuse des erreurs dues aux approximations pour être certain que l'aire de A est inférieure aux aires de B et C)

Attribution des points

4 Réponse correcte : les trois aires ne sont pas égales A : 20,5 ; B : 21 et C : 21 (en carreaux du quadrillage). On accepte que l'inégalité ne soit pas mentionnée explicitement ; mais pour chacune des aires la description des calculs ou comptages est nécessaire. (En cas de mesures en cm ou mm, l'inégalité ou l'égalité des aires doivent être accompagnées de calculs précis tenant compte explicitement des erreurs d'approximation.)

3 Réponse correcte, avec les trois aires trouvées, mais avec le détail des calculs seulement pour une ou deux d'entre elles

ou aires correctes pour deux des aires et erreur sur la troisième, avec détail des calculs

ou aires calculées d'après des mesures correctes au mm, sans mention explicite des erreurs dues aux approximations

2 Réponse correcte, avec les trois aires trouvées, sans le détail des calculs

ou aire correcte pour une seule des trois aires, et une seule erreur pour chacune des deux autres, chaque fois avec le détail des calculs

ou réponse correcte avec le calcul détaillé pour deux aires, mais le calcul de la troisième n'a pas été abordé ou contient des erreurs

ou réponse erronée (les aires des trois polygones sont égales) due à des erreurs de calcul dans la détermination de l'aire de A, avec le détail des opérations

1 Seulement l'aire d'une ou deux des trois figures est trouvée, sans détails

ou aires approximatives à partir de mesures prises sur les polygones qui composent les figures

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : GTGP (Groupe de travail Géométrie plane)

13. QUI A CASSÉ LA VITRE ? (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

André et son frère David ont invité leurs amis Claude et Bruno, qui ne sont pas frères, à faire une partie de foot dans la cour. L'un d'eux, en tirant un peu trop fort, casse une vitre de la fenêtre de la voisine Gertrude.

Celle-ci, très fâchée, veut savoir qui est le coupable et interroge chacun d'eux.

André dit : « Ce n'est pas Bruno. »

Bruno dit : « Le coupable est un des deux frères ».

Claude affirme : « Ce n'est pas David qui a lancé le ballon qui a cassé la vitre. »

David dit : « Ce n'est pas moi. »

Un seul d'entre eux a menti.

Qui a cassé la vitre de Madame Gertrude ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le vrai et le faux dans quatre affirmations dont l'une seule est fausse, dans un contexte de « mensonges » et vérités

Analyse de la tâche

- Observer que Claude et David disent la même chose et que, par conséquent, ni l'un ni l'autre ne peut avoir menti parce qu'on aurait deux affirmations fausses. En déduire que celui qui a menti est soit André, soit Bruno :
- Supposer qu'André ment. Son affirmation conduirait à la conclusion que le coupable est Bruno, mais puisque Bruno devrait dire la vérité, il ne pourrait plus affirmer que le coupable est André ou David. Donc Bruno dirait un mensonge, ce qui contredit la donnée qu'un seul des quatre enfants ment.
- Conclure que c'est Bruno qui ment et que, par conséquent, la vitre a été cassée par Claude ou Bruno lui-même. De l'affirmation d'André, vraie, il s'ensuit que c'est Claude le coupable. (L'obstacle à surmonter est d'accepter l'idée que celui qui ment n'est pas forcément le coupable.)

  L'observation que Claude et David ne peuvent pas avoir menti réduit les hypothèses sur deux personnes, la recherche du coupable exige des hypothèses sur chaque personnage : soit en le considérant comme celui qui ment, soit en le considérant comme le coupable. Par exemple, dans ce dernier cas : si André était le coupable toutes les affirmations seraient vraies, si c'était Bruno, il y aurait deux affirmations fausses (celles d'André et Bruno), si c'était Claude, il n'y aurait qu'une affirmation fausse (celle de Bruno) si c'était David, il y aurait deux affirmations fausses (celles de Claude et de David).

Attribution des points

4 Réponse correcte (Claude) avec des explications claires et complètes (l'affirmation fausse est découverte et toutes les déductions et essais nécessaires sont présents)

3 Réponse correcte avec une description du raisonnement incomplète (toutes les hypothèses ne sont pas vérifiées)

2 Réponse correcte avec une explication contenant des erreurs de raisonnement (par exemple confusion entre faux ou vrai pour une affirmation)

ou réponse qui ne détermine que le menteur (Bruno) et non le coupable

1 Début de raisonnement correct, mais non abouti (par exemple réponse « André » qui ne tient pas compte de la donnée « un seul d'entre eux a menti ».

ou réponse correcte (Claude) sans aucune explication

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : Parma, d'après *Le tableau volé* (12.I.12)

14. LE GRILLON SAUTEUR (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le grillon Verdino a obtenu la médaille d'or cette année aux Olympiades dans l'épreuve du saut en hauteur.

Au début de l'épreuve, la barre a été placée à une certaine hauteur puis elle a été montée progressivement.

La première fois la barre a été montée de la moitié de la hauteur initiale; la deuxième fois d'un tiers de la hauteur du saut précédent; la troisième fois d'un quart de la hauteur du saut précédent, et ainsi de suite.

Verdino a sauté 7 fois.

Verdino a passé chaque fois la barre au premier essai et il a été le seul à la passer, lors de son 7e saut, alors qu'elle était placée à 60 cm de hauteur.

C'est ainsi qu'il a gagné sa médaille d'or.

À quelle hauteur la barre a-t-elle été placée au début de l'épreuve ?

Montrez comment vous avez trouvé votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer le premier terme d'une succession de 7 termes dont on connaît le dernier, dans laquelle, à partir du deuxième, un terme vaut respectivement 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5 ; … de plus que le terme précédent.

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de l'élévation de la barre : après chaque saut elle est montée respectivement d'un demi, d'un tiers, d'un quart, … de la hauteur de la barre précédente.
- Se rendre compte, après 7 sauts, le grillon a passé la barre à 60 cm de hauteur et qu'on est en présence d'une suite de sept hauteurs dont on ne connaît que la dernière (60) et les règles de passage de l'une à l'autre.
- Trois procédures sont à envisager : par essais successifs à partir de valeurs hypothétiques de la barre initiale ; analyse de la situation au moyen d'un dessin qui met en évidence les différentes hauteurs de la barre ; partir de 60 et remonter dans le temps, étape par étape.
- Procéder par essais en faisant une hypothèse sur la hauteur du premier saut. Par exemple 10 et procéder selon les indications : ajouter à 10 la moitié de 10 (5), ce qui donne 15 ; ajouter à 15 le tiers de 15 (5), ce qui donne 20 ; etc. pour arriver à 40 après le septième saut. On arrive ainsi à une hauteur inférieure à 60, mais on peut se rendre compte que l'augmentation d'un saut à l'autre ne change pas (5). Puisque 40 est inférieur à 60, continuer les essais en choisissant un nombre de départ supérieur à 10 (avec 20 on arrive à 80, avec 14 et 16 on arrive è 56 et 64 …) l'essai avec 15 aboutit à 60.

Ou, avec une représentation graphique, de préférence sur papier quadrillé, on met en évidence l'égalité des augmentations de 1/2, 1/3 …1/7, qui valent aussi la moitié de la hauteur de la barre d'origine et montrent que la hauteur finale correspond à 8 fois la moitié de la hauteur du saut initial. Donc en divisant la hauteur finale par 8 on trouve la moitié de la hauteur du saut initial : 7,5. Conclure que la barre a été placée à 15 cm (=7,5×2) au début de la compétition.

Ou, partir de 60, qui est 1/7 de plus que les 7/7 de la hauteur précédente, c'est-à-dire 8/7, calculer la valeur de 1/7 (60 : 8 = 7,5) et de 7/7 (7 × 7,5 = 52,5) qui est la hauteur de la sixième barre, et ainsi de suite pour arriver successivement à 45 ; 37,5 ; 30 ; 22,5 et aboutir à 15.

Ou, par voie algébrique, en désignant par x la hauteur du premier saut, les hauteurs des sept sauts sont :

$\boldsymbol{x}$; $x + 1/2\,x = \mathbf{3/2}\,\boldsymbol{x}$; $3/2\,x + 1/3 \bullet 3/2\,x = \mathbf{2}\boldsymbol{x}$; $2x + 1/4 \bullet 2\,x = \mathbf{5/2}\,\boldsymbol{x}$; $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$; $\mathbf{7/2}\boldsymbol{x}$ et $\mathbf{4}\boldsymbol{x} = 60 \Rightarrow x = 15$

Attribution des points

4 Réponse correcte (15 cm) avec explications claires et complètes (essais explicites avec le détail des calculs, dessin ou progression arithmétique dont la raison est la demi hauteur primitive, ou pose d'une équation et sa résolution)

3 Réponse correcte (15 cm) avec explications peu claires ou incomplètes (dessin approximatif, un seul essai non détaillé, ou procédure algébrique où il manque quelques passages, …)

ou réponse correcte avec seulement une vérification (sans mentionner d'essais, seulement avec la liste des sept hauteurs)

ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul, avec explications claires et complètes, comme pour « 4 points ».

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse erronée due à une ou deux erreurs de calcul avec explications peu claires ou incomplètes

1 Début de recherche cohérente (hauteurs de quelques barres ou quelques essais qui montrent la compréhension de la situation …)

0 Incompréhension du problème

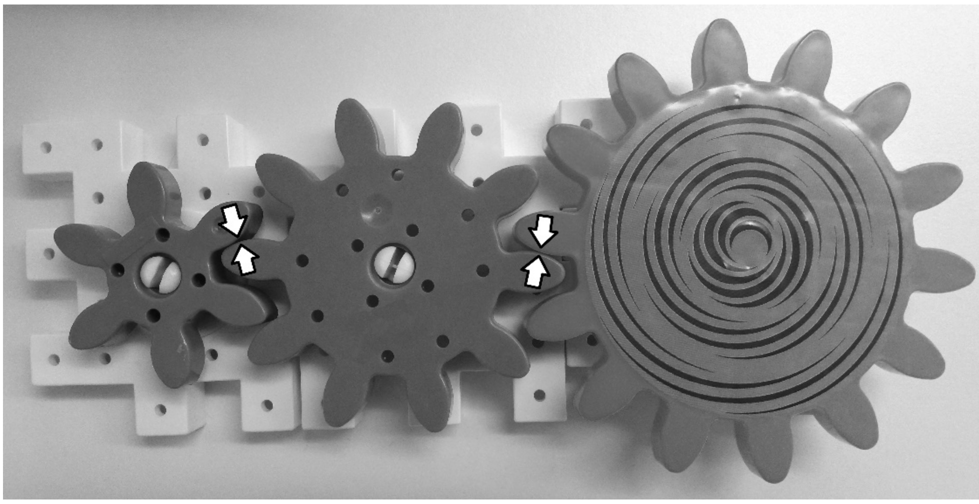
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Groupe Numération

15. ROUES DENTÉES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marcel a un jeu de construction avec des roues dentées. Il expérimente le montage de trois roues : une petite, une moyenne et une grande.

Au début de son expérience, il marque quatre dents de ces roues avec une flèche (voir figure).



Ensuite, il commence à tourner la roue dentée moyenne.

De combien de tours au minimum Marcel doit-il tourner la roue dentée moyenne pour que les paires de flèches soient à nouveau réunies comme sur la figure ci-dessus ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir d'une photo d'engrenages, déterminer les données numériques à mettre en relation et les utiliser pour trouver le nombre de tours de l'une pour que les trois roues se retrouvent dans la position de départ.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le dessin présenté fournit les informations nécessaires pour résoudre le problème.
- Comprendre que si les roues ont des nombres de dents différents, le nombre de tours est différent de l'une à l'autre.
- Observer les trois roues et compter les nombres de dents de chacune
- Considérer le nombre de tours de chaque roue sans le confondre avec le nombre de dents.
- Imaginer un tour de la roue du milieu (10 dents), la petite (6 dents) fera un tour et 4 dents, la grande (14 dents) n'aura pas fait un tour mais il manquera encore 4 dents pour se trouver dans la position de départ.

  Poursuivre en imaginant deux tours de la roue du milieu (20 dents) et contrôler la position des deux autres : la petite aura fait trois tours et deux dents, la grande un tour et six dents au-delà de la position de départ. Quand la roue du milieu aura fait trois tours (30 dents), la petite aura fait 5 tours et sera dans la position du départ mais pas la grande qui aura fait deux tours et deux dents.

  On peut procéder de manière analogue soit par un dessin soit en utilisant les divisions successives (le reste représentant les dents qui vont au-delà des tours complets).

Ou, après avoir fait différentes « expérimentations » imaginaires des rotations des roues, se rendre compte qu'on peut passer au cadre numérique et faire appel aux multiples communs des nombres 6, 10 et 14, pour trouver que le plus petit d'entre eux est 210, correspondant aux nombres de tours respectifs de la plus grande à la plus petite roue : 15, 21, et 35.

Ou, pour surmonter la difficulté de tenir sous contrôle le mouvement des trois roues simultanément, on peut décomposer le problème : travailler sur la roue du milieu et la petite (3 tours de la roue du milieu ramènent à la position de départ) et puis sur la roue du milieu et la grande (7 tours de la roue du milieu ramènent les flèches en face l'une de l'autre, et 7 tours = 70 dents, 10 tours de la roue du milieu correspondent à 5 tours de la grande).

Il reste à ce moment la nécessité de considérer le plus petit multiple commun de 3 et 7 pour trouver que la situation de départ se retrouve après 21 tours de la roue du milieu.

Attribution des points

4 Réponse correcte (21 tours) avec des explications claires et complètes (toutes les étapes permettant d'arriver à la solution sont présentes et cohérentes, si le procédé par ppmc est utilisé, il est expliqué)

3 Réponse correcte (21 tours) avec des explications partielles (les étapes ne sont pas complètes ou toutes cohérentes, l'utilisation du ppmc n'est pas explicite)
ou réponse « 35 tours » pour la petite roue avec des explications complètes
ou réponse « 15 tours » pour la grande roue avec des explications complètes
ou réponse erronée due à une seule erreur de comptage ou de calcul avec des explications complètes

2 Réponse correcte (21 tours) sans explication ni justification
ou réponse erronée due à plusieurs erreurs de comptage ou de calcul avec des explications complètes
ou réponse du type « multiple de 21 » (aussi 210, confusions entre nombre de tours et de dents) avec explications

1 Début de recherche cohérente

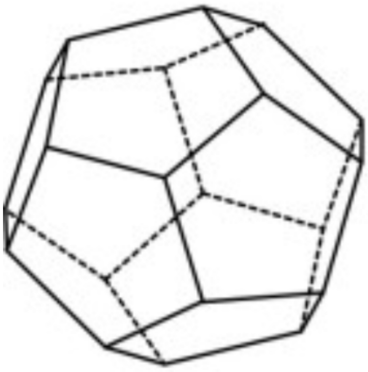
0 Incompréhension du problème

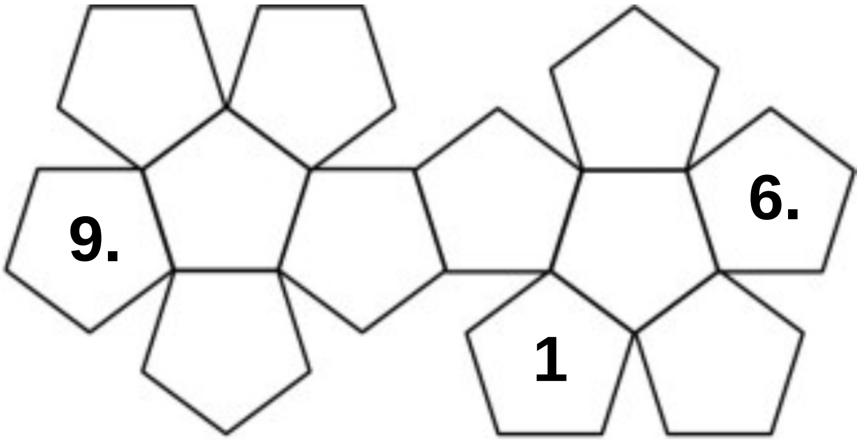
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Luxembourg

16. DODÉCAÈDRE (Cat 8, 9, 10)

Voici un dodécaèdre en perspective et son développement (patron) :





On a écrit les nombres 1, 6 et 9 sur trois des faces du développement.

Sur les neuf autres faces du développement, placez les nombres 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11 et 12 de manière que, lorsque l'on construit le dodécaèdre :

- la somme des nombres placés sur deux faces opposées soit toujours la même ;
- deux nombres qui se suivent ne se trouvent jamais sur deux faces qui se touchent.

Écrivez les nombres sur chaque face.

Combien de solutions différentes y a-t-il ?

Décrivez-les et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Placer les nombres de 1 à 12 sur les pentagones du développement d'un dodécaèdre de sorte que lorsque le dodécaèdre est construit, la somme des nombres placés sur des faces opposées soit toujours la même et que deux nombres consécutifs ne soient jamais placés sur deux faces adjacentes.

Analyse de la tâche

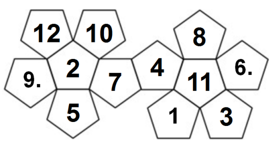
- Déterminer, sur le développement, les faces du dodécaèdre qui sont opposées à 1, 6 et 9, puis les autres paires de faces opposées et aussi les faces qui se touchent.
- Déterminer, que la somme de deux faces opposées est 13, et que : 1 et 12 ; 2 et 11 ; 3 et 10 ; 4 et 9, 5 et 8 ; 6 et 7 sont opposées et marquer les faces 12, 4 et 7 déjà désignées, comme opposées aux faces 1, 9 et 6.
- S'apercevoir que pour les trois paires de faces restantes, il y a plusieurs possibilités qui respectant la deuxième contrainte sur les faces adjacentes.
- Éliminer les nombres à exclure pour les faces déjà notées et procéder par essais et vérifications.

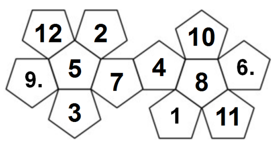
  Par exemple à droite du 9 et du 12, ne peuvent être essayés que les nombres 2, 3, 5 (8, 10 et 11 étant éliminés comme voisins) qui correspondraient aux placements respectifs de 11, 10, et 8 sur la face à droite du 4.

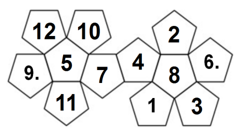
  En essayant 2 (et 11), il n'y a plus qu'une place pour 3, au-dessous de 11 et 6 et une seule pour 5 (sous le 2).

  En essayant 3, on arrive à une impasse.

  En essayant 5, on trouve deux dispositions.







- Vérifier que les solutions trouvées respectent tous les critères et sont bien différentes.

Attribution des points

4 Les 3 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée ni doublons avec des explications claires de la procédure suivie (somme 13, placement de 12, 7 et 4, mention des essais, reconnaissance de l'exhaustivité, …)

3 Les 3 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée ni doublons, avec explications très partielles (on a fait des essais, …)

ou 2 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée, avec explications claires

2 Les 3 solutions correctes sont données mais sans aucune explication

ou 2 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée, avec explications très partielles

ou 2 solutions correctes avec explications, mais avec une solution erronée ou un doublon

ou 1 solution correcte, sans solution supplémentaire erronée et avec explications claires

1 1 solution correcte mais sans aucune explication ou avec explications peu claires

ou 1 solution incomplète (au minimum les nombres 4, 7 et 12 sont correctement placés) avec explications très partielles

0 Incompréhension du problème

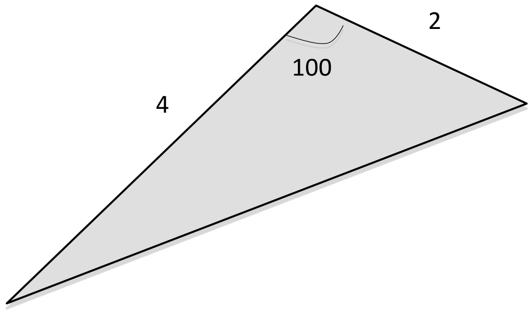
Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Suisse romande

17. VOILES TRIANGULAIRES (Cat. 9, 10)

André et Jacques se sont acheté~~s~~ chacun une voile triangulaire pour leur voilier dont chacune a deux côtés qui mesurent 2 mètres et 4 mètres.

La voile d'André a un angle de 100 degrés :



La voile de Jacques a d'autres angles, mais les deux voiles ont exactement la même aire.

Dessinez la voile de Jacques, et indiquez la mesure de l'angle formé par les côtés de 2 mètres et 4 mètres.

Combien y a-t-il de modèles possibles pour la voile de Jacques ? (différents de la voile d'André)

Justifiez vos réponses.

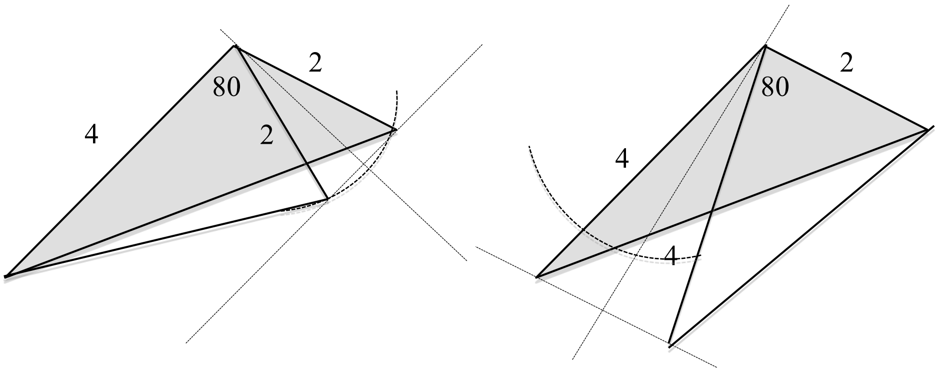
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

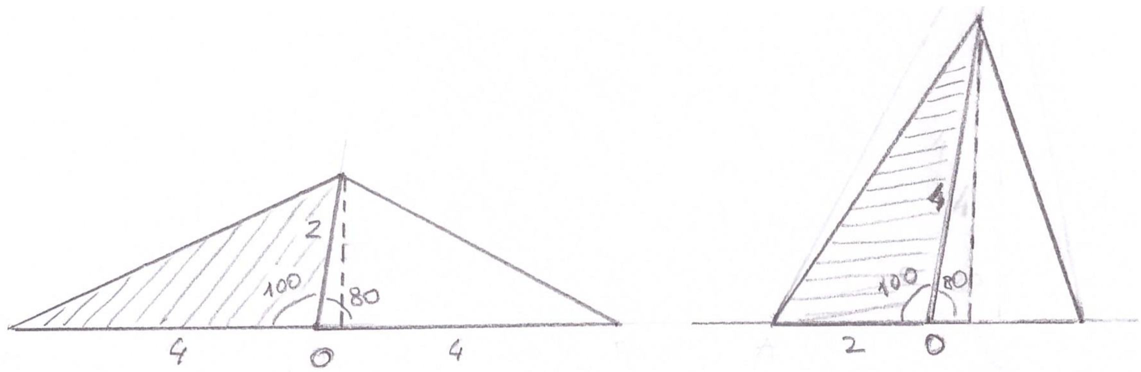
Etant donné un triangle dont deux côtés mesurent 2 m et 4 m (avec l'angle compris entre les deux côtés de 100 degrés), dessiner un triangle différent, de même aire avec deux côtés de 2 m et 4 m, et justifier qu'il est unique.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a toute une famille de triangles dont deux côtés mesurent (en m) 2 et 4, avec des angles différents formés par ces deux côtés (de 0 à 180 degrés), dont les aires varient selon l'angle (de 0 à 4 en m^2)
- Comprendre que le dessin correspond à un choix de l'angle formé par les des deux côtés donnés (100 degrés) et qu'il détermine ainsi l'aire du triangle.
- Choisir l'un des côtés correspondants aux 2 m et 4 m sur la figure pour "base".
- Construire la parallèle à la base choisie (par exemple 4) passant par le sommet opposé et dessiner le nouveau sommet par une symétrie selon un axe perpendiculaire à la base (ou par une rotation). Puisque les deux triangles ont la même base et la même hauteur, ils ont donc la même aire, l'un avec un angle de 100 degrés, l'autre avec un angle de 80 degrés.
- La construction doit alors se répéter en choisissant l'autre base pour s'assurer que le nouveau triangle est le même dans les deux construction (angle de 80 degrés et côtés adjacents de 2 et 4.
- La figure ci-dessous représente les deux constructions : à gauche avec le choix de la « base 4 », à droite avec le choix de la « base 2 »
- En conclure que dans chacun des deux cas, on obtient un nouveau triangle dont l'angle formé par les deux côtés de 2m et 4m mesure 80 degrés et que (en vertu d'un des cas d'égalité des triangles), les deux constructions aboutissent au même triangle, c'est à dire qu'il n'y a qu'un modèle possible pour la voile de Jacques.



Ou, par une construction de ce type où l'on précise que les deux nouveaux triangles sont égaux : deux côtés de 2 et 4 m et l'angle compris de 80 degrés.



Ou, calculer une approximation de l'aire du triangle par mesures sur le dessin d'un de ses côtés et de sa hauteur correspondante, puis recherche d'autres triangles de même aire par essais successifs, en modifiant l'angle, …

Attribution des points

4 Dessin correct du triangle aux trois angles aigus (dont un de 80 degrés) avec explications qui mentionnent que la hauteur a été conservée, que par conséquent l'aire est aussi conservée, avec les deux constructions (l'une de base 2 et l'autre de base 4) et la vérification qu'ils sont isométriques (mêmes angles et mêmes côtés)

3 Dessin correct d'un triangle aux trois angles aigus avec explications qui ne mentionne que la conservation de l'aire (sans penser à la construction à partir de l'autre « base », ni justification

ou les deux constructions sont effectuées mais l'égalité des triangles non justifiée

2 Dessin correct d'un triangle aux trois angles aigus, sans explications

1 Ou début de recherche cohérente (mesures prises sur le dessin pour tenter de calculer l'aire du triangle et ses différentes hauteurs, tentatives de construction d'autres triangles de 2 et 4 m de côté dont l'angle compris est différent de 80 degrés ou n'est pas déterminé, …)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma

18. NOMBRES PARTICULIERS (Cat. 9, 10)

Marthe a écrit un nombre entier de trois chiffres. Stéphane efface le chiffre du milieu, le remplace par une virgule et lui dit :

« Regarde bien, maintenant ton nombre a été divisé par 90 ! »

Quel peut être le nombre que Marthe a écrit avant que Stéphane le modifie ?

Donnez toutes les réponses possibles et indiquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les nombres entiers de trois chiffres tels que, en remplaçant le chiffre des dizaines par une virgule, on obtient un résultat qui est la 90e partie du nombre.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : en substituant le chiffre des dizaines d'un nombre naturel de trois chiffres, on obtient un nouveau nombre qui, multiplié par 90 donne le nombre de départ.
- Comprendre que la procédure par essais de division ou de multiplication par 90 est longue et ne va pas permettre de trouver toutes les solutions.
- Remarquer que le nombre obtenu après la substitution a un seul chiffre après la virgule et que, pour revenir au nombre de départ il faut le multiplier par 90, c'est-à-dire par 10 et par 9. Après la multiplication par 10 le nombre décimal deviendra un nombre entier, puis après la multiplication par 9 il deviendra un multiple de 9 – le nombre de départ - dont le chiffre des unités est le même que celui des dixièmes du nombre décimal.
- Constater que le chiffre des unités, devenu dixièmes, ne peut être 0 car, sinon, le nombre substitué serait entier et égal à celui des centaines du nombre d'origine : le produit d'un nombre par 90 ne peut être égal à son produit par 100. Même constatation pour le chiffre des centaines du nombre d'origine qui est un « nombre entier de trois chiffres ».
- Remarquer que 5 est le seul chiffre des unités qui se retrouve dans ses multiples de 9. Par conséquent le dernier chiffre des deux nombres est 5. Il suffit d'essayer avec les dix nombres d'un chiffe des unités et d'un chiffre des dixièmes : 1,5 ; 2,5 ; 3,5 ; … ; 9,5, de les multiplier par 90 et de constater que seuls les quatre premiers essais sont acceptables : 135 ; 225 ; 315 ; 405 les suivants ne remplissent pas les conditions 495 pour 5,5, etc.

Ou, partir de la recherche des nombres de Marthe comme multiples de 90 des nombres de Stéphane, donc des multiples entiers de 9 et limiter les essais aux nombres 108 117 126 **135** (=15×9) ….207 216 **225** (= 25 × 9) … 307 316 **315** (= 35 × 9) … **405** (= 45 × 9) et constater qu'il n'y en a plus après 500. (Lorsque le premier est trouvé, 135, on peut y ajouter 90 successivement pour trouver les autres).

Ou, par voie algébrique, les deux nombres peuvent s'écrire : $100x + 10y + z$ et $x + z/10$. De la condition $(x + z/10) \times 90 = 100x + 10y + z$ on tire $10(x + y) = 8z$, puis $5(x + y) = 4z$, dont l'unique solution est $z = 5$ et $(x + y) = 4$, car z représente un chiffre ($0 \leq z \leq 9$), et les valeurs de x et y (sachant que x ne peut être 0) sont dans l'ordre : 1 et 3; 2 et 2; 3 et 1; 4 et 0. Les nombres que peut avoir écrits Marthe sont donc $100 \times 1+10 \times 3 + 5 = 135$; $100 \times 2 +10 \times 2 + 5 = 225$; $100 \times 3 + 10 \times 1 + 5 = 315$; $100 \times 4 + 10 \times 0 + 5 = 405$.

Cette procédure, comme les précédentes, permet d'assurer l'exhaustivité.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (135; 225; 315; 405) avec explications claires et complètes qui assurent l'exhaustivité (en cas de procédure par essais, il faut vérifier aussi les nombres décimaux dont l'unité est 5, 6, 7, 8 et 9 ou les nombres de trois chiffres supérieurs à 405)

3 Deux ou trois nombres sont trouvés avec explication claire et complète (sans exhaustivité)
ou seulement les nombres de Stéphane (1,5; 2,5; 3,5; 4,5) avec explication et exhaustivité
ou les quatre nombres avec explication incomplète ou peu claire (absence de quelques passages et/ou sans exhaustivité)

2 un seul nombre est trouvé, avec explications ou vérification
ou deux ou trois nombres avec explications incomplètes ou peu claires
ou les quatre nombres de Stéphane sans explications mais avec vérification

1 Un seul nombre correct de Marthe ou Stéphane avec ou sans explications
ou essais cohérents avec l'énoncé mais sans avoir trouvé aucun nombre correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Siena, d'après « *Le nombre de Sophie* » (20.II.8 Cat. 5, 6, 7, 8)

19. LES POTS DE CHOCOLAT (Cat. 9, 10)

Dans une fabrique de boisson au chocolat, deux machines, A et B, remplissent de chocolat fondu des pots tous identiques de forme cylindrique d'une hauteur de 40 cm.

La machine A verse le chocolat au rythme de 1 centimètre par seconde dans des pots qui contiennent déjà 10 cm de lait.

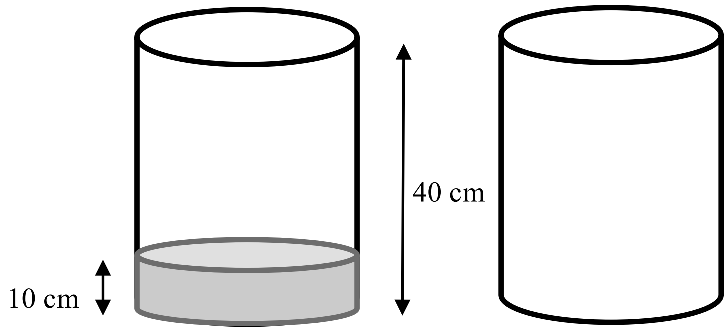
La machine B verse le chocolat dans des pots vides selon un rythme qui s'accélère à chaque seconde.

1 mm durant la première seconde

2 mm durant le deuxième seconde

3 mm durant le troisième seconde

… et ainsi de suite, en augmentant de 1 mm à chaque seconde.



machine A machine B

Si on place deux pots au même moment dans les machines respectives, le niveau du chocolat du pot de la machine B rejoindra-t-il celui de l'autre pot avant que celui-ci ne soit plein ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Confronter les niveaux de liquide dans deux récipients cylindriques connaissant le rythme de remplissage de chacun

Analyse de la tâche

- Calculer le temps nécessaire pour que le niveau du pot de la machine A arrive à une hauteur de 40 cm : il reste donc à remplir une hauteur de 30 cm et, en remplissant 1 cm par seconde, il faudra 30 secondes pour finir de remplir le pot A.
- Calculer la hauteur du niveau de chocolat dans le pot de la machine B après 30 secondes : (1 + 2 + 3 + 4 + … + 30) mm, en effectuant l'addition à la main ou en reconnaissant qu'il s'agit de (31 × 30) / 2 = 465 en mm ou 46,5 cm.

  Conclure qu'en 30 secondes le niveau de chocolat du pot de la machine B dépasserait le niveau de celui de la machine A et que, par conséquent, il rejoindrait le niveau du pot A avant que celui-ci ne soit plein.

Ou, calculer les hauteurs des niveaux de chocolat dans les deux pots en fonction du temps, en s'aidant éventuellement d'un tableau de ce genre :

temps (sec)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…	25	26	27	28	29	30
hauteur A (cm)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…	35	36	37	38	39	40
hauteur B (cm)	0	0,1	0,3	0,6	1	1,5	2,1	2,8	3,6	…	32,5	35,1	37,8	40,6	43,5	46,5

- Conclure que le niveau de chocolat dans le pot de la machine B rejoindra celui du pot de la machine A après environ 27 secondes, c'est-à-dire avant que celui-ci ne soit plein.

Ou : par voie algébriques et/ou graphique déterminer soit le moment où le niveau de 400 mm est atteint dans le pot B soit le moment où les deux pots sont au même niveau :

il faut alors, dans le premier cas la (durée : *t*, en secondes) trouver la formule 1 + 2 + 3 +….+ t = (t+1) × t/2 et résoudre l'équation (t+1) × t/2 = 400. dont la solution est $= \frac{-1\pm\sqrt{1+3200}}{2} \cong 27{,}8$, puis conclure que le niveau de chocolat dans le pot de la machine B arrivera à la hauteur 40 cm (400 mm) avant celui de la machine A (en 30 secondes) ; ou, dans le second cas, exprimer les deux fonctions f(t) = 10 + t ; g(t) = (t+1) × t/20 et résoudre l'équation f(t) = g(t) ; 10 + t = (t+1) × t/20 dont la racine positive est égale à 26,53 s.

Attribution des points

4 Réponse correcte : oui, le niveau de chocolat dans le pot de la machine B rejoindra celui du pot de la machine A avant que les pots soient pleins, avec explications claires et complètes (calcul du temps nécessaire pour arriver à 40 cm dans le pot B ou calcul de la hauteur de chocolat en fonction du temps) ou comparaison graphique ou calcul de l'instant où les deux pots auront la même hauteur de chocolat).

3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires (la somme 1 + 2 + 3 + 4 + … + 30 n'est pas explicitée ou quelques étapes de l'élaboration de l'équation sont omises)

2 Procédure correcte mais avec erreur (de calcul ou de l'élaboration de l'équation ou de sa résolution)
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, mais avec une procédure correcte et bien expliquée

1 Réponse correcte sans explication
ou début de raisonnement correct (le nombre de secondes nécessaire pour remplir le pot de la machine A ou traces de la somme 1 + 2 + 3 + 4 … ou seulement le début d'un tableau pour B)
ou réponse erronée due à deux erreurs de calcul ou plus, avec procédure correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : GTFN (Groupe de travail Fonctions)